

計量で割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体と測地線

上野 龍 (北海道大学)*

概 要

計量で割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体は、像が 2 次超曲面に含まれるアファインはめ込みによって誘導される統計多様体のクラスである。このクラスの統計多様体に対して明らかになったアファイン接続の大域的な性質を紹介する。特に、リーマン幾何学におけるホップ・リノウの定理の統計多様体版として、計量で割り切れる 3 次形式をもつ統計多様体において、アファイン接続の完備性から測地的連結性が導かれることを紹介する。

1 序

統計多様体 (M, ∇, g) とは振率が 0 であるアファイン接続 ∇ が与えられた多様体 M に、 ∇g が全対称となるリーマン計量 g を加えたものである。ここで、 $(0, 3)$ 型テンソル場 $C = \nabla g$ を統計多様体の **3 次形式** と呼び、組 (∇, g) を **統計構造** と呼ぶ。統計多様体はアファイン微分幾何学 [10] や情報幾何学 [1] などで登場する。

統計多様体 (M, ∇, g) に対して、ある関数 $\sigma \in C^\infty(M)$ が存在して以下が成り立つとき、統計多様体の 3 次形式は **計量 g で割り切れる** という：

$$C(X, Y, Z) = d\sigma(X)g(Y, Z) + d\sigma(Y)g(Z, X) + d\sigma(Z)g(X, Y), \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM). \quad (1.1)$$

この概念は [6] で初めて言及されており、例えば、アファインはめ込みによって誘導される統計多様体が計量で割り切れる 3 次形式を持つことは、アファインはめ込みの像が実アファイン空間内のある 2 次超曲面に含まれていることと同値である [10]。さらに近年、このクラスの統計多様体は重み付きリーマン多様体の文脈でも登場している [3, 9]。しかし、野口光宣 [5] 以降、このクラスの統計多様体はほとんど研究されていない。本講演では、計量で割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体について得られた結果を報告する。特に、アファイン接続の大域的な性質について進展が得られた。この講演は [8] に基づく。

2 統計多様体

統計多様体 (M, ∇, g) に対して、次の式により定まる M 上のアファイン接続 $\bar{\nabla}$ を **共役接続** と呼ぶ：

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \bar{\nabla}_X Z), \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

ここで、共役接続 $\bar{\nabla}$ の振率も 0 であり、 $(M, \bar{\nabla}, g)$ もまた統計多様体である。

* e-mail: ueno.ryu.g1@elms.hokudai.ac.jp

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2119 の支援を受けたものです。

統計多様体はアファイン微分幾何学を起源に持つ．中心アファイン微分幾何学の例を紹介する．

例 2.1 ([10]). 実アファイン空間への超曲面はめ込み $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ が, 各 $x \in M$ に対して $\mathbb{R}f(x) \oplus f_*(T_x M) = T_{f(x)}\mathbb{R}^{n+1}$ を満たすとき, f を中心アファインはめ込みと呼ぶ．ここで, ガウスの公式

$$D_X f_* Y = f_* \nabla_X Y - g(X, Y)f, \quad X, Y \in \Gamma(TM)$$

により, 振れがないアファイン接続 ∇ と対称 $(0, 2)$ 型テンソル場 g が M 上に誘導される．ここで, ∇g は全対称である．テンソル場 g が正定値であるとき, f は局所強凸であるといい, このとき (M, ∇, g) は統計多様体である．

定義 2.2. 関数 $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ が次の条件を満たすとき, ρ は多様体 M 上の **コントラスト関数**であるという:

- (1) ρ は $\{(q, q) \mid q \in M\}$ の周りで滑らかである．
- (2) 任意の $p, q \in M$ に対して $\rho(p, q) \geq 0$, 特に $\rho(p, q) = 0$ は $p = q$ と同値である．
- (3) 任意の $p \in M$ と 0 でない $X \in T_p M$ に対して, $(X^L X^R \rho)(p, p) < 0$ である．

ただし, $X^L = (X, 0)$, $X^R = (0, X) \in T_{(p,p)}(M \times M)$ である．

多様体 M 上にコントラスト関数 ρ が与えられたとき, 以下の式によって統計構造 (∇, g) が誘導される:

$$g_p(X, Y) = -(X^L Y^R \rho)(p, p),$$

$$g_p(\nabla_X Y, Z) = -(X^L Y^L Z^R \rho)(p, p).$$

ただし, $p \in M$, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ である．例えば情報幾何学では, 多様体である統計的モデルにおいて, 統計構造がカルバック・ライブラー情報量と呼ばれるコントラスト関数によって誘導される．そして, 任意の統計多様体 (M, ∇, g) に対して, (∇, g) を誘導するコントラスト関数が少なくとも一つは M 上に存在する [4]．しかし, 良い性質を持つコントラスト関数が存在するかは統計多様体の幾何学における重要な研究課題である．

3 アファイン接続と測地線

以後, 多様体 M は連結であるとする．

定義 3.1. 多様体 M にアファイン接続 ∇ が与えられているとする．次式を満たす M 上の滑らかな曲線 $\gamma: I \rightarrow M$ を ∇ -**測地線**と呼ぶ:

$$(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})(t) = 0, \quad t \in I.$$

ここで, $\dot{\gamma}$ は曲線 γ の速度ベクトルである．任意の $(p, v) \in TM$ に対して $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ を満たす ∇ -測地線 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ が存在するとき, ∇ は**完備**であるという．

定義 3.2. アファイン接続 ∇ が測地的連結であるとは、多様体上の任意の 2 点が ∇ -測地線で結べることをいう。

リーマン幾何学においては、ホップ・リノウの定理によりレヴィ=チヴィタ接続は完備であれば測地的連結である。しかしこの定理は、一般のアファイン接続に対しては成り立たない。例えば、擬リーマン多様体であるド・ジッター空間のレヴィ=チヴィタ接続は完備だが測地的連結ではなく、統計多様体のアファイン接続でも反例が存在する [8]。

4 計量で割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体

統計多様体 (M, ∇, g) の 3 次形式 $C = \nabla g$ に対して、ある関数 $\sigma \in C^\infty(M)$ があって式 (1.1) が成り立つとき、3 次形式 C は計量 g で割り切れるという。このとき、3 次形式を $C = \text{sym}(d\sigma \otimes g)$ と表す。例えば、像が 2 次超曲面に含まれるアファインはめ込みによって誘導される統計構造は、計量によって割り切れる 3 次形式を持つ。また、統計多様体 (M, ∇, g) に対して $C = \text{sym}(d\sigma \otimes g)$ であるとき、共役接続 $\bar{\nabla}$ に対して $\bar{\nabla}g = \text{sym}(-d\sigma \otimes g)$ が成り立つため、統計多様体 $(M, \bar{\nabla}, g)$ も計量 g で割り切れる 3 次形式をもつ。

計量で割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体には等積構造が与えられる。

命題 4.1 ([8]). 次元が n の統計多様体 (M^n, ∇, g) が 3 次形式 $C = \text{sym}(d\sigma \otimes g)$ を持つとする。多様体 M 上の体積要素 $\theta = \exp(-\frac{n+2}{2}\sigma)\omega_g$ は $\nabla\theta = 0$ を満たす。ただし、 ω_g はリーマン計量 g による体積要素である。

さらに、もう一つリーマン計量が与えられる。

命題 4.2 ([8]). 統計多様体 (M, ∇, g) が 3 次形式 $C = \text{sym}(d\sigma \otimes g)$ を持つとき、多様体 M 上のリーマン計量 $\tilde{g} = \exp(\sigma)g$ のレヴィ=チヴィタ接続 $\nabla^{\tilde{g}}$ と ∇ は次の関係を持つ：

$$\nabla_X^{\tilde{g}} Y = \nabla_X Y + d\sigma(X)Y + d\sigma(Y)X, \quad X, Y \in \Gamma(TM). \quad (4.1)$$

関係式 (4.1) を満たす 2 つのアファイン接続は射影的に同値であるという。特に、アファイン接続に対して局所的に、アファイン接続と射影的に同値である平坦接続が存在するとき、アファイン接続は射影的に平坦であるという。

命題 4.3 ([8]). 統計多様体 (M, ∇, g) が 3 次形式 $C = \text{sym}(d\sigma \otimes g)$ を持つとする。アファイン接続 ∇ が射影的に平坦であることと、 $(M, \tilde{g} = \exp(\sigma)g)$ が定曲率リーマン多様体であることは同値である。

また、2 つのアファイン接続が射影的に同値であるとき、一方のアファイン接続の測地線に適当なパラメータ変換を行えばもう一方のアファイン接続の測地線が得られる。従って、命題 4.2 において ∇ と $\nabla^{\tilde{g}}$ の測地的連結性は同値である。

定理 4.4 ([8]). 統計多様体 (M, ∇, g) が 3 次形式 $C = \text{sym}(d\sigma \otimes g)$ を持ち、関数 σ は M 上で下に有界であるとする。このとき、以下が成り立つ：

- (1) ∇ が完備であるとき、 ∇ は測地的連結である。
- (2) ∇^g が完備であるとき、 ∇ は測地的連結である。

5 計量で割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体上のコントラスト関数

統計多様体 (M, ∇, g) は 3 次形式 $C = \text{sym}(d\sigma \otimes g)$ を持つとする。統計多様体 (M, ∇, g) には良い性質をもつコントラスト関数が誘導される。

命題 5.1 ([8]). リーマン計量 $\tilde{g} = \exp(\sigma)g$ による M 上の距離関数を $\tilde{d}$ とする。このとき、次で定める関数 ρ は統計構造 (∇, g) を誘導するコントラスト関数である：

$$\rho(p, q) = \exp(-\sigma(p))(\tilde{d}(p, q))^2, \quad p, q \in M. \quad (5.1)$$

このコントラスト関数を用いることで、アファイン接続の完備性を特徴付けすることができる。

定義 5.2. 多様体 M とコントラスト関数 ρ の組 (M, ρ) が劣位集合の意味で完備であるとは、ある $p \in M$ が存在して任意の $L > 0$ に対して閉集合 $C_L(p) = \{q \in M \mid \rho(p, q) \leq L\}$ がコンパクトになることである。

定理 5.3 ([8]). 統計多様体 (M, ∇, g) が 3 次形式 $C = \text{sym}(d\sigma \otimes g)$ を持つとし、コントラスト関数 ρ を式 (5.1) によって定める。このとき、以下が成り立つ：

- (1) ∇ が完備であり、 σ が下に有界であるとき、 (M, ρ) は劣位集合の意味で完備である。
- (2) (M, ρ) が劣位集合の意味で完備であり、 σ が上に有界であるとき、アファイン接続 ∇ は完備である。
- (3) (M, ρ) が劣位集合の意味で完備であり、 σ が下に有界であるとき、共役接続 $\bar{\nabla}$ は完備である。

従って、コンパクトな統計多様体 (M, ∇, g) が g で割り切れる 3 次形式を持つとき、アファイン接続 ∇ と共役接続 $\bar{\nabla}$ は共に完備かつ測地的連結である。(注意：コンパクト多様体上でも、一般にアファイン接続は完備とは限らず、また完備であっても測地的連結ではない例が存在する [2, 7].)

例 5.4. アファインはめ込み $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ において、 M がコンパクトかつ $f(M)$ が楕円面であるとする。このとき、 f によって誘導される統計構造 (∇, g) は g で割り切れる 3 次形式を持つ。従って、アファイン接続 ∇ と共役接続 $\bar{\nabla}$ に対して、定理 5.3 により $\nabla, \bar{\nabla}$ は共に完備であり、定理 4.4 により $\nabla, \bar{\nabla}$ は共に測地的連結である。

参考文献

- [1] S. Amari and H. Nagaoka, Differential Geometry of Smooth Families of Probability Distributions. Technical Report METR 82-7, University of Tokyo (1982)
- [2] L. Bates, You can't get there from here, Differential Geom. Appl. **8**(3), 273-274 (1998)
- [3] J. Li and C. Xia, An Integral Formula for Affine Connections, J. Geom. Anal. **27**(1), 2539-2556 (2017)
- [4] T. Matumoto, Any statistical manifold has a contrast function—on the C^3 -functions taking the minimum at the diagonal of the product manifold, Hiroshima Math. **23**(2), 327-332 (1993)
- [5] M. Noguchi, Geometry of statistical manifolds, Differential Geom. Appl. **2**(3), 197-222 (1992)
- [6] K. Nomizu, U. Pinkall, Cubic form theorem for affine immersions, Results Math. **13**(3-4), 338-362 (1988)
- [7] B. Opozda, Completeness in affine and statistical geometry, Ann. Global Anal. Geom., **59**(3), 367-383 (2021)
- [8] R. Ueno, Geodesic Connectedness on Statistical Manifolds with Divisible Cubic Forms, arXiv:2503.10024 (2025)
- [9] D. Yeroshkin, Holonomy of Manifolds with Density, arXiv:2009.08733 (2020)
- [10] 野水克己, 佐々木武, アファイン微分幾何学. 裳華房 (1994)