

正方形杭問題とシンプレクティック幾何/層理論

浅野 知紘 (京都大学)*

概 要

本稿では正方形杭問題とシンプレクティック幾何との関連を概観し, 最近の超局所層理論からの進展, 特に講演者と池祐一氏による共同研究の成果 [AI25] について概説・報告する.

1 正方形杭問題

正方形杭問題 ^{*1} とは,

問題 1.1 (正方形杭問題). ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 内のジョルダン曲線 ^{*2} が任意に与えられたとき, その上の相異なる 4 点であって正方形の 4 頂点をなすものが存在するか?

という問題である. この問題は Toeplitz によって 1911 年に提起されたが, 今日においても未解決である.

初期の重要な結果として, 1929 年に Schnirelmann が滑らかな曲線に対して同境理論を用いて証明している. 正方形杭問題に関する歴史や文献については, 例えば [Mat14] を参照されたい.

本講演では正方形杭問題の長方形への一般化について考える. $[abcd]$ で頂点がこの順に反時計回りに四角形を表すことにする ^{*3}. $\theta \in (0, \pi)$ が与えられたとき, 長方形 $[abcd]$ であって, 対角線 ac と対角線 bd の交点を e としたとき対角線のなす角度 $\angle aeb$ が θ となっているものを θ -長方形と呼ぶことにする.

問題 1.2 (長方形杭問題). ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 内のジョルダン曲線と角度のパラメータ $\theta \in (0, \pi)$ が任意に与えられたとき, その上の相異なる 4 点であって θ -長方形の 4 頂点をなすものが存在するか?

注意 1.3. $\frac{\pi}{2}$ -長方形は正方形に他ならない. また, $[abcd]$ が θ -長方形であることと, $[bcda]$ が $(\pi - \theta)$ -長方形であることは同値である.

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 大学院理学研究科

e-mail: [tasano\[at\]math.kyoto-u.ac.jp](mailto:tasano[at]math.kyoto-u.ac.jp)

本研究は科研費 (課題番号:24K16920) の助成を受けたものである。

キーワード: 正方形杭問題, シンプレクティック幾何, 超局所層理論

^{*1} 英語圏では “square peg problem” もしくは “inscribed square problem” と呼ばれる. 日本語では後者の直訳で内接正方形問題と呼ばれることも多い. しかし, 内接という語が連想させる状態がこの問題の状況を必ずしも反映しないので, ここでは前者の直訳として, 正方形杭問題という訳語をあてることにした.

^{*2} 連続単射 $c: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の像

^{*3} ここでは, 頂点の順序が異なる四角形, 例えば $[abcd]$ と $[bcda]$, は区別する.

1977 年ごろの Vaughan による議論で、任意のジョルダン曲線上に少なくとも一組、長方形の 4 頂点をなす点たちをとれることが「向き付け不可能な閉曲面は 3 次元ユークリッド空間へ埋め込めない」といった基本的な事実の帰結として証明された。

2 Greene と Lobb の先行研究

Greene と Lobb は [GL21] において、長方形杭問題にシンプレクティック幾何が有効に見えることを見出し、この問題を滑らかなジョルダン曲線に対して肯定的に解決した。ここでは [GL23; GL24] の議論に従いながら、彼らによる先行研究について触れる。

2.1 トーラスの埋め込み

まず、 C 上の θ -長方形を見つける問題を別の問題に帰着しよう。以下、平面 $\mathbb{R}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する。4 つの相異なる複素数 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ に対して、四角形 $[abcd]$ が θ -長方形をなすことは

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(b+d) \\ c-a = e^{-\sqrt{-1}\theta}(d-b) \end{cases}$$

と同値である。ここで、 $R_\theta: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

で表現される線形写像とすると、上記の条件は $R_\theta \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と書き直すことができる。

$z \in \mathbb{C}$ と $\theta \in (0, \pi)$ に対して、 $R_\theta \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix}$ であるから、 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ の対角線 $\Delta_{\mathbb{C}}$ 上で R_θ は恒等写像であり、 $\Delta_{\mathbb{C}}$ は退化した (4 点が等しい) 長方形に対応する。したがって、Jordan 閉曲線 $C \subset \mathbb{C}$ と $\theta \in (0, \pi)$ が与えられたとき、 θ -長方形の存在を示す問題は、共通部分から $C \times C$ の対角線 Δ_C を除いた集合について $(C \times C) \cap R_\theta(C \times C) \setminus \Delta_C \neq \emptyset$ を示す問題に言い換えられる。

2.2 正方形杭問題とシンプレクティック幾何

多様体 M に対して、その余接束 T^*M はシンプレクティック多様体と呼ばれる構造を持つ。 M の局所座標を $(x_1, \dots, x_n)$ として対応する余接座標を $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ とすれば、 $\omega_{T^*M} := \sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge dx_i$ は貼りあって T^*M 上の非退化閉 2 次形式を定める。一般に $2n$ 次元多様体 N とその上の非退化閉 2 次形式 ω の組 (N, ω) をシンプレクティック多様体と呼ぶ。 $2n$ 次元シンプレクティック多様体 (N, ω) が与えられたとき、その部分多様体 L がラグランジュ部分多様体であるとは、 $\dim L = n$ かつ $i_L^* \omega = 0$ となることをいう。ここで $i_L: L \rightarrow N$ は埋め込み写像である。 N 上に時間変化する C^∞ 級関数 $H = (H_s)_{s \in [0,1]}: N \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき、時間変化するベクトル場

$X^H = (X_s^H)_{s \in [0,1]}$ が $\omega(X_s^H, -) = -dH_s^{*4}$ によって定まる. X^H の積分によって定まるアイソトピーをハミルトニアニアイソトピーといい, 時刻を固定したときに得られる N の微分同相をハミルトン微分同相という. ハミルトン微分同相 φ は $\varphi^*\omega = \omega$ を満たす微分同相写像 (シンプレクティック微分同相) になる.

ここでは $\mathbb{C} \simeq T^*\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ の余接束と同一視して, 上のやり方でシンプレクティック多様体とみなす. ジョルダン曲線 C が滑らかであると仮定する. このとき, C は $T^*\mathbb{R}$ のラグランジュ部分多様体である. 一般にラグランジュ部分多様体の直積はまたラグランジュ部分多様体となるので, $C \times C$ は $T^*\mathbb{R}^2$ のラグランジュ部分多様体となる. さらに, $(R_\theta)_\theta$ は (時間変化しない) 関数 $H(z_1, z_2) = \frac{1}{4}|z_1 - z_2|^2$ によって^{*5} 定義されるハミルトニアニアイソトピーなので, 各 θ に対して $R_\theta(C \times C)$ もラグランジュ部分多様体となる. したがって, $(C \times C) \cap R_\theta(C \times C)$ はふたつのラグランジュ部分多様体の交差となる.

次に, Δ_C の部分でラグランジュはめ込みとしての構造は保つように手術を行う. もし $(C \times C) \cap R_\theta(C \times C) \setminus \Delta_C \neq \emptyset$ ならば, 手術後のラグランジュはめ込みはラグランジュ埋め込み (部分多様体) となる. このラグランジュはめ込みのマスロス数と呼ばれる不変量を計算すると 4 になるのだが, Polterovich と Viterbo のそれぞれ独立な 1990 年ごろの結果から $\mathbb{C}^2$ 内のラグランジュ部分トーラスのマスロフ数は 2 でなくてはならないので, これは埋め込みになりえない.

その後 [GL24] において $C \times C$ と $R_\theta(C \times C)$ のラグランジュ交差フレアーコホモロジーであって, 対角線 Δ_C の寄与を排除したバージョンが構成された. 彼らはこれに付随したスペクトル不変量の解析・評価を行うことで, 直径とそれが囲う領域の面積についての条件をみたす長さ有限^{*6} のジョルダン曲線に対して長方形杭問題を肯定的に解決した.

3 超局所層理論

層は局所と大域をつなぐ概念であり, 幾何学やそれ以外の分野で広い領域で有効に活用されている. そして, 超局所層理論は層の超局所的な性質を調べる分野である. ここで超局所とは「方向込みの局所性」・「余接束における局所性」を意味する. この理論は Kashiwara–Schapira によって 1980 年代から 1990 年頃に確立・整備されたが, その後 2006 年から 08 年頃の Nadler–Zaslow と Tamarkin の先駆的な仕事を皮切りにシンプレクティック幾何への応用が活発になった.

ここでは, 超局所層理論とそのシンプレクティック幾何への応用において重要な概念を紹介したい.

^{*4} 文献によって符号が異なるので注意されたい.

^{*5} ここでは $T^*\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}^2$ の同一視のもと, $\mathbb{C}^2$ の座標で記述している.

^{*6} 折れ線近似の制度を良くしていくにしたがって, その長さがある有限の値に収束することをいう. 求長可能 (rectifiable) とも呼ばれる.

3.1 層について

ここではまずはベクトル空間に値をとる層の定義を見てみよう．その前にいくつか記法などを確認しておく．

- 位相空間 X に対し、その開集合全体の集合を $\text{Open}(X)$ とかく．包含によって半順序集合の構造をもち、圏とみなせる．この圏のことも $\text{Open}(X)$ とかく．
- 圏 $\mathcal{C}$ に対し、その反対圏を $\mathcal{C}^{\text{op}}$ とかく．
- 以下、係数体 $\mathbf{k}$ を固定する． $\text{Vect}_{\mathbf{k}}$ で $\mathbf{k}$ 上のベクトル空間と線形写像のなす圏とする．

定義 3.1. 前層とは関手 $F: \text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbf{k}}$ のことである．また前層の間の射とは、関手としての自然変換のことである．

定義 3.2. 前層 F は次の条件 (降下 (descent) 条件) をみたすとき層とよばれる．任意の開集合 $U \subset X$ と U の開被覆 $(U_{\alpha})_{\alpha \in I}$ について、

$$F(U) \rightarrow \prod_{\alpha \in I} F(U_{\alpha}) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta \in I} F(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$$

がイコライザ図式になることである．ここで右側の 2 つの射は $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \subset U_{\alpha}$ が誘導する射および $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \subset U_{\beta}$ が誘導する射である．また、層の射とは、前層としての射のことをいう．

これまで、ベクトル空間に値をとる層について述べたが、より一般に上述のような降下条件を定式化できる圏の対象たちは層の値として使うことができる．ここでは層の値として主にベクトル空間の複体の圏を用いる．複体間の射の間には自然にホモトピーの概念があるが、これを尊重した前層や層^{*7}の定義が可能である． X 上の $\mathbf{k}$ 上のベクトル空間の複体に値をとる層たちのなす圏^{*8}を $\text{Sh}(X)$ とかく．また、係数を別の圏 $\mathcal{C}$ に取り換えた場合は $\text{Sh}(X; \mathcal{C})$ などと書くことにする．

また、 $\text{Sh}(X)$ は閉な対称モノイダル構造 $\otimes$ をもち、対応する内部 Hom 関手を $\mathcal{H}om(-, -)$ とかく．さらに、 $f: X \rightarrow Y$ が局所コンパクトハウスドルフ空間の間の連続写像のとき、関手 $f_*, f_!: \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Sh}(Y)$, $f^*, f^!: \text{Sh}(Y) \rightarrow \text{Sh}(X)$ が定義され、随伴 $f^* \dashv f_*$ と $f_! \dashv f^!$ が成立する．これらは 6 つの関手とそれら間の自然変換などのなす枠組みは six-functor formalism とよばれる．

3.2 層のマイクロ台と μhom

X を可微分多様体として、 $F \in \text{Sh}(X)$ に対しマイクロ台とよばれる閉集合 $\text{SS}(F) \subset T^*X$ が定義される．

^{*7} この意味での層は homotopy sheaf とか ∞ -sheaf と呼ばれることも多いが、ここでは単に層とよぶ．

^{*8} 正確には無限圏である．

定義 3.3. 任意の開集合 $U \subset T^*X$ について, $SS(F) \cap U = \emptyset$ であることと次の条件が同値になるように閉集合 $SS(F) \subset T^*X$ が定義される.

$x_0 \in X$ と C^∞ 級関数 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ であって $d\varphi(x_0) \in U$ を満たす任意の組に対し, $V = \{x \in X \mid \varphi(x) < \varphi(x_0)\}$ とし $B_\varepsilon(x_0) \subset X$ を x_0 中心・半径 ε の開球^{*9} とするとき, 制限写像が誘導する

$$\operatorname{colim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(V \cup B_\varepsilon(x_0)) \rightarrow F(V)$$

が擬同型になる.

これは雑に述べれば, V をその境界の x_0 において $d\varphi(x_0)$ が指定する方向にわずかに広げたときに, V 上の関数ら $F(V)$ について (コホモロジーのレベルでの) $d\varphi(x_0)$ 方向への解析接続の存在と一意性の成立を意味する. すなわち, $SS(F)$ はこれが成り立たない方向の全体であり, 層のある種の特異性を表す. 定義から $SS(F)$ は錐状, 即ち T^*X へのスカラー倍による $\mathbb{R}_{>0}$ -作用で保たれることもわかる. また, 次の基本的な性質は証明も容易だが, 重要なので明示しておく.

補題 3.4. 多様体上の層 $F, G, H \in \operatorname{Sh}(X)$ に対して, そのマイクロ台は次を満たす.

- (1) $SS(F[1]) = SS(F)$.
- (2) $F \rightarrow G \rightarrow H$ が $\operatorname{Sh}(X)$ における (コ) ファイバー列のとき, $SS(G) \subset SS(F) \cup SS(H)$.

次の補題は Morse 理論において「値の特異値をまたがずに変化させる場合に劣位集合がホモトピー型を変えない」という主張の対応物である.

補題 3.5 (超局所 Morse の補題). 層 $F \in \operatorname{Sh}(X)$ および C^∞ 級関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ と $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ であって $a < b$ をみたすものが与えられている.

- (i) f は $\operatorname{Supp}(F)$ 上で固有である
- (ii) 任意の $x \in f^{-1}([a, b))$ について, $df(x) \notin SS(F)$

をみたすとき, 制限射 $F(f^{-1}((-\infty, b))) \rightarrow F(f^{-1}((-\infty, a)))$ は擬同型である.

一方, 「特異値をまたぐ」つまり $df(x) \in SS(F)$ なる $x \in f^{-1}([a, b))$ における変化はマイクロ茎 (microstalk) や, それと密接にかかわる μhom とよばれる概念によって記述できる. 「特異値をまたぐ」場合の主張の一つの具体的なバージョンが後述の補題 3.7 である.

^{*9} ここで $B_\varepsilon(x_0)$ の定義においては X に任意にリーマン計量を固定するが, このチョイスは $SS(F)$ の定義に影響しない.

定義 3.6. $F, G \in \text{Sh}(X)$ に対し, $\mu\text{hom}(F, G) \in \text{Sh}(T^*X)$ が

$$\mu\text{hom}(F, G) := \mu_{\Delta_X} \mathcal{H}om(q_2^* F, q_1^! G)$$

によって定義される. ここで, $q_1, q_2: X \times X \rightarrow X$ はそれぞれ射影, $\Delta_X \subset X \times X$ は対角集合, μ_{Δ_X} は超局所化関手である.

超局所化関手は特殊化関手と Fourier–Sato 変換の合成として定義されるが, これらの定義および解説は割愛する. 一般に $\mu\text{hom}(F, G)$ の台はマイクロ台の共通部分 $\text{SS}(F) \cap \text{SS}(G)$ に含まれる. μhom は超局所層理論における非常に重要な概念で, 今回の応用においても大きな役割を果たしている.

3.3 Tamarkin 圏とフィルター付き複体の層

超局所層理論の幾何への応用のための大きな方針の一つに「幾何的な対象によい層を対応させ, その層を解析し, そこから幾何的な帰結を得る」というものがある. 層のマイクロ台は常に錐状であった. 錐状でない対象を層理論で扱うための Tarmakin によるアイディアは多様体 M ではなく $M \times \mathbb{R}_t$ 上の層を考えるというものであった. 写像 ρ を $\rho: \{(x, t; \xi, \tau) \in T^*(M \times \mathbb{R}_t) \mid \tau > 0\} \rightarrow T^*M; (x, t; \xi, \tau) \mapsto (x; \xi/\tau)$ によって定義する. 任意の $A \subset T^*M$ に対し, その逆像 $\rho^{-1}(A)$ は錐状である.

$F \in \text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t)$ に対し, $\text{SS}^\bullet(F) \subset T^*M \times \mathbb{R}_t$ および $\text{MS}(F) \subset T^*M$ を,

$$\text{SS}^\bullet(F) := \text{SS}(F) \cap \{(x, t; \xi, 1)\}, \quad \text{MS}(F) := \overline{\rho(\text{SS}(F) \cap \{(x, t; \xi, 1)\})}$$

として定義する. ただし, ここで $T^*(M \times \mathbb{R}_t)$ の部分集合 $\{(x, t; \xi, 1)\}$ を M の 1-jet の空間 $T^*M \times \mathbb{R}_t$ と同一視している.

ここから少し圏論的な準備を進める. 補題 3.4 より, $\text{SS}(F) \subset \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau \leq 0\}$ を満たす F たちのなす部分圏は安定部分圏になる. そのため, 安定圏としての商

$$\mathcal{T}(T^*M) := \text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) / \{F \in \text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) \mid \text{SS}(F) \subset \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau \leq 0\}\}$$

を定義できる. この圏 $\mathcal{T}(T^*M)$ は Tamarkin 圏とよばれる. $\text{MS}(F), \text{SS}^\bullet(F)$ は F を $\mathcal{T}(T^*M)$ における同型でとりかえても同じ集合になるし, $\mu\text{hom}(F, G)$ を $\{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau > 0\}$ に制限したものは $\mathcal{T}(T^*M)$ における同型で不変である. また商関手 $\text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) \rightarrow \mathcal{T}(T^*M)$ は右随伴と左随伴をもち, どちらも忠実充満である. 右随伴・左随伴どちらもその像は $\{F \in \text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) \mid \text{SS}(F) \subset \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau \geq 0\}\}$ に含まれるので, どちらかの随伴関手を用いて $\mathcal{T}(T^*M)$ を圏 $\{F \in \text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) \mid \text{SS}(F) \subset \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau \geq 0\}\}$ の部分圏とみなすことができる.

M が一点 pt のときの圏 $\mathcal{T}(T^*\text{pt})$ を $\mathcal{T}$ と略記する. 実は, $\mathcal{T}$ はフィルター付き複体の導来圏の部分圏とみなすことができる. 例えば [KSZ23] を参照されたい.

ここで, $p_1, p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_t$ を各成分への射影とし $s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_t$ を $s(t_1, t_2) = t_1 + t_2$ と定める. $\mathcal{T}$ は $F, G \in \mathcal{T}$ に対し $F \star G := s_!(p_1^* F \otimes p_2^* G)$ と定めることで閉な対称モノイ

ダル構造をもつ。また、無限圏としての性質もよく、層の係数として採用した場合にも $\mathcal{T}$ 係数版の six-functor formalism が機能する。そして自然な同一視 $\mathcal{T}(T^*M) \simeq \text{Sh}(M; \mathcal{T})$ が存在する。これによって $\mathcal{T}(T^*M)$ にも閉な対称モノイダル構造が定義できる。さらに $F, G \in \mathcal{T}(T^*M)$ に対し、 $\mathcal{T}$ -値の射の集合 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(F, G) \in \mathcal{T}$ が定義される。これをフィルター付き複体とみなすと $(\text{Hom}(F, T_a G))_{a \in \mathbb{R}}$ が対応する^{*10}。この $a \in \mathbb{R}$ を動かしたときの構造の変化を μhom によって記述するのが次の補題である。

補題 3.7. $F, G \in \mathcal{T}(T^*M)$ とし、 $\text{MS}(F)$ と $\text{MS}(G)$ はコンパクトであると仮定する。このとき、次の (コ) ファイバー列が存在する

$$\text{colim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Hom}(F, T_{a-\varepsilon} G) \rightarrow \text{Hom}(F, T_a G) \rightarrow \mu\text{hom}(F, T_a G)(\{\tau > 0\}).$$

また、コンパクト台ハミルトニアンアイソトピーの時刻 1 での写像 $\varphi: T^*M \rightarrow T^*M$ が与えられたとき、 φ は圏 $\mathcal{T}(T^*M)$ にも作用する。記号の濫用だが、この圏への作用も φ とかく。すると、 $\text{MS}(\varphi F) = \varphi(\text{MS}(F))$ が成立する。

3.4 ラグランジュ部分多様体の層量子化

ラグランジュ部分多様体などのよい集合 $L \subset T^*M$ に対して、 $F_L \in \mathcal{T}(T^*M)$ を $\text{MS}(F_L) = L$ みたす“よい”層^{*11}を構成することは重要な研究課題であり、今日までにいろいろな研究がなされている。この層 F_L は L の層量子化とよばれ、 L の性質をよく反映している。以前はフレアー理論でしかアプローチでなかった種類の問題に、今では層量子化を用いることでも取り組めるようになってきている。また層量子化とフレアー理論や深谷圏との関連も年々明らかになってきている。

例 3.8. C^∞ 級関数 $f \in C^\infty(M)$ の外微分 $df: M \rightarrow T^*M$ の像 Γ_{df} は完全ラグランジュ部分多様体である。ここで閉集合 $Z_f \subset M \times \mathbb{R}_t$ を、 $Z_f := \{(x, t) \mid f(x) + t \geq 0\}$ とおけば、 $\mathbf{k}_{Z_f}$ は Γ_{df} の層量子化である。ただしここで $\mathbf{k}_{Z_f}$ は Z_f 上の階数 1 の定数層を包含写像で押し出して得られる $M \times \mathbb{R}_t$ 上の層である。

コンパクト完全ラグランジュ部分多様体 $L \subset T^*M$ に対して、Guillermou と Viterbo によって独立な構成法が知られている。ここでは Viterbo の方針での層量子化の構成を紹介する。大雑把に言うと「フレアー複体の族 $(CF^*(T_x^*M, L))_{x \in M}$ を束ねる」ことによってなされる。より正確には次の様に実行できる。 $C^\infty(M)$ を各点の値の比較によって半順序集合とみなす。 $f_1 \leq f_2$ の場合、自然な射 $\Gamma_{-df_1} \rightarrow \Gamma_{-df_2}$ が T^*M の深谷圏において存在する。開集合 $U \subset M$ に対し、 $C^\infty(M, U) \subset C^\infty(M)$ で C^∞ 級関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ であって U の閉包のある近傍上で 0 になっている関数の全体とし、これも半順序集合とみなす。

^{*10} $a \in \mathbb{R}$ に対し、 $T_a: \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}_t$ を $T_a(t) := t + a$ で定める。これは $T_{a*}: \text{Sh}(\mathbb{R}_t) \rightarrow \text{Sh}(\mathbb{R}_t)$ は $T_a: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ を誘導する。また今後、記号の濫用だが $T^*(M \times \mathbb{R}_t)$ などの他の空間の t 方向のシフトやそれらが誘導する関手も T_a とかく。

^{*11} “よい”の意味については、ここでは詳しく述べない。

そして $F^{\text{pre}}(U) := \text{colim}_{f \in C^\infty(M, U)} CF^*(\Gamma_{-df}, L)$ と定義する. ただしここで $CF^*(\Gamma_{-df}, L)$ はフィルター付き複体であり, 余極限もフィルター付き複体として取る. $U_1 \subset U_2$ に対し, $C^\infty(M, U_2) \subset C^\infty(M, U_1)$ であるから, 自然に $F_L^{\text{pre}}(U_1) \rightarrow F_L^{\text{pre}}(U_2)$ が定義できる. ここで現れるフィルター付き複体たちは自然に $\mathcal{T}$ の対象とみなすこともできる. これはさらに, F_L^{pre} は M 上のフィルター付き複体の圏もしくは圏 $\mathcal{T}$ に値をとる前層を与える. F_L^{pre} の $x \in M$ での茎 $\text{colim}_{x \in U} F^{\text{pre}}(U)$ は $CF^*(T_x^*M, L)$ と同一視できる. F_L^{pre} の層化^{*12} を F_L とかく. F_L は同一視 $\text{Sh}(M; \mathcal{T}) \simeq \mathcal{T}(T^*M)$ のもと L の層量子化になっている.

3.5 層の間の距離とその完備性

Tamarkin 圏 $\mathcal{T}(T^*M)$ 上に自然にインターリービング距離^{*13} d_I が定まる. ここでは定義は割愛して重要な性質を 2 つ紹介する.

命題 3.9. コンパクト台ハミルトニアンアイソトピーの時刻 1 での写像 $\varphi: T^*M \rightarrow T^*M$ に対して, 不等式 $d_I(F, \varphi F) \leq \|\varphi\|_{\text{Hof}}$ が成り立つ. ここで $\|\varphi\|_{\text{Hof}}$ は, φ を時刻 1 の写像としてもつコンパクト台ハミルトニアンアイソトピーを生成する $H = (H_s)_{s \in [0, 1]}: T^*M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ すべてにわたった下限 $\inf_H \int_0^1 \left(\max_{p \in T^*M} H_s(p) - \min_{p \in T^*M} H_s(p) \right) ds$ によって定義される.

命題 3.10. d_I は完備である. 即ち任意の Cauchy 列に収束先が存在する.

4 主結果と証明の概略

4.1 主結果

ここで, 我々の主結果を述べる. その前に, $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ を普遍被覆とし, $\lambda = \xi dx \in \Omega^1(T^*\mathbb{R})$ としておく.

定義 4.1. 連続単射 $c: S^1 \rightarrow T^*\mathbb{R}$ が連続ルジャンドルリフトを許容する^{*14} とは, 滑らかな埋め込みの族 $(c_n: S^1 \rightarrow T^*\mathbb{R})$ が存在し, 次の条件をみたすことをいう.

- (i) c_n は c に C^0 収束する.
- (ii) $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $(c_n \circ e)^*\lambda$ の原始関数^{*15} とする. $(f_n)_n$ はある連続関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に広義一様収束する.

また, この条件は $c: S^1 \rightarrow T^*\mathbb{R}$ の S^1 のパラメータの取り換えで不変である. 像であるジョルダン曲線 $c(S^1)$ についても連続ルジャンドルリフトを許容するか否かを定義する.

^{*12} 層の圏の前層の圏への包含の左随伴. 茎を保つ.

^{*13} 正確には拡張擬距離である. 値が $+\infty$ になりうるし, $d(F, G) = 0$ は F と G が同型であることを一般には導かない. 一方で, 追加の条件を課せば $d(F, G) = 0$ から F と G の同型を導けるようになることも多い.

^{*14} 一般的な用語ではなくここだけの呼称である.

^{*15} 原始関数には定数分の任意性があるが, この定数については都合のいいように選んでよい.

定理 4.2 ([AI25]^{*16}). $C \subset T^*\mathbb{R}$ が連続ルジャンドルリフトを許容するとき、任意の $\theta \in (0, \pi)$ についてとき、 C 上の相異なる 4 点であって θ -長方形の 4 頂点をなすものが存在する。

この結果は、多くの先行研究の結果を包含し、正方形 ($\theta = \frac{\pi}{2}$) の場合に限っても真に新しい。例えば、 C が長さ有限ならば、 C は連続ルジャンドルリフトを許容することから次が従う。

系 4.3. C が長さ有限のとき、任意の $\theta \in (0, \pi)$ についてとき、 C 上の相異なる 4 点であって θ -長方形の 4 頂点をなすものが存在する。

注意 4.4. 連続ルジャンドルリフトを許容しないジョルダン曲線も多く存在する。与えられたジョルダン曲線が連続ルジャンドルリフトを許容するか否かを判定するのは一般には難しい。この条件の良い判定方法や特徴付けについては考察の余地が残されている。

4.2 層量子化の構成

以下、 $\mathbf{k} = \mathbb{F}_2$ とおき、スカラー倍により C が囲う有界開領域の面積は π であるとしてよい。まず滑らかな $C \subset T^*\mathbb{R}$ に対し、 $C \times C \subset T^*\mathbb{R}^2$ の層量子化 F_C ^{*17} を構成できる。 $C \times C$ は単調 (monotone) とよばれる性質をみたし、かつ Fukaya–Oh–Ohta–Ono による bounding cochain を許容するので、bounding cochain を指定することで、 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $x \in \mathbb{R}^2$ に対しフレアー複体 $CF^*(\Gamma_{-df}, C \times C)$, $CF^*(T_x^*\mathbb{R}^2, C \times C)$ らが定義できる。すると Viterbo の構成を適用でき^{*18}, $C \times C$ の層量子化 F_C が構成できる^{*19}。

c が滑らかでない場合、滑らかな写像の族 $(c_n: S^1 \rightarrow T^*\mathbb{R})_n$ であって c に C^0 収束するものをとる。ただし、 $C_n = c_n(S^1)$ の囲む面積も π であるようにしておく。 C_n らが Hofer 距離の意味で Cauchy 列になることを証明できる^{*20}。これと命題 3.9 から、 F_{C_n} が層の距離に関して Cauchy 列になることが確認できる。命題 3.10 の完備性により、極限の対象が存在し、実は一意的である。これを F_C と書き $C \times C$ の層量子化とよぶことに

^{*16} Stéphane Guillermou 氏も同様の結果を独立に得ている。超局所層理論を用いる点・パーシステンス加群の変化する位置に注目する点は共通しているが、議論の詳細は我々のものとは異なる。

^{*17} $C \times C$ の層量子化であるので、 $F_{C \times C}$ とかく方が自然であるが、表記を短くするために F_C とかくことにした。

^{*18} このことについては今現在、きちんと書かれている文献はおそらく存在していないので注意されたい。[AI25] では Guillermou による構成の応用として層量子化を構成したので、この議論は使われていない。

^{*19} ラグランジュ部分多様体 $C \times C$ の単調性は、 F_C には $T_\pi F_C \simeq F_C[-2]$ という性質 (もしくは構造) として反映される。シフト関手 $[-2]$ によって $\mathbb{R}_t/\pi\mathbb{Z}$ 方向にひねられた $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_t/\pi\mathbb{Z}$ 上の“層”の引き戻しとして F_C を記述できる。この“層”はねじれ層 (twisted sheaf) と呼ばれ、これらに対する超局所層理論も機能する。[AI25] においては F_C は引き戻す前のねじれ層として定義されている。以下では、本当はねじれ層として議論する必要がある部分があるのだが、この部分は誤魔化すことにする。

^{*20} 具体的にハミルトンアイソトピーを構成する。ここでは円盤やアニュラスの間の双正則写像を構成の手掛かりにした。

する. これは $MS(F_C) = C \times C$ をみたす. 一方で, $SS^\bullet(F_C)$ の決定は一般には難しいのだが, C が連続ルジャンドルリフトを許容するという仮定があると, 定義 4.1 の記号を用いて,

$$SS^\bullet(F_C) = \{(c \circ e(s_1), c \circ e(s_2), -f(s_1) - f(s_2)) \mid s_1, s_2 \in \mathbb{R}\} \subset T^*\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_t \quad (4.1)$$

であることを確認できる. このとき, 任意の $a \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ について $SS^\bullet(F_C) \cap T_a SS^\bullet(F_C) = \emptyset$ が成り立っている.

4.3 パーシステンス構造の解析

$\mathcal{T}$ -値の射の空間 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(F_C, R_\theta F_C) \in \mathcal{T}$ はフィルター付き複体としては $(\text{Hom}(F_C, T_a R_\theta F_C))_{a \in \mathbb{R}}$ に対応する. このフィルター付き複体 $(\text{Hom}(F_C, T_a R_\theta F_C))_{a \in \mathbb{R}}$ は次数を決めてコホモロジーをとると通常の意味でのパーシステンス加群を与える. 証明の基本方針としては次のようになる.

- (A) パーシステンス加群の変化は交差 $(C \times C) \cap R_\theta(C \times C)$ の部分集合によって生じる.
- (B) しかし自明な交差 Δ_C の寄与によって生み出される変化を捉えても θ -長方形についての情報を得られない. よって, Δ_C が寄与できるパーシステンス加群の変化の位置に制約を与える.
- (C) Δ_C が寄与できない位置にパーシステンス加群の変化を見つける.

以下, 順に議論を概説する.

- (A) パーシステンス加群の変化は補題 3.7 によって μhom によって与えられる. $\mu hom(F, G)$ の台は $SS(F) \cap SS(G)$ に含まれた. そして $SS(F_C)$ の $SS(T_a R_\theta F_C)$ の ρ による像が, $C \times C$ および $R_\theta(C \times C)$ である.
- (B) まず, ジョルダン曲線が連続ルジャンドルリフトを許容すると仮定する. すると任意の $a \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ に対し,

$$SS^\bullet(F_C) \cap SS^\bullet(T_a R_\theta F_C) \cap \rho^{-1}(\Delta_C) = \emptyset \quad (4.2)$$

であることが, 式 (4.1) と層に対する T_a と R_θ が $SS^\bullet$ に自然に作用することから確認できる. 補題 3.7 からパーシステンス加群の変化は $\mu hom(F_C, T_a R_\theta F_C)$ のコホモロジーによって記述される. 特に Δ_C 由来の寄与は

$$\mathcal{F}_{a,\theta} := \mu hom(F_C, T_a R_\theta F_C)|_{\rho^{-1}(\Delta_C)}$$

のコホモロジーが担っている. 式 (4.2) から $\mathcal{F}_{a,\theta}$ の台が空集合であり, Δ_C 由来の寄与は自明であることがわかる.

- (C) ある $a = a_\theta \in (0, \pi)$ においてパーシステンス加群の変化が生じることを示す. この議論が最も非自明な考察を含むのだが, ここでは割愛する. フィルトレーションのパラ

メータ a だけでなく θ を $[0, \pi]$ の範囲で動かすことが重要になる. この部分では C が連続ルジャンドリフトを許容することは仮定しなくてよい. 一方で, C の $\mathbb{R}^2$ の部分集合としてのルベーク測度が 0 であることは仮定する ^{*21} ^{*22}.

5 今後の課題

一般のジョルダン曲線 C についてもルベーク測度が 0 ならばある $0 < a_\theta < \pi$ でパーシステンス加群に変化が生じることは証明することができた. この a_θ に対応する変化を生み出している $C \times C$ と $R_\theta(C \times C)$ の交差が Δ_C の点ではないことが証明できればよい. Δ_C の寄与は $\mathcal{F}_{a,\theta} := \mu\text{hom}(F_C, T_a R_\theta F_C)|_{\rho^{-1}(\Delta_C)}$ のコホモロジーとして定式化できる. 連続ルジャンドリフトを許容するという仮定の下では, $\mathcal{F}_{a,\theta}$ の台が空集合であることが言えて, 証明がうまくいった. 仮定がないと, この台の評価がうまくいかなくなる. しかしそれでも $\mathcal{F}_{a,\theta}$ が層として 0 である可能性はあり, それならば十分である. また, $\mathcal{F}_{a,\theta}$ が層として 0 でなくとも, その大域的なコホモロジーが 0 なだけでも十分である. いずれにせよ, 層 $\mathcal{F}_{a,\theta}$ をより精密に調べられればよさそうである. しかしながら現状では, $\mathcal{F}_{a,\theta}$ をより精密に調べられるまでには, μhom に対する知見が足りていないように思われる. この種の滑らかでない対象に付随した層の μhom の解析・計算は, 今回扱った杭問題以外の観点からも現状の重要な課題である.

参考文献

- [AI25] T. Asano and Y. Ike. *The rectifiable rectangular peg problem*. 2025. arXiv: 2412.21057 [math.SG].
- [GL21] J. E. Greene and A. Lobb. “The rectangular peg problem”. *Ann. of Math.* (2) 194.2 (2021), pp. 509–517.
- [GL23] J. E. Greene and A. Lobb. “Cyclic quadrilaterals and smooth Jordan curves”. *Invent. Math.* 234.3 (2023), pp. 931–935.
- [GL24] J. E. Greene and A. Lobb. *Floer homology and square pegs*. 2024. arXiv: 2404.05179 [math.SG].
- [KSZ23] C. Kuo, V. Shende, and B. Zhang. *On the Hochschild cohomology of Tamarkin categories*. 2023. arXiv: 2312.11447 [math.SG].
- [Mat14] B. Matschke. “A survey on the square peg problem”. *Notices Amer. Math. Soc.* 61.4 (2014), pp. 346–352.

^{*21} この場合, コンパクト台で面積を保つ同相写像 $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ で $C = \phi(C_0)$ なるものをとれる. ただしここで, C_0 は半径 1 の真円とする. 実は, この同相写像 ϕ を並べた $\phi \times \phi$ も $\mathcal{T}(T^*\mathbb{R}^2)$ に作用し, $F_C \simeq (\phi \times \phi)F_{C_0}$ が成り立つ. すると, F_C 関連の計算の一部を非常に具体的な層である F_{C_0} に対する計算に帰着でき, 議論がうまくいく.

^{*22} ルベーク測度が正になるジョルダン曲線も多く存在するが, そのような曲線に対しては長方形杭問題はルベークの密度定理の簡単な系として肯定的に解決されている.