

対称群のオブザーバブル直径

中島啓貴

1. 測度の集中現象

測度の集中現象は、「任意の 1-Lipschitz 関数がほぼ定数関数となる」という現象であり、主に高次元空間で観察される。ここで、1-Lipschitz 関数は Lipschitz 定数が 1 以下の関数のことである。測度の集中現象は P. Lévy の仕事を拡張することで、V. Milman によって提唱されたものである。この現象が起こる空間の典型例は n 次元単位球面 $S^n(1)$ である。 $S^n(1)$ は標準的なリーマン計量から定まるリーマン距離 $d_{S^n(1)}$ が備わっているものとする。 $S^n(1)$ 上の 1-Lipschitz 関数 $f: S^n(1) \rightarrow \mathbb{R}$ の例として 1 点からの距離関数を考えよう。すなわち一点 $p_n \in S^n(1)$ を固定して、 $f_n: S^n(1) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) := d_{S^n(1)}(x, p_n) \quad \text{for } x \in S^n(1)$$

と定義する。このとき f_n は点 $x = p_n$ において最小値 0 をとり、点 $x = -p_n$ において最大値 π をとる。したがって、この関数は定数関数ではないので「ほぼ」定数関数の意味を明確にする必要がある。いま $S^n(1)$ のリーマン体積測度を正規化したものを $m_{S^n(1)}$ とおき、 $\varepsilon > 0$ に対して

$$m_{S^n(1)}(\{x \in S^n(1) : |f_n(x) - \pi/2| \geq \varepsilon\})$$

という量を考える。これは f_n の定義域において f_n が $\pi/2$ から離れている部分の割合を表している。この量は次元 n が十分に大きいとき 0 に近づくことが知られている。すなわち、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{S^n(1)}(\{x \in S^n(1) : |f_n(x) - \pi/2| \geq \varepsilon\}) = 0$$

が成り立つ。よって高次元の単位球面においては、この f_n はほぼ $\pi/2$ の値をとる定数関数とみなせる。この例を踏まえると、以下の Theorem 1.1, すなわち $S^n(1)$ における測度の集中現象が把握しやすい。

Theorem 1.1 (Lévy の補題 [5]). 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_f \inf_{c \in \mathbb{R}} m_{S^n(1)}(\{x \in S^n(1) : |f(x) - c| \geq \varepsilon\}) = 0$$

が成り立つ。ただし、 $\sup$ は任意の 1-Lipschitz 関数 $f: S^n(1) \rightarrow \mathbb{R}$ にわたって取る。

Theorem 1.1 をみると、測度の集中現象は、一つの空間ではなく空間の列に対する主張であることが分かる。また Theorem 1.1 には測度と距離が現れるので、測度の集中現象は測度距離空間の列に対して定義することが自然である。完備可分距離空間 (X, d_X) がボレル確率測度 m_X を備えているとき、三つ組 (X, d_X, m_X) を**測度距離空間**と呼ぶ。ここで測度 m_X が確率測度であるとは $m_X(X) = 1$ を満たすことをいう。紛れのないときには d_X と m_X を省略して単に X が測度距離空間であると述べることにする。測度距離空間 X に対して

$$\mathcal{Lip}_1(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f: 1\text{-Lipschitz}\}$$

とおく．また，正の整数全体の集合を $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ とおく．測度の集中現象が起こるような空間の列を以下の Definition 1.2 のように定義し Lévy family と呼ぶ．

Definition 1.2 (Lévy family). 測度距離空間の列 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が **Lévy family** であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{Lip}_1(X_n)} \inf_{c \in \mathbb{R}} m_{X_n}(\{x \in X_n : |f(x) - c| \geq \varepsilon\}) = 0$$

が成り立つことをいう．

Theorem 1.1 は $(S^n(1))_{n \in \mathbb{N}}$ が Lévy family であることを主張している．測度の集中現象については，M. Ledoux の本 [4] にまとめられている．和書では T. Shioya の本 [11] がある．

2. オブザーバブル直径

測度の集中現象が起こるかどうかを特徴づける不変量のひとつにオブザーバブル直径がある．オブザーバブル直径は M. Gromov によって [3] の §3 $\frac{1}{2}$ において導入されたものである． $A \subset \mathbb{R}$ に対して通常の**直径**を

$$\text{diam } A := \begin{cases} 0 & \text{if } A = \emptyset \\ \sup_{x, y \in A} |x - y| & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義し， $\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度 μ と実数 $\alpha \in [0, 1)$ に対して**パーシャル直径**を

$$\text{diam}(\mu; \alpha) := \inf\{\text{diam } A \mid A \subset \mathbb{R}: \text{ボレル集合}, \mu(A) \geq \alpha\}$$

と定義する．このとき，測度距離空間 X と $\kappa \in (0, 1]$ に対して**オブザーバブル直径**は以下のように定義される．

$$\text{ObsDiam}(X; -\kappa) := \sup_{f \in \mathcal{Lip}_1(X)} \text{diam}(f_* m_X; 1 - \kappa).$$

ここで， $f_* m_X$ は $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ による m_X の**押し出し測度**であり

$$f_* m_X(A) := m_X(f^{-1}(A)) \quad \text{for } A \subset \mathbb{R}$$

によって定義される． $f_* m_X$ は $\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度になっている．また，任意の $\kappa \in (0, 1]$ に対して $\text{ObsDiam}(X; -\kappa) < \infty$ が成立することに注意する．

測度距離空間列 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が Lévy family であることは，任意の $\kappa \in (0, 1)$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{ObsDiam}(X_n; -\kappa) = 0$$

が成立することとして特徴づけられる．測度距離空間 X と実数 $r > 0$ に対して，距離をスケーリングした測度距離空間 $(X, r \cdot d_X, m_X)$ を rX と表すことにする．このとき

$$\text{ObsDiam}(rX; -\kappa) = r \cdot \text{ObsDiam}(X; -\kappa)$$

が成立する．これより，測度距離空間列を適切にスケーリングすると必ず Lévy family にできることがわかる．すなわち，任意の測度距離空間列 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して，ある正の実数列 $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して $(r_n X_n)$ は Lévy family となる．オブザーバブル直径のオーダーが分かれば，測度距離空間列をどの程度スケーリングすると Lévy family になるかが分かるという意味でオブザーバブル直径のオーダー評価は重要である．測度距離空間列 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が **phase transition property** を持つとは，ある正の実数列 $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して，任意の $\kappa \in (0, 1)$ に対して

$$\text{ObsDiam}(X_n; -\kappa) \asymp r_n$$

が成り立つことをいう。ここで非負実数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して $a_n \asymp b_n$ であるとは、ある実数 $c, C > 0$ が存在して、十分大きな n に対して $c \cdot b_n \leq a_n \leq C \cdot b_n$ が成立することをいう。phase transition property は R. Ozawa と T. Shioya によって [8] において定義されたものである。今回の定義は [8] 内で述べられている同値な言い換えを採用している。

オブザーバブル直径のオーダーが決定されているような具体例についていくつか紹介する。 n 次元単位球面については

$$\text{ObsDiam}(S^n(1); -\kappa) \asymp \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{for any } \kappa \in (0, 1)$$

が成立する ($3\frac{1}{2}$.20. in [3]). 特に $(S^n(1))_{n \in \mathbb{N}}$ は phase transition property を持つ。 $S^n(1)$ のオブザーバブル直径の上からの評価は n 次元単位球面上の等周不等式 (Lévy の等周不等式 [2, 5] cf. Theorem 2.3 in [9]) から従う。下からの評価は、1-Lipschitz 関数として一点からの距離関数をとることによって与えられる。この評価が最適であることは一点からの距離関数の等位集合が等周不等式の解を与えることに由来する。 $\mathbb{R}^n$ を台集合としてユークリッド距離と n 次元標準正規分布を備えた測度距離空間を n 次元ガウス空間 Γ^n と呼ぶ。 Γ^n のオブザーバブル直径については

$$\text{ObsDiam}(\Gamma^n; -\kappa) \asymp 1 \quad \text{for any } \kappa \in (0, 1)$$

が成立する。こちらも上からの評価は等周不等式で与えられ (cf. Corollary 2.6 in [4]), 下からの評価は第 1 射影の等位集合が等周不等式の解を与えることから従う。台集合を $\{0, 1\}^n$ として l^1 -距離と一様確率測度を備えた測度距離空間をハミングキューブ Q^n と呼ぶ。 Q^n のオブザーバブル直径については

$$\text{ObsDiam}(Q^n; -\kappa) \asymp \sqrt{n} \quad \text{for any } \kappa \in (0, 1)$$

が成立する (cf. Corollary 4.10 in [7]). 上からの評価は Hoeffding 型の不等式を用いてあたえられる (cf. Corollary 1.17 in [4]). 等周不等式 ([1]) を用いて与えることもできる。下からの評価は 1 点からの距離関数の等位集合が等周不等式の解を与えることから従う。上記のように、オブザーバブル直径のオーダーの決定は基本的にはその空間における等周不等式を用いて行われる。

3. 対称群のオブザーバブル直径

今回は、 N 次対称群 $\mathfrak{S}_N$ のオブザーバブル直径のオーダーの決定を行った。 $N \in \mathbb{N}$ に対して $\mathfrak{S}_N$ は

$$\mathfrak{S}_N := \{\sigma: \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\} \mid \sigma: \text{全単射}\}$$

を台集合として、ハミング的距離

$$d_{\mathfrak{S}_N}(\sigma, \tau) := \#\{i \in \{1, \dots, N\} \mid \sigma(i) \neq \tau(i)\}$$

と一様確率測度 $m_{\mathfrak{S}_N}$ を備えた測度距離空間とする。

$\mathfrak{S}_N$ のオブザーバブル直径の上からの評価については以下の定理が知られていた。

Theorem 3.1 ([6] cf. Corollary 4.3 in [4]). 任意の $N \in \mathbb{N}$ と $\kappa \in (0, 1)$ に対して

$$\text{ObsDiam}(\mathfrak{S}_N; -\kappa) \leq 8\sqrt{2N \log(2/\kappa)}$$

が成立する。

Theorem 3.1 は確率論の Martingale 的手法によって証明されている。今回は、Theorem 3.1 の評価と同じオーダーで下からの評価を得ることができた。

Theorem 3.2. 任意の $\kappa \in (0, 1)$ に対して

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{N}} \text{ObsDiam}(\mathfrak{S}_N; -\kappa) \geq \text{diam}(\gamma^1; 1 - \kappa)$$

が成り立つ. ここで γ^1 は 1 次元の標準正規分布である.

任意の $\kappa \in (0, 1)$ に対して $0 < \text{diam}(\gamma^1; 1 - \kappa) < \infty$ が成り立つことに注意すると Theorem 3.1, 3.2 から以下の系が従う.

Corollary 3.3. 任意の $\kappa \in (0, 1)$ に対して

$$\text{ObsDiam}(\mathfrak{S}_N; -\kappa) \asymp \sqrt{N}$$

が成り立つ.

交代群 $\mathfrak{A}_N$ についても Theorem 3.1, 3.2 と同様の評価を得ることができ, 以下の定理が成り立つ.

Theorem 3.4. 任意の $\kappa \in (0, 1)$ に対して

$$\text{ObsDiam}(\mathfrak{A}_N; -\kappa) \asymp \sqrt{N}$$

が成り立つ.

Corollary 3.3 と Theorem 3.4 によって [10] の Problems 4 および 5 が解決し, それぞれ $(\mathfrak{S}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ と $(\mathfrak{A}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ は phase transition property を持つことが従う.

Theorem 3.2 の証明のスケッチ. オブザーバブル直径を下から評価するには, 良い評価を与えるような具体的な 1-Lipschitz 関数 $f_N: \mathfrak{S}_N \rightarrow \mathbb{R}$ を見つければよい. $K, n \in \mathbb{Z}$ を $0 \leq K, n \leq N$ を満たすものとする. 1-Lipschitz 関数 $f_{N,K,n}: \mathfrak{S}_N \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f_{N,K,n}(\sigma) := \#(\{0, 1, \dots, K\} \cap \sigma(\{0, 1, \dots, n\})) \quad \text{for } \sigma \in \mathfrak{S}_N$$

と定義すると $(f_{N,K,n})_* m_{\mathfrak{S}_N}$ は母数 N, K, n の超幾何分布になる. したがって

$$f_N := f_{N, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$$

とおくと超幾何分布に関する中心極限定理より, $N \rightarrow \infty$ で

$$\left(\frac{4}{\sqrt{N}} \cdot \left(f_N - \frac{N}{4} \right) \right)_* m_{\mathfrak{S}_N}$$

は標準正規分布 γ^1 に弱収束する. よって

$$\begin{aligned} & \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{N}} \text{ObsDiam}(\mathfrak{S}_N; -\kappa) \\ & \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{N}} \text{diam}((f_N)_* m_{\mathfrak{S}_N}; 1 - \kappa) \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{diam}\left(\left(\frac{4}{\sqrt{N}} \cdot \left(f_N - \frac{N}{4}\right)\right)_* m_{\mathfrak{S}_N}; 1 - \kappa\right) \\ & = \text{diam}(\gamma^1; 1 - \kappa) \end{aligned}$$

を得る. □

Remark 3.5. n 次元球面における評価のときと異なり 1 点からの距離関数は最適なオーダーを与えない. それどころか, 今回の評価に用いた f_N には距離関数が明示的に表れないところは注目に値する.

REFERENCES

- [1] B. Bollobás and I. Leader, *Compressions and isoperimetric inequalities*, J. Combin. Theory Ser. A **56** (1991), no. 1, 47–62.
- [2] T. Figiel, J. Lindenstrauss, and V. D. Milman, *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*, Acta Math. **139** (1977), no. 1-2, 53–94.
- [3] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, English edition, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007. Based on the 1981 French original; With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes; Translated from the French by Sean Michael Bates.
- [4] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 89, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [5] P. Lévy, *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Avec un complément sur les fonctionnelles analytiques par F. Pellegrino*, Gauthier-Villars, Paris, 1951 (French). 2d ed.
- [6] B. Maurey, *Construction de suites symétriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **288** (1979), no. 14, A679–A681 (French, with English summary).
- [7] H. Nakajima, *Isoperimetric inequality on a metric measure space and Lipschitz order with an additive error*, J. Geom. Anal. **32** (2022), no. 1, Paper No. 35, 43.
- [8] R. Ozawa and T. Shioya, *Limit formulas for metric measure invariants and phase transition property*, Math. Z. **280** (2015), no. 3-4, 759–782.
- [9] T. Shioya, *Metric measure geometry*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 25, EMS Publishing House, Zürich, 2016. Gromov's theory of convergence and concentration of metrics and measures.
- [10] ———, *Problems in metric measure geometry*, in *Facets of Contemporary Analysis, Geometry and Non-Euclidean Statistics*, Tohoku Series in Mathematical Sciences, Springer (to appear).
- [11] ———, 測度距離空間の幾何学への招待, SGC ライブラリ, vol. 195, SAIENSU - SHA, 2024.

愛媛大学大学院理工学研究科

Email address: `nakajima.hiroki.nz@ehime-u.ac.jp`