

距離空間上の勾配降下上昇流と鞍点問題について

下山 翔 (東京大学大学院数理科学研究科) *

1 導入

勾配降下上昇 (Gradient Descent-Ascent: GDA) 流は、直積空間上の関数の鞍点を求める上で中心的な役割を果たし、最適化、ゲーム理論、ロバスト制御といった分野で応用されている。歴史的には、GDA 流は鞍点を近似する方法として、Arrow–Hurwicz によってユークリッド空間上の凸関数の制約付き最適化の文脈で提案され [2]、その後、Rockafellar によってバナッハ空間上へと拡張された [6]。Rockafellar による仕事は、極大単調作用素の観点から統一的に GDA 流の性質を導出しており、見通しが良い。一方、底空間が一般の距離空間、とりわけワッサースタイン空間である場合は、GDA 流の性質を統一的に導出する枠組みは確立されておらず、特にヒルベルト空間の理論と同様の性質を導くために底空間が満たすべき幾何学的条件については、未解明な点が多い。

本講演では、底空間が距離空間の場合の GDA 流について、最近得られた結果を紹介する。ここでは、GDA 流を連立する発展変分不等式 (EVI) の解として定式化し、関数と距離空間の組に対するある凸凹性の仮定のもとで、well-posedness、GDA 流の鞍点への指数収束、古典的な勾配流と類似した正則化効果を明らかにした。特に、GDA 流の存在を得るために、De Giorgi による minimizing movement を二変数関数の場合に拡張した枠組みである minimizing-maximizing movement を構築した。応用として、可分ヒルベルト空間上のワッサースタイン空間上の GDA 流に対し、GDA 流の大域的な存在および、関数が強い凸凹性を満たす場合に鞍点への指数収束を示した。

本講演の内容は理研の磯部伸氏との共同研究 [4] に基づく。本稿には証明を載せていないが、証明のアイデアは、Amrosio–Gigli–Savaré による [1] における距離空間上勾配流の well-posedness の証明、および、Clément–Desch による [3] における距離空間上の勾配流に対する Crandall–Liggett スキームの構築を今回の 2 変数の設定に拡張することである。詳細についてはプレプリント [4] を参照して欲しい。

* sho@ms.u-tokyo.ac.jp

2 距離空間上の鞍点問題と勾配降下上昇流 (GDA)

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ を完備距離空間とし, $X \times Y$ には ℓ^2 -距離が入っているとする. 二変数関数 $\phi: X \times Y \rightarrow [-\infty, +\infty]$ に対し, (x^*, y^*) が ϕ の鞍点であるとは, 次の不等式を満たすことである: 任意の $(x, y) \in X \times Y$ に対し,

$$\phi(x^*, y) \leq \phi(x^*, y^*) \leq \phi(x, y^*).$$

簡単に述べると, 鞍点とは, 第一変数に対する最小解と, 第二変数に対する最大解の組みである. よって, 関数 ϕ の最小-最大化を考えたいため, 本稿では, 以降, ϕ に次の 2 条件を常に仮定する.

定義 2.1 (Properness). 関数 ϕ が**有効**であるとは, 以下を満たす事である:

$$\text{Dom} \phi := \text{Dom}_X \phi \times \text{Dom}_Y \phi \neq \emptyset,$$

ここで, $\text{Dom}_X \phi := \{x \in X \mid \text{任意の } y \in Y \text{ に対し } \phi(x, y) < +\infty\}$, $\text{Dom}_Y \phi := \{y \in Y \mid \text{任意の } x \in X \text{ に対し } \phi(x, y) > -\infty\}$ である.

定義 2.2 (Closedness). 関数 ϕ が**閉**であるとは, 以下を満たす事である:

- 任意の $x \in \text{Dom}_X \phi$ に対し, $Y \ni y \mapsto \phi(x, y)$ が上半連続;
- 任意の $y \in \text{Dom}_Y \phi$ に対し, $X \ni x \mapsto \phi(x, y)$ が下半連続.

また, 凸解析における有効領域の外側への関数の拡張の方法と同様に, ϕ は $\text{Dom} \phi$ の外側で以下の条件を満たすと仮定する:

仮定 2.3.

$$\phi(x, y) = \begin{cases} +\infty & (x, y) \in (\text{Dom}_X \phi)^c \times \text{Dom}_Y \phi \\ -\infty & (x, y) \in \text{Dom}_X \phi \times (\text{Dom}_Y \phi)^c \end{cases}.$$

話を鞍点を近似する流れである GDA 流に移す. X, Y がユークリッド空間で, ϕ が十分微分可能なとき, GDA 流は以下のように定義される.

定義 2.4 ((ユークリッド空間における) GDA 流). 曲線 $(x_t, y_t): [0, +\infty) \rightarrow X \times Y$ が ϕ に対する GDA 流であるとは, 次を満たすことである: (x_t, y_t) は C^1 であり, かつ, 任意の $t > 0$ に対し以下が成り立つ

$$\begin{cases} x'_t = -\nabla_x \phi(x_t, y_t) \\ y'_t = \nabla_y \phi(x_t, y_t) \end{cases}. \quad (1)$$

簡単に述べると, GDA 流とは, 第一変数を最小化し, 第二変数を最大化する流れである. よって, 直感としては, 時刻 $t \rightarrow +\infty$ とすると, GDA 流は鞍点に収束することが期待できる (しかし, これは一般には成り立たないことが例 3.4 から分かる).

GDA 流は古典的な勾配流と関係がある．実際，関数が $\phi(x, y) = f(x) - g(y)$ と変数に対して独立な関数の和で表示できる場合，GDA 流は単に 2 つの勾配流の組である．従って，違いが現れるのは ϕ が x と y の交互作用を含む場合である．

GDA 流を一般の距離空間上に定義する場合，定義式 (1) は空間の微分構造—線形性—を用いているため直接採用できない．この問題を回避するために，古典的な勾配流の定義を，発展変分不等式 (Evolution Variational Inequality: EVI) と呼ばれる不等式を用いて，距離空間上に拡張できる事を思い出し（例えば，[5] 参照），距離空間上の GDA 流を以下のように 2 つの EVI の連立系として定義する：

定義 2.5 (λ -EVI). $\lambda \in \mathbb{R}$ とする．曲線 $(x_t, y_t): (0, +\infty) \rightarrow \text{Dom}\phi$ が λ -EVI 流であるとは，次を満たす事である： 任意の $t \in (0, +\infty)$ と $(x, y) \in \text{Dom}\phi$ に対し，

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d^+}{dt} d_X^2(x_t, x) + \frac{\lambda}{2} d_X^2(x_t, x) + \phi(x_t, y_t) \leq \phi(x, y_t), \\ \frac{1}{2} \frac{d^+}{dt} d_Y^2(y_t, y) + \frac{\lambda}{2} d_Y^2(y_t, y) + \phi(x_t, y) \leq \phi(x_t, y), \end{cases} \quad (\text{EVI}_{\lambda})$$

ここで， $\frac{d^+}{dt}$ は右 Dini 微分である．

3 距離空間上の GDA 流 (EVI 流) の性質

以降では，距離空間上の GDA 流のことを，先の定義に従い，EVI 流と呼ぶことにする．EVI 流は勾配流と似た定義式であったが，その違いの一つとして流れに沿った単調性が成立しない点が挙げられる（例 3.4 参照）．この点が EVI 流の解析を困難にする．この問題に対処するために，以下の仮定を置く：

仮定 3.1. 局所リプシッツ連続関数 $\varphi: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ，下半連続関数 $\psi_X: X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ および上半連続関数 $\psi_Y: Y \rightarrow [-\infty, +\infty)$ が存在して，次を満たす：任意の $(x, y) \in \text{Dom}\phi$ に対し，

$$\phi(x, y) = \varphi(x, y) + \psi_X(x) + \psi_Y(y).$$

この仮定のもと，EVI 流の初期点に対する安定性および勾配流と同様の正則化効果が導出される．

定理 3.2 (EIVs 流の性質). $w_t := (x_t, y_t)$ ， $w_t^0 := (x_t^0, y_t^0)$ および $w_t^1 := (x_t^1, y_t^1)$ を λ -EVI 流とする．また，仮定 2.3 および 仮定 3.1 が成り立つとする．

このとき，以下が成り立つ：

(λ -縮小性と一意性) すべての $0 \leq s < t < +\infty$ に対して，

$$d_{X \times Y}^2(w_t^0, w_t^1) \leq e^{-2\lambda(t-s)} d_{X \times Y}^2(w_s^0, w_s^1).$$

特に、任意の $w_0 \in \overline{\text{Dom}\phi}$ に対して、 $\lim_{t \downarrow 0} w_t = w_0$ を満たす λ -EVI's 流 w_t は高々一つしか存在しない。

(正則化効果) 写像 $(0, +\infty) \ni t \mapsto \phi(x_t, y_t) \in \mathbb{R}$ と w_t は $(0, +\infty)$ で局所リプシッツ連続であり、写像 $(0, +\infty) \ni t \mapsto e^{\lambda t} |w'_t|(x_t, y_t) \in \mathbb{R}$ は非増加かつ右連続である。ここで、 $|w'_t|$ は w_t の距離微分で次で定義される： $\lim_{s \rightarrow t} \frac{d_Z(w_t, w_s)}{|t-s|}$ 。

特に、初期点を鞍点 w^* とした場合、EVI's 流 w_t は定常的であること、つまり、 $w_t = w^*$ を満たすことが簡単に確認できる。よって、次の系を得る：

系 3.3 (指数収束). もし、 ϕ が鞍点 w^* を持つなら、任意の λ -EVI's に対して以下が成り立つ：任意の $t \geq 0$ に対し、

$$d_{X \times Y}^2(w_t, w^*) \leq e^{-2\lambda t} d_{X \times Y}^2(w_0, w^*).$$

特に、 $\lambda > 0$ の場合、 w_t は指数レートで鞍点 w^* に収束する。

ただし、 $\lambda \leq 0$ の場合は、一般に鞍点への収束は成立しない。

例 3.4 ($\lambda = 0$ の場合での周期軌道). $X = Y = \mathbb{R}$ とし、 $\phi(x, y) = xy$ と定義する。このとき、0-EVI's 流は次の常微分方程式の解と一致する： $\dot{x}_t = -y_t$, $\dot{y}_t = x_t$ 。初期点を $(1, 0)$ とすると EVI's 流は $(x_t, y_t) = (\cos t, \sin t)$ となり、周期軌道を描く。よって、この EVI's 流は一意的な鞍点 $(0, 0)$ に収束しない。

最後に EVI's 流の存在について議論する。ここでは、関数 ϕ の距離関数による凸凹緩和である、以下で与えられる関数 Φ の凸凹性が重要な役割を果たす。

仮定 3.5 (Φ の $(\tau^{-1} + \lambda)$ -凸凹性). 任意の $z = (x, y) \in X \times Y$ と、任意の $z_0 = (x_0, y_0), z_1 = (x_1, y_1) \in \text{Dom}\phi$ に対して、 x_0 から x_1 への曲線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ と、 y_0 から y_1 への曲線 $\sigma: [0, 1] \rightarrow Y$ が存在し、次を満たす：関数

$$(x', y') \mapsto \Phi_\tau(x, y; x', y')$$

は、任意の $\tau \in (0, \frac{1}{\lambda})$ に対して、 γ と σ に沿って " $(\tau^{-1} + \lambda)$ -凸凹" である。ここで Φ_τ は以下で定義される：

$$\Phi_\tau(x, y; x', y') := \phi(x, y) + \frac{1}{2\tau} d_X^2(x, x') - \frac{1}{2\tau} d_Y^2(y, y').$$

本稿では紙面の都合上、 $(\tau^{-1} + \lambda)$ -凸凹性の厳密な定義を与えないが、簡単に述べると、これは、関数が第一変数に対して強凸であり、第二変数に対して強凹であることを表す。詳細はプレプリント [4] を見て欲しい。

この仮定の下、EVI's 流の存在を得る。一意性は先に述べた λ -縮小性から導出される。

定理 3.6 (EVI_s の存在). ある $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, 仮定2.3, 3.1 および 3.5 が成り立つとする. そのとき, 任意の $w_0 = (x, y) \in \overline{\text{Dom}\phi}$ に対して, $\lim_{t \downarrow 0} w_t = w_0$ を満たす λ -EVI_s 流 w_t が一意に存在する.

例 3.7. $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ を可分ヒルベルト空間とし, $\ell: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ を $C^{1,1}$ 級関数, $L := \text{Lip}(D\ell)$ とする. ここで, $D\ell$ は ℓ のフレシェ微分である. X と Y を, それぞれ, $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ 上の 2-ワッサースタイン空間—2 次モーメント有限なボレル確率測度全体の集合にある距離を入れた距離空間—とする. 関数 $\phi: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定義する:

$$\phi(\mu, \nu) := \iint_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \ell(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) \quad (2)$$

このとき, ある (したがってすべての) $\lambda \leq -2L$ に対して, ϕ は仮定2.3, 3.1 および 3.5 を満たす.

参考文献

- [1] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*. 2nd ed. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Basel: Birkhäuser Verlag, 2008 (cit. on p. 1).
- [2] K. Arrow and L. Hurwicz. *A Gradient Method for Approximating Saddle Points and Constrained Maxima*. Santa Monica, CA: RAND Corporation, 1951 (cit. on p. 1).
- [3] P. Clément. *Introduction to Gradient Flows in Metric Spaces*. 2009. URL: <https://math.leidenuniv.nl/reports/files/2009-09.pdf> (cit. on p. 1).
- [4] N. Isobe and S. Shimoyama. *On gradient descent-ascent flows in metric spaces*. 2025. arXiv: 2506.20258 [math.FA]. URL: <https://arxiv.org/abs/2506.20258> (cit. on pp. 1, 4).
- [5] M. Muratori and G. Savaré. “Gradient flows and Evolution Variational Inequalities in metric spaces. I: Structural properties”. In: *Journal of Functional Analysis* 278.4 (2020), p. 108347 (cit. on p. 3).
- [6] R. T. Rockafellar. “Saddle-points and convex analysis”. In: *Differential Games and Related Topics (Proc. Internat. Summer School, Varenna, 1970)*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1971, pp. 109–127 (cit. on p. 1).