

Self-similar energy forms and energy measures on the Sierpiński carpet

清水 良輔 (京都大学)*

自己相似フラクタル集合 (例は図 1) 上の 1 階 Sobolev 空間と Dirichlet p -エネルギー汎関数 (この組を p -エネルギー形式と呼んでいる) や p -エネルギー測度に関する最近の進展について, 主に [21] に基づいて, 背景にある“擬等角幾何学からの動機”も交えながら紹介する. また, 講演では“滑らかな空間上の解析”とは全く異なる様相を呈するフラクタル上の特異性現象に関する結果 [1, 15] も (時間が許す限り) 簡単に触れる予定である.

1 イントロダクション: フラクタル上の解析学

主題となる p -エネルギー形式 $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p)$, p -エネルギー測度 $\Gamma_p\langle \cdot \rangle$ は Euclid 空間の場合には $\mathcal{F}_p := W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}_p(u) := \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx$, $\Gamma_p\langle u \rangle := |\nabla u|^p dx$ と与えられるような解析学的対象物であり, weak formulation (部分積分) を通して p -Laplacian が対応するようなエネルギー形式である. (ただし本稿では $p \in (1, \infty)$ の場合のみを考える.) 図 1 にある自己相似フラクタルのように, 可微分構造を持たない ($|\nabla u|$ が自然に定義できない) 空間では $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p, \Gamma_p\langle \cdot \rangle)$ の定式化そのものが全く自明ではない問題である.

非常に良い確率論的対応があることから $p = 2$ の場合は特別である. 実際, $(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2)$ は正則 Dirichlet 形式の典型例で, 福島正俊氏による Dirichlet 形式の理論 (例えば [8] を参照) により, Dirichlet 2-エネルギーと $W^{1,2}$ -Sobolev 空間に相当する $(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2)$ をフラクタル上で構成することは, そのフラクタル上に“Brown 運動”を構成することと同義であると言える. フラクタル上の Brown 運動の構成とその解析は 1980 年代後半から急速に発展し, 本講演で主として扱う Sierpiński carpet (図 1 左) 上では [2, 3, 19] でその構成がなされた. (フラクタル上の Brown 運動の詳細については, 例えば [11, 17] を参照.)

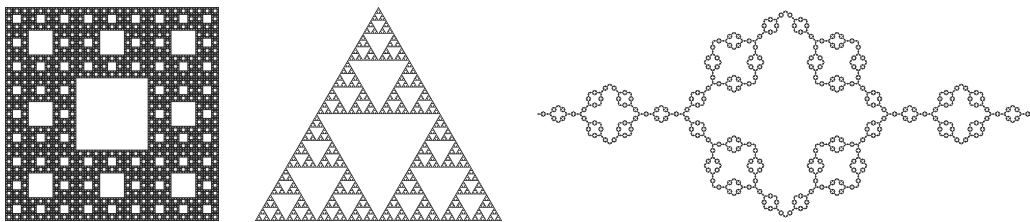


図 1 左から Sierpiński carpet, Sierpiński gasket, Laakso Diamond space

* 〒606-8501 京都府京都市左京区吉田本町 京都大学 大学院情報学研究科

e-mail: r.shimizu@acs.i.kyoto-u.ac.jp

web: <https://rshimizu-math.github.io/>

本研究は科研費 (課題番号:23KJ2011) の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 28A80, 46E36, 31E05, 31C45

キーワード: フラクタル, Sobolev 空間, エネルギー形式, エネルギー測度, Ahlfors 正則等角次元, 特異性

一般の p の場合は近年の「距離空間上の擬等角幾何学」の研究により **Ahlfors 正則等角次元** (詳細は 3 節) との深い繋がりが予想されていたが, 自然な L^p -拡張に相当する $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p, \Gamma_p\langle \cdot \rangle)$ の構成は, 調和関数の確率論的表示の欠落や $p \neq 2$ の場合の非線形性などが障害となり, [10] による Sierpiński gasket (図 1 中央) 型の自己相似集合上での結果以外は本質的にないという状態が約 20 年続いていた. 特に Sierpiński carpet に適用できる理論が皆無であったが, [18, 22] で p が Ahlfors 正則等角次元より真に大きい場合の構成が (十分満足のいく形で) なされた. Mathav Murugan 氏 (The University of British Columbia) との共同研究 [21] では, (考える自己相似フラクタルは Sierpiński carpet の場合に限るが) p が Ahlfors 正則等角次元の値以下の場合を含む範囲で $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p, \Gamma_p\langle \cdot \rangle)$ の構成を行った. それに加え, Sierpiński carpet の Ahlfors 正則等角次元の**達成可能性問題**に関して, 解析的アプローチの有用性を示唆する結果も与えた. 本稿はこれらの主結果 (定理 2.4, 2.7, 2.8, 3.4) についての説明を目的とする.

- 注意 1.1.** (1) (有限分岐性と無限分岐性) Sierpiński gasket は有限個の点を除くと非連結になるという**有限分岐性**を持つ. 一方で, Sierpiński carpet ではそのようなことはなく, **無限分岐性**を有する自己相似集合の典型例の一つとなっている. この有限/無限分岐性の性質の差異は「フラクタル上の解析学」において非常に大きなもので, 一般に無限分岐的なフラクタル上での $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p, \Gamma_p\langle \cdot \rangle)$ の構成, 及びその解析は遥かに難しくなる. ($p = 2$ の場合の説明として, 例えば [11, 第 3 節] を参照.)
- (2) (距離空間上の解析学との関係) 1990 年代後半に “ $|\nabla u|$ を定式化” することによる距離空間上の $(1, p)$ -Sobolev 空間の定義が P. Hajlasz, J. Cheeger, N. Shanmugalingam などらにより提唱され, 現在では「距離空間上の解析学」として非常に活発に研究されている分野である. (ここでは正確な歴史には触れない. 詳細は例えば [9] を参照.) 残念ながら, フラクタルの場合に (自己相似構造の観点から自然な距離と測度が備わった測度距離空間として) この理論を適用して得られる Sobolev 空間は, 典型的には L^p -空間そのものとなってしまい何も捉えられない.
- (3) (エネルギー測度の構成) 上述の (2) の注意より, フラクタル上では “ $|\nabla u|$ を定式化” することが困難であると示唆され, “ $|\nabla u|^p dx$ ” の役割を果たす p -エネルギー測度の構成も非自明であることに注意されたい. (実際に, $|\nabla u|$ を定式化することが良いアプローチではないことを示唆する特異性現象について第 4 節で簡単に述べる.) $p = 2$ の場合は Dirichlet 形式の理論による自然な定義 ([8, (3.2.14)]) が存在するが, この定義は L^2 上の表現定理に依るところが大きく, 自然な L^p -拡張は全く明らかではない.

2 Sierpiński carpet 上の p -エネルギー形式と p -エネルギー測度

本節では $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p, \Gamma_p\langle \cdot \rangle)$ の構成に関する結果を説明する. 考えるフラクタルは常に Sierpiński carpet (図 1 左) のみであることと, $p \in (1, \infty)$ の場合を扱うことに注意する.

2.1 Sierpiński carpet とグラフ近似を通した Sobolev 空間の定義

Sierpiński carpet 上の $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p, \Gamma_p \langle \cdot \rangle)$ の構成は $p = 2$ の場合の Kusuoka-Zhou [19] によるものを踏襲し, Sierpiński carpet のグラフ近似とその上の離散 p -エネルギー形式を考え, 近似レベルを細かくする極限に関する詳細な挙動を捉えることでなされる. 実際に考えるグラフ近似を導入するために, まず Sierpiński carpet の定義を思い出す.

定義 2.1 (Sierpiński carpet). $S := \{1, \dots, 8\}$ とおき, $\{q_i\}_{i \in S} \subset \mathbb{C}$ を $q_1 := -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{2}$, $q_2 := -\frac{\sqrt{-1}}{2}$, $q_3 := \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{2}$, $q_4 := \frac{1}{2}$, $q_5 := \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2}$, $q_6 := \frac{\sqrt{-1}}{2}$, $q_7 := -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2}$, $q_8 := -\frac{1}{2}$ と定め, 各 $i \in S$ に対して相似写像 $F_i: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を $F_i(z) := \frac{1}{3}(z - q_i) + q_i$ で定める. (q_i は F_i の不動点となる.) このとき, $\mathbb{C}$ の空でないコンパクト集合 K で

$$K = \bigcup_{i \in S} F_i(K) \quad (2.1)$$

F_7	F_6	F_5
F_8		F_4
F_1	F_2	F_3

図 2 相似写像の族 $\{F_i\}_{i \in S}$

を満たすものが唯一つ存在し, K を Sierpiński carpet という. d を Euclid 距離 (の K への制限) とし, m を K 上の $\frac{\log 8}{\log 3}$ -次元 Hausdorff 測度で $m(K) = 1$ と正規化されたものとする. ($\frac{\log 8}{\log 3}$ は (K, d) の Hausdorff 次元である.)

集合としての等式 (2.1) が自己相似性を表すものであるが, 更に次のことが成り立つ: 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $W_n := S^n$ とし, $w = w_1 w_2 \dots w_n \in W_n$ に対して $F_w := F_{w_1} \circ F_{w_2} \circ \dots \circ F_{w_n}$ と定める. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$K = \bigcup_{w \in W_n} F_w(K) \quad (2.2)$$

となることが (2.1) より容易に分かる. この等式 (2.2) は各 $F_w(K) =: K_w$ (n -cell と呼ばれる) を 3^n -倍拡大すると元の図形 K と等しくなるということを意味している.

次に各 n -cell を頂点集合として持つような K のグラフ近似列 $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を導入する. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, 無向連結単純グラフ $G_n = (V_n, E_n)$ を以下のように定める (図 3 参照):

$$V_n := W_n, \quad E_n := \{\{v, w\} \mid v, w \in W_n, v \neq w, K_v \cap K_w \neq \emptyset\}.$$

グラフ G_n 上では自然な p -エネルギー形式 $\mathcal{E}_p^{G_n}: \mathbb{R}^{V_n} \rightarrow [0, \infty)$ が次で定義される:

$$\mathcal{E}_p^{G_n}(u) := \sum_{\{x, y\} \in E_n} |u(x) - u(y)|^p, \quad u \in \mathbb{R}^{V_n}.$$

Kusuoka-Zhou [19] の基本的なアイデアと同様に, 適切なスケーリング定数 $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ を見つけ出し, $\{r_n \mathcal{E}_p^{G_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ の $n \rightarrow \infty$ での“(部分列) 極限”として K 上の p -エネルギー形式を構成するのが方針である. 天下りではあるが, 適切なスケーリング定数は次の離散 p -容量を見ることで捕まえることができる:

$$\mathcal{C}_p^{(n)} := \inf \left\{ \mathcal{E}_p^{G_n}(u) \mid \begin{array}{l} u \in \mathbb{R}^{V_n}, u(w) = 1 \text{ if } K_w \cap \{\operatorname{Re}(z) = -1/2\} \neq \emptyset, \\ u(w) = 0 \text{ if } K_w \cap \{\operatorname{Re}(z) = 1/2\} \neq \emptyset \end{array} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

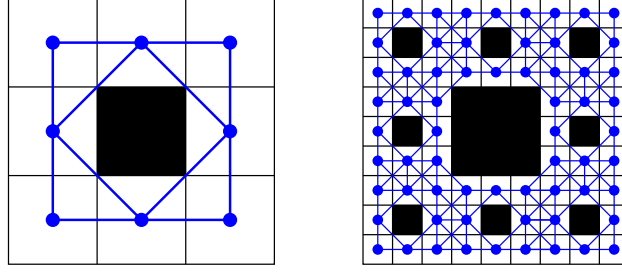


図3 グラフ近似 G_1 と G_2 .

この $\{\mathcal{C}_p^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ は multiplicative inequality を満たす ([5, Lemma 4.4]): ある定数 $C \in [1, \infty)$ が存在して任意の $k, l \in \mathbb{N}$ に対し,

$$C^{-1} \mathcal{C}_p^{(k)} \mathcal{C}_p^{(l)} \leq \mathcal{C}_p^{(k+l)} \leq C \mathcal{C}_p^{(k)} \mathcal{C}_p^{(l)}. \quad (2.3)$$

この評価 (2.3) より, 極限

$$\rho_p := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathcal{C}_p^{(n)} \right)^{-1/n} \in (0, \infty) \quad (2.4)$$

が存在して $C^{-1} \rho_p^{-n} \leq \mathcal{C}_p^{(n)} \leq C \rho_p^{-n}$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つことが従う.

結論としては $r_n = \rho_p^n$ が所望のスケーリング定数となるが, 実際に K 上の p -エネルギー形式を “極限” として定めるためには, $L^p(K, m)$ -関数の V_n 上への離散化を行う必要がある. 今回は各 n -cell 上の積分平均の値を割り当てるという離散化を行い, スケーリングされた離散 p -エネルギー形式 $\tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}: L^p(K, m) \rightarrow [0, \infty)$ を次で定める:

$$\tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}(f) := \rho_p^n \sum_{\{v, w\} \in E_n} \left| \frac{1}{m(K_v)} \int_{K_v} f \, dm - \frac{1}{m(K_w)} \int_{K_w} f \, dm \right|^p, \quad f \in L^p(K, m).$$

次の弱単調性と呼ばれる性質が Sobolev 空間の定義や性質を調べる際に鍵となる.

定理 2.2 ([21, Theorem 6.13]) ある定数 $C \in [1, \infty)$ が存在し, 任意の $k, l \in \mathbb{N}$ と $u \in L^p(K, m)$ に対し

$$\tilde{\mathcal{E}}_p^{(k)}(u) \leq C \tilde{\mathcal{E}}_p^{(k+l)}(u). \quad (2.5)$$

特に, 任意の $u \in L^p(K, m)$ に対して $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}(u) \leq C \liminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}(u)$ が成り立つ.

定理 2.2 より $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}$ が $\{\tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ の極限挙動を捉えていると分かるので, 次の $(1, p)$ -Sobolev 空間 $\mathcal{F}_p$ の定義が自然であると示唆される. 実際に, Sobolev 空間として満たすべきであろう性質 (閉性, 正則性) も確認できる.

定義 2.3 ([21, Definition 6.16]). $\mathcal{F}_p := \{u \in L^p(K, m) \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}(u) < \infty\}$. また, $\mathcal{F}_p$ をノルム $\left(\|\cdot\|_{L^p(K, m)}^p + \sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)} \right)^{1/p}$ が備わったノルム空間とみなす.

定理 2.4 ([21, Theorem 1.1]) (a) (閉性) $\mathcal{F}_p$ は反射的可分な Banach 空間である.

(b) (正則性) $\mathcal{F}_p \cap C(K)$ は $C(K)$ において (一様ノルムに関して) 稠密であり, $\mathcal{F}_p$ においても稠密である.

我々の Sobolev 空間 $\mathcal{F}_p$ は離散近似を通して定義されているので実体が掴みにくいように思われるが, 次の Korevaar–Schoen 型の表現 (2.6) を持つことも分かる. (個人的な感覚としては, 正直なところ (2.6) をもってしても $\mathcal{F}_p$ の “実体を掴んだ” 気にはなれない.)

定理 2.5 ([21, Theorem 1.4], [22, Theorem 2.27]) $\beta_p := \frac{\log(8\rho_p)}{\log 3}$ とすると, $\beta_p > p$ が成り立ち, さらに

$$\mathcal{F}_p = \left\{ u \in L^p(K, m) \mid \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \int_K \int_{B(x, \varepsilon)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{\varepsilon^{\beta_p} m(B(x, \varepsilon))} m(dy) m(dx) < \infty \right\}. \quad (2.6)$$

注意 2.6. (1) (Lipschitz 関数の扱い) (2.6) と $\beta_p > p$ より, 座標関数 $\mathbb{C} \ni z \mapsto \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ (の K への制限) が $\mathcal{F}_p$ に属さない事が分かり $\operatorname{Lip}(K, d) \not\subseteq \mathcal{F}_p$ となる. これは「距離空間上の解析学」で考えられている Sobolev 空間との非常に大きな差異である. なお, $\operatorname{Lip}(K, d) \cap \mathcal{F}_p$ がどんな集合であるかは全く分かっておらず, Sierpiński gasket の標準的な Dirichlet 形式の定義域 $\mathcal{F}_2$ の場合ですら未解決な問題である.

(2) (正則性) 定理 2.4(b) が [21] の主な貢献の一つである. 正則性の確保の困難は, 上記の (1) で述べた事情で, 距離関数など典型的な Lipschitz 関数を用いて cutoff 関数を作るという常套手段がフラクタル上では適用できるとは限らない点にある. 先行研究 [18, 22] で p の範囲に制限があった事情もこの正則性に起因している. Ahlfors 正則等角次元は $\mathcal{F}_p$ が $C(K)$ に連続的に埋め込み事ができるかどうかの臨界値となることが [6] により知られており, [18, 22] で考えられている p が Ahlfors 正則等角次元より真に大きいという phase は非常に正則性が良い状況で, 実際にこの phase では Morrey 型の Hölder 連続性評価が $\mathcal{F}_p$ の任意の関数に対して成り立つ. (Ahlfors 正則等角次元がこのような臨界値として現れる背景には, [7, 16] による「 $\rho_p > 1 \Leftrightarrow p > \text{Ahlfors 正則等角次元}$ 」という特徴付けの結果がある.)

2.2 自己相似 p -エネルギー形式と p -エネルギー測度

$\mathcal{F}_p$ の定義は $\{\tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ の極限挙動を捉えることでなされたが, K の幾何構造 (特に自己相似性) を反映するような p -エネルギー汎関数を構成するには $\{\tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ の “極限” (部分列各点極限や Γ -収束部分列極限) を考えるだけで十分かどうかは定かではない. 技術的な部分ではあるが, $\{\tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ の $L^p(K, m)$ 上の Γ -収束に関する部分列極限に対し「フラクタル上の解析学」の常套手段を適用することで所望の性質を有する p -エネルギー形式 $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p)$ を得ることができ, 次の定理を得る.

定理 2.7 ([21, Theorem 1.1]) 以下の条件を満たす $\mathcal{E}_p: \mathcal{F}_p \rightarrow [0, \infty)$ が存在する.

(a) $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_p} := (\|\cdot\|_{L^p(K, m)}^p + \mathcal{E}_p)^{1/p}$ は $\mathcal{F}_p$ の比較可能で一様凸なノルムを定める.

(b) (縮小性) 任意の $u \in \mathcal{F}_p$ と 1-Lipschitz 関数 $\varphi \in C(\mathbb{R})$ に対し, $\varphi \circ u \in \mathcal{F}_p$ かつ

$$\mathcal{E}_p(\varphi \circ u) \leq \mathcal{E}_p(u).$$

(c) (対称性) 任意の $u \in \mathcal{F}_p$ と $T \in D_4$ に対し, $u \circ T \in \mathcal{F}_p$ かつ $\mathcal{E}_p(u \circ T) = \mathcal{E}_p(u)$.

(d) (自己相似性) $\mathcal{F}_p \cap C(K) = \{u \in C(K) \mid \text{すべての } i \in S \text{ に対し } u \circ F_i \in \mathcal{F}_p\}$;

$$\mathcal{E}_p(u) = \rho_p^n \sum_{w \in W_n} \mathcal{E}_p(u \circ F_w) \quad \text{for any } n \in \mathbb{N} \text{ and } u \in \mathcal{F}_p. \quad (2.7)$$

(任意の $u \in \mathcal{F}_p$ と $w \in W_n$ に対し, $u \circ F_w \in \mathcal{F}_p$ となることは容易に分かる.)

注意 1.1-(3) で述べたように p -エネルギー測度 $\Gamma_p\langle u \rangle$ の構成も非自明な問題であったが, (2.7) の分解公式はエネルギーがどのように分布しているかを表しており, 直感的には n -cell K_w は $\rho_p^n \mathcal{E}_p(u \circ F_w)$ の mass を持つべきであることが示唆される. n -cell 同士が共通部分を持つため, この観察そのものを定義とすることは (技術的には) できないが, 最終的には次の定理の性質を満たす p -エネルギー測度が構成できる.

定理 2.8 ([21, Theorem 1.2]) 任意の $u \in \mathcal{F}_p$ に対し, $\Gamma_p\langle u \rangle(K_w) = \rho_p^n \mathcal{E}_p(u \circ F_w)$, $n \in \mathbb{N}$, $w \in W_n$ となるような K 上の有限 Borel 測度 $\Gamma_p\langle u \rangle$ が一意に存在する. また, 任意の $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ と $v \in \mathcal{F}_p \cap C(K)$ に対して $\Phi \circ v \in \mathcal{F}_p \cap C(K)$ となり, さらに次の連鎖率が成り立つ:

$$d\Gamma_p\langle \Phi \circ u \rangle(dx) = |\Phi'(v(x))|^p d\Gamma_p\langle u \rangle(dx). \quad (2.8)$$

注意 2.9. (1) (一般化 p -縮小性) 定理 2.7-(b) の縮小性よりさらに強く, $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p)$ が [14] で導入された一般化 p -縮小性という性質を満たすことまで分かる. さらに [14] ではその帰結 (より正確には Clarkson の不等式の帰結) として $\mathcal{E}_p$ の微分可能性が従い, Euclid 空間の場合における $(u, v) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^n} dx$ に相当する

$$\mathcal{E}_p(u; v) := \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_p(u + tv) \Big|_{t=0}, \quad u, v \in \mathcal{F}_p, \quad (2.9)$$

が定義できることを明らかにした. この結果は $\mathcal{E}_p$ に基づく非線形ポテンシャル論を展開する際に基礎となるものである.

(2) (エネルギー測度の表現) 本稿では省略したが $\Gamma_p\langle \cdot \rangle$ も縮小性, 対称性, 自己相似性を有する. 特に, (2.9) と同様に微分をすることで K 上の符号付き測度 $\Gamma_p\langle u; v \rangle$ が定義でき, (2.8) のような連鎖率がこの二変数版のエネルギー測度に対しても成り立つ [14, Theorem 5.12]. この事実より, $u \in \mathcal{F}_p \cap C(K)$ に対して, $\Gamma_p\langle u \rangle$ は次の性質を満たす一意的な測度としても特徴付けることができる:

$$\int_K \varphi d\Gamma_p\langle u \rangle = \mathcal{E}_p(u; u\varphi) - \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1} \mathcal{E}_p(|u|^{\frac{p}{p-1}}; \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}_p \cap C(K). \quad (2.10)$$

Euclid 空間の場合の $(u, v) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^n} dx$ に対して連鎖律, Leibniz 則を用いて (2.10) の右辺を計算すると $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi |\nabla u|^p dx$ となることを鑑みると (2.10)

を p -エネルギー測度の定義として採用したくなるが、残念ながら現状では (2.10) に基づく定義から始めて p -エネルギー測度の種々の性質をどう導けばよいか分かっていない。なお、 $p = 2$ の場合は、まさに (2.10) の表現公式が正則 Dirichlet 形式に対応するエネルギー測度の定義 [8, (3.2.14)] である。(注意 1.1-(3) も参照.)

3 Ahlfors 正則等角次元を実現する測度の候補

これまでの記述に何度か現れている Ahlfors 正則等角次元であるが、これは以下で定義する擬対称と呼ばれるクラスの距離空間の変形 (距離の取り替え) に関する不変量である。正確な定義は以下で与えられる。(擬対称変形や等角次元に関しては例えば [20] を参照.)

定義 3.1 (擬対称 (Quasisymmetry)). (X, ρ) を距離空間とし、 θ も X 上の距離とする。ある同相写像 $\eta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が存在して

$$\frac{\theta(x, a)}{\theta(x, b)} \leq \eta \left(\frac{\rho(x, a)}{\rho(x, b)} \right), \quad \forall x, a, b \in X \text{ with } x \neq b \quad (3.1)$$

となるとき、 θ は ρ に関して擬対称であるといい、 $\theta \underset{\text{QS}}{\sim} \rho$ と書く。

$\underset{\text{QS}}{\sim}$ が距離全体の上の同値関係となることは基本的な事実であり、 $\underset{\text{QS}}{\sim}$ が同相であることを導くことも容易に分かる。典型例は $\rho \underset{\text{QS}}{\sim} \rho^\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, 1]$ であり snowflake transformation と呼ばれている。ここで重要な観察は、 $\dim_{\text{H}}$ で Hausdorff 次元を表すことにすると $\dim_{\text{H}}(X, \rho^\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \dim_{\text{H}}(X, \rho)$ となり、($\dim_{\text{H}}(X, \rho) \neq 0$ であれば) 擬対称変形により Hausdorff 次元を任意に大きくすることができるということである。等角次元という概念はこの逆を問う：すなわち擬対称変形 (プラスその他の制約条件) による Hausdorff 次元の下限として定まる次元である。Ahlfors 正則等角次元は Ahlfors 正則性という (Hausdorff 測度に関する) 追加の制約条件を課したもので、以下のように定義される。

定義 3.2 (Ahlfors 正則等角次元). 距離空間 (X, ρ) に対し、その Ahlfors 正則等角次元 $d_{\text{ARC}}(X, \rho)$ を次式で定義する：

$$d_{\text{ARC}}(X, \rho) := \inf \left\{ p \left| \begin{array}{l} \theta \underset{\text{QS}}{\sim} \rho, \exists C \in [1, \infty) \text{ s.t. } \forall (x, r) \in X \times (0, \text{diam}(X, \rho)) \\ C^{-1}r^p \leq \mathcal{H}_\theta^p(B_\theta(x, r)) \leq Cr^p \end{array} \right. \right\}.$$

ここで、 $B_\theta(x, r) := \{y \in X \mid \theta(x, y) < r\}$ であり、 $\mathcal{H}_\theta^p$ は X 上の距離 θ に関する p -次元 Hausdorff 測度である。 $(C^{-1}r^p \leq \mathcal{H}_\theta^p(B_\theta(x, r)) \leq Cr^p)$ という Hausdorff 測度の距離球の mass の一様な制御が Ahlfors 正則性と呼ばれる条件であり、この条件は直ちに $p = \dim_{\text{H}}(X, \theta)$ であることを導く.)

Ahlfors 正則等角次元に関連する問題で最も重要であると認識されているのは、定義の $\inf$ が達成可能であるかどうかを問う達成可能性問題である。その背景には幾何学的群論における Cannon の予想がある。

Cannon の予想. G を Gromov 双曲群で, その Gromov 境界 $\partial_\infty G$ が $\mathbb{S}^2$ と同相であるものとする. (Gromov 境界には visual metrics と呼ばれる距離の族から自然な距離構造が備わることがよく知られている.) このとき G は Klein 群 (と等長) である.

Gromov 双曲群に関するある種の剛性に関する予想であるが, [4] によって $d_{\text{ARC}}(\partial_\infty G)$ の達成可能性問題に書き換えられることが示された.

定理 3.3 ([4, Theorem 1.1]) Cannon の予想は次と同値: G を Gromov 双曲群で, その Gromov 境界 $\partial_\infty G$ が $\mathbb{S}^2$ と同相であるならば, $d_{\text{ARC}}(\partial_\infty G)$ は達成可能である.

この定理により Ahlfors 正則等角次元の達成可能性を調べる問題の重要性が認識されたが, 一般に Gromov 双曲群の無限遠境界は非常に “ワイルド” な対象であるので, 包括的に取り扱うのは困難が伴う. そこで良い状況にまずは制限して考えるという方向で研究が進み (例えば Coxeter 群に関する [5] など), 自己相似フラクタルも d_{ARC} の達成可能性問題を取り扱いやすい設定だと考えられた. しかしながら, Sierpiński gasket のような有限分岐性を有するフラクタルは (典型的には) $d_{\text{ARC}} = 1$ という退化したケースになり, この問題を扱うには適切ではないクラスである (d_{ARC} が達成しないことが知られている). 達成可能性問題が non-trivial である例としては無限分岐的なものを考える必要があり, 最もシンプルであるだろう例として Sierpiński carpet が挙げられ, 実際に [4, Problem 6.2] でも problem としても述べられているが, これは 20 年来の重要未解決問題の一つである. なお, Sierpiński carpet の d_{ARC} の明示的な値を求めるというのはよりハードな問題で, 未解決である. しかし次の評価は知られている: (K, d) を Sierpiński carpet とすると,

$$1 + \frac{\log 2}{\log 3} \leq d_{\text{ARC}}(K, d) < \frac{\log 8}{\log 3}. \quad (3.2)$$

本稿で取り扱う [21] の最後の主結果は, Sierpiński carpet の d_{ARC} が達成されると仮定したもとの d_{ARC} を達成する距離/測度が満たすべき条件を $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p, \Gamma_p \langle \cdot \rangle)$ の言葉で記述するものである. (距離から Hausdorff 測度が対応するように, その逆も David–Semmes deformation と呼ばれる自然な対応がこの設定ではあるので, 距離/測度のいずれかの方に注目すれば十分である.)

定理 3.4 ([21, Theorem 1.7]) (K, d) を Sierpiński carpet, $p = d_{\text{ARC}}(K, d)$ とする. $d_{\text{ARC}}(K, d)$ が達成されることを仮定し, θ を $d_{\text{ARC}}(K, d)$ を達成する K 上の距離とする. このとき, ある関数 $u \in \mathcal{F}_p \cap C(K)$ と定数 $C \in [1, \infty)$ が存在して,

$$C^{-1} \mathcal{H}_\theta^p(A) \leq \Gamma_p \langle u \rangle(A) \leq C \mathcal{H}_\theta^p(A), \quad \forall A: K \text{ の Borel 集合.}$$

注意 3.5. 定理 3.4 は [12, Problem 7.7 とその後の段落] にインスパイアされたものであるが, 定理 3.4 の関数 $u \in \mathcal{F}_p$ が $\mathcal{E}_p$ に関する (適切な境界条件のもとでの) p -調和関数として取れるというのが [12] で述べられている予想である. p -調和関数の非線形性が本質的な障害となり, この予想の解決には残念ながら至っていない.

4 異なる指数 $p \neq q$ の比較

Korevaar–Schoen 型の表現 (2.6) から示唆されるように, $(1, p)$ -Sobolev 空間を捉えるために見るべきである “一階微分を捉える” 空間スケール指数 β_p/p に起因し, 「距離空間上の解析学」とは劇的に異なる現象が起こると予想される. では異なる $p \neq q \in (1, \infty)$ を比較した場合にどうなるであろうか? この方向性に関して, 2 つの (Sierpiński carpet 上での) 未解決問題と (他のフラクタル上での) 最近の進展を述べて本稿を終えたいと思う.

空間スケール指数 β_p/p が一般に p に依存することから, $\mathcal{F}_p$ を捉えるために見るべき “一階微分の構造” も p に依存することが予想される. 次の問題は p -エネルギー測度と q -エネルギー測度の関係を問うものである.

問題 4.1. $p \neq q \in (1, \infty)$ とし, $u_s \in \mathcal{F}_s$, $s \in \{p, q\}$ とする. このとき $\Gamma_p\langle u_p \rangle$ と $\Gamma_q\langle u_q \rangle$ は互いに特異か?

Sierpiński carpet の場合は問題 4.1 は未解決であるが, strongly symmetric p.-c.f. self-similar set というクラスの中では, 自己相似集合の境界の相異なる二点間を結ぶ単純曲線が一意的でないかどうかという幾何学的条件が $\Gamma_p\langle u_p \rangle \perp \Gamma_q\langle u_q \rangle$ という特異性が起こるかどうかの必要十分条件であることを [15] で示した. (例えば, Sierpiński gasket では $\Gamma_p\langle u_p \rangle \perp \Gamma_q\langle u_q \rangle$ という特異性が起こる. この特異性に関して Sierpiński gasket の場合に焦点を当てた概説 [13] も参照.) [1] では Laakso-type 自己相似集合に対しても, 特異性の必要十分条件が基礎となるレベル 1 グラフのみで記述された条件として得られている.

次の Sobolev 空間の比較は問題 4.1 よりもハードな問題であると予想している.

問題 4.2. $p \neq q \in (1, \infty)$ とする. このとき $\mathcal{F}_p \cap \mathcal{F}_q$ は定数関数以外の関数を含むか?

実際, 問題 4.2 は Sierpiński carpet の場合に未解決であるだけでなく, Sierpiński gasket の場合でさえも本質的な進展を得られていないのが現状である. その一方で, [1] では Laakso diamond space(図 1 右) という自己相似集合に, 自己相似構造の観点から自然な距離と測度 (各 n -cell に一様に重み付けをするような距離と測度で, Hausdorff 次元は $\frac{\log 6}{\log 4}$ となる) が備わった場合を考えると, $\mathcal{F}_p \cap \mathcal{F}_q = \{\text{constant functions}\}$ になるという Sobolev 空間の特異性を明らかにした.

参考文献

- [1] R. Anttila, S. Eriksson-Bique and R. Shimizu, Construction of self-similar energy forms and singularity of Sobolev spaces on Laakso-type fractal spaces, preprint, 2025. [arXiv:2503.13258](https://arxiv.org/abs/2503.13258)
- [2] M. T. Barlow and R. F. Bass, The construction of Brownian motion on the Sierpiński carpet, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **25** (1989), no. 3, 225–257.
- [3] M. T. Barlow and R. F. Bass, Brownian motion and harmonic analysis on Sierpinski carpets, *Canad. J. Math.* **51** (1999), no. 4, 673–744.

- [4] M. Bonk and B. Kleiner, Conformal dimension and Gromov hyperbolic groups with 2-sphere boundary, *Geom. Topol.* Volume 9, Number 1 (2005), 219–246.
- [5] M. Bourdon, B. Kleiner, Combinatorial modulus, the combinatorial Loewner property, and Coxeter groups, *Groups Geom. Dyn.* **7** (2013), 39 – 107.
- [6] S. Cao, Z-Q. Chen and T. Kumagai, On Kigami’s conjecture of the embedding $\mathcal{W}^p \subset C(K)$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **152** (2024), no. 8, 3393–3402.
- [7] M. Carrasco Piaggio, On the conformal gauge of a compact metric space, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **46** (2013), no. 3, 495–548.
- [8] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, De Gruyter Stud. Math., 19, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011.
- [9] J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam and J. T. Tyson, *Sobolev spaces on metric measure spaces. An approach based on upper gradients*, New Math. Monogr., 27, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [10] P. E. Herman, R. Peirone and R. S. Strichartz, p -energy and p -harmonic functions on Sierpinski gasket type fractals, *Potential Anal.* **20** (2004), no. 2, 125–148.
- [11] 梶野 直孝, フラクタル上のラプラシアン・熱方程式入門, 令和 4 年度 (第 43 回) 数学入門公開講座テキスト, 2022. <https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ja/special-01.back.html>
- [12] N. Kajino and M. Murugan, On the conformal walk dimension: quasisymmetric uniformization for symmetric diffusions, *Invent. Math.* **231** (2023), no. 1, 263–405.
- [13] N. Kajino and R. Shimizu, p -Energy forms on fractals: recent progress, From Classical Analysis to Analysis on Fractals: A Tribute to Robert Strichartz, Volume 2, Applied and Numerical Harmonic Analysis, *Birkhäuser, Cham* (to appear).
- [14] N. Kajino and R. Shimizu, Contraction properties and differentiability of p -energy forms with applications to nonlinear potential theory on self-similar sets, preprint, 2024. [arXiv:2404.13668v2](https://arxiv.org/abs/2404.13668v2)
- [15] N. Kajino and R. Shimizu, On singularity of p -energy measures among distinct values of p for strongly symmetric p.-c.f. self-similar sets, in preparation.
- [16] S. Keith and B. Kleiner, unpublished work.
- [17] J. Kigami, *Analysis on fractals*, Cambridge Tracts in Math., 143 Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [18] J. Kigami, Conductive homogeneity of compact metric spaces and construction of p -energy, *Mem. Eur. Math. Soc.* Vol. 5 (2023).
- [19] S. Kusuoka and X. Y. Zhou, Dirichlet forms on fractals: Poincaré constant and resistance, *Probab. Theory Related Fields* **93** (1992), no. 2, 169–196.
- [20] J. M. Mackay and J. T. Tyson, *Conformal dimension. Theory and application*, Univ. Lecture Ser., 54, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [21] M. Murugan and R. Shimizu, First-order Sobolev spaces, self-similar energies and energy measures on the Sierpiński carpet, *Comm. Pure Appl. Math.* (to appear)
- [22] R. Shimizu, Construction of p -energy and associated energy measures on Sierpiński carpets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **377** (2024), no. 2, 951–1032.