

Gaussian correlation inequality for centered convex sets

辻 寛 (埼玉大学大学院理工学研究科)

1 序

1.1 Gaussian correlation 不等式と主結果

本予稿を通して $\gamma = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} dx$ は $\mathbb{R}^n$ 上の n 次元正規分布とする. $n = 2$ 次元平面 $\mathbb{R}^2$ 上の 2 つの直交する帯 $S_1 = [-1, 1] \times \mathbb{R}$ と $S_2 = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ に対して, $\gamma(S_1 \cap S_2)$ を考える. このとき Fubini の定理より

$$\gamma(S_1 \cap S_2) = \gamma(S_1)\gamma(S_2) \quad (1.1)$$

であることがわかる. では S_1, S_2 をより一般の可測集合に取り換えた場合, $\gamma(S_1 \cap S_2)$ と $\gamma(S_1)\gamma(S_2)$ の間の関係としてどのようなことが言えるであろうか? この問いに関してすぐにわかる評価は

$$\gamma(S_1 \cap S_2) \leq \sqrt{\gamma(S_1)\gamma(S_2)}$$

というものである¹. これは $S_1 \cap S_2 \subset S_i$ ($i = 1, 2$) であることと測度の単調性から容易に従う.

一方で逆向きの評価は一般に容易には期待できない. 実際 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ となる集合を考えれば, $\gamma(S_1 \cap S_2) = 0$ だが $\gamma(S_1)\gamma(S_2) \neq 0$ となることがあるためである. したがって, この状況を避けるために S_1, S_2 に対して $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ となるような適切な条件を課すことが必要となる. Gaussian correlation 不等式 (以降 GCI と略記) は原点对称 (以降, 単に対称と呼ぶ) かつ凸という条件の下であれば, 逆向きの評価が成立することを示す不等式である.

Theorem 1.1 ([20], [21]). 任意の対称な凸集合 $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\gamma(K_1 \cap K_2) \geq \gamma(K_1)\gamma(K_2). \quad (1.2)$$

K_1, K_2 に対称性や凸性がなければ, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ となることがあるので一般に (1.2) は成立しないことを注意しておく. また (1.1) で具体的に見た帯 S_1, S_2 は対称な凸集合なので, (1.2) は最良な不等式である.

GCI ははじめ Das Gupta et al.[10], Khatri[14], Šidák[23] らによって独立に調べられており, K_2 が Strip の時が最初に示されている. その後 $n = 2$ の場合は Pitt によって解決された. 一般次元の場合に関しては, 多くの部分的な解決 [6, 9, 12, 13, 22, 24] が与えられており, 最終的には Royen によって完全に解決された. またその後 Latała–Matlak[15] によってより平易な Royen の証明が与えられている. さらに最近 Milman[17] によって, GCI の簡単な別証明が与えられた. Milman の証明における最も新しい点は, GCI と inverse Brascamp–Lieb 不等式との関連を発見し, 我々が以前に導入した symmetric inverse Brascamp–Lieb 不等式 [18] の拡張版を利用したことである. Brascamp–Lieb 不等式についての詳細は 2, 3 節にて紹介するが, この不等式はもともと

¹右辺の指数 $\frac{1}{2}$ は最良である. 実際ある $\alpha > 0$ が存在して, 任意の $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\gamma(S_1 \cap S_2) \leq (\gamma(S_1)\gamma(S_2))^\alpha$$

と仮定すると, 特に $S_1 = S_2 = S$ の場合に $\gamma(S) \leq \gamma(S)^{2\alpha}$ を得る. γ は確率測度なので $\alpha \leq \frac{1}{2}$ でなければならないが, 実際 $\alpha = \frac{1}{2}$ のときが最良.

と調和解析や凸幾何学において利用・研究されてきた歴史があり、幅広い幾何学的・解析的な不等式を包括する不等式として知られている [1, 2, 5, 25].

本予稿で紹介する我々の結果は Milman の発見に感化されたものであり、GCI の一般化を与える．我々の結果を述べるために次の記号を導入する．可測集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ に対して、 γ に関する重心を

$$\text{bar}_\gamma(S) := \int_S x \frac{d\gamma}{\gamma(S)}$$

と定める．とくに S が対称な集合であれば $\text{bar}_\gamma(S) = 0$ が成り立つことがわかる．次の結果が本予稿の主結果である．

Theorem 1.2. 凸集合 $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ が

$$\text{bar}_\gamma(K_1) = \text{bar}_\gamma(K_2) = 0$$

をみたすとき、(1.2) が成り立つ．

さきほど述べたように K_1, K_2 が特に対称であれば

$$\text{bar}_\gamma(K_1) = 0 = \text{bar}_\gamma(K_2)$$

を満たすので、Theorem 1.2 は Royen の GCI を含む．非対称な凸集合に対する GCI は特別な場合に Szarek–Werner[24] や Cordero-Erausquin[9] によって示されている．またより一般に $\text{bar}_\gamma(K_1) = \text{bar}_\gamma(K_2)$ の下での (1.2) の成立は Szarek–Werner によって提示されている問題であり、我々の原論文 [19] では Szarek–Werner の問題を肯定的に解決することにも成功している．

最後に、Theorem 1.2 では二つの集合と一つの測度 γ に対してのみの関係を与えたが、複数個の集合と測度に対しても同様の結果が得られることを述べる．一般に正値対称行列 $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が与えられたとき、 γ_Σ で重心 0、共分散行列が Σ の正規分布を表すこととする．

Theorem 1.3. $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を正値対称行列であって $\Sigma_0^{-1} \geq \Sigma_i^{-1}$ ($i = 1, \dots, m$) を満たすとする．また $K_1, \dots, K_m \subset \mathbb{R}^n$ を

$$\text{bar}_{\gamma_{\Sigma_i}}(K_i) := \int_{K_i} x \frac{d\gamma_{\Sigma_i}}{\gamma_{\Sigma_i}(K_i)} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

となる凸集合とする．このとき

$$\gamma_{\Sigma_0} \left(\bigcap_{i=1}^m K_i \right) \geq \prod_{i=1}^m \gamma_{\Sigma_i}(K_i) \quad (1.3)$$

が成り立つ．

とくに $m = 2$, $\Sigma_0 = \Sigma_1 = \Sigma_2 = \text{id}_n$ の場合が Theorem 1.2 に対応する．また $\Sigma_0 = \Sigma_1 = \dots = \Sigma_m = \text{id}_n$ の場合、 $K_1, \dots, K_m$ がすべて対称な凸集合であれば (1.3) は Theorem 1.1 から帰納的な議論で容易に確認される．実際このことは K_1, K_2 が対称な凸集合であれば $K_1 \cap K_2$ も対称な凸集合となることから従う．一方で非対称な場合はその限りではない．なぜならば K_1, K_2 が重心 0 の凸集合であっても、 $K_1 \cap K_2$ が重心 0 な凸集合であるとは限らないからである．ゆえに Theorem 1.2 から (1.3) が従うかは明らかでない．

また仮定 $\Sigma_0^{-1} \geq \Sigma_i^{-1}$ は最良であることも注意しておく．すなわち、 $\Sigma_0^{-1} \geq \Sigma_i^{-1}$ が成り立たない場合は (1.3) は成立しないことが確認できる．

Theorem 1.3 の証明は Theorem 1.2 の証明と本質的に同じであるため、本予稿では Theorem 1.2 の証明にのみ言及する．

1.2 Gaussian correlation 不等式と同値な表現

本節では GCI と等価な解析的・確率論的不等式を紹介する．実際，Royen 及び Milman は GCI の確率論的不等式を直接示すことによって，GCI の証明を与えた．一方で本予稿では解析的不等式を直接示すことによって，GCI の証明を与える．とくに Milman と我々の証明では次節以降で述べる symmetric inverse Brascamp–Lieb 不等式を使う点は同じであるが，直接示す不等式が異なるという点において少し違いがあることを述べておく．

以下に Theorem 1.1 と同値な不等式を 2 つ列挙する：

- (1) 任意の非負値 log-concave 偶関数 $h_1, h_2 \in L^1(\gamma)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_1 h_2 d\gamma \geq \int_{\mathbb{R}^n} h_1 d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} h_2 d\gamma. \quad (1.4)$$

ここで $\mathbb{R}^n$ 上の非負値関数 h が log-concave であるとは， $-\log h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が $\mathbb{R}^n$ 上で convex であることを意味する．

- (2) 任意の正値対称行列 $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ と $(X_1, \dots, X_n) \sim N(0, \Sigma)$ となる確率変数 $X_1, \dots, X_n$ ， $n = n_1 + n_2$ となる $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_i| \leq 1 \right) \geq \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq n_1} |X_i| \leq 1 \right) \mathbb{P} \left(\max_{n_1+1 \leq i \leq n} |X_i| \leq 1 \right). \quad (1.5)$$

以上の同値性について簡単な証明を以下に述べる．まず (1.4) において $h_i = \mathbf{1}_{K_i}$ とすれば，(1.2) が従うことが容易にわかる．逆に (1.2) から (1.4) が従うことは，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h_1 h_2 d\gamma &= \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma(\{h_1 > s\} \cap \{h_2 > t\}) ds dt \\ &\geq \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma(\{h_1 > s\}) \gamma(\{h_2 > t\}) ds dt = \int_{\mathbb{R}^n} h_1 d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} h_2 d\gamma \end{aligned}$$

からわかる．

一方で (1.5) は

$$\gamma \left(\Sigma^{-\frac{1}{2}} [-1, 1]^n \right) \geq \gamma \left(\Sigma^{-\frac{1}{2}} ([-1, 1]^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) \right) \gamma \left(\Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbb{R}^{n_1} \times [-1, 1]^{n_2}) \right)$$

と同値なので，とくに (1.2) の特別な場合とみなせる．最後に (1.5) から (1.2) の証明の概要を述べる．まず適切な近似により K_1, K_2 を対称な polytope としてよい．今

$$K_i = \bigcap_{j=1}^{N_i} \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, u_{ij} \rangle| \leq 1\}, \quad \exists u_{ij} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

とし，ガウシアン確率ベクトル $X \sim N(0, \text{id}_n)$ に対して $X_{j'} := \langle X, u_{ij} \rangle$ ($1 \leq j' \leq N_1$ のときは $i = 1$ かつ $j = j'$ ， $N_1 + 1 \leq j' \leq N_1 + N_2$ のときは $i = 2$ かつ $j = j' - N_1$) とすれば，(1.2) はある非負値対称行列 $\Sigma \in \mathbb{R}^{N_1+N_2}$ に対する (1.5) と書き表せる．任意の非負値対称行列は正値対称行列によって近似されるので，結局 (1.5) から (1.2) が従うことがわかる．

以上で Royen の GCI と同値な主張を 2 つ与えた．本予稿では特に解析的な主張である (1.4) を直接証明する．より具体的に Theorem 1.2 を示すためには，次の主張を示せば十分である．

Theorem 1.4. 任意の非負値 log-concave 関数 $h_1, h_2 \in L^1(\gamma)$ であって，

$$\int_{\mathbb{R}^n} x \frac{h_1 d\gamma}{\int_{\mathbb{R}^n} h_1 d\gamma} = \int_{\mathbb{R}^n} x \frac{h_2 d\gamma}{\int_{\mathbb{R}^n} h_2 d\gamma} = 0$$

となる関数に対して (1.4) が成り立つ．

上の議論と同様に $h_i := \mathbf{1}_{K_i}$ とすれば Theorem 1.2 をえる.

次節以降では Theorem 1.4 がどのように示されるかを解説する. 特に重要な道具は symmetric inverse Brascamp–Lieb 不等式である. この不等式を導入するにあたって, まず Brascamp–Lieb 不等式と inverse Brascamp–Lieb 不等式がどのような不等式であるかを紹介する.

2 Brascamp–Lieb 不等式と inverse Brascamp–Lieb 不等式

2.1 Brascamp–Lieb 不等式

Brascamp–Lieb 不等式を述べるためにいくつかの記号を用意する.

- $m \in \mathbb{N}$: 関数の個数.
- $n_1, \dots, n_m, N \in \mathbb{N}$: 空間の次元.
- $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: 指数.
- $B_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \dots, m$: 線形写像.
- $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$: 対称行列.

また $\mathbf{B} = (B_i)_{i=1}^m$, $\mathbf{c} = (c_i)_{i=1}^m$ とあらわすことにする. このとき三つ組 $(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q)$ を Brascamp–Lieb データ (略記して BL データ) と呼ぶ. 各 BL データに対して, Brascamp–Lieb 不等式とは次の不等式を表す:

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\langle Qx, x \rangle} \prod_{i=1}^m f_i(B_i x)^{c_i} dx \leq \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q) \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i dx_i \right)^{c_i}, \quad \forall f_i \in L_+^1(\mathbb{R}^{n_i}). \quad (2.1)$$

ここで

$$L_+^1(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} f dx > 0, \quad f \geq 0 \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

とし, $\text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q) \in (0, \infty]$ は (2.1) を満たす最良定数とする. 同じことであるが,

$$\text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q) := \sup_{f_i \in L_+^1(\mathbb{R}^{n_i})} \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q; \mathbf{f}), \quad \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q; \mathbf{f}) := \frac{\int_{\mathbb{R}^N} e^{\langle Qx, x \rangle} \prod_{i=1}^m f_i(B_i x)^{c_i} dx}{\prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i dx_i \right)^{c_i}}$$

とあらわせる. ここで $\mathbf{f} := (f_i)_{i=1}^m$ とした. 以降 $\text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q)$ を Brascamp–Lieb 定数 (略記して BL 定数) と呼ぶ.

以下に Brascamp–Lieb 不等式の具体例を述べる. もっとも単純な例として始めに Hölder 不等式を紹介する.

Example 2.1 (Hölder 不等式). $m = 2$, 固定された $n \in \mathbb{N}$ に対して $n_1 = n_2 = N := n$, $p \in (1, \infty)$ に対して $c_1 := \frac{1}{p}$, $c_2 := \frac{1}{p'} := 1 - \frac{1}{p}$, $B_1 = B_2 := \text{id}_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Q := 0$ とする. このとき (2.1) は

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x)^{\frac{1}{p}} f_2(x)^{\frac{1}{p'}} dx \leq \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_1 dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_2 dx \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad \forall f_1, f_2 \in L_+^1(\mathbb{R}^n) \quad (2.2)$$

となる. とくに $h_i := f_i^{c_i}$, $i = 1, 2$ として取り換えれば (2.2) は

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_1 h_2 dx \leq \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q) \|h_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|h_2\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

となり, Hölder 不等式の形になることが確認できる. Hölder 不等式の最良定数は 1 なので

$$\text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = 1$$

であり, 特に $f_1 = f_2 = e^{-\pi|\cdot|^2}$ とすれば (2.2) の等号が成立する.

もう一つ別の幾何学的な具体例として, Loomis–Whitney 不等式を紹介する.

Example 2.2 (Loomis–Whitney 不等式). Loomis–Whitney 不等式とは次の不等式である: 任意の可測集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$|E| \leq \prod_{i=1}^n |P_{e_i^\perp}(E)|^{\frac{1}{n-1}}. \quad (2.3)$$

ここで $|\cdot|$ はルベーグ測度とし, $\mathbb{R}^n$ 内の標準基底 $e_1, \dots, e_n$ に対して $P_{e_i^\perp} : \mathbb{R}^n \rightarrow e_i^\perp \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ を $e_i^\perp$ への直交射影とする.

Loomis–Whitney 不等式を (2.1) から導くために次の BL データを考える. $m = N := n$, $n_1 = \dots = n_m := n - 1$, $c_1 = \dots = c_m := \frac{1}{n-1}$, $B_i := P_{e_i^\perp}$, $\mathcal{Q} := 0$ とする. このとき (2.1) は

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n f_i \left(P_{e_i^\perp} x \right)^{\frac{1}{n-1}} dx \leq \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_i dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad \forall f_i \in L_+^1(\mathbb{R}^{n-1}) \quad (2.4)$$

となる. ゆえに可測集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ に対して $f_i := \mathbf{1}_{P_{e_i^\perp}(E)}$ とおけば,

$$\begin{aligned} |E| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{P_{e_i^\perp}(E)} \left(P_{e_i^\perp} x \right)^{\frac{1}{n-1}} dx \\ &\leq \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbf{1}_{P_{e_i^\perp}(E)} dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} = \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \prod_{i=1}^n |P_{e_i^\perp}(E)|^{\frac{1}{n-1}} \end{aligned}$$

となり, 定数を見れば Loomis–Whitney 不等式 (2.3) の形が従う. 最後に $\text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = 1$ を確認すれば (2.3) を得る. 実際, (2.4) の最良定数は 1 であることが知られているので,

$$\text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = 1$$

が成り立ち, さらに $f_1 = \dots = f_n = e^{-\pi|\cdot|^2}$ とすれば (2.4) の等号が成立する.

以上で挙げた不等式以外の他の不等式の例として Young の畳み込み不等式がある. ここではその詳細は述べないが, 原論文の Brascamp–Lieb[7] の (2.1) を考える動機は Young の畳み込み不等式の最良定数を求めることであることを注意しておく (Young の最良定数はほぼ同時期に Beckner[4] によっても与えられている). また他の (2.1) の例として熱流に対する hypercontractivity が知られている [16]. 特にこの例は $\mathcal{Q} \neq 0$ となる例である.

上で少し述べたように Brascamp–Lieb の原論文での動機は Young の畳み込み不等式の最良定数を求めることにあった. 同様に Brascamp–Lieb 不等式 (2.1) に関するもっとも基本的な問題は BL 定数 $\text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$ を求めることである. この問題に関して, Examples 2.1, 2.2 を思い出しみると, いずれの場合においても不等号の等号達成は対称なガウシアンで達成されていた. より一般に, Lieb[16] は BL 定数を求めるには対称なガウシアンだけを考えれば十分であることを示した.

Theorem 2.3 ([16]). $(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$ を, $c_1, \dots, c_m > 0$, $\mathcal{Q} \leq 0$ となる²BL データとする. このとき

$$\text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = \text{BL}_g(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \quad (2.5)$$

²対称行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が $A \geq 0$ ($A > 0$) であることを, 任意の $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ ($\langle Ax, x \rangle > 0$) とする.

が成り立つ。ここで

$$\text{BL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) := \sup_{\substack{A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \\ A_i > 0}} \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; g_{A_1}, \dots, g_{A_m})$$

とし、正値対称行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して $g_A(x) := e^{-\frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle}$ とした。

Lieb の定理は BL 定数を求めるうえで非常に強力な道具となる。実際、(2.5) の右辺の 2 乗は

$$\text{BL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})^2 = \sup_{\substack{A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \\ A_i > 0}} \frac{\det \left(2\pi \left(\sum_{i=1}^m c_i A_i - 2\mathcal{Q} \right)^{-1} \right)}{\prod_{i=1}^m (\det 2\pi A_i^{-1})^{c_i}} \quad (2.6)$$

と書き下せることがわかり、ゆえに有限次元の最適化問題に帰着される。実際 $\mathcal{Q} = 0$ の場合において、(2.6) を計算するためのアルゴリズムや計算量などが Garg et al.[11] によって調べられている。また $\mathcal{Q} = 0$ の場合において、Lieb の定理を通して BL 定数が有限となる BL データの必要十分条件、および (2.1) の等号達成のための BL データの必要十分条件などが Bennett et al.[5] によって調べられている。

2.2 Inverse Brascamp–Lieb 不等式

前節では Brascamp–Lieb 不等式と Lieb の定理について紹介した。本節では (2.1) と逆向きの不等式である inverse Brascamp–Lieb 不等式を紹介する。BL データ $(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$ が与えられたとき、inverse Brascamp–Lieb 不等式とは次の不等式を指す：

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\langle \mathcal{Q}x, x \rangle} \prod_{i=1}^m f_i(B_i x)^{c_i} dx \geq \text{I}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i dx_i \right)^{c_i}, \quad \forall f_i \in L_+^1(\mathbb{R}^{n_i}). \quad (2.7)$$

ここで $\text{I}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \in [0, \infty]$ は (2.7) を満たす最良定数とする。同じことであるが、

$$\text{I}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) := \inf_{f_i \in L_+^1(\mathbb{R}^{n_i})} \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; \mathbf{f})$$

とあらわせる。前節と同様に、inverse Brascamp–Lieb 不等式は多くの不等式をその具体例として含む。具体的には reverse Hölder 不等式、reverse Young 不等式、reverse hypercontractivity などが挙げられる。

Inverse Brascamp–Lieb 不等式ははじめ Chen–Dafnis–Paouris[8] によって考察され、その後 Barthe–Wolff[3] によって体系的な理論が構築された。とくに Barthe–Wolff は inverse Brascamp–Lieb 不等式における Lieb の定理の対応物を与えた。それを述べるためにいくつかの記号を導入する。

- $c_1, \dots, c_m$ を適当に並び替えることによって、 $m_+ \in \mathbb{N}$ を $c_1, \dots, c_{m_+} > 0 > c_{m_++1}, \dots, c_m$ とする。
- $\mathbf{B}_+ := (B_1, \dots, B_{m_+}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{m_+} \mathbb{R}^{n_i}$ 。
- $s^-(\mathcal{Q}) : \mathcal{Q}$ の負の固有値の個数。

以上の記号の下、次の事実が Barthe–Wolff によって示されている。

Theorem 2.4 ([3]). $(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$ を,

$$\mathcal{Q}|_{\ker \mathbf{B}_+} < 0, \quad (2.8)$$

$$N \geq s^-(\mathcal{Q}) + \sum_{i=1}^{m_+} n_i \quad (2.9)$$

を満たす BL データとする。このとき

$$I(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = I_g(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \quad (2.10)$$

が成り立つ。ここで

$$I_g(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) := \inf_{\substack{A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \\ A_i > 0}} \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; g_{A_1}, \dots, g_{A_m}).$$

Lieb の定理の直後に述べたのと同様に、(2.10) は inverse Brascamp–Lieb 不等式の最良定数を求める際に非常に強力である。条件 (2.8) と (2.9) について、一般にはこれらの条件を外すことはできないことが知られており、Barthe–Wolff の非退化条件と呼ばれている。実際 (2.8) が成り立たない場合、

$$0 = I(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) < I_g(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = \infty$$

となる場合がある。しかしながらいつこの現象が起こるかは $\mathbf{B}_+$ の全射性によってのみ決まることが Barthe–Wolff によって示されている。一方で条件 (2.9) を満たさない場合、次の不等式が成り立つことがある：

$$\inf_{\substack{A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, A_i > 0 \\ a_i \in \mathbb{R}^{n_i}}} \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; \tilde{g}_{a_1, A_1}, \dots, \tilde{g}_{a_m, A_m}) < I_g(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \in [0, \infty]. \quad (2.11)$$

ここで正値対称行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ と $a \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $\tilde{g}_{a, A}(x) := e^{-\frac{1}{2}\langle A(x-a), x-a \rangle}$ とした。すなわち条件 (2.9) は非対称ガウシアンが最良定数を作り出す状況を排除するための条件を与える。次節にて我々は Barthe–Wolff の非退化条件 (2.8), (2.9) を課さない代わりに、考える関数のクラスを重心が 0 の関数に制限することで (2.10) が成り立つことを述べる。特に非対称ガウシアンの重心は 0 ではないため (2.11) の状況は次節の設定においても排除される。

3 Symmetric inverse Brascamp–Lieb 不等式

この節でははじめに、なぜ GCI が inverse Brascamp–Lieb 不等式と関連しているのかを述べたあとで、実際に GCI を示すうえで必要となる symmetric inverse Brascamp–Lieb 不等式を紹介する。まず Theorem 1.2 を示すためには Theorem 1.4 を示せば十分であったことを思い出す。とくに $f_i := h_i e^{-\frac{1}{2}|\cdot|^2}$ ($i = 1, 2$) と取り換えれば、(1.4) は

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2}|x|^2} f_1 f_2 dx \geq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f_1 dx \int_{\mathbb{R}^n} f_2 dx \quad (3.1)$$

となり、inverse Brascamp–Lieb 不等式の形になっていることがわかる。実際 BL データとして

$$m = 2, \quad n_1 = n_2 = N = n, \quad c_1 = c_2 = 1, \quad B_1 = B_2 = \text{id}_n, \quad \mathcal{Q} = \frac{1}{2} \text{id}_n \quad (3.2)$$

とすれば、(2.7) は定数部分を見捨れば (3.1) の形になる。ただし注意すべき点は、(3.1) において f_i が任意の関数ではなく、 $f_i e^{\frac{1}{2}|\cdot|^2}$ が log-concave かつ $\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i dx_i = 0$ となる関数であることである。実際 f_i にそのような仮定を課さなければ、BL データ (3.2) に対応する (2.7) の最良定数は

$I(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = 0$ となる。ゆえに (3.1) を (2.7) から示したい場合、考える関数 f_i のクラスを適切に制限しなければならない。一方で関数のクラスを制限した場合に Barthe–Wolff による Lieb の定理 (2.10) が成り立つかは明らかではない。この節で述べる我々の結果は、適切な関数のクラスであれば Lieb の定理がやはり成り立つことを確認したことである。

より具体的に我々の結果を述べるためにいくつかの用語、及び記号を導入する。非負値対称行列 $G > 0$ と関数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ に対して、 f が G -uniformly log-concave とは、 $\frac{f}{g_G}$ が $\mathbb{R}^n$ 上で log-concave であることと定める。とくに $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ であれば、これは $\nabla^2(-\log f) \geq G$ に同値である。たとえば (3.1) を得る際に $f_i = h_i e^{-\frac{1}{2}|\cdot|^2}$ として関数の取り換えを行ったが、このときの f_i は id_n -uniformly log-concave である。また一般に、正値対称行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して $A - G \geq 0$ (以降 $A \geq G$ とかく) であることは g_A が G -uniformly log-concave となることに同値である。

さらに $\mathcal{F}_G^{(o)}(\mathbb{R}^n)$ によって、 G -uniformly log-concave かつ重心 0 となる $L_+^1(\mathbb{R}^n)$ 関数全体を表すことにする、すなわち

$$\mathcal{F}_G^{(o)}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L_+^1(\mathbb{R}^n) : f \text{ is } G\text{-uniformly log-concave with } \text{bar}(f) := \int_{\mathbb{R}^n} x \frac{f dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f dx} = 0 \right\}.$$

我々の関心は次の最良定数を調べることである。

Definition 3.1. $(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$ を BL データとする。また $G_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ を非負値対称行列 ($i = 1, \dots, m$) とし、 $\mathbf{G} := (G_i)_{i=1}^m$ とかく。また

$$I_{\mathbf{G}}^{(o)}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) := \inf_{\substack{f_i \in \mathcal{F}_{G_i}^{(o)}(\mathbb{R}^{n_i}) \\ \text{bar}(f_i) = 0}} \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; \mathbf{f}),$$

$$I_{\mathbf{G}}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) := \inf_{\substack{A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \\ A_i \geq G_i}} \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; g_{A_1}, \dots, g_{A_m}).$$

以上のもと、次が我々の中核をなす結果であり、我々の設定における Lieb の定理である。

Theorem 3.2. $(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$ を、 $c_1, \dots, c_m > 0$ となる BL データとする。また $G_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ を非負値対称行列 ($i = 1, \dots, m$) とする。このとき

$$I_{\mathbf{G}}^{(o)}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = I_{\mathbf{G}}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}). \quad (3.3)$$

Theorem 3.2 は我々の以前の研究 [18] において特別な BL データと $\mathbf{G}$ の下で証明された。[18] では Blaschke–Santaló 不等式と呼ばれる凸幾何学の不等式及びその一般化を与えるために Theorem 3.2 が利用された。その後 Milman [17] によって一般の $\mathbf{G}$ に対して (3.3) が証明され、GCI の別証明が与えられた。Theorem 3.2 はこれらの先行研究 [18, 17] のどちらの主張も含んでいる。

最後に Theorem 3.2 の証明について簡単な解説を試みる。証明において重要な性質は次である：もしある関数 $f_i \in \mathcal{F}_{G_i}^{(o)}$ が存在して $I_{\mathbf{G}}^{(o)}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; \mathbf{f})$ が成り立てば、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$I_{\mathbf{G}}^{(o)}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; 2^{\frac{kn_i}{2}} \mathbf{f}^{(2^k)}(2^{\frac{k}{2}} \cdot)), \quad f_i^{(2^k)} := \overbrace{f_i * \dots * f_i}^{2^k}$$

が成り立つ。この仮定と帰結を同時に認めると、特に中心極限定理より $k \rightarrow \infty$ として $2^{\frac{kn_i}{2}} f_i^{(2^k)}(2^{\frac{k}{2}} \cdot)$ がある対称なガウシアン ξ_i に収束するので、

$$I_{\mathbf{G}}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \geq I_{\mathbf{G}}^{(o)}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; 2^{\frac{kn_i}{2}} \mathbf{f}^{(2^k)}(2^{\frac{k}{2}} \cdot)) = \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; \boldsymbol{\xi}) \geq I_{\mathbf{G}}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$$

となり、(3.3) をえる。

4 Gaussian correlation 不等式の証明

最後に Theorem 1.2 がどのようにして Theorem 3.2 から導かれるかを紹介する．Theorem 1.3 も殆ど同様に示されるが，その詳細は省略する．

まず我々の目標は Theorem 1.4 を示すことであった．さらに 3 節でも述べたように，Theorem 1.4 は任意の id_n -uniformly log-concave 関数 f_1, f_2 であって $\text{bar}(f_1) = \text{bar}(f_2) = 0$ となる関数に対して (3.1) が成り立つことに同値であった．同じことであるが，

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2}|x|^2} f_1 f_2 dx \geq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f_1 dx \int_{\mathbb{R}^n} f_2 dx, \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{\text{id}_n}^{(o)}(\mathbb{R}^n) \quad (4.1)$$

を示せば十分である．一方で Theorem 3.2 より我々は次を知っている：

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2}|x|^2} f_1 f_2 dx \geq I_{\mathcal{G}_G}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \int_{\mathbb{R}^n} f_1 dx \int_{\mathbb{R}^n} f_2 dx, \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{\text{id}_n}^{(o)}(\mathbb{R}^n).$$

ここで BL データ $(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$ は (3.2) で与えられたものであり， $G_i = \text{id}_n$ ($i = 1, 2$) である．よって

$$I_{\mathcal{G}_G}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \quad (4.2)$$

を示せば，証明を終える．実際 (4.2) は定義から次の主張と同値である．

Lemma 4.1. 任意の正値対称行列 $A_1, A_2 \geq \text{id}_n$ に対して

$$\frac{\det A_1 \det A_2}{\det(A_1 + A_2 - \text{id}_n)} \geq \frac{\det \text{id}_n \det \text{id}_n}{\det(\text{id}_n + \text{id}_n - \text{id}_n)} = 1.$$

Lemma 4.1 は単純な線形代数の問題として肯定的に解決されることがわかる．ゆえに Theorem 1.2 が示される．

References

- [1] K. Ball, *Volumes of sections of cubes and related problems*, Geometric Aspects of Functional Analysis, ed. by J. Lindenstrauss and V. D. Milman, Lecture Notes in Math. 1376, Springer, Heidelberg, 1989, 251–260.
- [2] K. Ball, *Volume ratio and a reverse isoperimetric inequality*, J. Lond. Math. Soc. **44** (1991), 351–359.
- [3] F. Barthe, P. Wolff, *Positive Gaussian kernels also have Gaussian minimizers*, Mem. Am. Math. Soc., **276** (1359) (2022).
- [4] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis*, Ann. of Math. **102** (1975), 159–182.
- [5] J. Bennett, A. Carbery, M. Christ, T. Tao, *The Brascamp–Lieb inequalities: finiteness, structure and extremals*, Geom. Funct. Anal. **17** (2008), 1343–1415.
- [6] C. Borell, *A Gaussian correlation inequality for certain bodies in $\mathbb{R}^n$* , Math. Ann. **256** (1981), 569–573.
- [7] H. J. Brascamp, E. H. Lieb, *Best constants in Young’s inequality, its converse, and its generalization to more than three functions*, Adv. Math. **20** (1976), 151–173.

- [8] W. K. Chen, N. Dafnis, G. Paouris, *Improved Hölder and reverse Hölder inequalities for Gaussian random vectors*, Adv. Math. **280** (2015), 643–689.
- [9] D. Cordero-Erausquin, *Some applications of mass transport to Gaussian-type inequalities*, Arch. Ration. Mech. Anal., **161** (2002), 257–269.
- [10] S. Das Gupta, M. L. Eaton, I. Olkin, M. Perlman, L. J. Savage, M. Sobel, *Inequalities on the probability content of convex regions for elliptically contoured distributions*, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), vol. 2, 1972, pp. 241–265.
- [11] A. Garg, L. Gurvits, R. Oliveira, and A. Wigderson, *Algorithmic and optimization aspects of Brascamp–Lieb inequalities, via Operator Scaling*, Geom. Funct. Anal. **28** (2018), 100–145.
- [12] G. Hargé, *A convex/log-concave correlation inequality for Gaussian measure and an application to abstract Wiener spaces*, Probab. Theory Relat. Fields. **130** (2004), 415–440.
- [13] Y. Hu, *Itô-Wiener chaos expansion with exact residual and correlation, variance inequalities*, J. Theoret. Probab. **10** (1997), 835–848.
- [14] C. G. Khatri, *On certain inequalities for normal distributions and their applications to simultaneous confidence bounds*, Ann. Math. Statist. **38** (1967), 1853–1867.
- [15] R. Latała and D. Matlak, *Royen’s proof of the Gaussian correlation inequality*, In Geometric aspects of functional analysis, volume 2169 of Lecture Notes in Math., pages 265–275. Springer, Cham, 2017.
- [16] E. H. Lieb, *Gaussian kernels have only Gaussian maximizers*, Invent. Math. **102** (1990), 179–208.
- [17] E. Milman, *Gaussian Correlation via Inverse Brascamp-Lieb*, arXiv:2501.11018.
- [18] S. Nakamura, H. Tsuji, *A generalized Legendre duality relation and Gaussian saturation*, arXiv:2409.13611v2.
- [19] S. Nakamura, H. Tsuji, *The Gaussian correlation inequality for centered convex sets and the case of equality*, arXiv:2504.04337.
- [20] L. D. Pitt, *A Gaussian correlation inequality for symmetric convex sets*, Ann. Probability, **5** (1977), 470–474.
- [21] T. Royen, *A simple proof of the Gaussian correlation conjecture extended to some multivariate gamma distributions*, Far East J. Theor. Stat. **48** (2014), 139–145.
- [22] G. Schechtman, Th. Schlumprecht, and J. Zinn, *On the Gaussian measure of the intersection*, Ann. Probab., **26** (1998), 346–357.
- [23] Z. Šidák, *Rectangular confidence regions for the means of multivariate normal distributions*, J. Amer. Statist. Assoc. **62** (1967), 626–633.
- [24] S. Szarek, E. Werner, *A nonsymmetric correlation inequality for Gaussian measure*, J. Multivariate Anal. **68** (1999), 193–211.
- [25] R. Zhang, *The Brascamp-Lieb inequality and its influence on Fourier analysis*, The physics and mathematics of Elliott Lieb—the 90th anniversary. Vol. II, 585–628.