

K3 曲面の退化族上の第二チャーン形式の漸近挙動

田副 一樹（京都大学理学研究科）

1. ケーラー多様体の収束

（コンパクト）距離空間の列 $\{(X_i, d_i)\}$ および距離空間 (X_∞, d_∞) について、“任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 ε -近似写像 $\phi_i : X_\infty \rightarrow X_i$ が十分大きいすべての i に対して存在する”が満たされるとき、列 $\{(X_i, d_i)\}$ は (X_∞, d_∞) にグロモフ・ハウスドルフ収束するという。ただし、ここで（一般に連続とは限らない）写像 $\phi : X \rightarrow Y$ が ε -近似写像であるとは次の条件を満たすこととする：

- $B(\phi(X); \varepsilon) = Y$,
- $d_Y(\phi(x), \phi(y)) \leq d_X(x, y) + \varepsilon, \forall x, y \in X$.

また、（コンパクトとは限らない）基点付き距離空間の列 $\{(X_i, d_i, x_i)\}$ が基点付き距離空間 $(X_\infty, d_\infty, x_\infty)$ に点付きグロモフ・ハウスドルフ収束することを、任意の $R > 0$ に対して $\{(\overline{B}(x_i; R), d_i, x_i)\}$ が $(\overline{B}(x_\infty; R), d_\infty, x_\infty)$ に（基点もろとも）グロモフ・ハウスドルフ収束することとして定める。

特に、距離空間の列としてリーマン多様体の列が与えられた場合に、収束先 (X_∞, d_∞) がどのような空間となっているかということに関しては現在でも盛んに研究されている微分幾何における中心的なテーマの一つである。一般論としてチーガー・コールディング理論や RCD 空間の理論などと呼ばれている様々なものがあるが、実 4 次元アインシュタイン多様体に関しては先駆的かつ決定的な次の結果が Anderson, Nakajima, Bando-Kasue-Nakajima などにより得られている [1][2][3][10]:

定理 1 (Anderson, Nakajima, Bando, Bando-Kasue-Nakajima, etc.) (1) 実 4 次元アインシュタイン多様体の列 $\{(X_i, g_i)\}$ が半径とエネルギーの一樣な有界性を持つとする。つまり、次をみたす正数 $D, E > 0$ が取れるとする：

$$\text{diam}(X_i, g_i) < D, \quad \int_{X_i} \|\text{Rm}(g_i)\|^2 \text{Vol}_{g_i} < E. \quad (1)$$

このとき、適当な部分列を選ぶと $\{(X_i, g_i)\}$ はあるアインシュタイン軌道体 (X_∞, g_∞) にグロモフハウスドルフ収束する。さらに、 $\{(X_i, g_i)\}$ がケーラー（ハイパーケーラー）であるなら (X_∞, g_∞) も（軌道体の意味で）ケーラー（resp. ハイパーケーラー）となる。

(2) 上の状況で、基点 $x_i \in X_i$ をとる。このとき、適当な正の実数列 $\{r_i\}$ が存在して、列 $\{(X_i, r_i g_i, x_i)\}$ は（必要であれば再び部分列を取り直し）ある完備リーマン軌道体 (Y, h, o) に収束する。この場合も、 $\{(X_i, g_i)\}$ が（ハイパー）ケーラーであれば (Y, h, o) も（ハイパー）ケーラーである。

(3) エネルギー $\int_{X_i} \|\text{Rm}(g_i)\|^2 \text{Vol}_{g_i}$ は次を満たす。

$$\lim \int_{X_i} \|\text{Rm}(g_i)\|^2 \text{Vol}_{g_i} \geq \int_{X_\infty} \|\text{Rm}(g_\infty)\|^2 \text{Vol}_{g_\infty} + \sum_{x \in X_\infty^{\text{sing}}} h_x, \quad (2)$$

ただし、 h_x は特異点 $x \in X_\infty$ に対して次のように定める：

$\{(Y, h, o)\} (= \mathcal{B}_x)$ を (2) で存在が保証されている完備軌道体のうち、非コンパクトかつ非平坦なもの（以降、これらを x でのバブルとよぶ）の同型類全体の集合とする。このとき、 h_x を $\mathcal{B}_x$ の元のエネルギーの総和で定める。

(2) で存在が主張されている完備軌道体はエネルギーが有限であり、ALE 重力インスタントンと呼ばれている。

Remark 1 上の定理で主張されている収束はもちろんグロモフ・ハウスドルフの意味での収束であるが、さらに次の意味での収束でもある：

任意のコンパクト集合 $K \subset X_\infty^{\text{reg}}$ に対して、 K の開近傍 $U_i \subset X_i^{\text{reg}}$ 上で定義された開埋め込み $\phi_i : U_i \hookrightarrow X_i$ であって、

$$\phi_i^* g_i \rightarrow g_\infty \quad (\text{in } C^\infty(K) \text{ topology}) \quad (3)$$

を満たすものが存在する。（ハイパー）ケーラー多様体については複素構造も同様の意味（つまり、適切な開埋め込みによる滑らかな広義一様の意味）での収束が成立する。この意味での収束を（一般的な用語より少し拡張された使い方にはなるが）チーガー・グロモフの意味での収束ということにする。

2. クロンハイマーによるハイパーケーラー ALE 重力インスタントンの分類

極限を考える多様体のクラスとして、 $K3$ 曲面を考える。ただし、 $K3$ 曲面とはここではコンパクト二次元ケーラー多様体であって、標準類が自明であり、さらに単連結なものとする。特に $K3$ 曲面は二次元のカラビ・ヤウ多様体である。 $K3$ 曲面は定義より実 4 次元ケーラー多様体であるが、ハイパーケーラーでもあることが知られている。ヤウによるケーラー・アインシュタイン計量の存在定理により、 $K3$ 曲面の任意のケーラー類にはケーラー・アインシュタイン計量が一意に存在している。以降、 $K3$ 曲面の上にケーラー類を取り、その中のケーラー・アインシュタイン計量との組を考え、リッチ平坦 $K3$ 曲面と呼ぶ。

前節の定理から、リッチ平坦 $K3$ 曲面の列があるコンパクト軌道体に収束するとき、これも再びハイパーケーラー軌道体となることがわかるが、この収束先の軌道体には自然に複素解析空間の構造が入り、極小特異点解消は再び $K3$ 曲面になることが知られている ([8][9]) (以降、このような解析空間のことを ADE 特異点を許した $K3$ 曲面、あるいは一般化 $K3$ 曲面と呼ぶことにする)。特に (2) の主張から、特異点でのバブルはハイパーケーラー ALE 重力インスタントンとなるが、ハイパーケーラー ALE 重力インスタントンにはクロンハイマーによる以下の分類定理が得られている：

定理 2 (Kronheimer [6][7]) $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ を有限群とする。アファイン代数多様体 $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の極小特異点解消 $\widetilde{\mathbb{C}^2/\Gamma}$ と微分同相な多様体 Y および、格子の同型 $H^2(Y; \mathbb{Z}) \cong \mathfrak{h}$ を一つ固定する。ここで $\mathfrak{h}$ は Γ と同じディンキン図形に対応するカルタン部分代数である。三つ組み $\omega = (\omega_I, \omega_J, \omega_K) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathfrak{h}$ であって、次の条件を満たすもの考える：

任意のルート $\theta \in \mathfrak{h}$ に対して、 ω の少なくとも一つの成分は θ の定める超平面に含まれない。

このとき、 ω をハイパーケーラートリプルに持つ Y 上のハイパーケーラー ALE 重力インスタントンの構造がワイル群の作用（および定数倍）を除いて一意に存在する。逆に、 Y 上のハイパーケーラー ALE 重力インスタントンの構造はすべて上の主張によって得られる。

特に、ハイパーケーラー多様体の構造が誘導する複素構造（例えば I ）を一つ選べば、リッチ平坦な完備ケーラー曲面が得られるが、これはクライン特異点 $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の半普遍変形空間（の適当な被覆空間）を与えていることが証明できる。ここで重要な点は周期領域上での収束がそのままグロモフ・ハウスドルフおよびチーガー・グロモフの意味での収束となっていることである（ただし、これらの主張は元論文でははっきりとは述べられておらず、もっと弱い形で命題が書かれている。しかし、証明を読むと実質はここまで込みで証明ができているとわかる）。

本節の最後に、クロンハイマーによる ALE 重力インスタントンの周期理論の重要な性質をいくつか挙げる：

- $\alpha \in \mathbb{C}^*$ に対して、正則写像 $H_\alpha : Y_\zeta \rightarrow Y_{\alpha^2 \zeta}$ が存在し、 $H_\alpha^* g_{\alpha^2 \zeta} = |\alpha|^2 g_\zeta$ を満たしている、
- 各複素構造および計量は次の漸近的な評価を満たす：

$$\begin{aligned} g_\zeta &= g_0 + \sum_{j=2}^k \zeta^{(j)} r^{-2j} + O(r^{-2(k+1)}), \\ I_\zeta &= I_0 + \sum_{j=2}^k \zeta^{(j)} r^{-2j} + O(r^{-2(k+1)}), \text{ for any } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4}$$

ただし、 $\zeta^{(i)}$ は ζ に関する適当な斉次 i 次多項式である

- 正則写像 $\zeta : \mathbb{C} \setminus \Delta \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ に対して、アファイン曲面の平坦族 $\mathcal{Y}_\zeta \rightarrow \Delta$ が存在し、各ファイバー $Y_{\zeta(t)}$ は $(0, \zeta(t)) \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{R}^3 \otimes \mathfrak{h}$ に対応する ALE ハイパーケーラー重力インスタントンである

3. 近似計量の構成

この説で主結果の概要を説明する。まず、単位円盤 $\Delta \subset \mathbb{C}$ 上の $K3$ 曲面の族 $X \rightarrow \Delta$ であって、

- 中心ファイバー X_0 は ADE 特異点を許した $K3$ 曲面
- 中心ファイバー以外のファイバー X_t はすべて非特異な $K3$ 曲面

- 豊富な直線束 $\mathcal{L}$ を持つ

を満たすものを考える。豊富な直線束 $\mathcal{L}$ を一つ固定し、 $L_t := \mathcal{L}|_{X_t}$ とおき、 $c_1(L_t)$ に含まれるケーラー・アインシュタイン計量を g_t とする。このとき、第二チャーン形式 $c_2(g_t)$ は各ファイバー X_t 上の $(2,2)$ 形式であるので、(符号付き) 測度を定める。本講演で取り扱う問題はこの測度の $t \rightarrow 0$ での振る舞いである。中心ファイバーへの収束がチーガー・グロモフの意味での収束であることを思い出すと、特異点から離れている領域では g_t が g_0 へ滑らかに収束していくので、 $c_2(g_t)$ も (微分形式として) 滑らかに $c_2(g_0)$ に収束していくことになる。したがって、非自明なのは特異点へ潰れていく領域上での振る舞いということになる。問題は局所的なものであるため、簡単のために中心ファイバーの特異点はただ一つ ($x_0 \in X_0 \cong 0 \in \mathbb{C}^2/\Gamma$ とおくことにする) のみであると仮定する。まず、偏極付き $K3$ 曲面の族 $(X, \mathcal{L}) \rightarrow \Delta$ に対して、適当な被覆写像 $\Delta \rightarrow \Delta: t \mapsto t^d$ で底の変換を施すと、極小同時特異点 $\tilde{X} \rightarrow \Delta$ が取れる。また、次の条件を満たすような開部分多様体 $\mathcal{U} \subset X$ が取れることがわかる：

- $\mathcal{U} \rightarrow \Delta$ は $B(0;1)/\Gamma := U_0$ の変形である
- $U_t (= \mathcal{U}$ の t 上でのファイバー) 上で、 g_t は dd^c 完全である
- $\zeta: \Delta \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ を $\zeta(t) = [\Omega_t]$ (ただし、 Ω_t は X_t 上の正則 2 形式であって、 $\omega_t^2 = \Omega_t \wedge \overline{\Omega_t}$ を満たすもの) で定めたとき、開埋め込み $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}_{\zeta}$ が存在する。

ここで、一つ技術的な仮定を族 X に対しておく：

仮定： $\zeta(t) = t^p \zeta + O(t^{p+1})$ を原点でのテイラー展開とするとき (ただし、 $\zeta \neq 0$)、 ζ はどのルートとも直交しない。

上の仮定の下では、 $x_0 \in X_0$ でのバブルの集合が二点集合となり、特にバブルは非特異なもの (さらに具体的に Y_{ζ} が出てくることまでわかる) か接錐のみになる。非自明なバブルが非特異になるという部分が技術的に重要になる。

主定理は次のものである：

定理 3 上の状況で、 X 上の滑らかな関数 f を任意にとる。次の Δ 上の関数を考える：

$$F(t) = \int_{X_t} f|_{X_t} c_2(g_t) \quad (5)$$

このとき、 $t \rightarrow 0$ で F は次の漸近展開を満たす：

$$F(t) = \int_{X_0} f|_{X_0} c_2(g_0) + f(x_0)e_{\text{orb}}(Y_{\zeta}) + O(|t|^{1/d}). \quad (6)$$

特に、原点においてヘルダー連続で、そのヘルダー指数は少なくとも $\frac{1}{d}$ 以上である (ここで、 d は同時特異点解消を与えるための底の変換 $t \mapsto t^d$ の位数である)。

上のように領域 $\mathcal{U}$ をとったとき、 $\mathcal{U}$ 上で ALE ハイパーケーラー計量 $g_{\zeta(t)}$ とリッチ平坦計量 g_t がうまくポテンシャルのレベルで張り合わせることができる。こうして構成した近似計量を $\tilde{g}_t$ とおく。ポテンシャルのレベルでの張り合わせであるので、 $\tilde{g}_t$ は g_t とコホモロガスであり、さらに特異点の近傍に収束していく領域上では $g_{\zeta(t)}$ と、 $\mathcal{U}_t$ の外側では g_t と一致している計量となる。特に、 dd^c 補題によりある C^∞ 関数 u_t を用いて $g_t = \tilde{g}_t + dd^c u_t$ と書ける。したがって特に、ボット・チャーンの公式 ([4]) から

$$c_2(g_t) = c_2(\tilde{g}_t) + dd^c \tau \quad (7)$$

を満たす $(1,1)$ 形式 τ が存在する。上の等式より問題は $c_2(\tilde{g}_t)$ および τ の挙動ということになる。

証明のあらまし： 上述のように問題は $c_2(\tilde{g}_t)$ に関する議論と、 τ に関する議論に切り分けられる。(ここでは詳細を述べていないが) 具体的な $\tilde{g}_t$ の構成により $\int_{X_t} f c_2(\tilde{g}_t)$ が定理に述べた漸近展開を持つことが計算により示される。技術的には前節で述べたクロンハイマーによる ALE ハイパーケーラー重力インスタントンの性質をフルに使う。また、 τ の評価については、モンジュ・アンペール方程式および連続の方法のアプリオリ評価により、 $\int_{X_t} f dd^c \tau = \int_{X_t} dd^c f \wedge \tau = O(|t|^{p/d})$ を示すことができるので、所望の等式が得られることになる。

4. 今後の課題

より一般の退化に対して：上の議論では退化の仕方に条件を付けていたが、一般の退化では何が起きるかというのは当然興味の対象になる（実際、Bando[2]での極限公式は一般の場合も込みでの式である）。そもそも、与えられた偏極付き $K3$ 曲面の族に対して対応する周期領域上の曲線と、バブルの関係の時点ですでに非自明で大変な問題である。その上で、一般の場合には、バブルが複数回の段階を経て非特異な多様体になると予想されるが、中間のバブルにおいては特異点形成に起因する曲率の爆発によってアプリオリ評価（特に C^2 評価）が破綻する。今回と同じように近似計量 $\tilde{g}_t$ を作り、もともとの計量との差をモンジュ・アンペール方程式を利用して評価するという方法では、あまり良い評価は得られないように見える。一つの方向として、Ozuch による実四次元アインシュタイン多様体の極限に対する近似計量の結果 [11] があるが、これを真似て、さらにケーラーであることも併せて精緻化した理論により近似計量ともともとの計量との誤差を測るというのが考えられる（現在論文準備中）。

高次元への一般化：二次元で得られた成果を三次元以上の場合に拡張するということもまた自然な問題であるが、今回の定理を一般化するにあたってはまずもってどのような量を考察するべきかという段階ですでに明らかではない。もちろん $c_n(g)$ を考えればよいのではないかというのは自然な発想であるが、4次元に特有な色々な事情（例えば、エネルギーと $c_2(g)$ が等しくなるなど）が高次元では一般には成り立たないといった事情がどのように影響してくるかは全く読めない。また、曲面の場合では特異点の芽 $\cong$ 接錐の頂点が成り立っていたが、これは高次元においてはもはや一般には成り立たないことが観察されている。したがって特に張り合わせるべき計量や、バブルを用いた計算もすべてそのままアナロジーを適用するというわけにもいかない。この辺りはそもそも計算例がまだまだ足りていない状況なので、当面はある程度具体的な族に対して色々と計算していく必要がある（cf.[5]）。

REFERENCES

- [1] M. Anderson, The L^2 structure of moduli spaces of Einstein metrics on 4-manifolds, *Geom. Funct. Anal.* 2 (1992), no. 1, 29–89.
- [2] S. Bando, Bubbling out of Einstein manifolds, *Tohoku Math. J.* 42 (1990), 205–216.
- [3] S. Bando, A. Kasue, H. Nakajima, On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth, *Invent. Math.* 97 (1989), no. 2, 313–349.
- [4] R. Bott, S.S. Chern, Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections. *Acta Math.* 114, 71–112 (1965)
- [5] M. De Borbon, C. Spotti, Calabi–Yau metrics with conical singularities along line arrangements. *J. Diff. Geom.* 123 (2) 195 - 239, (2023)
- [6] P.B. Kronheimer, The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients, *J. of Diff. Geom.* 29 (1989), 665–683.
- [7] P.B. Kronheimer, A Torelli-type theorem for gravitational instantons, *J. of Diff. Geom.* 29 (1989), 685–697.
- [8] R. Kobayashi, Moduli of Einstein metrics on a $K3$ surface and Degeneration of type I, In *Kähler Metrics and Moduli Spaces*, 257–311, *Adv. Stud. Pure Math.*, 18-II, T. Ochiai. ed. Academic Press, (1990).
- [9] R. Kobayashi, A. Todorov, Polarized period map for generalized $K3$ surfaces and the moduli of Einstein metrics, *Tohoku Math. J.* (2) 39 (1987), no. 3, 341–363.
- [10] H. Nakajima, Hausdorff convergence of Einstein 4-manifolds, *J. Fac.Sci. Univ. Tokyo* 35 (1988), 411–424.
- [11] T. Ozuch, Noncollapsed degeneration of Einstein 4-manifolds I, *Geom. Topol.* 26 (2022) 1483-1528
- [12] P. Slodwy, Four lectures on simple groups and singularities, *Comm. of Math. Inst.*, Vol. 11, Rijksuniversiteit, Utrecht, (1980).
- [13] A.Todorov, Applications of Kähler-Einstein-Calabi-Yau metric to moduli of $K3$ surfaces, *Inventiones math.* 61 (1980), 251-265.
- [14] S.T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, *Comm. Pure Appl. Math.* 31, (1978) 339-411.

田副 一樹

京都大学大学院理学研究科

京都市左京区北白川追分町

e-mail:tazoe.itsuki.52n@st.kyoto-u.ac.jp