

Pohlmeyer-Lund-Regge 方程式に付随する曲線の時間発展 と Riemann-Theta 関数

古郷 優平
北海道大学*

1 はじめに

1978 年に Lund と Regge は sine-Gordon 方程式のある種の一般化を発見し、空間曲線の時間発展で次の非線形偏微分方程式を満たすものとして定式化した [LundRegge78](Lund-Regge 条件)

$$\dot{\gamma}' = \gamma' \times \dot{\gamma},$$

ここで、空間曲線を γ とし、 γ のパラメータ方向 s の微分を $\prime$ 、時間発展方向 t の微分を $\cdot$ で表した。この方程式は、Pohlmeyer[Pohlmeyer76] により独立に、可積分系の理論より導出され、Pohlmeyer-Lund-Regge (PLR) 方程式として知られている。1982 年に伊達悦朗 [Date82] は、Krichever の方法の拡張を適用して PLR 方程式の多ソリトン解および準周期解を構成し、Cramer の方法を通じて特別な線型方程式を解くことで N ソリトン解を構成する方法を導入した。この構成法は、「伊達の直接法」と呼ばれている。

本講演では、Lund-Regge 条件を適用した空間曲線の時間発展を考え、 2×2 行列値 Frenet 枠 ($\mathbb{R}^3$ と $\mathfrak{su}(2)$ を同一視して、 $SU(2)$ に値を持つとする) の時間発展を与える方程式と、それに伴う曲率 κ 、捩率 τ の満たす連立偏微分方程式を導出する。また、橋本変換の類似として複素関数 $q = \kappa \exp(i \int^s (\tau - 1) ds)$ を定義し、適切なゲージ変換を用いることで、Frenet 枠の時間発展が、PLR 方程式の Lax pair と一致することを示す。この対応により、複素関数 q が以下の非線形偏微分方程式を満たすことがわかる：

$$\dot{q}' + \frac{1}{2}q \int^s (|q|^2) \cdot ds = 0.$$

これは、非線形 Schrödinger 方程式に類似した方程式である。さらに Lax pair の解の対数微分を調べること (Sym の公式として知られる) により、Lund-Regge 条件を満たす空間曲線の時間発展を構築することが可能である。さらに、伊達の直接法により得られた PLR 方程式の N ソリトン解、Riemann-Theta 関数で表される準周期解に対応する曲線の表現公式、および曲線や曲線を

* 本研究は JSPS 科研費 22K03304, 23K03125, JST SPRING JPMJSP2119 の助成を受けたものです。

動かしてできる曲面が明示的に構成できる．今回は特に準周期解について紹介する．Section 2, 4 は, [KKM25] により, 小林真平氏 (北海道大学), 松浦望氏 (福岡大学) との共同研究の結果である．

2 空間曲線の時間発展と Lund-Regge evolution

定義 2.1 (Lund-Regge evolution). 3次元ユークリッド空間内の空間曲線 γ の時間発展が次の方程式：

$$\dot{\gamma}' = \gamma' \times \dot{\gamma} \quad (1)$$

を満たすとき, *Lund-Regge evolution* と呼ぶ．

定理 2.2 (Theorem 3.1. of KKM25). 3次元ユークリッド空間内の空間曲線 γ の時間発展を次で定める．

$$\dot{\gamma} = -\frac{1}{2} \int^s (\kappa^2)^\cdot ds T - \dot{\kappa} N - \kappa \int^s \dot{\tau} ds B.$$

ここで κ, τ はそれぞれ γ の曲率, 捩率を表し, T は単位接ベクトル, N は単位法線ベクトル, B は単位陪法線ベクトルである．*Frenet* 枠 $\mathcal{F}^{*1}$ は, 連立線型微分方程式系 $\mathcal{F}' = \mathcal{F}\mathcal{L}$, $\dot{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\mathcal{M}$ を満たし, 係数行列は次で与えられる：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\tau & -\kappa \\ \kappa & -i\tau \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \left(-\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} + \tau \int^s \dot{\tau} ds \right) & -\kappa \int^s \dot{\tau} ds + i\dot{\kappa} \\ \kappa \int^s \dot{\tau} ds + i\dot{\kappa} & -i \left(-\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} + \tau \int^s \dot{\tau} ds \right) \end{pmatrix}.$$

この時, 可積分条件は

$$\frac{\dot{\kappa}'}{\kappa} - (\tau - 1) \int^s \dot{\tau} ds + \int^s \kappa \dot{\kappa} ds = 0, \quad \left(\kappa \int^s \dot{\tau} ds \right)' + \dot{\kappa}(\tau - 1) = 0,$$

であり, 曲線の時間発展 γ は *Lund-Regge evolution* である．逆に, *Lund-Regge evolution* γ の *Frenet* 枠は, 上の連立線型微分方程式系を満たし, 曲率 κ , 捩率 τ は, 可積分条件を満たす．

系 2.3 (Corollary 3.1. of KKM25). 対角行列ゲージ $\mathcal{D}$ と, 複素関数 q を次のように定める：

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \text{diag} \left(i \exp \left(-\frac{i}{2} \int^s (\tau - 1) ds \right), -i \exp \left(\frac{i}{2} \int^s (\tau - 1) ds \right) \right), \\ q &= \kappa \exp \left(i \int^s (\tau - 1) ds \right). \end{aligned} \quad (2)$$

ゲージされた *Frenet* 枠 $F = \mathcal{F}\mathcal{D}$ と定理 2.2 における $\mathcal{L}$ と $\mathcal{M}$ は次のように書き換えられる：

$$\begin{cases} F' = FL \\ \dot{F} = FM \end{cases}, \quad \text{ここで} \quad L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & q \\ -\bar{q} & -i \end{pmatrix}, \quad M = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\text{Re}(\dot{q}/q) & -\dot{q} \\ -\dot{\bar{q}} & \text{Re}(\dot{q}/q) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

この時, この連立線型方程式系の可積分条件は $\{\text{Re}(\dot{q}/q)\}' = -\frac{1}{2}(|q|^2)^\cdot$, $\text{Im}(\dot{q}/q) = 0$ であり, これは次の非線形偏微分方程式と同値である：

$$\dot{q}' + \frac{1}{2}q \int^s (|q|^2)^\cdot ds = 0. \quad (4)$$

*1 一般に *Frenet* 枠 (T, N, B) は, $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ 値写像だが, 同一視により $\mathcal{F}$ は $\text{SU}(2)$ 値写像としている．

3 Pohlmeyer-Lund-Regge 方程式

以下では、文献 [LundRegge78, Pohlmeyer76] の定式化に従い、さらに [Date82] の記述に基づいて Pohlmeyer-Lund-Regge 方程式を紹介する． 2×2 行列値写像 Ψ を、いわゆる *Lax pair* と呼ばれる次の偏微分方程式系を満たすものとする：

$$\Psi^{-1}\Psi' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\lambda & a \\ -\bar{a} & -i\lambda \end{pmatrix}, \quad \Psi^{-1}\dot{\Psi} = \frac{i}{2\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -e^{i\omega} \sin u \\ -e^{-i\omega} \sin u & -\cos u \end{pmatrix}, \quad (5)$$

ここで、 $\lambda \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ はスペクトルパラメータ、 u は二変数の実数値関数 ($0 < u < \pi/2$ を仮定) である．*2 また、複素数値関数 a と実数値関数 ω は、 u と別の実数値関数 v を用いて次のように与えられる：

$$a = -\frac{(e^{i\omega} \sin u)'}{\cos u}, \quad \omega' = \frac{v' \cos u}{2 \cos^2(u/2)}, \quad \dot{\omega} = \frac{\dot{v}}{\cos^2(u/2)}, \quad (6)$$

ここで ω は (6) の偏微分方程式系の解として定義される．

この Lax pair の可積分条件を求めると、いわゆる *Pohlmeyer-Lund-Regge* 方程式 が得られる：

$$\dot{u}' - \frac{v' \dot{v} \sin(u/2)}{2 \cos^3(u/2)} + \sin u = 0, \quad \dot{v}' + \frac{u' \dot{v} + \dot{u} v'}{\sin u} = 0. \quad (7)$$

特に、関数 v が定数の場合には、(7) は、sine-Gordon 方程式

$$\dot{u}' + \sin u = 0, \quad (8)$$

に帰着する．式 (5) における行列値関数 Ψ を、以下“波動関数” (wave function) と呼ぶ．

4 Lax pair と Sym 公式

系 4.1 (Corollary 3.2. of KKM25). 式 (2) における複素数値関数 q は式 (6) における複素数値関数 a と同一視できる．すなわち q は *PLR* 方程式の解を与える．したがって、式 (3) における *Frenet* 枠 F は、ある定数行列 $F_0 \in \text{SU}(2)$ を用いて、式 (5) における $\lambda = 1$ の場合の波動関数 Ψ と一致し、

$$F_0 F = \Psi,$$

が成り立つ．また、 $\lambda > 0$ の族 $\{F^\lambda\}_{\lambda>0}$ が存在し、そのとき

$$F^\lambda \Big|_{\lambda=1} = F_0 F,$$

*2 Lax pair は [Date82] のものを転置している．さらに a の定義に $i/2$ の係数が掛けられている点に注意．

が成り立つとともに、各 F^λ は次の偏微分方程式系を満たす：

$$\begin{aligned} (F^\lambda)' &= F^\lambda L^\lambda, \quad L^\lambda = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\lambda & q \\ -\bar{q} & -i\lambda \end{pmatrix}, \\ (F^\lambda)^\cdot &= F^\lambda M^\lambda, \quad M^\lambda = \frac{i}{2\lambda} \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(\dot{q}'/q) & -\dot{q} \\ -\bar{\dot{q}} & \operatorname{Re}(\dot{q}'/q) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

定理 4.2 (Theorem 3.2. of KKM25). 複素関数 q を式 (4) の解, $F(= F^\lambda)$ を式 (9) の *Lax pair* の解とする. 次に, $\mathfrak{su}(2)$ 値写像

$$\gamma = \lambda \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right) F^{-1} \Big|_{\lambda=1}, \quad (10)$$

を定義する. 同一視 $\mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{su}(2)$ の下で, γ は式 (1) かつ $|\gamma'| = 1$ を満たす空間曲線を与える. 逆に, 式 (1) を満たす空間曲線はこの方法で得られる.

以上のことから, Lund-Regge evolution を具体的に構成するには, Lax pair (9) (複素数値関数 a, q の同一視の下で Lax pair (5)) の解, つまり波動関数を構成することが必要であることがわかる. この波動関数の構成法は様々なものが知られているが特に伊達 [Date82] により得られた, Riemann-Theta 関数による準周期解を用いた構成を次に紹介する.

5 Riemann-Theta 関数による準周期解と曲線の表示

Riemann-Theta 関数による Lax pair (5) の準周期解を紹介する. その前に記号の準備を行う. 次の超楕円曲線

$$\mu^2 = \prod_{j=1}^g (\lambda - \lambda_j)(\lambda - \bar{\lambda}_j), \quad \lambda_j \neq \lambda_k (j \neq k), \quad \lambda_j \neq \bar{\lambda}_k, \quad \lambda_j \neq 0.$$

で定まる種数 g の Riemann 面を $\mathcal{R}$ と表す. Riemann 面 $\mathcal{R}$ 上の点 $P_\infty^\pm(P_0^\pm)$ を, それぞれ λ による Riemann 球面への射影が $\infty(0)$ である点とする. 局所座標はそれぞれ $z = \lambda^{-1}(\lambda)$ とする. 第 1 種正規化 Abel 微分 ω_j ($j = 1, \dots, g$) を $\int_{a_k} \omega_j = 2\pi i \delta_{jk}$, ($j, k = 1, \dots, g$) を満たすように定める. 周期行列 $\tau = \int_{b_k} \omega_j$, ($j, k = 1, \dots, g$) としたとき, Riemann-Theta 関数を次のように定める：

$$\theta(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} \exp\left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \tau^t \mathbf{n} + \mathbf{n}^t \mathbf{u}\right), \quad (\mathbf{u} \in \mathbb{C}^g).$$

Abel-Jacobi 写像は $\mathcal{A}_+(P) = (\int_{P_\infty^+}^P \omega_1, \dots, \int_{P_\infty^+}^P \omega_g)$ とする. 正規化された第 2,3 種 Abel 微分 $d\Omega_j$, Abel 積分 Ω_j ($j = 1, 2, 3$) をそれぞれ次のように定める：

$$\begin{aligned} \Omega_1(P) &= \int_{\bar{\lambda}_{g+1}}^P d\Omega_1 \sim \pm \left(\frac{1}{z} - \frac{E}{2} \right) \quad P \rightarrow P_\infty^\pm, \quad \Omega_2(P) = \int_{\bar{\lambda}_{g+1}}^P d\Omega_2 \sim \pm \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{F}{2} \right) \quad P \rightarrow P_0^\pm, \\ \Omega_3(P) &= \int_{\bar{\lambda}_{g+1}}^P d\Omega_3 \sim \pm \left(\log z - \frac{\pi i}{2} + \log \beta \right) \quad P \rightarrow P_\infty^\pm, \end{aligned}$$

ここで, $E, F \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ の定数. そして $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^g$ は b 周期のベクトルとする:

$$U_k = \int_{b_k} d\Omega_1, \quad V_k = \int_{b_k} d\Omega_2, \quad k = 1, \dots, g.$$

定理 5.1. 次の *Riemann* 面 $\mathcal{R}$ 上の関数

$$\begin{aligned} \psi_1(s, t, P) &= \exp \left(\frac{is}{2} (\Omega_1(P) + \frac{E}{2}) + \frac{it}{2} (\Omega_2(P) - \frac{H}{2}) \right) \frac{\theta(\mathcal{A}_+(P) + \frac{is}{2} \mathbf{U} + \frac{it}{2} \mathbf{V} - D)}{\theta(-\frac{is}{2} \mathbf{U} - \frac{it}{2} \mathbf{V} + D)}, \\ \psi_2(s, t, P) &= A \exp \left(\frac{is}{2} (\Omega_1(P) - \frac{E}{2}) + \frac{it}{2} (\Omega_2(P) + \frac{H}{2}) + \Omega_3(P) \right) \frac{\theta(\mathcal{A}_+(P) + \frac{is}{2} \mathbf{U} + \frac{it}{2} \mathbf{V} - D + r)}{\theta(-\frac{is}{2} \mathbf{U} - \frac{it}{2} \mathbf{V} + D)}, \end{aligned}$$

により定まる波動関数 Ψ は, 式 (5) を満たす. ここで, $\frac{H}{2} = \int_{\lambda_{g+1}}^{P_\infty^+} d\Omega_2$, $r = \mathcal{A}_-(P_\infty^+)$, $A = \frac{\sqrt{\beta}}{i\alpha} \frac{\theta(D-r)}{\theta(D)}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ であり, D は因子と *Riemann* 定数から定まる定ベクトル. さらに *PLR* 方程式の実数値解 u, v は次のようにあらわされる:

$$\begin{aligned} u &= \arccos \left(\frac{w+1}{w-1} \right), \quad \text{ここで } w = \exp(\Omega_3(P_0^-) - \Omega_3(P_0^+)) \frac{\theta(\mathcal{A}_+(P_0^+) - \varphi) \theta(\mathcal{A}_+(P_0^-) - \varphi + r)}{\theta(\mathcal{A}_+(P_0^+) - \varphi + r) \theta(\mathcal{A}_+(P_0^-) - \varphi)}, \\ v &= -\frac{s}{2} (\Omega_1(P_0^-) - \Omega_1(P_0^+) + E) - \frac{t}{2} (F - H) \\ &\quad + i \left(\log A - \Omega_3(P_0^+) \right) + i \log \left(\frac{\theta(\mathcal{A}_+(P_0^-) - \varphi)}{\theta(\mathcal{A}_+(P_0^+) - \varphi + r)} \right) + v_0. \end{aligned}$$

ここで $\varphi = -\frac{is}{2} \mathbf{U} - \frac{it}{2} \mathbf{V} + D$ かつ, $v_0 \in \mathbb{C}$ の適切な定数.

[Date82] では, $P_\infty^\pm, P_0^\pm$ において指定した形式の真性特異性を持ち, それ以外の $\mathcal{R}$ 上の点では有理型関数として振る舞う関数 (Baker-Akhiezer 関数) で, 式 (5) を満たすものを構成し, $\mathcal{R}$ 上の特別な有理型関数を用いることで *PLR* 方程式の実数値解を構成している. ここでは, 式 (5) の解である波動関数は (s, t) に依存しない関数をかけても解であることを利用して少し変形している.

この波動関数 Ψ を, 定理 4.2 に適用すると次がわかる.

定理 5.2. *PLR* 方程式の準周期解に付随する空間曲線の時間発展は

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{|\psi_1^2| + |\psi_2^2|}} \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix},$$

を用いて次のように書ける.

$$\gamma = \Psi^{-1} \frac{d}{d\lambda} \Psi \Big|_{\lambda=1},$$

各成分は

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{i}{2} \left(\frac{d}{d\lambda} \Omega_1(P) s + \frac{d}{d\lambda} \Omega_2(P) t \right) + \frac{1}{2(|\psi_1^2| + |\psi_2^2|)} \\ &\quad \times \left[|\psi_1^2| \nabla \log \left(\frac{\theta(\mathcal{A}_+(P) - \varphi)}{\theta(\mathcal{A}_+(P) + \varphi)} \right) + |\psi_2^2| \nabla \log \left(\frac{\theta(\mathcal{A}_+(P) - \varphi + r)}{\theta(\mathcal{A}_+(P) + \varphi + r)} \right) \right] \cdot \frac{d\mathcal{A}_+(P)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1}, \\ \gamma_{21} &= \frac{\psi_1 \psi_2}{|\psi_1^2| + |\psi_2^2|} \left(\nabla \log \left(\frac{\theta(\mathcal{A}_+(P) - \varphi + r)}{\theta(\mathcal{A}_+(P) - \varphi)} \right) \cdot \frac{d\mathcal{A}_+(P)}{d\lambda} + \frac{d}{d\lambda} \Omega_3(P) \right) \Big|_{\lambda=1}. \end{aligned}$$

参考文献

- [Date82] E. Date. Multi-soliton solutions and quasi-periodic solutions of nonlinear equations of sine-Gordon type. *Osaka J. Math.* **19** (1982), 125–158.
- [LundRegge78] F. Lund, T. Regge. Unified approach to strings and vortices with soliton solutions. *Phys. Rev. D* **14**, no. 6 (1978), 1524–1535.
- [Pohlmeyer76] K. Pohlmeyer. Integrable Hamiltonian systems and interactions through quadratic constraints. *Comm. Math. Phys.* **46** (1976), 207–221.
- [KKM25] S-P. Kobayashi, Y. Kogo, N. Matsuura. The evolution of a curve induced by the Pohlmeyer-Lund-Regge equation. *J. Nonlinear Sci.* **35**, 85 (2025).