巨大コホモロジー類における小林ヒッチン対応

陣内智史 (大阪大学大学院理学研究科)

1　導入

小林ヒッチン対応とは, コンパクトな複素多様体 X 上の反射的連接層が slope 安定なこととエルミート・アインシュタイン計量を持つことの同値性のことである. 従来は X 上にケーラー類を与えるごとに小林ヒッチン対応が定式化され証明されてきた (c.f. [7], [12], [1], [5]).

Birkar-Cascini-Hacon-Mckernan [2] によって射影多様体 X の標準因子 K_X が巨大な場合には極小モデル理論が証明され豊富モデルが存在する. これによって K_X が巨大な多様体の研究は, 豊富モデルの研究に帰着されることとなる. ところが一般の巨大類は豊富モデルを持たないことが知られている (e.g. [11] [10]). 従って極小モデル理論を仮定せずに巨大類を調べる方法が求められる.

本講演では, まず巨大類における slope 安定性を新しく定義する. 次に, この slope 安定性の定義がある種の双有理不変性を導くことを紹介する. そして主結果である, 豊富モデルが存在する場合の巨大類での小林ヒッチン対応を紹介する. 本講演で定義する slope 安定性は極小モデル理論を仮定していないので, 任意の巨大類に対して定義できる. 本主結果は, この slope 安定性の定義が極小モデル理論と整合的であることを示している.

2　可動交点積

2.1　巨大類と可動交点積

本節では巨大類とその可動交点積の定義を述べる. 基本的な参考文献は Boucksom-Eyssidieux-Guedji-Zeriahi [4], Boucksom-Demailly-Păun-Peternell [3], Kollár-Mori [9] である.

X をコンパクト複素多様体とする. (p,p) 型カレントとは, 滑らかな $(n-p,n-p)$ 型微分形式のなすベクトル空間上の連続線形汎関数のことであり, 汎関数として正定値かつ超関数微分の意味で d-閉なものがケーラーカレントである.

Definition 2.1. 巨大類とは X 上のコホモロジー類 $\alpha \in H^{1,1}_{\partial\bar{\partial}}(X,\mathbb{R})$ であって, ケーラーカレント T で代表されるものである.

次の例からわかるように, 巨大類とはケーラー類の双有理幾何的な拡張である.

Example 2.2. $f : X \dashrightarrow X_+$ をアティヤのフロップとする [9, Example 2.7]. X と X_+ は滑らかな 3 次元射影多様体である. H_+ を X_+ の豊富因子とし $H := f_*^{-1}H_+$ を H_+ の強変形とする. このとき $c_1(H)$ は巨大類であり非ケーラーである. 実際, f の不確定点の解消 $\pi : Y \to X$, $\pi_+ : Y \to X_+$ が存在して $\pi^*H = \pi_+^*H_+ + aD$ (D は π_+-例外因子, $a > 0$) となる. このとき $\pi_+^*H_+ = \pi^*H - aD$ はネフであり, さらに π^*H のザリスキ分解をあたえる.

一般の巨大類 α は有限回のブローアップ $\pi : Y \to X$ で $\pi^*\alpha = \omega + D$ (ω はネフかつ巨大, D は有効例外因子) と分解できない (c.f. [11, Theorem 2.10]). しかし極限操作を許せば類似の量を取り出すことができる. それが可動交点積である.

Proposition-Definition 2.3 ([3])**.** α をコンパクトケーラー多様体 X 上の巨大類とする. このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ブローアップの列 $\pi_\varepsilon : X_\varepsilon \to X$, X_ε 上のケーラー類 ω_ε, X_ε 上の有効例外因子 D_ε が存在して次の条件を満たす.

- $\pi_\varepsilon^*\alpha = \omega_\varepsilon + D_\varepsilon$,
- X 上の任意の semipositive$(n-p, n-p)$ 類 η に対して数列

$$\int_{X_\varepsilon} \pi_\varepsilon^*\eta \wedge \omega_\varepsilon^p$$

  は単調増加で $\varepsilon \to 0$ の極限値が存在する.

従って Poincaré 双対性により, あるコホモロジー類 $\langle\alpha^p\rangle \in H^{p,p}(X, \mathbb{R})$ が存在して $\pi_{\varepsilon *}(\omega_\varepsilon^p) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \langle\alpha^p\rangle$ となる. コホモロジー類 $\langle\alpha^p\rangle$ を α の可動交点積 (movable intersection product) と呼ぶ.

非ケーラー多様体上では可動交点積を次のように定義する.

Definition 2.4. X をコンパクト複素多様体とし α を X 上の巨大類とする. $\pi : Y \to X$ をブローアップの列で Y がケーラー多様体となるものとする. このとき α の可動交点積 $\langle\alpha^p\rangle$ を $\pi_*\langle(\pi^*\alpha)^p\rangle \in H^{p,p}(X, \mathbb{R})$ と定義する.

Example 2.5. Example 2.2 の状況とする. $\pi^*H = \pi_+^*H_+ + aD$ ($a > 0$) であった. このとき $\langle c_1(\pi^*H)^p\rangle = c_1(\pi_+^*H_+)^p$ であり, $\langle c_1(H)^p\rangle = \pi_*(c_1(\pi_+^*H_+)^p)$ となる. この例は次節で一般化される (Example 2.8, Proposition 2.9 を参照).

2.2　ケーラーモデルと可動交点積

本節では巨大類のケーラーモデル (豊富モデルの超越版) を定義して, 可動交点積との関係を述べる.

Definition 2.6 ([6]). (X,α) と (Y,β) をコンパクト複素解析空間とその上の巨大類の組とする．双有理型収縮写像 $f : Y \dashrightarrow X$ が次の 3 条件を満たすとき，f を β-negative であるという．

- $f_*\beta = \alpha$,
- f の不確定点の解消 $p : Z \to X$, $q : Z \to Y$ であって $q^*\beta - p^*\alpha = D$ が 有効 p-例外因子となる．さらに
- $\mathrm{Supp}(q_*D)$ は f-例外因子の台と一致する．

Definition 2.7. X をコンパクト正規複素解析空間とし α を X 上の巨大類とする．組 (X,α) のケーラーモデルとは，コンパクト正規複素解析空間 Y とその上のケーラー類 $\{\omega\}$ の組 $(Y,\{\omega\})$ であって，α-negative な双有理型写像 $f : X \dashrightarrow Y$ が存在するもののことである．

Example 2.8. (1) Example 2.2 において，(X_+,H_+) は (X,H) のケーラーモデルである．
(2) X を滑らかな射影多様体とし，その標準因子 K_X は巨大とする．このとき (X,K_X) はケーラーモデル (Y,K_Y) をもつ [2]．K_X-negative な双有理写像 $f : X \dashrightarrow Y$ は極小モデル理論により与えられる．特にこの設定ではケーラーモデルとは標準モデルのことである．

次の命題が示すように，ケーラーモデルをもつ巨大類の可動交点積とはケーラーモデルの交点積のことである．

Proposition 2.9 ([8]). X をコンパクト複素多様体とし α を X 上の巨大類とする．組 (X,α) はケーラーモデル (Y,ω) を持つと仮定し，$f : X \dashrightarrow Y$ を α-*negative* な双有理型写像とする．$p : Z \to X$ と $q : Z \to Y$ を f の不確定点の解消で $p^*\alpha - q^*\omega = D$ が有効 q-例外因子となるものとする．このとき次が成立する．

$$\langle (p^*\alpha)^k \rangle = (q^*\omega)^k.$$

3　主定義，主結果

本節では巨大類における連接層の slope 安定性の定義を与え，主定理である小林ヒッチン対応を述べる．

Definition 3.1 ([8]). X を n 次元コンパクト複素多様体とし α を巨大類とする．X 上の反射的連接層 $\mathcal{E}$ が $\langle \alpha^{n-1} \rangle$-slope 安定であるとは，$\mathcal{E}$ の任意の部分層 $0 \neq \mathcal{F}$ に対して $\langle \alpha^{n-1} \rangle$-slope の不等式 $\mu_\alpha(\mathcal{F}) < \mu_\alpha(\mathcal{E})$ が成立することである．ここで $\mu_\alpha(\mathcal{F})$ は次のように定義される．

$$\mu_\alpha(\mathcal{F}) = \frac{1}{\mathrm{rk}\mathcal{F}} \int_X c_1(\det \mathcal{F}) \wedge \frac{\langle \alpha^{n-1} \rangle}{(n-1)!}.$$

Remark 3.2. 巨大類 α がネフでもあるとき, 可動交点積は通常の交点数と一致する: $\langle \alpha^k \rangle = \alpha^k$. したがって特に α がケーラー類の場合は従来の slope 安定性の定義と一致する.

上記の $\langle \alpha^{n-1} \rangle$-slope 安定性の定義は次の双有理不変性を導く. この定理は $\langle \alpha^{n-1} \rangle$-slope 安定性が極小モデル理論と整合的であることを示している. Theorem 3.3 のより一般的な主張については Jinnouchi [8] を参照してほしい.

Theorem 3.3 ([8])**.** *X をコンパクト複素多様体とし α を巨大類とする. 組 (X, α) はケーラーモデル (Y, ω) をもつと仮定し $f : X \dashrightarrow Y$ を α-negative な双有理型写像とする. このとき X 上の反射的連接層 $\mathcal{E}$ が $\langle \alpha^{n-1} \rangle$-slope 安定であることと, Y 上の反射的連接層 $f_{[*]}\mathcal{E} := (f_*\mathcal{E})^{\vee\vee}$ が ω^{n-1}-slope 安定であることは同値である.*

Xuemiao Chen 氏によってコンパクト正規ケーラー空間上で小林ヒッチン対応が証明された.

Theorem 3.4 ([5])**.** *X をコンパクト正規ケーラー空間とし $\{\omega\}$ をケーラー類とする. X 上の反射的連接層 $\mathcal{E}$ に対して次は同値:*

- *$\mathcal{E}$ は $\{\omega\}^{n-1}$-slope 安定.*
- *$\mathcal{E}$ は admissible ω-エルミート・アインシュタイン計量をもつ.*

Jinnouchi による Theorem 3.3 と Xuemiao Chen 氏による Theorem 3.3 によって, 次の形の小林ヒッチン対応が成立する.

Theorem 3.5 ([8])**.** *X をコンパクト複素多様体とし α を巨大類とする. 組 (X, α) はケーラーモデル (Y, ω) をもつと仮定し $f : X \dashrightarrow Y$ を α-negative な双有理型写像とする. このとき X 上の反射的連接層 $\mathcal{E}$ に対して次の 2 条件は同値となる:*

- *$\mathcal{E}$ は $\langle \alpha^{n-1} \rangle$-slope 安定.*
- *$f_{[*]}\mathcal{E}$ は admissible ω-エルミート・アインシュタイン計量をもつ.*

Example 3.6. (1) Example 2.2 の状況で (X_+, H_+) は (X, H) のケーラーモデルでありアティヤのフロップ $f : X \dashrightarrow X_+$ は H-negative である. さらに f は余次元 1 で同型であるので X 上の反射的連接層と X_+ 上の反射的連接層は一対一対応する. ゆえに Theorem 3.3 によって X 上の $\langle c_1(H)^2 \rangle$-slope 安定な反射的連接層と, X_+ 上の $c_1(H_+)^2$-slope 安定な反射的連接層は一対一対応する.
(2) X を滑らかな射影多様体で K_X は巨大であるとする. このとき (X, K_X) はケーラーモデル (Y, K_Y) をもつ. Y の接層 T_Y は $c_1(K_Y)^{n-1}$-slope 安定であることが知られている. 従って X の接ベクトル束 T_X は $\langle c_1(K_X)^{n-1} \rangle$-slope 安定である.

本講演で定義した巨大類に関する slope 安定性は任意の巨大類に対して定義できる. 従って豊富モデルを持つとは限らない巨大類に対する slope 安定性の研究が今後期待される.

References

[1] S. Bando and Y.-T. Siu, *Stable sheaves and Einstein-Hermitian metrics*, Geometry and analysis on complex manifolds, 1994, pp. 39–50. MR1463962

[2] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, and J. McKernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 2, 405–468. MR2601039

[3] S. Boucksom, J.-P. Demailly, M. P˘ aun, and T. Peternell, *The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension*, J. Algebraic Geom. **22** (2013), no. 2, 201–248. MR3019449

[4] S. Boucksom, P. Eyssidieux, V. Guedj, and A. Zeriahi, *Monge-Ampère equations in big cohomology classes*, Acta Math. **205** (2010), no. 2, 199–262. MR2746347

[5] X. Chen, *Admissible hermitian–yang–mills connections over normal varieties*, Mathematische Annalen (2025), 1–37.

[6] O. Das, C. Hacon, and J. I. Yáñez, *Mmp for generalized pairs on k\" ahler 3-folds*, arXiv preprint arXiv:2305.00524 (2023).

[7] S. K. Donaldson, *Infinite determinants, stable bundles and curvature*, Duke Math. J. **54** (1987), no. 1, 231–247. MR885784

[8] S. Jinnouchi, *Slope stable sheaves and hermitian-einstein metrics on normal varieties with big cohomology classes*, arXiv preprint arXiv:2501.04910 (2025).

[9] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original. MR1658959

[10] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry. I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting: line bundles and linear series. MR2095471

[11] N. Nakayama, *Zariski-decomposition and abundance*, MSJ Memoirs, vol. 14, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004. MR2104208

[12] K. Uhlenbeck and S.-T. Yau, *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles*, 1986, pp. S257–S293. Frontiers of the mathematical sciences: 1985 (New York, 1985). MR861491