

Variants of the Yau–Tian–Donaldson correspondence: coupled Kähler–Einstein metrics, extremal metrics, and nilsolitons

橋本義規（大阪公立大学 大学院理学研究科数学専攻）*

本講演の内容の一部は、大阪大学の藤田健人氏との共同研究に基づく。

1 導入：Kähler–Einstein 計量についての Yau–Tian–Donaldson 対応

コンパクトな Kähler 多様体 X ($\dim_{\mathbb{C}} X = n$) がいつ Kähler–Einstein 計量を持つかは重要な問題である。ここで、Kähler 計量 ω が **Kähler–Einstein 計量** であるとは、ある定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega$$

が成り立つことである。Yau の定理と Aubin–Yau の定理によって $\lambda \leq 0$ の場合は常に Kähler–Einstein 計量が存在することが知られている。 $\lambda > 0$ となるのは X が Fano 多様体の場合、つまり $-K_X$ が豊富である場合である。この場合は、松島の障害や二木の障害と呼ばれる古典的な結果によって、Fano 多様体は必ずしも Kähler–Einstein 計量を持たないことが知られていた。どのような Fano 多様体が Kähler–Einstein 計量を持つか、という問題に関する近年の研究で中心的役割を果たしたのが Yau–Tian–Donaldson 予想である。この予想では、Fano 多様体 X が Kähler–Einstein 計量を許容することと、 $(X, -K_X)$ が代数幾何学的な安定性条件（ K -安定や Ding 安定）を満たすことが同値であると主張される。この予想は、Chen–Donaldson–Sun [8–10] や Tian [30] をはじめとする多くの人々によって肯定的に解決された。上記のように、標準的な計量の存在と代数幾何学的安定性条件の同値性を主張する結果を、本講演では便宜上 **Yau–Tian–Donaldson 対応** と呼ぶことにする。本講演の基礎となる結果は、以下のものである。

定理 1.1. (Berman–Boucksom–Jonsson [2]) Fano 多様体 X の自己同型群が離散であると仮定する。この時、 X が Kähler–Einstein 計量を許容することと、 $(X, -K_X)$ が一様 Ding 安定であることは同値である。

以下、一様 Ding 安定性を定義する。まず、Fano 多様体 $(X, -K_X)$ に対するテスト配位とは、以下の条件を満たす $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ である（一般の偏極射影多様体 (X, L) に対しても同様に定義できる）。

- $\mathcal{X}$ は $\mathbb{C}^*$ -作用を持つ正規代数多様体であり、 $\mathbb{C}^*$ -同変な平坦射影射 $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ が与えられている。
- $\mathcal{L}$ は $\mathcal{X}$ 上の semiample な $\mathbb{Q}$ -Cartier 因子であり、作用 $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathcal{X}$ の線形化が与えられている。
- 任意の $t \neq 0$ に対して $(\pi^{-1}(t), \mathcal{L}|_{\pi^{-1}(t)}) \cong (X, -K_X)$ である。

さらに、 $\mathcal{X}_0 := \pi^{-1}(0)$ を中心ファイバーと呼ぶ。以後、テスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ は $\mathbb{P}^1$ 上、無限遠での $\mathbb{C}^*$ -作用が自明となるような標準的方法で、 $\pi: (\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{L}}) \rightarrow \mathbb{P}^1$ とコンパクト化されていると仮定する。

* Email: yhashimoto@omu.ac.jp

本研究の一部は JSPS 科研費 JP19K14524, JP23K03120, JP24K00524 の助成を受けた。また、本研究の一部は 2024 年に Montréal にて Thematic Program in Geometric Analysis が開催されている期間中に行われており、期間中講演者は CRM-Simons scholar として Centre de Recherches Mathématiques と Simons Foundation から助成を受けた。

テスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に対して、その **Ding** 不変量を

$$\text{Ding}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) := -\frac{\bar{\mathcal{L}}^{n+1}}{(n+1) \int_X c_1(-K_X)^n} - 1 + \text{lct}(\mathcal{X}, D; \mathcal{X}_0)$$

と定義する。ただし、 D は $\text{supp} D \subset \mathcal{X}_0$ かつ $-(K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1} + D) \sim_{\mathbb{Q}} \bar{\mathcal{L}}$ を満たす唯一の $\mathbb{Q}$ -因子である。また、 $\text{lct}(\mathcal{X}, D; \mathcal{X}_0)$ は log canonical threshold と呼ばれる双有理幾何学で重要な不変量であり、 $\sup_{c \in \mathbb{R}} \{(\mathcal{X}, D + c\mathcal{X}_0) \text{ は sublc} \}$ と定義される。Fano 多様体 $(X, -K_X)$ が一様 **Ding** 安定であるとは、ある $\epsilon > 0$ が存在して

$$\text{Ding}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq \epsilon \|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|$$

が任意のテスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に対して成り立つことである。ただし、上記において、 $\|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|$ は $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ のノルムとみなせる非負実数であるが、詳しい説明は割愛する。

定理 1.1 の証明において、以下紹介する変分法が重要な役割を果たす。固定したレファレンス Kähler 計量 $\omega_0 \in c_1(-K_X)$ に対して、Kähler ポテンシャル全体の集合を

$$\mathcal{H} := \{\phi \in C^\infty(X, \mathbb{R}) \mid \omega_\phi := \omega_0 + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \phi > 0\}$$

と定義する。Kähler 計量 ω_ϕ から自然に定まる $-K_X$ 上のエルミート計量から、 X 上の体積形式 $d\mu_\phi$ が得られる。 ω_ϕ が $\lambda = 1$ の Kähler–Einstein 計量であることは、 $\phi \in \mathcal{H}$ が **Ding** 汎関数と呼ばれる汎関数

$$\mathbf{D}(\phi) := \mathbf{L}(\phi) - \mathbf{E}(\phi)$$

の臨界点となることと同値である。ただし

$$\mathbf{L}(\phi) := -\log \int_X d\mu_\phi, \quad \mathbf{E}(\phi) := \frac{1}{(n+1) \int_X \omega_0^n} \sum_{j=0}^n \int_X \phi \omega_0^{n-j} \wedge \omega_\phi^j \quad (1)$$

と定めた。この汎関数の著しい特徴は、 $\mathcal{H}$ における測地線に沿って凸であるということである [3]。 $\mathcal{H}$ は測地的に完備ではないが、 $\mathcal{E}^1$ と呼ばれる完備化が存在する。これは、エネルギー $\mathbf{E}(\phi)$ が有限となるような特異 Kähler 計量 ϕ 全体からなるのだが、詳細は割愛する。この空間についての重要事項を以下列挙する。

定理 1.2. $\mathcal{E}^1$ には d_1 と呼ばれる距離が存在し、 $(\mathcal{E}^1, d_1)$ は以下の性質を満たす完備な測地的距離空間となる。

1. $\mathbf{D}$ は $(\mathcal{E}^1, d_1)$ 上に連続的に拡張できる。
2. $\mathbf{D}$ は $(\mathcal{E}^1, d_1)$ 内の測地線（有限エネルギー測地線）に沿って凸である。
3. $\mathbf{D}$ が $\mathcal{H}$ 上臨界点を持つこと、つまり $(X, -K_X)$ が滑らかな Kähler–Einstein 計量を持つことと、 $\mathbf{D}$ が $(\mathcal{E}^1, d_1)$ 上強制的 (**coercive**) と呼ばれる以下の条件を満たすことは同値である：ある $\epsilon > 0$ が存在し、

$$\mathbf{D}(\phi) \geq \epsilon d_1(\phi, 0) - \epsilon^{-1}$$

が任意の $\phi \in \mathcal{E}^1$ について成り立つ。

4. $\mathbf{D}$ が $(\mathcal{E}^1, d_1)$ 上強制的であることと、 $\mathbf{D}$ が $(\mathcal{E}^1, d_1)$ 内の任意の（適切な意味で非自明な）有限エネルギー測地線に沿って真に正の傾き（漸近スロープ）を持つことは同値である。

上で紹介した結果は全て非自明な定理であり、多くの数学者による重要な貢献からなるものであるが、紙面の都合により詳細は割愛する。Darvas のモノグラフ [11] を参照されたい。上記最後の項目の、測地線に沿った傾きについて、幾何学的描像を説明する。有限次元完備 Riemann 多様体 M 上の測地的（狭義）凸関数 $\mathbf{F} : M \rightarrow \mathbb{R}$ を考えた時、 $\mathbf{F}$ の臨界点（最小値）の存在は、測地線に沿った無限遠での傾きによって判定することができる。つまり、 $\mathbf{F}$ が最小値を達成することは M 内の全ての測地線 (geodesic ray) $\{\gamma_t\}_{t \geq 0}$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{F}(\gamma_t)}{t} > 0$$

が成り立つことと同値である（図 1 参照）．これは古典的な結果であるはずだが，証明が過去の文献に見当たらなかったので [17] に書いた．証明には原則として Hopf–Rinow の定理のみを用いるため，実はこの同値性は局所コンパクトな完備測地的距離空間まで拡張することができる． $(\mathcal{E}^1, d_1)$ は無限次元であり，さらに局所コンパクトではないと考えられているため，上記結果を直ちに $\mathbf{D}$ に応用することはできないのだが， $(\mathcal{E}^1, d_1)$ における解析学の深い結果を動員すると，上記にあるような幾何学的描像が $\mathbf{D}$ についても成立すると主張するのが定理 1.2 である．

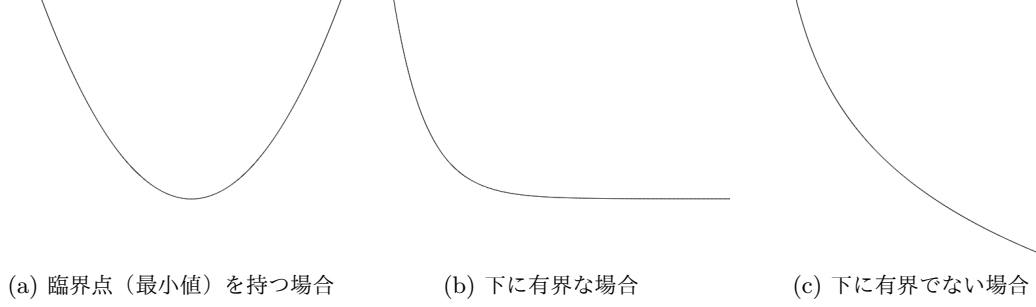


図 1: 凸関数の漸近挙動の分類

実は，汎関数の測地線に沿った無限遠での傾きは代数幾何学的不変量に対応し，これらの不変量が正になることと代数幾何学的安定性に対応する．実際，テスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に対して，「代数的」な（劣）測地線 $\{\phi_{\mathcal{X}, \mathcal{L}}^t\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{H}$ を対応させることができる [2, 4, 27]．Berman–Boucksom–Jonsson [2] や Boucksom–久本–Jonsson [4] らにより，以下のスロープ公式が示された：

$$\text{Ding}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}(\phi_{\mathcal{X}, \mathcal{L}}^t)}{t}.$$

定理 1.2 より，Kähler–Einstein 計量の存在から $\mathbf{D}$ の漸近スロープが正であることが従うから，Kähler–Einstein 計量を持つ Fano 多様体は一樣 Ding 安定であることが従う．

逆に，一樣 Ding 安定性から Kähler–Einstein 計量の存在を示すことは難しいが，Berman–Boucksom–Jonsson [2] はテスト配位を X の Berkovich 解析化上の非アルキメデス計量とみなす理論を整備することにより，このことを示した．話を簡単にするため，このセクションでは，以後 X の自己同型群は離散的であると仮定するが，一般の場合でも Chi Li [24] により同様の議論が成り立つことが示されている．

以後， $(X, -K_X)$ 上のテスト配位全体の集合に pullback による同値類を入れた集合を $\mathcal{H}^{\text{NA}}$ とおく．Ding 不変量は pullback により不変なので，pullback による同値類を考えて一般性を失わない． $\mathcal{H}^{\text{NA}}$ の元を $-K_X$ 上の非アルキメデス計量と呼ぶ．Boucksom–Jonsson [5] は，以下のように要約できる結果を示した： X の Berkovich 解析化 X^{an} の positive piecewise linear plurisubharmonic (psh) 関数全体の集合と $\mathcal{H}^{\text{NA}}$ の間には一対一対応が存在する．ここで， X^{an} は X の $\mathbb{C}$ 上の trivial absolute value についての Berkovich 解析化である．この空間の厳密な定義を与えることは非常に難しいが，集合としては $X^{\text{an}} = \coprod_{Y \subset X} Y^{\text{val}}$ と書ける．ただし，直和は X 内の全ての irreducible subvariety Y について取られており， Y^{val} は Y 上の valuation 全体がなす集合である．この集合には非常に複雑な位相が与えられているが，定義は割愛する．いずれにせよ，テスト配位の同値類を， X^{an} 上の psh 関数と解釈することで，テスト配位の完備化を定義することができる． $\mathcal{H}^{\text{NA}}$ の完備化は $\mathcal{E}^{1, \text{NA}}$ と書かれ， $\mathcal{H}^{\text{NA}}$ 内の減少列の極限で有限エネルギーを持つものからなる．定義は割愛するが，この完備化は $\mathcal{E}^1$ と同様の発想によりなされる [5]．重要なポイントは，テスト配位を位相空間 X^{an} の関数とみなすことで，その減少列の極限として完備化を定義できる点である．Berman–Boucksom–Jonsson

[2] は, $\mathcal{E}^1$ 内の極大測地線全体の集合と $\mathcal{E}^{1, \text{NA}}$ との間には一対一対応が存在し, スロープ公式

$$\text{Ding}(\phi^{\text{NA}}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}(\gamma(t))}{t}$$

が任意の $\phi^{\text{NA}} \in \mathcal{E}^{1, \text{NA}}$ および対応する極大測地線 $\{\gamma(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{E}^1$ に対して成立することを示した. さらに, $\mathbf{D}$ が $\mathcal{E}^1$ 上に連続的に延長することの類似として, Ding が $\mathcal{E}^{1, \text{NA}}$ 上に連続的に延長することを示すことができる [2]. これを用いて, Berman–Boucksom–Jonsson [2] は Yau–Tian–Donaldson 対応を以下のように証明した. $(X, -K_X)$ が一様 Ding 安定であるならば, Ding の連続性により, ある $\epsilon > 0$ が存在して

$$\text{Ding}(\phi^{\text{NA}}) \geq \epsilon \|\phi^{\text{NA}}\| \quad \text{for all } \phi^{\text{NA}} \in \mathcal{E}^{1, \text{NA}}$$

が成り立つ. 従って, 任意の $\mathcal{E}^1$ 内の極大測地線 $\{\gamma_t\}_{t \geq 0}$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{D}(\gamma(t))}{t} \geq \epsilon > 0$$

が成り立つ. 極大測地線に対して漸近スロープが正になることから, $\mathcal{E}^1$ のコンパクト性定理を用いて

$$\mathbf{D}(\phi) \geq \epsilon d_1(\phi, 0) - \epsilon^{-1} \quad \text{for all } \phi \in \mathcal{E}^1$$

が従うことが示される. 定理 1.2 から, Kähler–Einstein 計量の存在が従う.

このように, エネルギー汎関数の凸性とスロープ公式を用いて, Yau–Tian–Donaldson 対応を示すことができる. これは, 有限次元モーメント写像の零点と幾何学的不変式論に関する Kempf–Ness 定理を Kempf–Ness エネルギーというエネルギー汎関数を用いて証明する方法と同様であるので, このような証明方針を以後 **Kempf–Ness 原理** と便宜上呼ぶことにする.

2 Coupled Kähler–Einstein 計量についての Yau–Tian–Donaldson 対応

全ての Fano 多様体が Kähler–Einstein 計量を持つわけではないが, その変種ならば許容することはありうる. Kähler–Ricci ソリトンや満洲ソリトンなど色々な候補を考えることはできるが, 今回は Hultgren と Witt Nyström [20] により導入された以下の計量を考える. まず, 豊富な $\mathbb{Q}$ -線束 $L_1, \dots, L_k$ で

$$-K_X = L_1 + \dots + L_k$$

が成り立つものを固定する. Kähler 計量の k 個の組み $(\omega_1, \dots, \omega_k) \in c_1(L_1) \times \dots \times c_1(L_k)$ が方程式

$$\text{Ric}(\omega_1) = \dots = \text{Ric}(\omega_k) = \sum_{i=1}^k \omega_i$$

を満たす時, **coupled Kähler–Einstein 計量** と呼ばれる. $k = 1$ の時は通常の Kähler–Einstein 計量であるから, 以後 $k > 1$ と仮定する. 上と同様に, L_i 上にエルミート計量 h_i を固定し, 対応する Kähler 計量を $\theta_i \in c_1(L_i)$ とおく ($i = 1, \dots, k$). さらに, $c_1(L_i)$ 内の Kähler ポテンシャル全体の集合を $\mathcal{H}_i := \{\phi \in C^\infty(X, \mathbb{R}) \mid \theta_i + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \phi > 0\}$ とし, $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \times \dots \times \mathcal{H}_k$ と定める. また, Kähler 類 $c_1(X)$ にある Kähler 計量全体の集合を $\mathcal{H}(-K_X)$ と書くことにする. これらの空間は, $\mathcal{E}^1 := \mathcal{E}_1^1 \times \dots \times \mathcal{E}_k^1$ 及び $\mathcal{E}^1(-K_X)$ に完備化することができる.

定義 2.1. 以下のように定められる写像 $\mathbf{D}^{\text{cpd}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbf{D}^{\text{cpd}}(\phi_1, \dots, \phi_k) := \mathbf{L}^{\text{cpd}}(\phi_1, \dots, \phi_k) - \sum_{i=1}^k \mathbf{E}_i(\phi_i)$$

を **coupled Ding** 汎関数と呼ぶ [20]. ただし, $\mathbf{E}_i$ は汎関数 $\mathbf{E}$ を $\mathcal{H}_i$ 上定義したものであり,

$$\mathbf{L}^{\text{cpd}}(\phi_1, \dots, \phi_k) := -\log \int_X d\mu_{\phi_1, \dots, \phi_k}$$

である. ここで, $d\mu_{\phi_1, \dots, \phi_k}$ は $\phi_1, \dots, \phi_k$ が $L_1, \dots, L_k$ 上定めるエルミート計量をテンソル積することで得られる $-K_X$ 上のエルミート計量から定まる体積形式である.

この汎関数に対しても, 定理 1.2 と同様の性質が成り立つことが [20] で示された. $\mathbf{D}^{\text{cpd}}$ は $\mathcal{E}^1$ 上に連続的に拡張し, $\mathcal{E}^1$ 内の測地線に沿って凸であり, 滑らかな coupled Kähler–Einstein 計量が存在することは

$$\mathbf{D}^{\text{cpd}}(\phi) \geq \epsilon \sum_{i=1}^k d_1(\phi_i, 0) - \epsilon^{-1}$$

が任意の $\phi \in \mathcal{E}^1$ に対して成り立つような $\epsilon > 0$ が存在すること (coercivity) と同値である. さらに, coercivity は $\mathcal{E}^1$ 内の測地線に沿った $\mathbf{D}^{\text{cpd}}$ の傾きが正であることも同値である.

Hultgren と Witt Nyström [20] は, coupled Kähler–Einstein 計量についても Yau–Tian–Donaldson 対応が成り立つことを予想した. その際に Ding 安定性の coupled 版を定義したが, ここではまず藤田氏と講演者による定義 [13] を先に述べることにする. 上記において複数の Kähler ポテンシャル $\phi_1, \dots, \phi_k$ を考える必要があったことと同様に, 安定性を考える際にも, $(X, L_1), \dots, (X, L_k)$ それぞれに対してテスト配位 $(\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1), \dots, (\mathcal{X}_k, \mathcal{L}_k)$ を考える必要がある.

定義 2.2. テスト配位 $(\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1), \dots, (\mathcal{X}_k, \mathcal{L}_k)$ が与えられた時, $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k$ の $\mathbb{C}^*$ -同変な common resolution

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{X} & & & \\ \sigma_1 \swarrow & \downarrow \sigma_2 & \dots & \searrow \sigma_k & \\ \mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_2 & \dots & \mathcal{X}_k & \end{array}$$

をとる. テスト配位 $(\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1), \dots, (\mathcal{X}_k, \mathcal{L}_k)$ の和は, $(\mathcal{X}, \sigma_1^* \mathcal{L}_1 + \dots + \sigma_k^* \mathcal{L}_k)$ と定義されるテスト配位である.

上記の $\mathcal{X}$ は resolution の取り方に依存するが, 異なる resolution をとっても pullback によるテスト配位の同値類は不変であるから, 対応する $\mathcal{H}^{\text{NA}}(-K_X)$ の元は well-defined である. この和の定義は, 講演者が以前定義した, 射影埋め込みを用いる方法 [16] と同一になることを示すことができる. さらに, この和は強位相に関して連続な写像 $\mathcal{E}_1^{1, \text{NA}} \times \dots \times \mathcal{E}_k^{1, \text{NA}} \rightarrow \mathcal{E}^{1, \text{NA}}(-K_X)$ に拡張できる.

定義 2.3. テスト配位の k 個の組み $\{\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i\}_{i=1}^k$ が与えられた時, **coupled Ding** 不変量は

$$\text{Ding}(\{\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i\}_{i=1}^k) := -\sum_{i=1}^k \frac{\bar{\mathcal{L}}_i^{n+1}}{(n+1) \int_X c_1(L_i)^n} - 1 + \text{lct}(\mathcal{X}, D_{\mathcal{X}}; \mathcal{X}_0)$$

と定義される. ただし, $(\mathcal{X}, \sigma_1^* \mathcal{L}_1 + \dots + \sigma_k^* \mathcal{L}_k)$ は $\{\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i\}_{i=1}^k$ の和であり, $D_{\mathcal{X}}$ は $\text{supp } D_{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}_0$ かつ $-(K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1} + D_{\mathcal{X}}) \sim_{\mathbb{Q}} \sigma_1^* \mathcal{L}_1 + \dots + \sigma_k^* \mathcal{L}_k$ を満たす唯一の $\mathbb{Q}$ -因子である.

Kähler–Einstein の場合と同様に, coupled Ding 安定性は coupled Ding 不変量を用いて定義することができる. Hultgren–Witt Nyström [20] による coupled Ding 安定性のオリジナルの定義では, テスト配位の k 個の組み $\{\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i\}_{i=1}^k$ に対して, $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k$ が全て同型であることが仮定されていた. この制約を外して, 安定性の条件を強化したことがこの研究における重要なポイントである. さらに, やはり Kähler–Einstein の場合と同様に, テスト配位の組み $(\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1), \dots, (\mathcal{X}_k, \mathcal{L}_k)$ に対応する代数的な劣測地線 $\phi^t = (\phi_{\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1}^t, \dots, \phi_{\mathcal{X}_k, \mathcal{L}_k}^t) \in \mathcal{H}$ に対して, スローブ公式

$$\text{Ding}(\{\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i\}_{i=1}^k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}^{\text{cpd}}(\phi^t)}{t}$$

が成り立つことを示すことができる [13, 16]. このセクションの主結果は、以下の coupled Kähler–Einstein 計量についての Yau–Tian–Donaldson 対応である.

定理 2.4 (藤田–H. [13]). Fano 多様体 X の自己同型群が離散であると仮定する. この時, $(X; L_1, \dots, L_k)$ が coupled Kähler–Einstein 計量を持つことと, $(X; L_1, \dots, L_k)$ が一様 Ding 安定であることは同値である.

ただし, 一様 Ding 安定性は, ある $\epsilon > 0$ が存在して任意のテスト配位の k -個の組み $\{\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i\}_{i=1}^k$ に対して

$$\text{Ding}(\{\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i\}_{i=1}^k) \geq \epsilon \sum_{i=1}^k \|(\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i)\|$$

が成立することだと定められる. また, 上記条件は $\delta^{\text{cpd}} > 1$ という条件とも同値であるが, 詳細は割愛する.

証明は Kähler–Einstein の場合 [2] と同様, Kempf–Ness 原理を用いる. $(X; L_1, \dots, L_k)$ が一様 coupled Ding 安定であるならば, テスト配位の和をとる写像が $\mathcal{E}^{1, \text{NA}}$ まで連続的に拡張すること [13] と, coupled Ding 不変量の連続性より,

$$\text{Ding}(\{\phi_i^{\text{NA}}\}_{i=1}^k) \geq \epsilon \sum_{i=1}^k \|\phi_i^{\text{NA}}\| \quad \text{for all } \phi^{\text{NA}} \in \mathcal{E}^{1, \text{NA}}$$

がある $\epsilon > 0$ に対して一様に成り立つことが従う. このことから, $\mathcal{E}^1$ 内の任意の極大測地線 γ に対して

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{D}^{\text{cpd}}(\gamma(t))}{t} \geq \epsilon > 0$$

が成り立つ. 上記にあるような, 測地線に沿ったスロープの正値性から, coercivity

$$\mathbf{D}^{\text{cpd}}(\phi) \geq \epsilon \sum_{i=1}^k d_1(\phi_i, 0) - \epsilon^{-1} \quad \text{for all } \phi \in \mathcal{E}^1$$

が従うが, 証明は [2] と同様ではなく, Darvas–Zhang [12] によるコンパクト性定理が必要である. 上記から, coupled Kähler–Einstein 計量の存在が従う. 定理 2.4 は, X の自己同型群が離散的ではない場合でも, 適切に修正すれば同様に成り立つ. X の自己同型群が離散的である場合は, [32] により, $\delta^{\text{cpd}} > 1$ から coupled Kähler–Einstein 計量の存在を直接証明できることも知られている.

3 定スカラー曲率 Kähler 計量や extremal 計量についての最近の進展

Kähler–Einstein 計量や coupled Kähler–Einstein 計量を許容する多様体は K_X が定値の符号を持たなければならないため, 一般の偏極 Kähler 多様体 (X, L) 上の標準計量を考える際には標準計量の定義を拡張しなければならない. よく用いられるものは, スカラー曲率 $S(\omega)$ が定数となるようなものであり, 定スカラー曲率 Kähler (constant scalar curvature Kähler, cscK) 計量と呼ばれる. このさらなる一般化として, 方程式

$$\bar{\partial} \text{grad}_{\omega}^{1,0} S(\omega) = 0$$

の解として定まる **extremal 計量**というものがある. これはスカラー曲率の L^2 ノルム (Calabi 汎関数) を極小化する自然な計量である.

これらの計量についても, Kähler–Einstein 計量の場合と同様, 変分法的アプローチが有効である. 以後, $V := \int_X c_1(L)^n$ と置き直し, スカラー曲率の平均を $\bar{S} := -n \int_X c_1(K_X) c_1(L)^{n-1} / V$ と書く. レファレンス Kähler 計量 $\omega_0 \in c_1(L)$ に対する Kähler ポテンシャル $\phi \in \mathcal{H}$ に対して, (1) で定めた $\mathbf{E}$ と, 汎関数

$$\mathbf{E}_{\text{Ric}(\omega)}(\phi) := \frac{1}{V} \sum_{j=0}^{n-1} \int_X \phi \omega_{\phi}^j \wedge \omega^{n-j-1} \wedge \text{Ric}(\omega), \quad \mathbf{H}(\phi) := \frac{1}{V} \int_X \log \left(\frac{\omega_{\phi}^n}{\omega^n} \right) \omega_{\phi}^n$$

を用いて、満洲汎関数（もしくは K -エネルギー） $\mathbf{M} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\mathbf{M}(\phi) := \frac{\bar{S}}{n+1} \mathbf{E}(\phi) - \mathbf{E}_{\text{Ric}(\omega)}(\phi) + \mathbf{H}(\phi)$$

と定義する．この汎関数の臨界点は cscK 計量であり，部分的には定理 1.2 と類似した性質が成り立つ．しかし，Ding 汎関数とは異なり， $(\mathcal{E}^1, d_1)$ への拡張は連続的ではなく，また $\mathcal{E}^1$ 上では $+\infty$ も値として許容しなければならない．他にも様々な技術的困難があるが，滑らかな cscK 計量の存在と coercivity，また（適切な意味で非自明な）有限エネルギー測地線に沿って真に正の傾きを持つことが全て同値であることが Chen–Cheng [6, 7] によって証明された．同様の変分法的アプローチは extremal 計量に対しても存在する．まず， X の自己同型で L までリフトするもの全体がなす群 $\text{Aut}_0(X, L)$ の極大コンパクト部分群 $\mathbb{K}$ を固定する． $\mathbb{G} = \mathbb{K}^{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{K}$ の複素化とし， $\mathbb{T}$ を $\mathbb{G}$ の中心の単位元成分とする． $\mathcal{H}$ の元で $\mathbb{K}$ -不変なものを $(\mathcal{H})^{\mathbb{K}}$ と書く，今，汎関数 $\mathbf{J}_{\text{ext}} : (\mathcal{H})^{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\mathbf{J}_{\text{ext}}(\phi) := \frac{1}{V} \int_0^1 \int_X \dot{\phi}_t \theta(\phi_t) \frac{\omega_{\phi_t}^n}{n!} dt$$

と定義する．ただし， $\{\phi_t\}_{0 \leq t \leq 1} \subset (\mathcal{H})^{\mathbb{K}}$ は $\phi_0 = 0$ と $\phi_1 = \phi$ を結ぶ任意の滑らかな路であり， $\theta(\phi_t)$ は ω_{ϕ_t} についての extremal ベクトル場の holomorphy potential である．上記定義が路に依存しないことは非自明な結果である [1]．これを用いると，extremal 計量を臨界点にもつ修正満洲汎関数 $\mathbf{M}_{\text{ext}} : (\mathcal{H})^{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$\mathbf{M}_{\text{ext}}(\phi) := \mathbf{M}(\phi) + \mathbf{J}_{\text{ext}}(\phi)$$

と定義される．通常の満洲汎関数と同様に，修正満洲汎関数も $\mathbb{K}$ -不変な部分空間 $(\mathcal{E}^1)^{\mathbb{K}}$ 上に拡張するが，拡張は連続ではなく，値として $+\infty$ も取りうる．滑らかな extremal 計量の存在と $\mathbb{G}$ -coerivity が同値であることは He [19] によって証明された．

以上紹介した cscK 計量についても，計量の存在と代数幾何学的安定性の同値性を主張する予想が知られており，やはり Yau–Tian–Donaldson 予想と呼ばれている．この場合の安定性は，

$$\mathbf{M}^{\text{NA}}(\phi^{\text{NA}}) := K_{\bar{\mathcal{X}}/\mathbb{P}^1}^{\log} \cdot \bar{\mathcal{L}}^n + \frac{\bar{S}}{(n+1)V} \bar{\mathcal{L}}^{n+1}$$

と定められる非アルキメデス満洲汎関数によって定められる．ただし， $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ は $\phi^{\text{NA}} \in \mathcal{H}^{\text{NA}}$ を代表する任意のテスト配位であり， $K_{\bar{\mathcal{X}}/\mathbb{P}^1}^{\log}$ は $K_{\bar{\mathcal{X}}/\mathbb{P}^1}^{\log} := K_{\bar{\mathcal{X}}} - \pi^* K_{\mathbb{P}^1} + \mathcal{X}_{0, \text{red}} - \mathcal{X}_0$ と定められる $\bar{\mathcal{X}}$ 内の因子である．同様の予想は extremal 計量についても提案されている．この場合，安定性を定める不変量は非アルキメデス修正満洲汎関数であり， $\mathbf{M}^{\text{NA}}(\phi^{\text{NA}}) + \mathbf{J}_{\text{ext}}^{\text{NA}}(\phi^{\text{NA}})$ と定義される．これは相対的 K -安定性と呼ばれる Székelyhidi [28] によって導入された概念に基づくものである．ただし，Yao [31] に倣って

$$\mathbf{J}_{\text{ext}}^{\text{NA}}(\phi^{\text{NA}}) := \frac{1}{V/n!} \frac{\bar{\mathcal{L}}_{\beta}^{n+2}}{(n+2)!} - \frac{1}{(V/n!)^2} \left(\frac{\bar{\mathcal{L}}^{n+1}}{(n+1)!} \right)^2$$

と定めた．詳細な定義は割愛するが，上の $(\mathcal{X}_{\beta}, \mathcal{L}_{\beta})$ はテスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ の積テスト配位であり $n+2$ 次元の空間である．このように定めた不変量を用いると， $\mathbf{M}_{\text{ext}}$ に対してスロープ公式が成立する [4, 31]．

これらの汎関数についても Kempf–Ness 原理が成立することを期待することは非常に自然だが，様々な技術的困難がある． $\mathbf{M}^{\text{NA}}$ を $\mathcal{E}^{1, \text{NA}}$ 上に拡張することはできるが，やはり拡張は強位相に関して連続ではないため，その扱いは非常に難しい．しかし，Chi Li [25] はモデルと呼ばれるテスト配位の一般化（定義は純代数的）を定義し，モデルから誘導されるフィルトレーションに対して一様 K -安定性が成り立つことから cscK 計量の存在が従うことを示した（正確な定義は技術的なので割愛するが， $\text{PSH}^{\mathfrak{M}, \text{NA}}$ をモデルから誘導されるフィルトレーションから定まる非アルキメデス計量全体の集合とすると， $\mathcal{H}^{\text{NA}} \subset \text{PSH}^{\mathfrak{M}, \text{NA}} \subset \mathcal{E}^{1, \text{NA}}$ である）．

定理 3.1 (Li [25]). ある $\epsilon > 0$ が存在して $\mathbf{M}^{\text{NA}}(\phi^{\text{NA}}) \geq \epsilon \|\phi^{\text{NA}}\|_{\mathbb{T}}$ が任意の $\mathbb{G}$ -同変なモデルフィルトレーション $\phi^{\text{NA}} \in \text{PSH}^{\mathfrak{M}, \text{NA}}$ に対して成り立つならば, (X, L) は $\mathbb{K}$ -不変な cscK 計量を持つ.

ここで, $\|\phi^{\text{NA}}\|_{\mathbb{T}}$ は ϕ^{NA} の群同変なノルムである. 講演者は, この結果を extremal 計量に拡張した.

定理 3.2 (H. [18]). ある $\epsilon > 0$ が存在して $\mathbf{M}^{\text{NA}}(\phi^{\text{NA}}) + \mathbf{J}_{\text{ext}}^{\text{NA}}(\phi^{\text{NA}}) \geq \epsilon \|\phi^{\text{NA}}\|_{\mathbb{T}}$ が任意の $\mathbb{G}$ -同変なモデルフィルトレーション $\phi^{\text{NA}} \in \text{PSH}^{\mathfrak{M}, \text{NA}}$ に対して成り立つならば, (X, L) は $\mathbb{K}$ -不変な extremal 計量を持つ.

上記結果 [18] が arXiv で発表されたのは 2025 年 6 月だが, この分野には 2025 年 5 月ごろから極めて急速な発展があった. まず, Boucksom–Jonsson [23] が weighted cscK 計量に対して定理 3.1, 3.2 の類似及びその逆を証明したと発表した. 逆が成り立つことは極めて重要な進展であり, これによって weighted cscK 計量という extremal 計量を含む非常に広いクラスの標準計量に対して Yau–Tian–Donaldson 予想 (安定性条件をモデルまで強めたバージョン) が解けたことになる. また, [18] が発表された約 3 週間後に, Han–Liu [14] が定理 3.1, 3.2 を weighted cscK 計量まで拡張したと発表した. これらの仕事は全て独立である.

4 Nilsoliton の存在と Yau–Tian–Donaldson 対応の類似

これまで見たように, Yau–Tian–Donaldson 対応や Kempf–Ness 原理は Kähler 多様体上の様々な標準計量の存在問題について非常に有効である. この原理を, Kähler 多様体以外の標準計量に関する問題に応用することを考える.

冪零 Lie 群 N が推移的かつ等長的に作用する連結 Riemann 多様体を等質冪零多様体と呼ぶ. 以後, N は実次元 n で, 連結かつ単連結であると仮定する. 実は, 等質冪零多様体は N に左不変 Riemann 計量が入ったものと同型であり, また N は左不変 Einstein 計量を持たないことが知られている. N 上に左不変 Einstein 計量は存在し得ないので, その変種である左不変 Ricci soliton を考える. ここで, Ricci soliton とは, ある定数 λ とベクトル場 v に対して

$$\text{Ric}(g) = \lambda g + \mathcal{L}_v g$$

を満たす Riemann 計量 g のことであった. ただし, $\mathcal{L}_v$ は Lie 微分である. 等質冪零多様体上の左不変計量を考える限りにおいては, Ricci soliton の方程式は N の Lie 環 $\mathfrak{n}$ から定まる有限次元空間の行列の問題に還元される. 等質冪零多様体上の左不変 Ricci soliton を **nilsoliton** と呼ぶ.

冪零 Lie 環 $\mathfrak{n}$ の Lie ブラケットを μ , $\mathfrak{n}$ 上の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と書く. 今, 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して自己共役であるような線形写像 $\lambda \in \text{End}(\mathfrak{n})$ に対して, **Hilbert–Mumford weight** $\nu(\lambda; \mu)$ を

$$\nu(\lambda; \mu) := - \min_{1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq n} \{ \lambda_i + \lambda_j - \lambda_k \mid \mu_{ij}^k \neq 0 \}$$

により定義する. ただし, 上では $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の正規直交基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$ を選んで λ を $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ と対角化し, その基底に関して $\mu(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n \mu_{ij}^k e_k$ と書いた. この不変量を, 1 次元部分空間

$$\mathcal{S} := \mathbb{R}(I_{\mathfrak{n}} - \phi_{\mu}) \subset \text{End}(\mathfrak{n})$$

と交換し直交する元に対して計算する. ただし, $\phi_{\mu} \in \text{Der}(\mu)$ は Lie 環 $(\mathfrak{n}, \mu)$ から canonical に定まる derivation であり, **pre-Einstein derivation** と呼ばれている [26]. Kempf–Ness 原理を等質冪零多様体の場合に適切に設定することにより, nilsoliton に対する Yau–Tian–Donaldson 対応の類似が得られる.

定理 4.1 (H. [15]). N を等質冪零多様体とし, $(\mathfrak{n}, \mu)$ を対応する Lie 環とする. $(\mathfrak{n}, \mu)$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を, pre-Einstein derivation ϕ_{μ} が自己共役になるように選ぶ. この時, N が nilsoliton を持つことと, 自己共役線形写像 $\lambda \in \text{End}(\mathfrak{n})$ で $[\lambda, \mathcal{S}] = \langle \lambda, \mathcal{S} \rangle = 0$ を満たすものの全てに対して $\nu(\lambda; \mu) \geq 0$ が成り立つことは同値である (ただし等号成立は $\lambda \in \text{Der}(\mu)$ と同値).

N は実多様体なので、代数幾何学的な安定性はアプリオリには意味をなさない。しかし、上で紹介した変分原理や漸近スロープを用いた Kempf–Ness 原理は等質冪零多様体の場合にも同様に意味をなす。上記定理の安定性条件は extremal 計量の場合に現れた相対的安定性だと解釈することができ、 $\mathcal{S}$ は extremal ベクトル場が生成するトーラスと同様の役割を果たす [15]。

定理 4.1 は、nilsoliton の存在に関する必要十分条件を与える最初の定理ではない。まず、Nikolayevsky [26] により、nilsoliton が存在することの必要十分条件は μ の軌道 $\tilde{G} \cdot \mu$ が閉じていることだと示された。ただし、 $\tilde{G}$ は $SL(\mathfrak{n})$ の部分群で、その Lie 環が $\mathcal{S}$ と交換し $\mathcal{S}$ と直交するものである。しかし、Lie 群の軌道が閉じているかどうかを判定することは一般には難しいので、定理 4.1 にあるような数値的判定法を与えることが重要である。Jablonski [21] は上記定理と類似した数値的判定法を過去に与えたが、その内容は定理 4.1 と同値ではない。定理 4.1 では、Jablonski [21] とは異なり、 $\tilde{\mathfrak{g}} \cap \text{Der}(\mathfrak{n}, \mu)$ が reductive かどうかを判定する必要がなく、テストすべき $\lambda \in \text{End}(\mathfrak{n})$ の範囲も異なる。証明も、Jablonski の証明 [21] は Nikolayevsky の軌道を用いた判定法 [26] に帰着しているので、Kempf–Ness 原理を用いた証明 [15] とは大きく異なる。

定理 4.1 の新規性を見るには、技術的詳細の比較ではなく、その応用として与えられる新結果を見る方が良いと思われる。まず、上記定理に用いられた Kempf–Ness 原理の応用として、nilsoliton の非存在に関する十分条件を与える武富–田丸予想 [29] の修正版が以下のように成り立つ。

定理 4.2 (H. [15]). N を等質冪零多様体とし、 $(\mathfrak{n}, \mu, \langle, \rangle)$ を定理 4.1 と同様に設定する。さらに、 $\text{End}(\mathfrak{n})$ の元で $\mathcal{S}$ と交換し、 $\mathcal{S}$ と直交するもの全体がなす Lie 環に対応する Lie 群を G 、その部分群で $\langle, \rangle$ を固定するものを K とする。これらの Lie 環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ とし、 $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解を $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ と書く。今、

1. $\text{Aut}(\mu) \cap G$ の左剰余空間 G/K への作用は推移的ではない、
2. 全ての $\text{Aut}(\mu) \cap G$ -軌道は G について共役である、
3. 任意の $g \in G \setminus \text{Aut}(\mu)$ に対して、 $\mathfrak{p} \cap (\text{Der}(\mu) \setminus \text{Der}(\rho(g) \cdot \mu))$ が 0 以外の元を持つ、

と仮定する。この時、 N は nilsoliton を持ち得ない。

オリジナルの武富–田丸予想との最大の違いは $\text{Der}(\mu) \setminus \text{Der}(\rho(g) \cdot \mu)$ に関する条件 3 であるが、この条件を外すことはできない [22]。また、 G や K などの Lie 群の設定も微妙に異なる。最後に、定理 4.1 のさらなる応用として、凸集合を用いた nilsoliton の存在に関する必要十分条件を述べる。

定理 4.3 (H. [15]). N を等質冪零多様体とし、 $(\mathfrak{n}, \mu, \langle, \rangle)$ を定理 4.1 と同様に設定する。今、 $\mathfrak{n}$ の各 $\langle, \rangle$ -正規直交基底 $\mathcal{B}$ で ϕ_μ を対角化するもの $\mathcal{B} := \{e_i\}_{i=1}^n$ に対して、有限集合 $\mathcal{F}_\mathcal{B} \subset \mathfrak{n}$ を

$$\mathcal{F}_\mathcal{B} := \{e_i + e_j - e_k \mid 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq n, \text{ s.t. } \mu_{ij}^k \neq 0\}$$

と定義する。ただし、 $\mu(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n \mu_{ij}^k e_k$ と書いた。さらに、 $\text{Aff}(\mathcal{F}_\mathcal{B})$ を $\mathcal{F}_\mathcal{B}$ のアフィン包とし、 $O_\mathcal{B}$ を $\mathfrak{n}$ の原点の $\text{Aff}(\mathcal{F}_\mathcal{B})$ への射影とする。また、 $\text{Conv}(\mathcal{F}_\mathcal{B}) \subset \text{Aff}(\mathcal{F}_\mathcal{B})$ を $\mathcal{F}_\mathcal{B}$ の凸包とする。この時、 N が nilsoliton を持つことと、任意の $\mathcal{B}$ に対して $O_\mathcal{B}$ が $\text{Conv}(\mathcal{F}_\mathcal{B})$ の内部にあることは同値である。

この定理は、 $\mathfrak{n}$ が nice basis と呼ばれる特殊な基底を持つときには Nikolayevsky [26] によって（少し強いバージョンが）証明された。上記定理は、この結果を一般の等質冪零多様体に対して拡張するものである。

参考文献

- [1] R. J. Berman and B. Berndtsson, *Convexity of the K-energy on the space of Kähler metrics and uniqueness of extremal metrics*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), no. 4, 1165–1196. MR3671939
- [2] R. J. Berman, S. Boucksom, and M. Jonsson, *A variational approach to the Yau–Tian–Donaldson conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **34** (2021), no. 3, 605–652. MR4334189

- [3] B. Berndtsson, *A Brunn-Minkowski type inequality for Fano manifolds and some uniqueness theorems in Kähler geometry*, Invent. Math. **200** (2015), no. 1, 149–200. MR3323577
- [4] S. Boucksom, T. Hisamoto, and M. Jonsson, *Uniform K-stability and asymptotics of energy functionals in Kähler geometry*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **21** (2019), no. 9, 2905–2944. MR3985614
- [5] S. Boucksom and M. Jonsson, *Global pluripotential theory over a trivially valued field*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **31** (2022), no. 3, 647–836. MR4452253
- [6] X. Chen and J. Cheng, *On the constant scalar curvature Kähler metrics (I)—A priori estimates*, J. Amer. Math. Soc. **34** (2021), no. 4, 909–936. MR4301557
- [7] ———, *On the constant scalar curvature Kähler metrics (II)—Existence results*, J. Amer. Math. Soc. **34** (2021), no. 4, 937–1009. MR4301558
- [8] X. Chen, S. Donaldson, and S. Sun, *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I: Approximation of metrics with cone singularities*, J. Amer. Math. Soc. **28** (2015), no. 1, 183–197. MR3264766
- [9] ———, *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. II: Limits with cone angle less than 2π* , J. Amer. Math. Soc. **28** (2015), no. 1, 199–234. MR3264767
- [10] ———, *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. III: Limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof*, J. Amer. Math. Soc. **28** (2015), no. 1, 235–278. MR3264768
- [11] T. Darvas, *Geometric pluripotential theory on Kähler manifolds*, Advances in complex geometry, 2019, pp. 1–104. MR3996485
- [12] T. Darvas and K. Zhang, *Twisted Kähler-Einstein metrics in big classes*, Comm. Pure Appl. Math. **77** (2024), no. 12, 4289–4327. MR4814920
- [13] K. Fujita and Y. Hashimoto, *On the coupled Ding stability and the Yau–Tian–Donaldson correspondence for Fano manifolds*, arXiv preprint arXiv:2412.04028 (2024).
- [14] J. Han and Y. Liu, *G-uniform weighted K-stability for models on klt varieties*, arXiv preprint arXiv:2506.18039 (2025).
- [15] Y. Hashimoto, *A Hilbert–Mumford criterion for nilsolitons*, arXiv preprint arXiv:2311.12469 (2023).
- [16] ———, *Anticanonically balanced metrics and the Hilbert–Mumford criterion for the δ_m -invariant of Fujita–Odaka*, Ann. Global Anal. Geom. **64** (2023), no. 2, Paper No. 8, 40. MR4617093
- [17] ———, *Balanced metrics for extremal Kähler metrics and Fano manifolds*, The Bergman kernel and related topics, [2024] ©2024, pp. 169–188. MR4731752
- [18] ———, *Relative uniform K-stability over models implies existence of extremal metrics*, arXiv preprint arXiv:2506.02360 (2025).
- [19] W. He, *On Calabi’s extremal metric and properness*, Trans. Amer. Math. Soc. **372** (2019), no. 8, 5595–5619. MR4014289
- [20] J. Hultgren and D. W. Nyström, *Coupled Kähler-Einstein metrics*, Int. Math. Res. Not. IMRN **21** (2019), 6765–6796. MR4027565
- [21] M. Jablonski, *Concerning the existence of Einstein and Ricci soliton metrics on solvable Lie groups*, Geom. Topol. **15** (2011), no. 2, 735–764. MR2800365
- [22] ———, *Concerning a conjecture of Taketomi–Tamaru*, arXiv preprint arXiv:1810.08173v2 (2025).
- [23] M. Jonsson, *On the YTD conjecture for general polarizations*. https://simonsmoduli.com/wp-content/uploads/2025/05/jonsson_slides.pdf.
- [24] C. Li, *G-uniform stability and Kähler-Einstein metrics on Fano varieties*, Invent. Math. **227** (2022), no. 2, 661–744. MR4372222
- [25] ———, *Geodesic rays and stability in the cscK problem*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **55** (2022), no. 6, 1529–1574. MR4517682
- [26] Y. Nikolayevsky, *Einstein solvmanifolds and the pre-Einstein derivation*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no. 8, 3935–3958. MR2792974
- [27] D. H. Phong and J. Sturm, *Test configurations for K-stability and geodesic rays*, J. Symplectic Geom. **5** (2007), no. 2, 221–247. MR2377252
- [28] G. Székelyhidi, *Extremal metrics and K-stability*, Bull. Lond. Math. Soc. **39** (2007), no. 1, 76–84. MR2303522
- [29] Y. Taketomi and H. Tamaru, *On the nonexistence of left-invariant Ricci solitons—a conjecture and examples*, Transform. Groups **23** (2018), no. 1, 257–270. MR3763948
- [30] G. Tian, *K-stability and Kähler-Einstein metrics*, Comm. Pure Appl. Math. **68** (2015), no. 7, 1085–1156. MR3352459
- [31] Y. Yao, *Relative Ding stability and an obstruction to the existence of Mabuchi solitons*, J. Geom. Anal. **32** (2022), no. 4, Paper No. 105, 51. MR4372898
- [32] K. Zhang, *A quantization proof of the uniform Yau–Tian–Donaldson conjecture*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **26** (2024), no. 12, 4763–4778. MR4780493