

各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みとラプラシアンについて

成田 知将 *

米子工業高等専門学校

1 導入

M を (境界のない) n 次元 (連結) コンパクト多様体とする. M 上のリーマン計量 g に対して, (M, g) の体積 $\text{Vol}(M, g)$ と (正值) ラプラシアン Δ_g が定まる. ラプラシアン Δ_g の最小正固有値を $\lambda_1(g)$ とする. $\lambda_1(g)\text{Vol}(M, g)^{2/n}$ は g の定数倍に関して不変である. 1973 年, Berger [B] は次の問題を提起した. すなわち,

$$\Lambda_1(M) := \sup_g \lambda_1(g)\text{Vol}(M, g)^{2/n}$$

は有限か, という問題である. ここで, 上限 $\sup$ は M 上のリーマン計量全体にわたってとる. この問題は既に答えが知られている:

1980 年に Yang と Yau [YY] は, 向きづけ可能閉曲面 M に対して, $\Lambda_1(M)$ が M の種数のみに依存する定数で上から抑えられることを示した. また, 向きづけ可能でない閉曲面についても, 同様の結果が Karpukhin [K] によって得られている.

1979 年, 浦川肇氏 [U] は 3 次元球面 $S^3 \cong SU(2)$ 上の, 標準計量の標準的変分と呼ばれる, あるリーマン計量の 1 パラメータ族 $(g_t)_{t>0}$ について $\lambda_1(g_t)$ を具体的に計算することで, $\lambda_1(g_t)\text{Vol}(S^3, g_t)^{2/3} \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) が成り立つことを示した. これは上述の Berger の問題への最初の否定的解答であった. その直後, 丹野修吉氏 [T] は Hopf ファイブレーション $S^1 \rightarrow S^{2m+1} \rightarrow \mathbf{C}P^m$ を考えることで, 浦川氏の結果を一般の奇数次元球面 S^{2m+1} ($m \geq 1$) に一般化した. その後, Colbois と Dodziuk [CD] は, 3 次元以上の任意のコンパクト多様体 M に対し, M 上に $\lambda_1(h_t)\text{Vol}(M, h_t)^{2/n} \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) となるリーマン計量の 1 パラメータ族 $(h_t)_{t>0}$ を構成した. このことから, とくに $\Lambda_1(M)$ は有限でない.

上述の Hopf ファイブレーションは各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みの典型例である. 本研究では, 各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込み $(M, g) \rightarrow (B, j)$ が与えられたとき, 標準的変分と呼ばれる, あるリーマン計量の 1 パラメータ族 $(g_t)_{t>0}$ につい

* narita@yonago-k.ac.jp

て考え、リッチ曲率に関するある仮定の下で $\lambda_1(g_t)$ の評価を与える。特に、この評価から $t \rightarrow \infty$ のとき $\lambda_1(g_t)\text{Vol}(M, g_t)^{2/\dim M}$ が発散することがわかる。これは浦川氏、丹野氏の結果の一般化とみなせる。

2 リーマン沈め込みと標準的変分

この節では主結果を述べるための準備として、リーマン沈め込みと標準的変分について説明する。

$(M, g), (B, j)$ をコンパクトリーマン多様体とし、それぞれの次元を n, p とする。沈め込み $\pi : M \rightarrow B$ を考える。各 $b \in B$ に対し、 $F_b := \pi^{-1}(b)$ を b のファイバーという。各ファイバーは M の $(n - p)$ 次元部分多様体である。各 $m \in M$ に対し、 $V_m M := \text{Ker}(d\pi_m : T_m M \rightarrow T_{\pi(m)} B)$ を m における垂直空間といい、その g_m に関する直交補空間 $H_m M := (V_m M)^\perp$ を m における水平空間という。各 $m \in M$ に対し、 $d\pi_m \upharpoonright_{H_m M} : (H_m M, g_m \upharpoonright_{H_m M}) \rightarrow (T_{\pi(m)} B, j_{\pi(m)})$ が線形等長写像のとき、沈め込み $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ をリーマン沈め込みという。各ファイバー F_b は M の部分多様体なので、 g からリーマン計量が誘導される。誘導計量に関するレビ・チビタ接続を ∇^{F_b} と書く。 F_b 上の任意の接ベクトル場 X, Y に対し、 $\nabla_X^M Y - \nabla_X^{F_b} Y = 0$ が成り立つとき、 F_b は全測地的であるという。^{*1} Hermann [H] による次の古典的な結果が知られている：

定理 2.1 ([H]). $(M, g), (B, j)$ をコンパクトリーマン多様体とし、 $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ はリーマン沈め込みであるとする。このとき、各ファイバーが全測地的ならば、ファイバーたちは互いに等長的である。

次に、リーマン沈め込みに付随した、計量の標準的変分を定義する：

定義 2.2. $(M, g), (B, j)$ をコンパクトリーマン多様体とし、 $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ はリーマン沈め込みであるとする。各 $t > 0$ に対し、リーマン計量 g_t を次をすべてみたす（一意的な）計量として定める：任意の $m \in M$ に対し、

1. $g_t \upharpoonright_{V_m M \times H_m M} = 0$.
2. $g_t \upharpoonright_{H_m M \times H_m M} = g \upharpoonright_{H_m M \times H_m M}$.
3. $g_t \upharpoonright_{V_m M \times V_m M} = t^2 g \upharpoonright_{V_m M \times V_m M}$.

M 上のリーマン計量の 1 パラメータ族 $(g_t)_{t>0}$ をリーマン沈め込み $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ に付随した g の標準的変分という。また、

$$\Lambda_1(M, t) := \lambda_1(g_t)\text{Vol}(M, g_t)^{2/n}$$

^{*1} 式の左辺 $\nabla_X^M Y - \nabla_X^{F_b} Y$ は第二基本形式と呼ばれる。全測地的という概念は、一般の部分多様体に対して定義される概念だが、本稿で考える部分多様体はファイバーだけである。

とする.

定義より, とくに $g_1 = g$ が成り立つ. また, 定義より $\pi : (M, g_t) \rightarrow (B, j)$ もリーマン沈め込みである. さらに,

$$\text{Vol}(M, g_t) = t^{n-p} \text{Vol}(M, g) \quad (2.1)$$

が成り立つ. リーマン沈め込み $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ の各ファイバーが全測地的であるならば, リーマン沈め込み $\pi : (M, g_t) \rightarrow (B, j)$ の各ファイバーも全測地的であることがわかる.

例 2.3. S^{2m+1} を $\mathbf{C}^{m+1}$ 内の半径 1 の球面とみなす. $S^{2m+1} \rightarrow \mathbf{C}P^m$, $z \mapsto [z]$ は各ファイバーが大円 (したがって測地線) となるリーマン沈め込みである. このリーマン沈め込みを Hopf ファイブレーションという. 丹野修吉氏 [T] は

$$\lambda_1(S^{2m+1}, g_t) = \min\{4m + 4, 2m + t^{-2}\}$$

であることを示した. (ただし, $m = 1$ の場合にこれを最初に示したのは, 浦川肇氏 [U] である.) このことと, $\text{Vol}(S^{2m+1}, g_t) = t \text{Vol}(S^{2m+1}, g)$ よりとくに

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Lambda_1(S^{2m+1}, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_1(S^{2m+1}, t) = \infty$$

が成り立つ. 右の式は「1. 導入」で述べた Berger の問題への反例になっている.

比較のために別の例を見る:

例 2.4. 標準的な平坦トーラス $T^n = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$ を考える. $T^n \rightarrow T^{n-1}$, $(x^1, \dots, x^{n-1}, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^{n-1})$ は各ファイバーが測地線 $S^1 = T^1 = \mathbf{R} / \mathbf{Z}$ となるリーマン沈め込みである. フーリエ級数展開によって

$$\lambda_1(T^n, g_t) = \begin{cases} 4\pi^2 & (0 < t \leq 1) \\ 4\pi^2 t^{-2} & (1 \leq t) \end{cases}$$

であることが容易にわかる. $\text{Vol}(T^n, g_t)^{2/n} = t^{2/n}$ であるから,

$$\Lambda_1(T^n, t) = \begin{cases} 4\pi^2 t^{2/n} & (0 < t \leq 1) \\ 4\pi^2 t^{(2-2n)/n} & (1 \leq t) \end{cases}$$

を得る. このことからとくに

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Lambda_1(T^n, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_1(T^n, t) = 0$$

が従う.

上の 2 つの例において $\lim_{t \rightarrow 0} \Lambda_1(\cdot, t) = 0$ が成り立つが, このことは任意の, 各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みに対して成り立つことが知られている:

命題 2.5. ([B-BB]) リーマン沈め込み $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ の各ファイバーが全測地的ならば, $\lim_{t \rightarrow 0} \Lambda_1(M, t) = 0$ が成り立つ.

一方で上の2つの例において、 $t \rightarrow \infty$ のときの $\Lambda_1(\cdot, t)$ の振る舞いは異なる。標準球面の曲率は正で、平坦トーラスの曲率は0であるから、次の問が生じる:

問題 1: 各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込み $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ に関して、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_1(M, t) = \infty$ となるための曲率に関する十分条件を求めよ。

3 $\lambda_1(g_t)$ の評価に関する先行研究

$\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ は各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みであるとする。Bérard-Bergery と Bourguignon [B-BB] は垂直ラプラシアン Δ_v と水平ラプラシアン Δ_h を次のように定めた: M 上のなめらかな関数 f に対して、 $\Delta_v f$ と $\Delta_h f$ を

$$(\Delta_v f)(m) := \Delta^{F_{\pi(m)}}(f|_{F_{\pi(m)}})(m) \quad (m \in M),$$

$$\Delta_h f := \Delta^{M_g} f - \Delta_v f$$

により定義する。ここで、 $\Delta^{F_{\pi(m)}}$ は誘導計量を備えたリーマン多様体 $F_{\pi(m)}$ 上のラプラシアンである。 Δ_v, Δ_h は $L^2(M, g)$ 上の非負な形式的自己随伴作用素である。しかし、Bérard-Bergery と Bourguignon が指摘したように、 Δ_v, Δ_h は楕円型ではない。とくに、 Δ_v のスペクトラムは離散的だが、 Δ_h のスペクトラムは離散的とは限らない。Bérard-Bergery と Bourguignon [B-BB] は次を示した:

命題 3.1 ([B-BB]). $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ は各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みであるとする。このとき、 $\Delta_g^M, \Delta_v, \Delta_h$ は互いに可換である。また、

$$\Delta_{g_t}^M = \Delta_h + t^{-2} \Delta_v$$

が成り立つ。

また、直接的な言及はないものの、Bérard-Bergery と Bourguignon の論文では次のことが暗に用いられている:

補題 3.2. $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ は各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みであるとする。 (B, j) 上のラプラシアン Δ_j^B の最小正固有値を β_1 とする。このとき、任意の $t > 0$ に対して、 $\lambda_1(g_t) \leq \beta_1$ が成り立つ。

とくに、この補題と (2.1) およびはさみうちの原理から、命題 2.5 が成り立つ。一方、 $\lambda_1(g_t)$ の下からの評価に関しては、命題 3.1 を用いて Grana と Lima [GL] が次を示した:

命題 3.3 ([GL]). $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ は各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みであるとする。このとき、任意の $0 < t \leq 1$ に対して、 $\lambda_1(g) \leq \lambda_1(g_t)$ が成り立つ。

問題 2: $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ は各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みであるとする。

このとき、任意の $t \geq 1$ に対して、 $\lambda_1(g_t)$ の下からの評価を与えよ^{*2}

4 主定理

本研究の主結果は次であり、上の問題 1, 2 に解答を与えるものである:

定理 4.1 ([N]). $(M, g), (B, j)$ はコンパクトリーマン多様体で、それぞれの次元は n, p であるとする. $\pi: (M, g) \rightarrow (B, j)$ を各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みとする.

$$\text{Ric}^M \geq \tilde{c}g$$

となる $\tilde{c} > 0$ が存在すると仮定する. さらに、 $n - p \geq 2$ の場合は

$$\text{Ric}^{F_b} = c(\iota^*g) \quad (b \in B)$$

となる $0 \leq c < \tilde{c}$ が存在すると仮定する. ここで、 $\iota: F_b \hookrightarrow M$ は包含写像、したがって ι^*g は誘導計量である.

このとき、 $n - p \geq 2$ の場合は任意の $t \geq 1$ に対し、

$$\lambda_1(g_t) \geq \frac{\tilde{c} - c}{n + 1} + t^{-2} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \tilde{c} + \frac{c}{n + 1} \right)$$

が成り立つ. $n - p = 1$ の場合は、上の不等式に $c = 0$ を代入した不等式が成り立つ. また、いずれの場合にも等号成立のための必要十分条件は、 $t = 1$ かつ (M, g) が奇数次元球面 $S^{2m+1}(\sqrt{2m/\tilde{c}})$ に等長的なことである.

定理 2.1 より、上の主定理における $b \in B$ は「任意の b 」としても「ある b 」としても同じことである. 主定理の系として、主定理と補題 3.2 および (2.1) から、 $\Lambda_1(M, t) = O(t^{2(n-p)/n})$ が成り立つ.

問題 1 について: リッチ曲率に関する上の定理の仮定のもとで、 $\Lambda_1(M, t) = O(t^{2(n-p)/n})$ が成り立つ. とくに、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_1(M, t) = \infty$ が成り立つ. とくに例 2.3 のようにファイバーが 1 次元の場合、 (M, g) のリッチ曲率が正であるという仮定だけから $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_1(M, t) = \infty$ が従う.

問題 2 について: 上の定理の仮定のもとで、 $\lambda_1(g_t)$ の下からの評価を与えることができた. 例 2.4 はファイバーが 1 次元であったから、 (M, g) のリッチ曲率が正であるという仮定は除けないことがわかる.

今後の課題: 最後に今後の課題を述べ、本稿の結びとする.

(1) リーマン沈め込み $\pi: (M, g) \rightarrow (B, j)$ がサブリーマン構造を誘導するならば、水平ラブラシアンは準楕円型になり、とくにスペクトラムは離散的で、0 はスペクトラムの孤立点になる [B-BB]. リーマン沈め込みがサブリーマン構造を誘導するための十分条件は何か?

^{*2} (M, g) が 3-佐々木で、 (B, j) が四元数ケーラーであるときには、最近 Nagy と Semmelmann [NS] がシャープな評価を与えている.

(2) 上述の主定理は四元数ケーラー多様体のツイスターファイブレーションにも適用できる ([N, Example 5.12]) が, シャープではない. ツイスターファイブレーションに関する $\lambda_1(g_t)$ のシャープな評価を与えよ^{*3}.

参考文献

- [B-BB] L. Bérard-Bergery and J. -P. Bourguignon, *Laplacians and Riemannian submersions with totally geodesic fibers*, Illinois J. Math. **26**(1982), no.2, 181–200.
- [B] M. Berger, *Sur les premières valeurs propres des variétés Riemanniennes*, Compositio. Math. **26**(1973), 129–149.
- [BLP] R. G. Bettiol, E. A. Lauret and P. Piccione, *The First Eigenvalue of a Homogeneous CROSS*, J. Geom. Anal. **32**(2022), Article No. 76, 63pp.
- [CD] B. Colbois and J. Dodziuk, *Riemannian metrics with large λ_1* , Proc. Amer. Math. Soc. **122**(1994), 905–906.
- [GL] L. Grama and K. N. S. Lima, *Bifurcation and local rigidity of homogeneous solutions to the Yamabe problem on Aloff–Wallach spaces*, preprint, arXiv:2405.20345v1.
- [H] R. Hermann, *A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fibre bundle*, Proc. Amer. Math. Soc. **11**(1960), 236–242.
- [K] M. Karpukhin, *On the Yang-Yau inequality for the first Laplace eigenvalue*, Geom. Funct. Anal. **29**(2019), 1864–1885.
- [NS] P.-A. Nagy and U. Semmelmann, *Eigenvalue estimates for 3-Sasaki structures*, J. Reine Angew. Math. **803**(2023), 35–60.
- [N] K. Narita, *Remark on Laplacians and Riemannian submersions with totally geodesic fibers*, preprint, arXiv:2411.17078 v5.
- [T] S. Tanno, *The first eigenvalue of the Laplacian on spheres*, Tôhoku Math J. **31**(1979), 179–185.
- [U] H. Urakawa, *On the least positive eigenvalue of the Laplacian for compact group manifolds*, J. Math. Soc. Japan **31**(1979), 209–226.
- [YY] P. Yang and S. T. Yau, *Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **7**(1980), no.4, 55–63.

^{*3} ツイスターファイブレーションの最も基本的な例である $\mathbf{CP}^1 \rightarrow \mathbf{CP}^{2m+1} \rightarrow \mathbf{HP}^m$ については, Bettiol–Lauret–Piccione [BLP] が $\lambda_1(g_t) = \min\{8m + 8, 8m + 8t^{-2}\}$ と求めている.