

# Quiver から得られる 2-step nilpotent Lie 代数と幾何構造

大阪公立大学 溝口史華

## 概要

Nilpotent Lie 群上の幾何構造において, グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数は重要な役割を果たす. 最近, cycle を含まない有限 quiver から nilpotent Lie 代数を得る新たな方法が提案された. この方法により, 任意の step 数の nilpotent Lie 代数が得られる. 本稿では, quiver から得られる nilpotent Lie 代数が 2-step のときに注目する. グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数との関係を用いて, これらの nilpotent Lie 代数が Ricci-flat 擬 Riemann 計量を許容することを述べる. さらに, symplectic 構造を許容するこれらの nilpotent Lie 代数を分類する.

## 1 導入

微分幾何学において, 与えられた多様体が特別な幾何構造を許容するかどうかを調べることは重要な問題である. Lie 群では, 左不変幾何構造の存在が自然に考えられるが, 一般に特別な幾何構造を許容する Lie 群の分類は困難な問題である.

我々は, 特に nilpotent Lie 群上の左不変幾何構造に関心を持っており, Einstein や Ricci soliton のような特別な Riemann 計量や擬 Riemann 計量, symplectic 構造について考える. しかし, 2-step nilpotent Lie 群においてさえ, これらの幾何構造については完全には解明されていない. 単連結リー群の上の左不変幾何構造とリー代数上の幾何構造が対応しているので, それらを同一視して議論を行う.

2-step nilpotent Lie 代数上の幾何構造を研究において, 単純有向グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数が知られている ([DM]). さらに, 最近, cycle を含まない有限 quiver から nilpotent Lie 代数を構成する方法が提案された ([MT]). この方法は, 任意の step 数の nilpotent Lie 代数を構成することが可能であり, これらの Lie 代数が Ricci soliton Riemann 計量を許容する ([MT]). 本稿では, 2-step の場合に注目し, グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数との関係を述べる. さらに, その関係を用いて, これらの nilpotent Lie 代数が Ricci-flat 擬 Riemann 計量を許容することを示す. 加えて, symplectic 構造を許容するこれらの Lie 代数を分類する.

## 2 Quiver から得られる nilpotent Lie 代数

以下では, quiver から Lie 代数を得る方法を紹介する. quiver とは多重辺とループを許す有向グラフのことであり, 表現論をはじめとする様々な分野で研究されている. ここでは, [ASS] を参照する. cycle を含まない有限 quiver から任意の step 数の nilpotent Lie 代数が得られる.

### 2.1 quiver

**定義 2.1** 集合  $V, E$ , 写像  $s, t: E \rightarrow V$  に対して, 組  $Q = (V, E, s, t)$  を quiver という.  $V$  の元を 頂点,  $E$  の元を 辺,  $\alpha \in E$  に対して,  $s(\alpha)$  を 始点,  $t(\alpha)$  を 終点 という.

**定義 2.2**  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$  に対して,  $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) であるとき, 辺の列  $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$  が 道 であるという. このとき,  $n$  を 道の長さ という.

例 2.3  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, E = \{a, b, c, d, e\}$  とし,  $s(a) = v_1, s(b) = v_2, s(c) = v_3, s(d) = v_3, s(e) = v_4, t(a) = v_2, t(b) = v_4, t(c) = v_4, t(d) = v_4, t(e) = v_5$  とすると quiver となり, 図示すると, 図 1 のようになる.

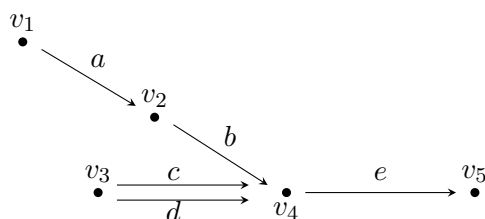


図 1 例 2.3 の quiver

この quiver の道は,  $a, b, c, d, e, ab, be, ce, de, abe$  の 10 個.

## 2.2 nilpotent Lie 代数の構成

定義 2.4 (M.-Tamaru, [MT]) quiver  $Q = (V, E, s, t)$  に対して,  $Q$  のすべての道の集合を  $\text{Path}(Q)$  とし,  $\mathfrak{n}_Q$  を次で定める:

$$\mathfrak{n}_Q := \text{span Path}(Q).$$

また,  $x, y \in \text{Path}(Q)$  に対して, 積と括弧積を

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & (t(x) = s(y)), \\ 0 & (t(x) \neq s(y)), \end{cases} \quad [x, y] = x \cdot y - y \cdot x$$

と定めると,  $\mathfrak{n}_Q$  は Lie 代数となる. これを  $Q$  から得られる Lie 代数 という.

注意 2.5  $\mathfrak{n}_Q$  に積  $\cdot$  を入れたものは道代数として既に知られている. 道代数の場合は, 頂点を長さ 0 の道として含めるのが一般的である. 今回は, 長さ 1 以上の辺を道として扱う.

quiver  $Q$  の道  $x$  に対して,  $s(x) = t(x)$  であるとき,  $x$  を cycle という. cycle を持つ quiver から得られる Lie 代数は無次元になる. 辺が有限集合である有限 quiver が cycle を含まないとき, quiver のすべての道の長さの最大値が存在する. これを quiver の長さ という.

命題 2.6  $Q$  を cycle を含まない有限 quiver とすると,  $\mathfrak{n}_Q$  は有限次元の nilpotent Lie 代数となる. また, 長さが  $m$  の quiver から得られる Lie 代数は,  $m$ -step nilpotent Lie 代数である.

## 2.3 例

例 2.7 次の図 2 の quiver から得られる Lie 代数  $\mathfrak{n}$  は 3 次元 Heisenberg 代数と同型.



図 2 例 2.7

### 3 既知の例との比較

Nilpotent Lie 代数上の幾何構造の研究において, 具体例の一つとしてグラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数が知られている. 以下では, グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数を紹介し, それらの Lie 代数と quiver から得られる nilpotent Lie 代数について比較する.

#### 3.1 グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数

集合  $V$  と集合  $E \subset \{(x, y) \in V \times V \mid x \neq y\}$  の組  $\Gamma = (V, E)$  を単純有向グラフという.  $V$  の元を頂点といい,  $E$  の元を辺という. 辺  $e = (x, y)$  に対して,  $x$  を  $e$  の始点といい,  $y$  を  $e$  の終点という. 単純有向グラフから次のように 2-step nilpotent Lie 代数を定義する.

**定義 3.1** (Dani-Mainkar, [DM]) 単純有向グラフ  $\Gamma = (V, E)$  に対して,

$$\mathfrak{n}_\Gamma := \text{span}(V \cup E),$$

$$[x, y] = \begin{cases} e & (x, y \in V, e = (x, y)), \\ -e & (x, y \in V, e = (y, x)), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

とすると, 2-step nilpotent Lie 代数  $\mathfrak{n}_\Gamma$  を得る.

#### 3.2 グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数との比較

quiver から得られる nilpotent Lie 代数が 2-step の場合に注目し, グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数と比較する.

**補題 3.2** 任意の長さ 2 の quiver  $Q$  から得られる 2-step nilpotent Lie 代数  $\mathfrak{n}_Q$  は, 次の  $(m, n)$ -type quiver ( $m \geq 1, n \geq 0$ ) から得られる nilpotent Lie 代数の直和である.

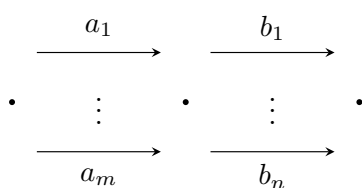


図 3  $(m, n)$ -type quiver

**補題 3.3**  $(m, n)$ -type quiver  $Q$  と  $(m, n)$  完全二部グラフ  $\Gamma$  に対して, それぞれから得られる nilpotent Lie 代数  $\mathfrak{n}_Q$  と  $\mathfrak{n}_\Gamma$  は同型である.

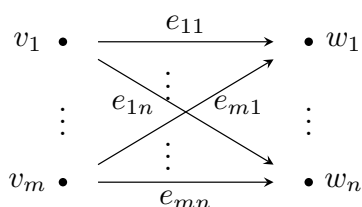


図 4  $(m, n)$  完全 2 部グラフ

補題 3.2, 補題 3.3 より, 次が示される.

**命題 3.4** 任意の長さ 2 の quiver  $Q$  に対して, ある単純有向グラフ  $\Gamma$  が存在し, それぞれから得られる 2-step nilpotent Lie 代数  $\mathfrak{n}_Q$  と  $\mathfrak{n}_\Gamma$  は同型である.

グラフから得られる nilpotent Lie 代数は 2-step に限られるため, 3-step 以上の quiver から得られる nilpotent Lie 代数はグラフから得られない.

## 4 結果

以下では, グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数との関係を用いて, quiver から得られる nilpotent Lie 代数が 2-step の場合に Ricci-flat 擬 Riemann 計量や symplectic 構造を許容するかどうかについて述べる.

### 4.1 Ricci-flat 擬 Riemann 計量

**定義 4.1** 不定値内積つき Lie 代数  $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$  に対して,  $\text{Ric} = 0$  を満たすとき,  $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$  が Ricci-flat であるという.

Riemann 計量とは異なり, 擬 Riemann 計量においては nilpotent Lie 代数がいつ Ricci-flat 計量を許容するか解明されていない. そのため, グラフから得られている nilpotent Lie 代数上においても研究がなされており, 次の定理が知られている.

**定理 4.2** (Conti-del Barco-Rossi, [CBR]) グラフから得られる nilpotent Lie 代数はすべて Ricci-flat 擬 Riemann 計量を許容する.

命題 3.4 より, 2-step の場合は quiver から得られる nilpotent Lie 代数はグラフから得られるので, 次が示される.

**定理 4.3** 長さ 2 の quiver  $Q$  に対して,  $Q$  から得られる 2-step nilpotent Lie 代数  $\mathfrak{n}_Q$  は Ricci-flat 擬 Riemann 計量を許容する.

**注意 4.4**  $(m, n)$ -type quiver から得られる 2-step nilpotent Lie 代数において, 定理 4.3 によって得られた Ricci-flat 擬 Riemann 計量の符号数  $(p, q)$  は次を満たす:

$$p, q \geq m + n - 1$$

**問題 4.5** quiver から得られる nilpotent Lie 代数において, 以下の問題が考えられる.

- 2-step のとき, 任意の符号数の Ricci-flat 擬 Riemann 計量を許容するか.
- 3-step 以上のとき, いつ与えられた符号数の Ricci-flat 擬 Riemann 計量を許容するか.

### 4.2 symplectic 構造

**定義 4.6** Lie 代数  $\mathfrak{g}$  に対して, 2-form  $\omega$  が symplectic 構造 であるとは,  $d\omega = 0$  かつ  $\omega^n \neq 0$  を満たすことである.

**定理 4.7** (Pouseele-Tirao, [PT]) 単純有向グラフ  $\Gamma = (V, E)$  に対して,  $\Gamma$  から得られる nilpotent Lie 代数  $\mathfrak{n}_\Gamma$  が symplectic 構造を許容する必要十分条件は,  $\mathfrak{n}_\Gamma$  の偶数次元であり,  $\#E \leq \#V$  を満たすことで

ある.

命題 3.4 より, 2-step の場合は quiver から得られる nilpotent Lie 代数はグラフから得られるので, 定理 4.7 の条件を翻訳することによって, 次が示される.

**定理 4.8** 長さ 2 の quiver  $Q$  に対して,  $Q$  から得られる 2-step nilpotent Lie 代数が symplectic 構造を許容する必要十分条件は, 以下である:

- (i)  $n_Q$  は偶数次元,
- (ii)  $Q$  の連結成分は以下のような  $(2, 2)$ ,  $(1, n)$ ,  $(n, 1)$ ,  $(1, 0)$ -type quiver のいずれか.

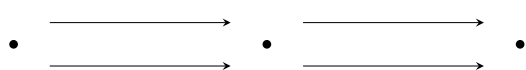


図 5  $(2, 2)$ -type

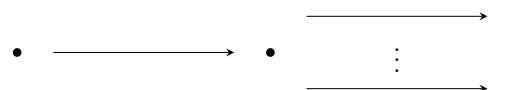


図 6  $(1, n)$ -type

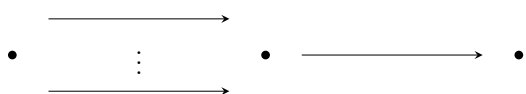


図 7  $(n, 1)$ -type



図 8  $(1, 0)$ -type

**問題 4.9** quiver から得られる nilpotent Lie 代数が 3-step 以上のとき, いつ symplectic 構造を許容するか.

## 参考文献

- [ASS] Assem, I., Simson, D. and Skowroński, A., “Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory”, London Math. Soc. Stud. Texts, 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006. x+458 pp.
- [CBR] Conti, D., del Barco, V. and Rossi, F. A., “Diagram involutions and homogeneous Ricci-flat metrics”, Manuscripta Math. **165** (2021), no. 3-4, 381–413.
- [DM] Dani, S. G. and Mainkar, M., “Anosov automorphisms on compact nilmanifolds associated with graphs”, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), no. 6, 2235–2251.
- [MT] Mizoguchi, F. and Tamaru, H., “Nilpotent Lie algebras obtained by quivers and Ricci solitons”, arXiv:2405.11184.
- [M] Mizoguchi, F., “Two-step nilpotent Lie algebras obtained by quivers and geometric structures”, In: Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, to appear.
- [PT] Pouseele, H. and Tirao, P., “Compact symplectic nilmanifolds associated with graphs”, J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), no. 9, 1788–1794.