サイクルが及ぼすグラフラプラシアン第1固有値の発散

五明工　(大阪大学大学院理学研究科)*

グラフの各辺に長さを指定したとき, 対応する頂点の重みと辺の重みを適切に定めて, 離散ラプラシアンが定義される. このとき, 辺の長さ (辺長パラメータ) を動かしてラプラシアンの第1固有値を最大化する問題を考える. 本講演では, サイクルを含む任意のグラフに対して第1固有値が発散することを主定理として報告する. 本講演の内容は, 名古屋大学の納谷信氏との共同研究 [4] に基づく.

準備　$G=(V,E)$ をループと多重辺のない連結な有限グラフとする. ここで, V は頂点集合, E は辺集合を表す. 頂点の重み $m_0\colon V\to\mathbb{R}_{>0}$ を与え, 頂点集合 V 上の関数全体 $\mathbb{R}^V$ に次のような内積を定める.

$$\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle=\sum_{u\in V}m_0(u)\,\varphi_1(u)\,\varphi_2(u),\quad \varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{R}^V.$$

辺の重み $m_1\colon E\to\mathbb{R}_{>0}$ を与え, グラフ G 上の重み付き離散ラプラシアン $\Delta_{(m_0,m_1)}:\mathbb{R}^V\to\mathbb{R}^V$ を次のように定義する.

$$(\Delta_{(m_0,m_1)}\varphi)(u)=\sum_{v\sim u}\frac{m_1(uv)}{m_0(u)}\left(\varphi(u)-\varphi(v)\right),\quad u\in V.$$

$\Delta_{(m_0,m_1)}$ は半正定値であり, 固有値 0 を持つ (定数関数が固有関数に対応する) ことに注意する. $\Delta_{(m_0,m_1)}$ の最小正固有値 (第1固有値) $\lambda_1(G,(m_0,m_1))$ は次のように特徴付けられる.

$$\begin{aligned}\lambda_1(G,(m_0,m_1))&=\min_{\varphi}\frac{\langle\Delta_{(m_0,m_1)}\varphi,\varphi\rangle}{\langle\varphi,\varphi\rangle}\\&=\min_{\varphi}\frac{\sum_{uv\in E}m_1(uv)(\varphi(u)-\varphi(v))^2}{\sum_{u\in V}m_0(u)\varphi(u)^2}.\end{aligned}$$

このとき, φ は $\sum_{u\in V}m_0(u)\varphi(u)=0$ をみたすようなゼロでない関数全体にわたる.

次に, グラフラプラシアン $\Delta_{(m_0,m_1)}$ の行列表示についても述べておく. 頂点集合を $V=\{1,\dots,|V|\}$ としたとき, $\mathbb{R}^V$ の正規直交基底を次のようにとる.

$$e_i\colon j\in V\mapsto\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{m_0(i)}}\in\mathbb{R},\quad i\in V.$$

このとき対応する $\Delta_{(m_0,m_1)}$ の表現行列 L は $L=D^{-1/2}L_0D^{-1/2}$ と表される. ここで $D=\mathrm{diag}(m_0(1),\dots,m_0(|V|))$ であり, L_0 は辺の重み付きラプラシアン行列である. す

*e-mail: gomyou@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

なわち, 各成分は次のように定められる.

$$(L_0)_{i,i} = \sum_{j\sim i} m_1(ij), \quad i \in V,$$

$$(L_0)_{i,j} = \begin{cases} -m_1(ij), & ij \in E, \\ 0, & ij \notin E. \end{cases}$$

設定 辺長パラメータ $l\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$ を与え, 藤原 [2] に従って, 頂点の重み $m_0\colon V \to \mathbb{R}_{>0}$ と辺の重み $m_1\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$ を

$$m_1(uv) = l(uv)^{-1}, \quad uv \in E,$$
$$m_0(u) = \sum_{v\sim u} l(uv), \quad u \in V$$

と定める. このとき, グラフラプラシアン $\Delta_{(m_0,m_1)}$ は l を変数に持つため, $\Delta_l := \Delta_{(m_0,m_1)}$ と表記する. また, 第 1 固有値についても $\lambda_1(G,l) := \lambda_1(G,(m_0,m_1))$ とする. このとき, $\lambda_1(G,l)$ の最大化問題を考える.

問題 1 辺長パラメータ l で正規化条件

$$\sum_{u\in V} m_0(u) = 1$$

をみたすもの全体にわたって $\lambda_1(G,l)$ を最大化せよ. すなわち, 次を求めよ.

$$\Lambda_1(G) := \sup_l \lambda_1(G,l).$$

研究の背景 上述したように頂点と辺の重みは藤原 [2] に従って定めたが, そうすると l のスケーリングによる第 1 固有値の振る舞いがリーマン計量の場合と同様になる. すなわち, $\lambda_1(G,cl) = c^{-2}\lambda_1(G,l)$ である. (l^2 をリーマン計量の離散類似とみなしている.) また問題 1 の背景には, 次のような曲面上の固有値最大化問題がある.

問題 2 閉曲面 M 上のリーマン計量 g に対して, その (正値) ラプラシアン $\Delta_g\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ の最小正固有値 (第 1 固有値) を $\lambda_1(g)$ と表すとき, リーマン計量 g で $\mathrm{Area}\,(g) = 1$ をみたすもの全体にわたって $\lambda_1(g)$ を最大化せよ.

問題 2 について, 次の Nadirashvili [6] の結果が知られている.

定理 1 (Nadirashvili, 1996) g を問題 2 の解であるリーマン計量とするとき, Δ_g の第 1 固有関数を適当に並べて得られる写像 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \cdots, \varphi_N)\colon M \to \mathbb{R}^N$ で (適当な半径の) $N-1$ 次元球面への極小等長はめ込みになるものが存在する.

これらの背景を踏まえて, 我々の先行研究にあたる [3] では, 問題 1 を導入し, 次を得た.

定理 2　l を $\lambda_1(G,l)$ の極大値を与える辺長パラメータとする．このとき, $\lambda_1(G,l)$ に対する固有関数 $\varphi_1,\cdots,\varphi_N$ を並べた写像 $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\cdots,\varphi_N)\colon V\to\mathbb{R}^N$ で次をみたすものが存在する.

$$l(uv)^2=\frac{\|\boldsymbol{\varphi}(u)-\boldsymbol{\varphi}(v)\|^2}{1-\lambda_1(G,l)\,(\|\boldsymbol{\varphi}(u)\|^2+\|\boldsymbol{\varphi}(v)\|^2)},\quad uv\in E.$$

定理 2 の主張をみたす写像 $\boldsymbol{\varphi}$ は, 極大値を与える辺長パラメータ l を明示的に記述しており, その意味でグラフのユークリッド空間へのよい実現を与えている．この結果は, 定理 1 のグラフにおける類似となっている.

今ひとつの背景　グラフ上の重み付きラプラシアンに対して, 問題 1 と類似の第 1 固有値最大化問題が Göring-Helmberg-Wappler [5] によって定式化されていた．彼らは, l と m_0 は独立に与えて固定し, 次の問題を提起した．($m_0\equiv 1$, $l\equiv 1$ の場合は Fiedler [1] による.)

問題 3　辺の重み m_1 で正規化条件

$$\sum_{uv\in E}m_1(uv)l(uv)^2=\sum_{uv\in E}l(uv)^2$$

をみたすもの全体にわたって $\Delta_{(m_0,m_1)}$ の最小正固有値 $\lambda_1(G,(m_0,m_1))$ を最大化せよ.

問題 3 の最適解に対応するグラフ埋め込みについて次が得られる.

定理 3　(Göring-Helmberg-Wappler, 2011)　$m_1\colon E\to\mathbb{R}_{>0}$ を問題 3 の最適解とする．このとき, $\lambda_1(G,(m_0,m_1))$ に対する固有関数 $\varphi_1,\cdots,\varphi_N$ を並べた写像 $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\cdots,\varphi_N)\colon V\to\mathbb{R}^N$ で次をみたすようなものが存在する.

$$l(uv)^2=\|\boldsymbol{\varphi}(u)-\boldsymbol{\varphi}(v)\|^2,\quad uv\in E.$$

我々は定理 2 の証明と同様の手法により, こちらの別証明を与えた.

主結果　Göring 等による設定では常に第 1 固有値の最大値が存在する．一方で, 我々の設定では発散するケースがある．実際, 頂点数が 4 までの全てのグラフに対して問題 1 を数値的に解き [3], 特に, サイクルグラフ C_3, C_4 と paw graph に対しては $\Lambda_1(G)$ が発散することを確認している．ここで paw graph とは, 三角形と次数 1 の頂点一つが繋がれた 4 頂点連結グラフである．これらの計算例からサイクルを含むグラフに対しては $\Lambda_1(G)$ は発散することが予測され, 今回の主結果としてこのことを示した.

定理 4　グラフ G がサイクルを部分グラフに持つとき, $\Lambda_1(G)=\infty$ である.

この定理の証明においては次の 2 つの主張が根幹をなしている.

主張 (i)　$n\geq 3$ のとき, n 頂点サイクルグラフ C_n に対して $\Lambda_1(C_n)=\infty$ である.

主張 (i) の証明の概要

C_n の辺集合を $E=\{(1,2),(2,3),\cdots,(n-1,n),(n,1)\}$ とし, $0<t<\epsilon$ に対して長さ関数 l_t を次のように定める.

$$l_t(i,i+1)=\begin{cases} t, & 1\le i\le n-1, \\ 1, & i=n, \end{cases}$$

ただし $n+1=1$ としている. $t\to 0$ のとき, C_n のラプラシアン Δ_{l_t} の表現行列 $L=D^{-1/2}L_0D^{-1/2}$ において, L_0 は n 頂点パス P_n のラプラシアン行列と定数成分のみからなる行列の和で表され, 第 1 固有値は発散する. また, $D^{-1/2}$ によるスケーリングで固有値が発散することに変わりはない.

主張 (ii) 次数が 1 の頂点を持つグラフ G において, その頂点と接続する辺を縮約して得られるグラフを $\widetilde{G}$ としたとき, $\Lambda_1(\widetilde{G})\le\Lambda_1(G)$ である.

以上の 2 つの主張 (i), (ii) を用いることで定理 4 は次のように示される.

定理 4 の証明の概要

グラフ G がサイクルグラフ C_m を含むとき, G から頂点の縮約を繰り返すことで主張 (ii) により $\Lambda_1(G)$ の不等式による評価列を作り, 最終的に C_m まで潰れたところで主張 (i) によって定理が証明される. 次数が 1 の頂点が無い場合は, 辺を切除することで（その操作で第 1 固有値は増加しない）次数 1 の頂点を生じさせて前述の操作を繰り返す.

すなわち, グラフのマイナーを取る操作のうち主要な「辺の除去」と「辺の縮約」における $\Lambda_1(G)$ のモノトーン性が主定理の証明の一翼を担っている. 特に主張 (ii) を示すための手段として, 辺長パラメータ l の変化を辺の縮約とみなして統一的に扱っている.

また, 定理 4 の逆の主張についても成り立つことが予測され, パスグラフの場合に成り立つことを確認している.

参考文献

[1] M. Fiedler, Absolute algebraic connectivity of trees, Linear Multilinear Algebra 26 (1990) 85–106.

[2] Fujiwara, K. Eigenvalues of Laplacians on a closed Riemannian manifold and its nets. Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), no. 8, 2585–2594.

[3] T. Gomyou and S. Nayatani, Maximization of the first Laplace eigenvalue of a finite graph, Linear Algebra and its Applications. 720 (2025) 72-90.

[4] T. Gomyou and S. Nayatani, Maximization of the first Laplace eigenvalue of a finite graph II, arXiv:2412.02179.

[5] Göring, F; Helmberg, C; Wappler, M. The rotational dimension of a graph. J. Graph Theory 66 (2011), no. 4, 283–302.

[6] Nadirashvili, N. Berger's isoperimetric problem and minimal immersions of surfaces. Geom. Funct. Anal. 6 (1996), no. 5, 877–897.