カンドルの距離について

甲斐 涼哉 (大阪公立大学理学研究科)

1　導入

本稿は [IKK25] に基づく．**カンドル**は群の共役演算の一般化とみなされる代数系である．近年，カンドルは数学の様々な分野で研究されている．実際，結び目理論では結び目の不変量として，対称空間論では対称空間の離散化として研究されている．カンドルの公理は結び目図式の基本変形 (詳しくは [Kam17] を参照)，もしくは対称空間の点対称が満たす性質 (詳しくは [Loo69] を参照) に対応する．これらの分野では，結び目不変量の具体的な計算可能性や，コンパクト対称空間の離散化としての対応から，有限カンドルが着目されることが多かった．一方で，非自明な結び目の基本カンドルや，非コンパクト対称空間の離散部分カンドルなど，興味深い可算無限カンドルも多くある．本研究では，そのような可算無限カンドルに着目する．しかし，群と同様に，無限カンドルの研究には困難が多い．そこで，無限離散群の研究手法の一つである幾何学的群論の手法に着目する．群の Cayley グラフは，群作用のグラフと言える Schreier グラフに一般化される．Schreier グラフによって，カンドルに距離構造を導入する．

カンドル構造は内部自己同型群と displacement 群と呼ばれる二つの群を定め，それらはカンドルに自然に右から作用する．これらの群作用に関する Schreier グラフを用いて，カンドルにグラフ構造を定義する．特に，内部自己同型群の作用が定める Schreier グラフは，Winker[Win84] によって導入され，近年 [HS18] などで研究されている，**カンドルの diagram** の一般化になっている．Schreier グラフの性質からただちに，作用する群の有限生成集合のとりかたに依らずに，カンドルの連結成分上の距離の擬等長類が定まることが従う (定理 3.4)．ここで，有限生成カンドルの内部自己同型は有限生成であるが，displacement 群は有限生成であるとは限らないことに注意する．また，内部自己同型群と displacement 群のどちらも有限生成である場合，カンドルの連結成分には二種類の擬等長類が定まるが，それらは一般には擬等長でない (命題 3.5)．

さらに，典型的な距離空間と擬等長同型な連結成分を持つカンドルの例を与える．例えば，自由群の場合と同様に，inner 距離を持つ自由カンドルの連結成分は木と擬等長同型となる．さらに，displacement 距離を持つ一般化 Alexander カンドルにも着目する．ここで，一般化 Alexander カンドルは，群自己同型写像から定まるカンドル演算を持つ群で，近年 [HK24] などで詳細に研究されている．すべての等質カンドルは一般化 Alexander カンドルの商で表せることが知られており，カンドル理論において重要なクラスである．displacement 距離が与えられた一般化 Alexander カンドルの連結成分は，語距離が与えられた displacement 群と擬等長同型となる (定理 4.3)．このようなカンドルのクラスによって，連結成分が Euclid 空間，双曲平面と擬等長同型となるカンドルを与える．

2 準備

この節では準備として，Joyce [Joy82] と Matveev [Mat82] によって独立に導入された代数系であるカンドルと，群作用から定まるグラフである Schreier グラフを導入する．まず，カンドルとその構造から定まる自然な群作用について紹介する．

定義 2.1 ([Joy82])**.** 二項演算 $\triangleleft$ が与えられた空でない集合 X が以下の条件を満たすとき，X を**カンドル**という：

1. 任意の $x \in X$ に対して，$x \triangleleft x = x$,
2. 任意の $y \in X$ に対して，右からの演算 $s_y \colon X \to X$, $s_y(x) \coloneqq x \triangleleft y$ は全単射.
3. 任意の $x, y, z \in X$ に対して，$(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$.

右からの演算 $s_y \colon X \to X$ を y での**点対称**という．

X, Y をカンドルとする．写像 $f \colon X \to Y$ がカンドル演算を保つとき**カンドル準同型**であるという．また，全単射なカンドル準同型を**カンドル同型**といい，カンドル同型が存在するとき，二つのカンドルは**同型**であるという．カンドル X の自己カンドル同型全体の集合を $\mathrm{Aut}(X)$ と書き，$\mathrm{Aut}(X)$ の群構造を $fg := g \circ f$ で定める．このとき，$\mathrm{Aut}(X)$ を X の**自己同型群**といい，X に右から作用する．$\mathrm{Aut}(X)$ の右作用が推移的であるとき，X を**等質**であるという．カンドルの二番目と三番目の公理から点対称 s_y はカンドル同型となる．

定義 2.2. カンドル X に対して，点対称のなす集合 $\{s_y \mid y \in X\}$ が生成する $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群を**内部自己同型群**といい，$\mathrm{Inn}(X)$ とあらわす．$\mathrm{Inn}(X)$ の X への右作用の軌道を，X の**連結成分**という．特に連結成分が一つ (つまり，$\mathrm{Inn}(X)$ の作用が推移的) のとき，X は**連結**であるという．

次の群は Joyce [Joy82] によって transvection group として導入された．

定義 2.3. カンドル X に対して，$\{s_x s_y^{-1} \mid x, y \in X\}$ で生成される $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群を **displacement 群**といい，$\mathrm{Dis}(X)$ であらわす．

ここで，カンドルのいくつかの例を与える．

例 2.4. 整数 $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して，$x \triangleleft y \coloneqq 2y - x$ で定めると，$\mathbb{Z}$ 上のカンドル演算となる．このとき，$R_\infty := (\mathbb{Z}, \triangleleft)$ を**無限二面体カンドル**という．R_∞ は自然に対称空間 $\mathbb{R}$ の離散部分カンドルとなる．

例 2.5. 群 G とその元 z に対して，g の共役類を $z^G = \{g^{-1}zg \mid g \in G\}$ と表す．このとき，$x, y \in z^G$ に対して，$x \triangleleft y := y^{-1}xy$ で定めると，z^G 上のカンドル演算となる．このとき，$\mathrm{Conj}(z^G) := (z^G, \triangleleft)$ を z^G 上の**共役カンドル**という．より一般に，共役演算で閉じた部分集合 $X \subset G$ は共役カンドルの構造を持つ．

続けて，Schreier グラフを紹介する．

定義 2.6. 群 G が空でない集合 X へ右作用しているとする．また，G の生成集合 S をとる．このとき，S に関する G の X への右作用の **Schreier グラフ** $\mathrm{Sch}(X, G, S)$ とは，頂点集合を X，辺集合を $\{(x, x \cdot s) \mid x \in X, s \in S\}$ とする (無向) グラフである．

注意 2.7. $X = G$ として，右作用を $x \cdot g := xg$ で定めると，対応する Schreier グラフは，群の Cayley グラフと一致する．

$\mathrm{Sch}(X; G, S)$ の連結成分は，右作用の軌道と 1:1 に対応することが簡単に確かめられる．$\mathrm{Sch}(X; G, S)$ の各連結成分は，グラフ構造から定まる弧長距離 d_S^{Sch} によって距離空間となる．したがって，この距離の制限によって，右作用の各軌道は距離空間となる．この距離は生成集合 S の取り方に依存するが，擬等長類は有限生成集合の取り方に依らずに定まる．

命題 2.8. 群 G が空でない集合 X へ右作用しているとする．このとき，有限生成集合 $S, T \subset G$ と X の G-軌道 O に対して，恒等写像 $\mathrm{id}\colon (O, d_S^{\mathrm{Sch}}) \to (O, d_T^{\mathrm{Sch}})$ は擬等長同型写像である．

3 カンドルの距離

この節では, Schreier グラフの枠組みを用いて，カンドルにグラフ構造と距離を導入する．

定義 3.1. X をカンドルとする．

1. 生成集合 $A \subset \mathrm{Inn}(X)$ に関する $\mathrm{Inn}(X)$ の X への右作用の Schreier グラフを $\Gamma_A^{\mathrm{Inn}}(X)$.
2. 生成集合 $U \subset \mathrm{Dis}(X)$ に関する $\mathrm{Dis}(X)$ の X への右作用の Schreier グラフを $\Gamma_U^{\mathrm{Dis}}(X)$.

$\Gamma_A^{\mathrm{Inn}}(X)$ は Winker [Win84] によって導入された**カンドルの diagram** の一般化になっている．$\mathrm{Inn}(X)$ と $\mathrm{Dis}(X)$ の作用に着目する理由は以下の命題が成立するからである．

命題 3.2. X をカンドルとする．このとき，X の連結成分全体の集合，$\Gamma_A^{\mathrm{Inn}}(X)$ の連結成分全体の集合，$\Gamma_U^{\mathrm{Dis}}(X)$ の連結成分全体の集合は，それぞれ 1:1 に対応する．

よって，グラフ構造から定まる弧長距離の制限として，カンドルの各連結成分に距離が定まる．

定義 3.3. O をカンドル X の連結成分とする．$\Gamma_A^{\mathrm{Inn}}(X)$ から定まる O 上の距離を，$A \subset \mathrm{Inn}(X)$ に関する **inner 距離**といい，d_A^{Inn} で表す．$\Gamma_U^{\mathrm{Dis}}(X)$ から定まる O 上の距離を，$U \subset \mathrm{Dis}(X)$ に関する **displacement 距離**といい，d_U^{Dis} で表す．

群の語距離の場合と同様に，これらの距離の擬等長類は有限生成集合に依らずに定まる．

定理 3.4. O をカンドル X の連結成分とする．

1. 有限生成集合 $A, B \subset \mathrm{Inn}(X)$ に対して, 二つの距離空間 (O, d_A^{Inn})，(O, d_B^{Inn}) は擬等長同型である．
2. 有限生成集合 $U, V \subset \mathrm{Dis}(X)$ に対して，二つの距離空間 (O, d_U^{Dis})，(O, d_V^{Dis}) は擬等長同型である．

有限生成カンドルの内部自己同型群は有限生成である．一方で，有限生成カンドルであっても displacement 群が有限生成であるとは限らない．実際，自由カンドルや非ファーバー結び目の結び目カンドルは，有限生成カンドルであるが，displacement 群は有限生成ではない．

定理 3.4 より，$\mathrm{Inn}(X)$ と $\mathrm{Dis}(X)$ がどちらも有限生成であるとき，それぞれの作用に関する Schreier グラフから，カンドル X の各連結成分には二種類の距離の擬等長類が定まる．一般にこれらの擬等長類は異なるものである．

命題 3.5. 以下の条件を満たすカンドル X とその連結成分 O が存在する：

1. $\mathrm{Inn}(X)$ と $\mathrm{Dis}(X)$ は有限生成.
2. 任意の有限生成集合 $A \subset \mathrm{Inn}(X)$ と $U \subset \mathrm{Dis}(X)$ に対して，二つの距離空間 (O, d_A^{Inn}) と (O, d_U^{Dis}) は擬等長同型ではない.

実際，無限二面体カンドル R_∞ は命題 3.5 の条件を満たす例となる．この節の最後に，特別な場合についてこれらの距離の性質を述べる.

命題 3.6. O と O' を等質カンドル X の連結成分とする.

1. 有限生成集合 $A \subset \mathrm{Inn}(X)$ に対して，距離空間 (O, d_A^{Inn})，(O', d_A^{Inn}) は擬等長同型である.
2. 有限生成集合 $U \subset \mathrm{Dis}(X)$ に対して, 距離空間 (O, d_U^{Dis})，(O', d_U^{Dis}) は擬等長同型である.

命題 3.7. カンドル X のある連結成分 O に，$\mathrm{Dis}(X)$ は自由に作用しているとする．このとき，$\mathrm{Dis}(X)$ の有限生成集合に関する displacement 距離を持つ O と，有限生成集合に関する語距離を持つ $\mathrm{Dis}(X)$ は擬等長同型である.

カンドルの一番目の公理から，$\mathrm{Inn}(X)$ では命題 3.7 のような状況，つまり，$\mathrm{Inn}(X)$ の作用が自由になることはない．また，Eisermann [Eis14] によって導入されたカンドルの被覆理論によると，単連結カンドルは命題 3.7 の仮定を満たす．したがって，命題 3.7 は，単連結カンドルが自身に作用するある有限生成群と擬等長同型であることも示している.

4 例

最後に，典型的な距離空間と擬等長同型となるような連結成分を持つカンドルの例を与える．初めに，自由カンドルを考える．自由カンドルの詳細は [Kam17] などを参照せよ．有限ランクの自由群は木と擬等長同型であったが，自由カンドルも同様の性質を持つ.

命題 4.1. A を濃度が 2 以上の有限集合とする．このとき，A 上で生成される自由カンドル $FQ[A]$ は有限生成 (したがって，$\mathrm{Inn}(FQ[A])$ は有限生成) で，各連結成分は inner 距離に関して木と擬等長同型である.

注意 4.2. 濃度が 2 以上の有限集合上で生成される自由カンドルの displacement 群は有限生成ではない．したがって，定理 3.4 を適用することができない.

以下，カンドルの特別なクラスに対して，displacement 距離を持つ場合を考える．群 G とその群自己同型写像 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ に対して，G 上のカンドル演算 $\triangleleft$ を

$$x \triangleleft y := \sigma(xy^{-1})y \quad x, y \in G$$

で定める．このカンドルを**一般化 Alexander カンドル**といい，$\mathrm{GAlex}(G, \sigma) = (G, \triangleleft)$ と書く．特に，$\mathrm{GAlex}(G, \sigma)$ は等質で，各連結成分に displacement 群が自由に作用する．また，任意の等質カンドルは一般化 Alexander カンドルの商として表せることが知られている．したがって，前節で述べた結果から次が従う.

定理 4.3. 群 G とその群自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ から定まる一般化 Alexander カンドルを $X := \mathrm{GAlex}(G, \sigma)$ とする．このとき，$\mathrm{Dis}(X)$ が有限生成ならば，任意の X の連結成分は displacement 距離に関して，有限生成集合に関する語距離を持つ $\mathrm{Dis}(X)$ と擬等長同型である.

一般化 Alexander カンドルの displacement 群は以下のように与えられる.

補題 4.4 (cf. [HK24])**.** $X := \mathrm{GAlex}(G, \sigma)$ とし，単位元 $1 \in G$ を含む X の連結成分を P とおく．

1. P は G の部分群で，$\mathrm{Dis}(X)$ と同型である．
2. σ が $g \in G$ の内部自己同型，つまり，$\sigma(x) := g^{-1}xg$ で与えられているとき，群 P は交換子部分群 $[\langle\langle g\rangle\rangle_G, \langle\langle g\rangle\rangle_G]$ に同型である．ただし，$\langle\langle g\rangle\rangle_G$ は $\{g\}$ の G での正規閉包である．

定理 4.3，補題 4.4 を用いることで，Euclid 空間や双曲平面と擬等長な連結成分を持つカンドルの例を構成できる．

命題 4.5. $t \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ とする．このとき，displacement 距離に関して $\mathrm{GAlex}(\mathbb{Z}^n, t)$ の各連結成分は k 次元 Euclid 空間と擬等長同型である．ただし，$k := \mathrm{rank}(1 - t^{-1})$.

命題 4.6. $\Delta^+(p, q, r)$ を以下の表示で定義される群とする：

$$\Delta^+(p, q, r) = \langle a, b, c \mid a^p = b^q = c^r = abc = 1\rangle_{\mathrm{Grp}}.$$

また，群自己同型 $\sigma : \Delta^+(p, q, r) \to \Delta^+(p, q, r)$ を生成元 a での内部自己同型とする．このとき，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ ならば，displacement 距離に関して $\mathrm{GAlex}(\Delta^+(p, q, r), \sigma)$ の連結成分は双曲平面と擬等長同型である．

注意 4.7. $\theta \in \mathbb{R}$ に対して，双曲平面の各点にその点を中心とする θ-回転によって点対称を定めるとカンドルになる．$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ とする．このとき，$Y := \mathrm{Conj}(a^{\Delta^+(p,q,r)})$ は $\frac{2\pi}{p}$-回転によるカンドル構造を持つ双曲平面の離散部部分カンドルになる．

また，3 次元球面内の結び目を特異点とする軌道体の基本群を用いて，3 次元の単連結等質 Riemann 多様体と擬等長な連結成分を持つカンドルも構成できる [IKK25, Proposition 5.6].

References

[Eis14] Michael Eisermann. Quandle coverings and their Galois correspondence. *Fundamenta Mathematicae*, 225(1):103–167, 2014.

[HK24] Akihiro Higashitani and Hirotake Kurihara. Generalized Alexander quandles of finite groups and their characterizations. *European Journal of Mathematics*, 10(3):41, September 2024.

[HS18] Jim Hoste and Patrick D. Shanahan. An enumeration process for racks. *Mathematics of Computation*, 88(317):1427–1448, August 2018.

[IKK25] Kohei Iwamoto, Ryoya Kai, and Yuya Kodama. Metrics for quandles, May 2025.

[Joy82] David Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 23(1):37–65, 1982.

[Kam17] Seiichi Kamada. *Surface-Knots in 4-Space.* Springer Monographs in Mathematics. Springer Singapore, Singapore, 2017.

[Loo69] Ottmar Loos. *Symmetric Spaces. I: General Theory.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[Mat82] S. V. Matveev. Distributive groupoids in knot theory. *Mat. Sb. (N.S.)*, (no. 1):78–88, 160, 1982.

[Win84] Steven Karl Winker. *QUANDLES, KNOT INVARIANTS, AND THE N-FOLD BRANCHED COVER.* ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1984.