

リー群上の左不変統計構造のモジュライ空間*

小林彦蔵[†] (広島大学)

概要

多様体上の統計構造とは、リーマン計量と捩れのないアフィン接続の組であって適切な条件を満たすものとして定義される。本稿では、リー群上の左不変統計構造のモジュライ空間という概念を導入し、左不変リーマン計量のモジュライ空間が1点集合となる3系列のリー群に対して、そのモジュライ空間の構造を詳しく調べる。応用として、これらのリー群における左不変共役対称統計構造および左不変双対平坦構造 (左不変ヘッセ構造) の分類を行う。本稿の内容は、大野優氏、奥田隆幸氏 (広島大学)、田丸博士氏 (大阪公立大学) との共同研究に基づく。

1 導入

微分幾何学において、多様体上の幾何構造を分類することは基本的な問題である。多様体が追加の幾何構造や適切な群作用を備えている場合、それらと両立する幾何構造を考えるのが自然である。特に、与えられたリー群が特定の左不変幾何構造を持つかどうかを調べ、さらにそれらを分類することは重要な課題である。この文脈において、左不変幾何構造のモジュライ空間という概念は、分類や変形理論を理解する上で重要な役割を果たす (例: [2, 4, 8, 9, 10])。

本稿では、多様体上の統計構造 (cf. [11, 13]) に焦点を当てる。統計構造は情報幾何に由来し、リーマン計量と捩れのないアフィン接続の組 (g, ∇) であって、 $(0, 3)$ -テンソル場 ∇g が全対称となるものとして定義される。統計構造において特に注目されてきた二つのクラスがある: ひとつは、双対平坦構造 (dually flat structure) である (cf. [1])。この構造は、接続 ∇ が平坦となる統計構造として特徴付けられ、特に情報幾何において重要な役割を果たす (cf. [1])。もうひとつは、双対平坦構造を含むより広い概念である共役対称統計構造 (conjugate symmetric statistical structure) (cf. [13]) である。共役対称統計構造は、 $R^\nabla = R^{\bar{\nabla}}$ を満たす統計構造として定義される。ただし、 $\bar{\nabla}$ は ∇ の g に関する共役接続である。この構造はアフィン超曲面論や定曲率統計多様体と深い関係を持つ (cf. [14, 6])。与えられた多様体がこれらの構造を持つかどうか、またそれらを分類することは重要な問題である。

リー群上の統計構造が左不変であるとは、計量と接続の両方が左不変であることを意味する (cf. [3, 5])。本稿ではこの構造に注目し、以下の問題を扱う:

Problem A. 与えられたリー群 G に対して、すべての左不変双対平坦構造および左不変共役対称統計構造を求めよ。

* 幾何学シンポジウム (於 筑波大学, 2025/8/26–2025/8/29) 講演予稿。本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2132 の支援を受けたものである。

[†] e-mail: hikocho-kobayashi@hiroshima-u.ac.jp

この Problem A に関連する先行研究を振り返る。双対平坦構造はヘッセ構造と等価であることが知られている (cf. [16]). 志摩はこの構造を深く研究し, 左不変ヘッセ構造を持つことができるのは可解リー群に限られることを示した (cf. [15]). ただし, 可解リー群であっても左不変ヘッセ構造を持たないものもあり, 完全な分類は未達であると言える。

左不変共役対称統計構造に関しては, 典型的な例として一変数正規分布族の空間 $\mathcal{N}$ があり, これはリー群 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ に同型である。古畑–井ノ口–小林 [3] により, この空間 $\mathcal{N}$ 上の Amari–Chentsov α -接続は, Fisher 計量に関して共役対称である唯一の左不変統計接続であることが示された。さらに小林–大野 [7] によって, 多変数正規分布族に対しても同様の主張が成立することが示された。高次元のリー群に対しては, 左不変共役対称統計構造の分類問題はより複雑であり, [7] で扱われた多変数正規分布族のリー群を除けば, 未解決の部分が多い。

本稿では, Problem A に対する新たな枠組みを導入し, 任意の次元のリー群に適用可能な方法を提案する。この研究は, 児玉–高原–田丸によって導入された左不変リーマン計量のモジュライ空間の概念 (cf. [8]) に着想を得ている。

リー群 G 上の左不変統計構造全体の空間 $\mathcal{LStat}(G)$ には, 群 $\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G)$ が自然に作用する (詳細は第 2 節を参照されたい)。この作用の軌道空間を左不変統計構造のモジュライ空間と呼び, $\mathcal{MLStat}(G)$ と記す。この作用は双対平坦性や共役対称性といった統計構造の性質を保つため, 以下の部分空間が定まる:

- $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G)$: 左不変共役対称統計構造のモジュライ空間,
- $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G)$: 左不変双対平坦構造のモジュライ空間。

このとき, Problem A は次のように言い換えられる:

Problem B. 与えられたリー群 G に対し, モジュライ空間 $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G)$ および $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G)$ を決定せよ。

たとえば, $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G) = \emptyset$ であれば, G は左不変双対平坦構造を持たないことになる。なお, どのようなリー群においても, 左不変リーマン計量とその Levi-Civita 接続の組は共役対称統計構造になるため, $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G) \neq \emptyset$ は常に成立する。したがって, $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G)$ については, 非自明な統計構造が存在するかどうかの問題となる。

まずは $\mathcal{MLStat}(G)$ が小さいリー群に対して Problem B を考えるのが自然である。このような群の自然な候補として, 左不変リーマン計量のモジュライ空間 $\mathfrak{PM}(G)$ (cf. [8]) が小さい群が挙げられる。具体的に, 以下の 3 系列のリー群は, $\mathfrak{PM}(G)$ が 1 点集合 (左不変リーマン計量が本質的に一意) であることが知られている (cf. [12, 8]):

$$\mathbb{R}^n, \quad G_{\mathbb{RH}^n} \ (n \geq 2), \quad H^3 \times \mathbb{R}^{n-3} \ (n \geq 3). \quad (1.1)$$

ここで, $G_{\mathbb{RH}^n}$ は実双曲空間 $\mathbb{RH}^n$ に対するリー群 ($SO_0(n, 1)$ の岩澤分解の可解部分) であり, $\mathbb{RH}^n$ 上に単純推移的に作用する。また H^3 は 3 次元ハイゼンベルグ群である。

本稿では, 上記 3 系列のリー群に対して Problem B に取り組む。それぞれのモジュライ空間 $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G)$ および $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G)$ の代表元の集合を表 1 にまとめる。

2 左不変統計構造のモジュライ空間

本節では、リー群 G 上の左不変統計構造のモジュライ空間 $\mathcal{MLStat}(G)$ の定義を紹介する。また、 G の左不変リーマン計量のモジュライ空間が 1 点集合となるとき、モジュライ空間 $\mathcal{MLStat}(G)$ はリー環 $\mathfrak{g}$ 上の対称 $(0, 3)$ -テンソルの空間 $S^3(\mathfrak{g}^*)$ の軌道空間として表せることを紹介する。以下、 G を連結成分有限個の有限次元リー群とする。

$\mathcal{LStat}(G)$ を左不変統計構造全体の集合とする。すなわち、

$$\mathcal{LStat}(G) := \{(g, \nabla) \mid (g, \nabla): G \text{ 上の左不変統計構造}\}$$

とする。 G 上の左不変リーマン計量 g を固定したとき、 $\mathcal{LA}_{\text{Stat}}(G, g)$ によって g との組で左不変統計構造となる左不変アファイン接続全体の集合を表すと、 $\mathcal{LA}_{\text{Stat}}(G, g) \ni \nabla \mapsto \nabla g \in S^3(\mathfrak{g}^*)$ は全単射となる。従って、次の同型を得る。

$$\mathcal{LStat}(G) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathfrak{M}}(G) \times S^3(\mathfrak{g}^*), \quad (g, \nabla) \mapsto (g, \nabla g). \quad (2.1)$$

ここで、 $\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ は G 上の左不変リーマン計量全体の空間である。特に同型 (2.1) より、 $\mathcal{LStat}(G)$ は底空間を $\widetilde{\mathfrak{M}}(G) \cong GL(n, \mathbb{R})/O(n)$ 、ファイバー空間を実ベクトル空間 $S^3(\mathfrak{g}^*)$ とする自明ベクトル束と見なすことができる。以後この同一視 $\mathcal{LStat}(G) \cong \widetilde{\mathfrak{M}}(G) \times S^3(\mathfrak{g}^*)$ を行う。

直積リー群 $\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G)$ は、 $\mathcal{LStat}(G)$ に次によってなめらかに作用する。

$$(r, \varphi) \cdot (g, \nabla) = (r \cdot (\varphi^{-1})^* g, (\varphi^{-1})^* \nabla) \quad ((r, \varphi) \in \mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G), (g, \nabla) \in \mathcal{LStat}(G)). \quad (2.2)$$

我々は、この群作用による軌道空間を G 上の**左不変統計構造のモジュライ空間**と呼ぶ。

注意 2.1. 式 (2.2) の群作用は、左不変統計構造の持つ共役対称性や双対平坦性などといった性質を保つ。

命題 2.2. G 上の左不変リーマン計量のモジュライ空間が 1 点集合、すなわち群作用 $\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G) \curvearrowright \widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ が推移的となる場合、次の位相空間としての同型が成り立つ。

$$\mathcal{MLStat}(G) \cong (\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G))^g \backslash S^3(\mathfrak{g}^*). \quad (2.3)$$

ただし、 $(\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G))^g$ は g の固定化部分群である。

3 結果

本節では、式 (1.1) に挙げた各リー群 G に対して、モジュライ空間 $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G)$ および $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G)$ の代表元集合を明示的に与える。

式 (1.1) に挙げた 3 系列のリー群 G に対しては、左不変リーマン計量のモジュライ空間が 1 点集合となるため、第 2 節の議論より、モジュライ空間 $\mathcal{MLStat}(G)$ は対称 $(0, 3)$ -テンソルの空間 $S^3(\mathfrak{g}^*)$ 上のある群作用による軌道空間として記述できることに注意されたい。また、モジュライ空間 $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G)$ および $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G)$ の代表元集合とは、これらのモジュライ空間への射影が全射となるような $S^3(\mathfrak{g}^*)$ の部分集合のことを指す。この射影が全単射であるとき、その集合は完全代表元集合と呼ばれる。なお、次の表 1 に現れる部分集合 V^+ 、および v_0, w_0 の定義は後述する。

表 1 式 (1.1) のリー群 G に対する $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G)$ および $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G)$ の代表元集合

G	$\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G)$	$\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G)$
$\mathbb{R}^n$	$S^3(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}^*)$	V^+
$G_{\mathbb{RH}^n}$	$\mathbb{R}v_0$	$\{\pm v_0\}$
H^3	$\{0\}$	$\emptyset$
$H^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$	$\mathbb{R}w_0 \odot S^1(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^{n-3}}^*) \oplus S^3(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^{n-3}}^*)$	$\emptyset$

代表元集合の詳細な記述を得るためには、基底を固定する必要がある。以下に、式 (1.1) のそれぞれのリー群のリー代数における標準的な基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ の非自明な括弧積を示す：

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &: (\text{none}), \\ G_{\mathbb{RH}^n} &: [e_1, e_i] = e_i \quad (i = 2, \dots, n), \\ H^3 \times \mathbb{R}^{n-3} &: [e_1, e_2] = e_3. \end{aligned}$$

それぞれの双対基底を $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathfrak{g}^*$ とする。以下で、3 系列のリー群それぞれについての結果を詳しく述べる。まずはじめに、可換リー群 $\mathbb{R}^n$ に対する結果を述べる。

定理 3.1. 可換リー群 $\mathbb{R}^n$ に対して、以下が成り立つ：

- (1) $\mathbb{R}^n$ 上のすべての左不変統計構造は共役対称である。
- (2) 次の集合は $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(\mathbb{R}^n)$ の代表元集合である：

$$V^+ := \{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^3 \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0\}.$$

特に $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(\mathbb{R}^n)$ は商空間 $\mathbb{R}_{>0} \backslash \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0\}$ と同相である。

次に、単連結可解リー群 $G_{\mathbb{RH}^n}$ に対する結果を述べる。

定理 3.2. $v_0 := 4x_1^3 + 6 \sum_{i=2}^n x_1 x_i^2 \in S^3(\mathfrak{g}_{\mathbb{RH}^n}^*)$ とおく。

- (1) $\mathbb{R}v_0$ は $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G_{\mathbb{RH}^n})$ の完全代表元集合である。特に、モジュライ空間は部分空間 $\mathbb{R}v_0$ と同相である。
- (2) 2 点集合 $\{v_0, -v_0\}$ は $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G_{\mathbb{RH}^n})$ の完全代表元集合である。特に、モジュライ空間は 2 点離散空間に同相である。

最後に、3 次元ハイゼンベルグ群と可換リー群の直積リー群の場合について述べる。ただし、 $\odot$ によって対称テンソル積を表す。

定理 3.3. $w_0 := x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 \in S^2(\mathfrak{h}_3^*)$ とおく。

- (1) 部分空間 $\mathbb{R}w_0 \odot S^1(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^{n-3}}^*) \oplus S^3(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^{n-3}}^*)$ は $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(H^3 \times \mathbb{R}^{n-3})$ の代表元集合である。特に $n = 3$ のとき、 $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(H^3)$ は 1 点集合であり、このとき左不変共役対称統計構造は左

不変リーマン計量とその Levi-Civita 接続の組に限る.

(2) リー群 $H^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$ は左不変双対平坦構造を持たない.

H^3 に関する主張は, 井ノ口-大野 [5] においてすでに示されていることに注意されたい. 本稿のモジュライ空間による議論は, それとは異なるアプローチを提供し, この結果をより高次元の場合へと一般化するものである. 特に, $n = 3$ の場合とは異なり, $H^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$ ($n \geq 4$) の場合には, 非自明な左不変共役対称統計構造が存在する.

参考文献

- [1] Shun-ichi Amari and Hiroshi Nagaoka, *Methods of information geometry*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 191, American Mathematical Society, Providence, RI; Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [2] Luis Pedro Castellanos Moscoso and Hiroshi Tamaru, *A classification of left-invariant symplectic structures on some Lie groups*, Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry **64** (2023), no. 2, 471–491.
- [3] Hitoshi Furuhata, Jun-ichi Inoguchi, and Shimpei Kobayashi, *A characterization of the alpha-connections on the statistical manifold of normal distributions*, Inf. Geom. **4** (2021), no. 1, 177–188.
- [4] Takahiro Hashinaga, Hiroshi Tamaru, and Kazuhiro Terada, *Milnor-type theorems for left-invariant Riemannian metrics on Lie groups*, J. Math. Soc. Japan **68** (2016), no. 2, 669–684.
- [5] Jun-ichi Inoguchi and Yu Ohno, *Homogeneous statistical manifolds*, arXiv preprint arXiv:2408.01647 (2024).
- [6] Shimpei Kobayashi and Yu Ohno, *On a constant curvature statistical manifold*, Information Geometry **5** (2022), 31–46.
- [7] Shimpei Kobayashi and Yu Ohno, *A characterization of the alpha-connections on the statistical manifold of multivariate normal distributions*, Osaka Journal of Mathematics **62** (2025), no. 2, 22.
- [8] Hiroshi Kodama, Atsushi Takahara, and Hiroshi Tamaru, *The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling*, Manuscripta Math. **135** (2011), no. 1-2, 229–243.
- [9] Yuji Kondo, *A classification of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on some nilpotent Lie groups*, Hiroshima Math. J. **52** (2022), no. 3, 333–356.
- [10] Akira Kubo, Kensuke Onda, Yuichiro Taketomi, and Hiroshi Tamaru, *On the moduli spaces of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on Lie groups*, Hiroshima Math. J. **46** (2016), no. 3, 357–374.
- [11] Takashi Kurose, *Dual connections and affine geometry*, Mathematische Zeitschrift **203** (1990), 115–121.
- [12] Jorge Lauret, *Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups*, Differential Geom. Appl. **18** (2003), no. 2, 177–194.
- [13] Stefan L Lauritzen, *Statistical manifolds*, Differential geometry in statistical inference **10** (1987), 163–216.
- [14] Barbara Opozda, *Curvature bounded conjugate symmetric statistical structures with complete metric*, Ann. Global Anal. Geom. **55** (2019), no. 4, 687–702.
- [15] Hirohiko Shima, *Homogeneous Hessian manifolds*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **30** (1980), no. 3, 91–128.
- [16] ———, *The geometry of Hessian structures*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007.