

第72回 幾何学シンポジウム 予稿集

2025年8月26日(火)～2025年8月29日(金)

筑波大学

第 72 回幾何学シンポジウム

日程： 2025 年 8 月 26 日 (火) – 8 月 29 日 (金)

会場： 筑波大学

組織責任者： 楯 辰哉 (日本数学会幾何学分会 2025 年度評議員, 東北大学大学院理学研究科)
本多 宣博 (日本数学会幾何学分会 2025 年度評議員, 東京科学大学理学院)
後藤 竜司 (大阪大学大学院理学研究科)
古畑 仁 (北海道大学大学院理学研究院)
小野 肇 (筑波大学数理物質系)
永野 幸一 (筑波大学数理物質系)
山本 光 (筑波大学数理物質系)
馬場 蔵人 (東京理科大学創域理工学部)

— プログラム —

■ 8月26日(火)

13:30–14:30	A 会場	今野北斗（東京大学大学院数理科学研究科）	1
		On exotic diffeomorphisms of 4-manifolds	
14:50–15:50	A 会場	辻寛（埼玉大学大学院理工学研究科）	11
		Gaussian correlation inequality for centered convex sets	
16:10–16:50	A 会場	神田秀峰（東京大学大学院数理科学研究科）	21
		LCK 幾何学における Oeljeklaus-Toma 多様体の特徴づけ	
16:10–16:50	B 会場	下山翔（東京大学大学院数理科学研究科）	28
		距離空間上の勾配降下上昇流と鞍点問題について	
17:10–17:50	A 会場	下地泰斗（大阪大学大学院理学研究科）	33
		非特異複素代数多様体の冪零基本群について	
17:10–17:50	B 会場	中島啓貴（愛媛大学大学院理工学研究科）	38
		対称群のオブザーバブル直径	

■ 8月27日(水)

10:00–11:00	A 会場	浅野知紘（京都大学大学院理学研究科）	43
		正方形杭問題とシンプレクティック幾何/層理論	
11:20–12:00	A 会場	後藤慶太（東京大学大学院数理科学研究科）	54
		BERKOVICH GEOMETRY AND METRIC SYZ CONJECTURE	
11:20–12:00	B 会場	上野龍（北海道大学大学院理学院）	60
		計量で割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体と測地線	
14:00–14:40	A 会場	佐々木淳（東京科学大学理学院）	65
		Hermitian-Yang-Mills 接続のモジュライ空間について	
14:00–14:40	B 会場	山内優太（横浜国立大学大学院理工学府）	70
		特異点をもつ部分多様体の絶対全曲率	
15:00–15:40	A 会場	折笠俊一郎（京都大学大学院理学研究科）	75
		Analysis of Contraction Mappings to the Complement of Closed Curves	
15:00–15:40	B 会場	嘉陽海渡（北海道大学大学院理学院）	80
		アファインはめ込みと quasi-Codazzi 構造	
16:00–16:40	A 会場	今池大（ウエスタンデジタル合同会社）	86
		対合付き 4 次元正則シンプレクティック多様体の解析的振率	
16:00–16:40	B 会場	森本真弘（東京都立大学大学院理学研究科）	90
		平行移動写像と弱鏡映部分多様体のアファイン微分幾何学	
17:00–17:40	A 会場	川村昌也（椙山女学園大学教育学部）	95
		概 Hermitian 多様体上の偏微分方程式について	
17:00–17:40	B 会場	佐々木優（宇都宮大学共同教育学部）	100
		例外型コンパクト対称空間の極大対蹠集合 II	

■ 8月28日(木)

10:00–11:00	A 会場	岸本大祐（九州大学大学院数理学研究院）	105
		非コンパクト多様体の Morse 不等式	
11:20–12:20	A 会場	豊田哲（工学院大学教育推進機構）	115
		CAT(0) 空間への等長埋め込み可能性について	
14:30–15:10	A 会場	佐藤一慶（東京都立大学大学院理学研究科）	125
		粗凸空間のホロ境界	
14:30–15:10	B 会場	小林彦蔵（広島大学大学院先進理工系科学研究科）	130
		リー群上の左不変統計構造のモジュライ空間	
15:30–16:10	A 会場	甲斐涼哉（大阪公立大学大学院理学研究科）	135
		カンドルの距離について	
15:30–16:10	B 会場	五明工（大阪大学大学院理学研究科）	140
		サイクルが及ぼすグラフラプラシアン第 1 固有値の発散	
16:30–17:10	A 会場	溝口史華（大阪公立大学大学院理学研究科）	144
		Quiver から得られる 2-step nilpotent Lie 代数と幾何構造	
16:30–17:10	B 会場	成田知将（米子工業高等専門学校）	149
		各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みとラプラシアンについて	

■ 8月29日(金)

10:00–11:00	A 会場	橋本義規（大阪公立大学大学院理学研究科）	155
		Variants of the Yau-Tian-Donaldson correspondence: coupled Kähler-Einstein metrics, extremal metrics, and nilsolitons	
11:20–12:00	A 会場	陣内智史（大阪大学大学院理学研究科）	165
		巨大コホモロジー類における小林ヒッチン対応	
11:20–12:00	B 会場	古郷優平（北海道大学大学院理学院）	170
		Pohlmeyer-Lund-Regge 方程式に付随する曲線の時間発展と Riemann-Theta 関数	
14:00–14:40	A 会場	田副一樹（京都大学大学院理学研究科）	176
		$K3$ 曲面の退化族上の第二チャーン形式の漸近挙動	
14:00–14:40	B 会場	LEI Rong（東北大学大学院理学研究科）	
		(キャンセル)	
15:00–16:00	A 会場	清水良輔（京都大学大学院情報学研究科）	180
		Self-similar energy forms and energy measures on the Sierpiński carpet	

ON EXOTIC DIFFEOMORPHISMS OF 4-MANIFOLDS

今野 北斗（東京大学大学院数理科学研究科）

1. エキゾチックな微分同相写像

滑らかな多様体 X とその自己微分同相写像 $f: X \rightarrow X$ が与えられたとする．もし f が位相的には恒等写像にアイソトピックだが滑らかなにはそうでないとき，すなわち f は $\text{Homeo}(X)$ の単位元成分には属するが $\text{Diff}(X)$ の単位元成分には属さないとき， f はエキゾチックな微分同相写像であるという．このようなものは，同相群と微分同相群のトポロジーの差の最も基本的なものと言えるだろう．

3次元以下では自然な写像 $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ は弱ホモトピー同値なので，4次元がこのような現象が現れる最小の次元である．一方高次元トポロジーにおいては，エキゾチック微分同相は非常に基本的な現れ方をする．例えば， $n \geq 5$ に対し，エキゾチック $(n+1)$ 次元球面 $\tilde{S}^{n+1}$ が存在することは， n 次元球面 S^n がエキゾチック微分同相を許容することと同値である．実際， h -同境定理の系として，エキゾチック球面 $\tilde{S}^{n+1}$ は D^{n+1} ふたつのコピーを境界のある微分同相 $f: S^n \rightarrow S^n$ によって貼り合わせることで得られることが分かる． $\tilde{S}^{n+1}$ がエキゾチックであることから f がエキゾチック微分同相であることが従う．

2. 4次元多様体上のエキゾチック微分同相：初めての例

4次元ではどうか．4次元多様体上のエキゾチック微分同相の初めての例は Ruberman [29] により 1998 年に構成された：

定理 1 (Ruberman (1998)). エキゾチック微分同相を許容する滑らかな 4次元多様体が存在する．

Ruberman のエキゾチック微分同相を持つ 4次元多様体の例の最もシンプルなものは

$$K3 \# \mathbb{CP}^2 \# 2\overline{\mathbb{CP}}^2 \cong 4\mathbb{CP}^2 \# 21\overline{\mathbb{CP}}^2$$

である．

これは族に対するゲージ理論の初めてのトポロジカルな応用でもあり，最近の族のゲージ理論研究の多くの結果の証明の雛形となる重要なものである．そこでまずはこの構成とエキゾチカ（エキゾチックであること）の検出の仕方を述べたい．

正確には，Ruberman [29] の例そのものを説明する代わりに，それと極めて似た変種の方を説明する．具体的には，Ruberman の証明は 1-パラメータの Donaldson 理論に基づいていたが，その代わりに，Baraglia と筆者による Seiberg–Witten 理論側での対応物 [2] を説明する．この方が例が簡単に述べられるからである．Ruberman のアイデアを一言で言えば，4次元多様体のエキゾチカを引き継いだような微分同相を（別の 4次元多様体上に）上手く作り，その微分同相のエキゾチカを 1-パラメータのゲージ理論的不変量で検出する，というものである．

まず，単連結な 4次元多様体のエキゾチック対 (X_1, X_2) を用意する．すなわち X_1, X_2 は同相だが微分同相でないような滑らかな単連結 4次元閉多様体である．ただし，単にエキゾチックというだけでなく，以下の条件が満たされているとする．

- (i) (mod 2) Seiberg–Witten 不変量によってエキゾチカが検出できる．すなわち， X_1 と X_2 の (mod 2) Seiberg–Witten 不変量は相異なる．
- (ii) エキゾチカは $S^2 \times S^2$ の連結和（安定化と呼ばれる）を一回行くと消滅する．すなわち， $X_1 \# S^2 \times S^2$ と $X_2 \# S^2 \times S^2$ は微分同相である．

本研究は JSPS 科研費 25K00908 の助成を受けたものである．

このようなエキゾチック対 (X_1, X_2) は大量に存在する。例えば X_1 を $K3$, X_2 を $K3$ の適当な対数変換（小平の用いた複素幾何的な手術の操作で、 $K3$ とは異なる楕円曲面となる）とするとひとつの例となる。あるいは $X_1 = K3 \# \overline{\mathbb{CP}}^2$, $X_2 = 3\mathbb{CP}^2 \# 20\overline{\mathbb{CP}}^2$ も例となる。条件 (ii) で存在が保証される微分同相をひとつ取り

$$\psi : X_1 \# S^2 \times S^2 \rightarrow X_2 \# S^2 \times S^2$$

と置く。（正確には後で都合の良くなるよう取り直す。）

一方、 $S^2 \times S^2$ の上で、その交叉形式の正定値部分に -1 倍で作用するような向きを保つ微分同相

$$f_0 : S^2 \times S^2 \rightarrow S^2 \times S^2$$

をひとつ取る。例えば S^2 の赤道に沿った鏡映 $r : S^2 \rightarrow S^2$ の積 $f_0 = r \times r$ が例である。ただし、アイソトピーで変形し、 $S^2 \times S^2$ 内に埋め込まれたある D^4 の各点を固定するようにしておく。 f_0 をこの D^4 に沿って $X_i \# S^2 \times S^2$ に恒等写像で拡張した $\text{id}_{X_i} \# f_0$ を考えよう。Ruberman 型のエキゾチック微分同相は、

$$(1) \quad f := \psi^{-1} \circ (\text{id}_{X_2} \# f_0^{-1}) \circ \psi \circ (\text{id}_{X_1} \# f_0) : X_1 \# S^2 \times S^2 \rightarrow X_1 \# S^2 \times S^2$$

で定義される $X_1 \# S^2 \times S^2$ の自己微分同相である。ただし、 ψ を取り直すことで、 f がホモロジーには自明に作用するようにしておく。（これができるのは古典的な Wall の定理 [31] から従う。）この f が恒等写像に滑らかにアイソトピックでない微分同相の候補と思える心理的な理由は、微分同相 ψ は X_1 と $S^2 \times S^2$ を本質的に「かき混ぜる」ことで $X_2 \# S^2 \times S^2$ への同一視を作るものであり、 f_0 は $S^2 \times S^2$ に本質的に作用しているから、といったところである。

f がホモロジーに自明に作用するように調整したことから、次の一般的な定理により f が位相的には恒等写像にアイソトピックであることが従う：

定理 2 (Freedman (1982) [7], Quinn (1986) [28]). X を向きづけられた単連結閉 4 次元位相多様体とすると、自然な準同型 $\pi_0(\text{Homeo}^+(X)) \rightarrow \text{Aut}(Q_X)$ は同型である。

ここで $\text{Homeo}^+(X)$ は向きを保つ同相群、 $\text{Aut}(Q_X)$ は X の交叉形式の自己同型群を表す。全射性は [7], 単射性が [28] による。我々に必要なのは単射性の方である¹。

(1) の f が滑らかな恒等写像にアイソトピックでないことはどのように示されるのだろうか。これを検出するのに族のゲージ理論を用いる。上で述べたように、ここでは族の Seiberg–Witten 理論を用いることにしよう。Seiberg–Witten 方程式を書くためには、4 次元多様体上に spin^c 構造と呼ばれるものを取りることが必要である。 spin^c 構造を取るごとに、その spin^c 構造に対する Seiberg–Witten モジュライ空間の形式的次元という整数が定まる。これは、Seiberg–Witten 方程式の解のモジュライ空間が（横断性が満たされて）実際に多様体になっているときは、モジュライ空間の次元を与えるものである。形式的次元が負のときは、モジュライ空間は generic には空であるのだが、以下に見る通り族のゲージ理論ではそのような状況を積極的に使う。

一般に、滑らかな向きづけられた閉 4 次元多様体 Z であって、 $b^+(Z) \geq 3$ という位相的条件を満たすものが与えられたとする。 Z 上の spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ であって、Seiberg–Witten 方程式の解のモジュライ空間の形式的次元が -1 のものが与えられるごとに、準同型写像

$$(2) \quad \text{FSW}(-, \mathfrak{s}) : \pi_0(\text{Diff}(Z, \mathfrak{s})) \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

を定義することができる。これを (1-パラメータの) 族の Seiberg–Witten 不変量という。ここで $\text{Diff}(Z, \mathfrak{s})$ は $\mathfrak{s}$ (の同型類) を保つ微分同相群を表す。これを (1) の f の検出に用いる。なお、 $\text{Diff}(Z, \mathfrak{s})$ より少し小さい群（ホモロジー的向きを保つ $\text{Diff}(Z, \mathfrak{s})$ の部分群）に制限すると、不変量を $\mathbb{Z}$ -値の準同型に持ち上げることができる。この $\mathbb{Z}$ -値の不変量を使うと f の任意の非自明な冪もエキゾチック微分同相であることが分かる。

この写像 (2) は次のように定義される。ひとつ微分同相 $g \in \text{Diff}(Z, \mathfrak{s})$ が与えられると、 Z の g による写像トラス $Z_g \rightarrow S^1$ は、 Z をファイバーとする S^1 上のファイバー束を与える。 g が $\mathfrak{s}$ (の同型

¹単射性 [28] には比較的最近ギャップが発見され、[9] で修正された。

類)を保つことから, Z 上の spin^c 構造 Z をこの族 Z_g に拡張することができる. さらにファイバーごとに計量をとると, Z_g の各ファイバー上で Seiberg–Witten 方程式を書くことができる. いま $\mathfrak{s}$ の形式的次元が -1 と仮定したが, これを 1 次元の底空間 S^1 上で考えると, 解のモジュライ空間を S^1 上で束ねたパラメトライズドモジュライ空間は 0 次元となる. S^1 のコンパクト性と Seiberg–Witten モジュライ空間のコンパクト性 (の証明) を合わせると, パラメトライズドモジュライ空間もコンパクトと分かる. 適当に摂動するとパラメトライズドモジュライ空間は多様体となる. このようにして得られるコンパクト 0 次元多様体, すなわち有限個の点を mod 2 で数えて定義されるのが (2) である. これが g のアイソトピー類のみに依ることや, 恒等写像に対して値が自明であることは容易に分かる.

議論の本質的な部分は, 実際に (1) の微分同相 f を族の Seiberg–Witten 不変量で evaluate した値が非自明であることである. この証明のあらましは以下の通りである.

- 族の Seiberg–Witten 不変量が微分同相の合成に関して加法的であることを示す (容易).
- X_1 の Seiberg–Witten 不変量 $\text{SW}(X_1)$ を用いて

$$(3) \quad \text{FSW}(\text{id}_{X_1} \# f_0) = \text{SW}(X_1)$$

と族の不変量を表す (ただし, 正確には適当に選んだ spin^c 構造に対する等式である). これを示すには貼り合わせと wall-crossing を合わせた議論を行う. f_0 を $H^+(S^2 \times S^2)$ の向きを裏返すように取ったことから, f_0 の写像トーラスに対するパラメトライズドモジュライ空間はひとつ可約解を持つ (wall-crossing). X_1 の上の既約解ごとに, それを $S^2 \times S^2$ 上の可約解と貼り合わせると, $\text{id}_{X_1} \# f_0$ の写像トーラスに対するパラメトライズドモジュライ空間に既約解が得られると分かる.

同様の議論を $\text{id}_{X_2} \# f_0^{-1}$ に対しても行うことで,

$$(4) \quad \text{FSW}(\text{id}_{X_2} \# f_0^{-1}) = \text{SW}(X_2)$$

が分かる. $\text{SW}(X_1)$ と $\text{SW}(X_2)$ が異なるように X_1, X_2 を取ったから, (3), (4) から $\text{FSW}(\text{id}_{X_1} \# f_0)$ と $\text{FSW}(\text{id}_{X_2} \# f_0^{-1})$ が異なり, したがって $\text{id}_{X_1} \# f_0$ と (ψ で共役を取った) $\text{id}_{X_2} \# f_0^{-1}$ とを合成した f に対する不変量の非自明性

$$\text{FSW}(f) \neq 0$$

が FSW の加法性から分かる.

3. エキゾチックな DEHN ツイスト

Ruberman の 1998 年の仕事以降 (上で述べた Baraglia と筆者の Seiberg–Witten 対応物を除いて) 新しい 4 次元多様体上のエキゾチック微分同相の例は長らく見つかっていなかった. 既に述べたように, Ruberman の基本的なアイデアは, 4 次元多様体のエキゾチカから誘導されるエキゾチック微分同相を見つけるというものであった. それとは本質的に異なる例はあるのだろうか.

また, Ruberman 型のエキゾチック微分同相は, ゲージ理論的不変量が非自明な 4 次元多様体 (例えば $K3$) と $S^2 \times S^2$ を混ぜるような微分同相が構成中に噛んでいた. これは典型的には Kirby 計算で作られる微分同相で, (ゲージ理論が専門の筆者などにとっては) 手に取るように分かるとは言い難い微分同相である. エキゾチック 4 次元多様体の自然な例は沢山知られていることを考えると, もう少し幾何学的に自然に現れるエキゾチック微分同相の例があつて欲しいと考えるのも当然だろう.

この数年は, そのような要求に応える例として, Dehn ツイストの 4 次元類似が盛んに研究されている. これが Ruberman とは趣を異にする新しいクラスのエキゾチック微分同相を与えるのである.

定義は以下に述べるように簡単である. Y を多様体とし, 恒等写像を基点とするループ $\phi: S^1 \rightarrow \text{Diff}(Y)$ が与えられたとする. このとき, アニュラス $Y \times [0, 1]$ の境界を各点ごとに固定する微分同相写像が

$$(5) \quad Y \times [0, 1] \rightarrow Y \times [0, 1] \quad ; \quad (y, t) \mapsto (\phi(t) \cdot y, t)$$

で定義される． $Y = S^1$ として， ϕ を S^1 の自身への自然な作用から得られるループとすれば，これは 2 次元トポロジーで基本的な $S^1 \times [0, 1]$ 上の Dehn ツイストに他ならない．

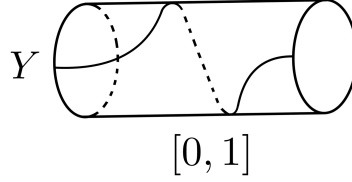


FIGURE 1. アニュラス上の Dehn ツイスト

この微分同相を Y が 3 次元多様体の場合に考えよう． Y が 4 次元多様体 X に埋め込まれているとき， Y の管状近傍に上のアニュラス上の Dehn ツイスト (5) を移植すれば， X 上の微分同相が得られる．これを X 上の Y に沿った **Dehn ツイスト** と呼ぼう．特に X が Y を境界に持つとき， $Y = \partial X$ の管状近傍に移植した Dehn ツイストは $\text{Diff}_\partial(X)$ の元となる．これを X の境界 **Dehn ツイスト** と呼ぶことにする．

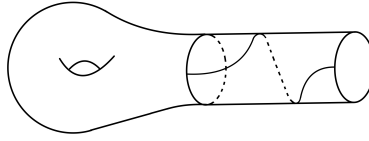


FIGURE 2. 境界 Dehn ツイスト

境界付き多様体の場合，我々は以下のようなエキゾチック微分同相の変種を考える．境界付き多様体 W に対して， $\text{Diff}_\partial(W)$ の元であって， $\text{Homeo}_\partial(W)$ を通して恒等写像にアイソトピックだが $\text{Diff}_\partial(W)$ を通してそうではないものを相対的にエキゾチックな微分同相写像と呼ぶ．別の言い方をすれば，自然な写像

$$\pi_0(\text{Diff}_\partial(W)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}_\partial(W))$$

の核の非自明元を与えるような微分同相写像のことである．

3.1. S^3 に沿った Dehn ツイスト．一番簡単なのは $Y = S^3$ の場合である．この場合， $\pi_1(\text{Diff}(S^3)) \cong \pi_1(\text{SO}(4)) \cong \mathbb{Z}/2$ の生成元に対応するループを用いた Dehn ツイストを考えることができる．2020 年に，Kronheimer–Mrowka [20] は次を示した：

定理 3 (Kronheimer–Mrowka (2020) [20]). $K3 \# K3$ の連結和の首に沿った Dehn ツイストはエキゾチック微分同相である．

証明は (非同変な) 族の Bauer–Furuta 不変量が Dehn ツイストに対して非自明であることを示すことでなされる．Dehn ツイストという一見単純に見える微分同相がエキゾチックになるという Kronheimer–Mrowka の結果は，専門家に驚きを与えた．Kronheimer–Mrowka の結果のすぐ後に，Lin [22] は次を示した：

定理 4 (Lin (2020) [22]). $K3 \# K3$ の連結和の首に沿った Dehn ツイストを $K3 \# K3 \# S^2 \times S^2$ 上に拡張したものもエキゾチック微分同相である．

Lin は，Dehn ツイストに対する $\text{Pin}(2)$ -同変な族の Bauer–Furuta 不変量を計算することでこの結果を証明した．単連結 4 次元多様体上のエキゾチック微分同相の写像類は，有限回の安定化 ($S^2 \times S^2$ の連結和) で自明になることが知られている．しかし，それまでに知られていた例 (Ruberman [29])

と Baraglia–筆者 [2] の例) は一回の安定化で自明になっていた. Lin の結果は, 単連結 4 次元多様体に関するエキゾチックな現象であって, 安定化一回で生き残る初めての例を与えたものであり, これも専門家には驚きを持って迎えられた.

S^3 に沿った Dehn ツイストはその後も研究が続いている. 例えば [4, 27] を参照.

3.2. Seifert ファイバー空間に沿った Dehn ツイスト. より広い例を考えるために自然な 3 次元多様体のクラスは Seifert ファイバー空間である. 定義からそこには S^1 -作用があり, この作用を用いた Dehn ツイストを考えることができる. S^3 は Seifert ファイバー空間としては特殊であり, S^3 の Seifert S^1 -作用が定める $\text{Diff}(S^3)$ の中のループは $\pi_1(\text{Diff}(S^3))$ で自明となってしまう, 非自明な Dehn ツイストを定め得ない. しかし S^3 以外の Seifert ファイバー空間 Y の場合には Seifert S^1 -作用は $\pi_1(\text{Diff}(Y))$ の中で非自明な元を定め ([26, Proposition 8.8]), 潜在的に非自明な Dehn ツイストを与える可能性がある.

2023 年に, Mallick–谷口–筆者 [17] は, Seifert ファイバー空間に沿った Dehn ツイストがエキゾチック微分同相となる例を初めて与えた. その後 1 年あまりのいくつかの研究で, [17] の結果の一部は大きく一般化された: Kang–Park–谷口 [14], Lin–Mukherjee–Muñoz–Echániz–筆者 [15, 16], 宮澤 [24]. ここでは [14–16] の結果の一部を紹介する.

n 次元の境界付き可微分多様体 W に対し, n 次元円板の滑らかな埋め込み $D^n \hookrightarrow \text{Int}(W)$ を固定すると, 微分同相を恒等写像で拡張することで写像 $i : \text{Diff}_\partial(D^n) \hookrightarrow \text{Diff}_\partial(W)$ が得られる. 高次元では, W が可縮であれば, 実はその微分同相群は i を通して円板の微分同相群とホモトピー的に差がないことが知られている (6 次元以上は [11], 5 次元は [18] による):

定理 5 (Galatius–Randal-Williams (2023) [11], Krannich–Kupers (2024) [18]). W を可縮なコンパクト可微分多様体とし, $n := \dim W \geq 5$ と仮定する. このとき, 任意の滑らかな埋め込み $D^n \hookrightarrow \text{Int}(W)$ に対し, $i : \text{Diff}_\partial(D^n) \hookrightarrow \text{Diff}_\partial(W)$ は弱ホモトピー同値写像である.

下の結果は, この高次元での結果と興味深い対比をなす:

定理 6 (K.–Lin–Mukherjee–Muñoz–Echániz (2024) [16]). Seifert ファイバー空間を境界を持つある可縮なコンパクト可微分 4 次元多様体 W で次の性質を満たすものが存在する: W の境界 Dehn ツイスト $\tau \in \text{Diff}_\partial(W)$ の任意の冪 τ^n ($n \neq 0$) は相対的にエキゾチックな微分同相であり, さらに D^4 に局所化しない.

定理 6 の W は, 具体的な Mazur 多様体として与えることができる. ここで微分同相 $f \in \text{Diff}_\partial(W)$ が D^4 に局所化するとは, ある埋め込み $D^4 \hookrightarrow \text{Int}(W)$ に対して f の写像類が $i_* : \pi_0(\text{Diff}_\partial(D^4)) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}_\partial(W))$ の像に属するときを言う. 定理 6 は, 境界 Dehn ツイストは D^4 から来ないという意味で複雑さを持つ微分同相であることを主張している.

D^4 への非局所化性から特に, $i : \text{Diff}_\partial(D^4) \hookrightarrow \text{Diff}_\partial(W)$ は弱ホモトピー同値ではない. したがって定理 6 は, 高次元での結果 (定理 5) の 4 次元類似が成立しないことを, 具体的な 4 次元多様体と微分同相で示すものである. なお定理 5 の 4 次元類似が成立しないことは, [16] とは異なる手法により, Krushkal–Mukherjee–Powell–Warren [21] によっても (明示的な 4 次元多様体と微分同相に対してではないが) [16] の直前に示されている.

非局所性の定理 (定理 6) の証明は, Dehn ツイストに対する族の Seiberg–Witten 不変量の非自明性を示すことによる. この計算は, Seifert S^1 -作用が Seiberg–Witten 方程式の解のモジュライ空間に実際にどのように作用しているかを解析することでなされる. D^4 に局所化したどんな微分同相に対しても, 族の Seiberg–Witten 不変量は自明になることが分かることから, 非局所化性が従う. ゲージ理論的不変量が微分同相の 4 次元特有の微妙な複雑さを上手く捉えていることが覗えるだろう.

なお, 可縮な 4 次元多様体上のエキゾチック Dehn ツイストの検出は Mallick–谷口–筆者 [17] によってはじめて行われたが, これは以下のように一般化された:

定理 7 (Kang–Park–谷口 (2024) [14]). W を可縮で滑らかなコンパクト 4 次元多様体とし, その境界が S^3 でない Brieskorn ホモロジー球面とする. このとき, W の境界 Dehn ツイスト τ_W は $\pi_0(\text{Diff}_\partial(W))$ で無限位数で, τ_W の任意の冪 τ_W^n ($n \neq 0$) は相対的にエキゾチックな微分同相となる.

以上はトポロジカルな趣の定理であるが、次にシンプレクティック構造を利用することを考える。以下の定理から、Seifert ファイバー空間に沿った Dehn ツイストが、相対的にエキゾチックな微分同相の例を系統的に与えることが分かる：

定理 8 (K.–Lin–Mukherjee–Muñoz–Echániz (2024) [15]). Y を $b_1(Y) = 0$ な Seifert ファイバー空間とする。 W を Y の標準的なコンタクト構造に対するコンパクトなシンプレクティック充填とする。もし W の交叉形式が負定値でないならば、 W の境界 Dehn ツイスト τ_W は $\pi_0(\text{Diff}_\partial(W))$ で無限位数となる。さらに W が単連結ならば、 τ_W の任意の冪 τ_W^n ($n \neq 0$) は相対的にエキゾチックな微分同相となる。

W の交叉形式に関する仮定を落とすと容易に反例が作れる。例えば、Poincaré ホモロジー球面 $\Sigma(2, 3, 5)$ は標準的なやり方で負定値な $-E_8$ が交叉形式であるような 4 次元多様体 W の境界として現れる (W は後に見る Milnor ファイバーの一例である)。この W は S^1 -同変な plumbing で得られることが知られており、その帰結として、 $\Sigma(2, 3, 5)$ 上の標準的な S^1 -作用は W に拡張する。この S^1 -作用を用いれば、 W の境界 Dehn ツイストが $\pi_0(\text{Diff}_\partial(W))$ で自明なことはただちに分かる。

定理 8 の証明は族の相対 Bauer–Furuta 不変量を用いた背理法である。仮に τ_W^n が恒等写像に (境界に対して相対的かつ) 滑らかにアイソトピックであるとする。Kang–Park–谷口 [14] の議論を用いると、この仮定から、ある有限巡回群の分類空間の上の W をファイバーとする滑らかな族を構成することができる。これに対する族の相対 Bauer–Furuta 不変量を観察することで矛盾を導くのである。この矛盾は一言で言えば、Taubes によるシンプレクティック 4 次元多様体に対する Seiberg–Witten 不変量の非消滅定理 [30] と、Baraglia–Hekmati [1] による Floer ホモロジーの消滅定理から来る。後者は、Seifert ファイバー空間を十分位数の高い巡回群の標準的な作用で割って得られる 3 次元多様体の Floer ホモロジーの消滅であり、Némethi [25] による Floer ホモロジーの計算に基づくものである。これらの非消滅定理・消滅定理を繋いで矛盾させるためには、ゲージ理論とコンタクト構造に関わる比較的最近の進展である飯田 [12]、飯田–谷口 [13] の仕事も使われる。

3.3. Milnor ファイブレーションのモノドロミー。 上のシンプレクティック充填に関する結果 (定理 8) の系として、Milnor ファイブレーションのモノドロミーについての興味深い帰結を得ることができる。3 変数の複素多項式 $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ が与えられ、 $f(0) = 0$ かつ原点を孤立特異点として持つとしよう。 f を制限した

$$f : f^{-1}(B_\delta(\mathbb{C}) \setminus \{0\}) \cap B_\epsilon(\mathbb{C}^3) \rightarrow B_\delta(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \quad (1 \gg \epsilon \gg \delta > 0)$$

がファイバー束になるというのが古典的な Milnor のファイブレーション定理であった。このファイバー束を f の **Milnor ファイブレーション** と呼ぶ。そのファイバー (**Milnor ファイバー**) を M_f とおくと、ファイバー束のモノドロミー $\mu \in \pi_0(\text{Diff}_\partial(M_f))$ が Milnor ファイブレーションの最も重要な不変量である。 μ のホモロジー $H_*(M_f)$ への作用は古典的に研究されてきたが、写像類自体を研究するのも自然であろう。

μ の写像類を調べるために多項式のクラスを少々限定する。 f が weighted homogeneous とは、ある整数 $w_1, w_2, w_3, d > 0$ が存在し、

$$f(t^{w_1}z_1, t^{w_2}z_2, t^{w_3}z_3) = t^d f(z_1, z_2, z_3)$$

が任意の $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$, $t \in \mathbb{C}$ に対して成り立つときを言う。weighted homogeneous な多項式は、Brieskorn 型の特異点や ADE 特異点 (を与える多項式) のような興味深いクラスを含んでいる。Brieskorn 型とは、 $f(z_1, z_2, z_3) = z_1^{p_1} + z_2^{p_2} + z_3^{p_3}$ ($p_i \geq 2$) の形の多項式で与えられる特異点であり、その Milnor ファイバーの境界に現れる Brieskorn 3 次元多様体は基本的なクラスの 3 次元多様体である。ADE 型特異点、あるいは有理二重点や du Val 特異点とも呼ばれるこのクラスは、 $SL(2, \mathbb{C})$ のある有限部分群 Γ を用いて $\mathbb{C}^2/\Gamma$ と表される特異点であった。

ADE 特異点の場合には、Milnor ファイブレーションのモノドロミー μ は $\pi_0(\text{Diff}_\partial(M_f))$ の中で有限位数であることが分かる。これは Brieskorn [5] による古典的な同時特異点解消定理の帰結である。実は、逆にモノドロミーが有限位数となるのは、ADE 特異点のみであることが示せる：

定理 9 (K.–Lin–Mukherjee–Muñoz–Echániz (2024) [15]). $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ を *weighted homogeneous* な多項式とし, $f(0) = 0$ かつ原点を孤立特異点として持つと仮定する. f が ADE 特異点を与えるときまたそのときに限り, f の Milnor ファイブレーションのモノドロミー μ は $\pi_0(\text{Diff}_{\partial}(M_f))$ の中で有限位数である.

証明は, *weighted homogeneous* の場合, モノドロミーの適当な冪が境界 Dehn ツイストになることに注意し, 定理 8 に帰着させることで得られる. 多項式が ADE 型であるというのは, 定理 8 における W の交叉形式が負定値なことに対応する.

定理 9 の位相的カテゴリーでの類似や高次元類似 (すなわち多項式の変数を増やして得られる高次元の Milnor ファイブレーションに対する類似) を考えると, これらは共に成立しないことが分かる. (位相的カテゴリー類似については Orson–Powell [26], 高次元については Krannich–Randal–Williams [19] の結果の帰結である.) したがって定理 9 は, Milnor ファイブレーションのモノドロミーのような古典的な微分同相も, 4 次元特有現象や位相的カテゴリーと可微分カテゴリーの差異を与えていることを示している.

4. 既約な 4 次元多様体上のエキゾチック微分同相

上では, Milnor ファイバーのような自然な境界付き 4 次元多様体上のエキゾチック微分同相を扱った. 一方, エキゾチック微分同相が検出できる閉 4 次元多様体は, 証明の都合上, 連結和で作るものが多かった. 例えば既に見た $4\mathbb{CP} \# 21\overline{\mathbb{CP}}^2$ といった形のものである [2, 29]. これらは, 複素構造, シンプレクティック構造を持たず, エキゾチック構造を持つかも知れないものである.

一方, 4 次元トポロジーで重要な 4 次元多様体の例の多くは複素曲面である. *blow-down* すると, そういったものは既約な 4 次元多様体, すなわち非自明な連結和分解を持たないものとなる². これが 4 次元トポロジーの building block であり, その上ではしばしば, エキゾチック構造, 複素構造, シンプレクティック構造など, 豊かな構造を考えられる.

既約な 4 次元多様体がエキゾチック微分同相を持ち得るかは 4 次元多様体の微分同相群に関する基本的な問いと見なされてきたが, 最近そのような例が存在することが分かった:

定理 10 (Baraglia–K. (2024) [4]). 既約な閉 4 次元多様体であってエキゾチック微分同相を許容するものが存在する.

具体的には, minimal な単連結複素曲面 (様々な楕円曲面や完全交叉) として例が与えられる. 例えば, 対数変換で得られる楕円曲面 $E(4n)_{p,q}$ ($n, p, q \geq 1$, ただし有限個の (p, q) を除く) や, $\mathbb{CP}^4$ を二本の方程式で切った完全交叉たちのおおよそ $1/4$ が例となる.

証明は, Baraglia と筆者が族の Bauer–Furuta 不変量から導出した滑らかな 4 次元多様体への制約 [3] と族の指数定理を用いる. 微分同相の構成を含め, これを概説する.

抽象的な方針としては, 次の持ち上げ問題を否定的に解くことである. (このアイデアは最初, Mallick–谷口–筆者 [17] で用いた. しかし最終的に使う族のゲージ理論由来の制約が定理 10 の証明で用いるものとは異なる.) X を向きづけられた単連結閉 4 次元多様体とする. G をひとつの関係式を持つ有限表示群とし,

$$G = \langle a_1, \dots, a_n \mid r \rangle$$

をある表示とする. G から X の交叉形式の自己同型群 $\text{Aut}(Q_X)$ への準同型 $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(Q_X)$ が与えられたとする. ただし, この像 $\varphi(G)$ が, 自然な写像 $\pi_0(\text{Diff}^+(X)) \rightarrow \text{Aut}(Q_X)$ の像に含まれてい

²正確には, 閉 4 次元多様体 X が既約とは, $X = X_1 \# X_2$ と書けるならば X_i の少なくとも一方はホモトピー S^4 であるというときを言う.

ると仮定する． φ に対する持ち上げ問題

$$\begin{array}{ccc} & \pi_0(\text{Diff}^+(X)) & \\ \tilde{\varphi} \nearrow & \downarrow & \\ G & \xrightarrow{\varphi} & \text{Aut}(Q_X) \end{array}$$

が解けない，すなわちこの図式を可換にする準同型 $\tilde{\varphi} : G \rightarrow \pi_0(\text{Diff}^+(X))$ が存在しないとしよう．すると以下のようにして X のエキゾチック微分同相を得ることができる．まず， φ の像に関する仮定から，各 $\varphi(a_i)$ はある微分同相で実現できる．すなわち， $f_i \in \text{Diff}^+(X)$ が存在して $(f_i)_* = \varphi(a_i)$ となる． $r = r(a_1, \dots, a_n)$ を r の a_i たちによる word 表示とする．このとき， $f := r(f_1, \dots, f_n) \in \text{Diff}^+(X)$ は $\pi_0(\text{Diff}^+(X))$ で非自明となる．実際，もし f の写像類 $[f]$ が自明であれば， $\tilde{\varphi}(a_i) := [f_i]$ とおくことで準同型 $\tilde{\varphi} : G \rightarrow \pi_0(\text{Diff}^+(X))$ が well-defined に定まり，上の持ち上げ問題が解けないという仮定に反するからである．一方 φ の準同型性から $f_* = \varphi(r) = 1 \in \text{Aut}(Q_X)$ である．したがって定理 2 から， f は位相的には恒等写像にアイソトピックとなり，これは f が X のエキゾチックな微分同相であることを意味する．

このような持ち上げ問題を否定的に解くために，族のゲージ由来の 4 次元多様体の滑らかな族に対する制約を用いる．まず， G は有限表示群なので，その presentation complex と呼ばれる 2 次元 CW 複体 B が得られる．これは 1-cell たちが生成元 a_i ，2-cell が関係式 r に対応するようなものである．もし上の持ち上げ問題が肯定的に解けると， B の上の X をファイバーとする滑らかな族 $E \rightarrow X$ であって，そのモノドロミーが交叉形式に φ を通して作用するようなものが得られる．ここに族のゲージ理論由来の制約を使う．族のゲージ理論はしばしば，4 次元多様体の滑らかな族のモノドロミーの交叉形式への作用への制約を与える． E がこの制約を破っていることを確認できれば矛盾が得られ，持ち上げ問題が否定的に解けるのである．

既約な 4 次元多様体のエキゾチック微分同相の検出 (定理 10) の証明では，このアイデアを $G = \mathbb{Z}^2 = \langle a_1, a_2 \mid [a_1, a_2] \rangle$ に対して用いる (一方，Mallick–谷口–筆者 [17] では $G = \mathbb{Z}/2$ を Dehn ツイストを検出するのに用いた)．まず， X が楕円曲面や完全交叉のとき，交叉形式の自己同型 $\text{Aut}(Q_X)$ の多くが微分同相で実現できることが知られており，簡単な十分条件がある [6, 23]³．実現可能な $\text{Aut}(Q_X)$ の元 ψ_1, ψ_2 であって， $[\psi_1, \psi_2] = 1$ かつホモロジーに興味深く作用するものを取る．具体的には，ある $H^+(X)$ ($H_2(X; \mathbb{R})$ の部分空間で，交叉形式が正定値かつ最大次元のもの) を集合として保ち，さらに $w_2(H^+(X) \times_{\mathbb{Z}^2} \mathbb{R}^2) \neq 0$ となるように取る．(ここで $\mathbb{Z}^2$ は $H^+(X)$ に ψ_1, ψ_2 により作用しており， $\mathbb{R}^2$ には平行移動で作用している．) このような ψ_1, ψ_2 が取れることは容易に分かる． ψ_1, ψ_2 を実現する $\text{Diff}^+(X)$ の元 f_1, f_2 を取っておく．我々が示したいことは， $f = [f_1, f_2]$ がエキゾチック微分同相であるということである．

上のアイデアをここで使う．もし f が恒等写像に滑らかにアイソトピックであれば， X をファイバーとする滑らかなファイバー束 $E \rightarrow T^2$ であって，モノドロミーの $H_2(X)$ への作用が ψ_1, ψ_2 で与えられるものが得られる． X として楕円曲面，完全交叉の内ある程度の条件を課しておくと， $w_2(H^+(X) \times_{\mathbb{Z}^2} \mathbb{R}^2) = 0$ とならなければならないことになり矛盾するのである．この w_2 の消滅は，次の族のゲージ理論由来の制約から来る：

定理 11 (Baraglia–K. (2022) [3]). X を滑らかな閉 4 次元多様体で $b^+(X) \equiv 3 \pmod{4}$ ， $b_1(X) = 0$ と仮定する． $\mathfrak{s}$ を X 上の spin^c 構造で，Seiberg–Witten 不変量 $\text{SW}(X, \mathfrak{s})$ が $\mathfrak{s} \pmod{2}$ で非自明であるとする． $(X, \mathfrak{s})$ をファイバーとする spin^c 4 次元多様体の滑らかなファイバー束 $E \rightarrow B$ がコンパクトな底空間 B の上で与えられたとする．このとき，

$$c_1(\not{D}_E) = w_2(H^+(E)) \pmod{2}$$

³具体的には， $\text{Aut}(Q_X)$ の元が X の標準束の第 1 Chern 類を保ち，さらに $H^+(X)$ の向きを保つなら，それは $\text{Diff}^+(X)$ の元で実現できる．

が成り立つ．ここで $\not{D}_E$ は E 上の $spin^c$ Dirac 作用素の族の指数で、 $H^+(E)$ は E に伴う $H^+(X)$ の族である．

定理 10 の X に課される条件は、mod 2 Seiberg–Witten 不変量が消えていないような $spin^c$ 構造 $\mathfrak{s}$ で、 $c_1(\mathfrak{s})$ が高い divisibility を持つようなものが存在し、さらに符合数 $\sigma(X)$ もある程度の divisibility を持つというものである．(これらの条件を満たす X は、先に述べたように楕円曲面・完全交叉の中に豊富に存在する．) そしてそのようなとき、族の指数定理から、 $c_1(\not{D}_E) = 0 \pmod{2}$ と分かり、したがって定理 11 から $w_2(H^+(X) \times_{\mathbb{Z}^2} \mathbb{R}^2) = 0$ が従う．

定理 11 は族の Bauer–Furuta 不変量の考察から得られる．族の Bauer–Furuta 不変量は、

$$F : \text{Th}(\not{D}_E) \rightarrow \text{Th}(H^+(E))$$

という形の写像を安定化したものである．(ここで Th は Thom 空間を意味する．) これは B 上の fiberwise な写像が Thom 空間に誘導する写像であり、ファイバーに F を制限して写像度を取ると Seiberg–Witten 不変量となる．このようにして定理の主張中の Seiberg–Witten 不変量、 $\not{D}_E$ 、 $H^+(E)$ が結びつくのである．

5. S^4 上のエキゾチック微分同相

最後に、ごく最近アナウンスされた S^4 上のエキゾチック微分同相について述べる．

定理 12 (Gabai–Gay–Hartman (2025, announced in [8])). $\pi_0(\text{Diff}^+(S^4)) \neq 1$.

すなわち、(位相的写像類群についての結果 (定理 2) と合わせると) S^4 がエキゾチック微分同相を持つというのが彼らの主張である．証明の詳細は続きの論文で書かれるということで、detect する方法は族のゲージ理論とは全く異なる、pseudo-isotopy theory に基づくものであると [8] では述べられている． S^4 はゲージ理論的な手法を使うことが一般に極めて難しい対象であり、 S^4 の微分構造や微分同相にゲージ理論でアプローチして得られた結果は現状皆無である．このような対象に手が届くというのは驚くべきことである．

彼らが非自明と主張している微分同相自体は、同じ著者らを含むグループによる二年ほど前の論文 [10] で既に、潜在的に非自明になり得る微分同相として注意されていたものである．これは渡邊忠之による 4 次元 Smale 予想の否定的解決 [32] で用いられていたテクニックと類似の方法で構成される微分同相である．なお、渡邊の結果では $\pi_1(\text{Diff}(S^4)) \otimes \mathbb{Q}$ の非自明性をはじめ、 $\text{Diff}(S^4)$ の多くの高次ホモトピー群が非自明と示していたが、そこで用いられた不変量は $\pi_0(\text{Diff}(S^4))$ に対しては定義されないものだった．また不変量は $\mathbb{Q}$ 上で定義されていた．対照的に、今回 Gabai–Gay–Hartman がアナウンスしたところでは、彼らは $\mathbb{Z}/2$ に値を取る準同型

$$\pi_0(\text{Diff}^+(S^4)) \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

を構成し、これを用いて興味深い微分同相を検出するようである．またこの微分同相は $\pi_0(\text{Diff}^+(S^4))$ 内で位数 2 であることも分かるようである．したがって彼らの新しい不変量は、 $\mathbb{Z}$ に持ち上がらない真に torsion 的な不変量ということになる．

なお、この微分同相は $S^2 \times S^2$ に移植するとその写像類が自明になるものと知られており、この微分同相から自動的に他の 4 次元多様体上のエキゾチック微分同相を作ることができるわけではない．他の重要な 4 次元多様体としては、 $S^2 \times S^2$ 、 $\mathbb{CP}^2$ 、 $K3$ などがエキゾチック微分同相を許容するかは基本的な問題である．

REFERENCES

- [1] David Baraglia and Pedram Hekmati, *Brieskorn spheres, cyclic group actions and the Milnor conjecture*, J. Topol. **17** (2024), no. 2, Paper No. e12339, 40. MR4821357
- [2] David Baraglia and Hokuto Konno, *A gluing formula for families Seiberg–Witten invariants*, Geom. Topol. **24** (2020), no. 3, 1381–1456. MR4157556
- [3] ———, *On the Bauer–Furuta and Seiberg–Witten invariants of families of 4-manifolds*, J. Topol. **15** (2022), no. 2, 505–586. MR4441598

- [4] ———, *Irreducible 4-manifolds can admit exotic diffeomorphisms*, arXiv:2412.14398 (2024). to appear in Duke Math. J.
- [5] E. Brieskorn, *Singular elements of semi-simple algebraic groups*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2, 1971, pp. 279–284. MR437798
- [6] Wolfgang Ebeling and Christian Okonek, *On the diffeomorphism groups of certain algebraic surfaces*, Enseign. Math. (2) **37** (1991), no. 3-4, 249–262. MR1151750
- [7] Michael Hartley Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, Journal of Differential Geometry **17** (1982), no. 3, 357–453.
- [8] David Gabai, David T. Gay, and Daniel Hartman, *Pseudo-isotopy and diffeomorphisms of the 4-sphere i: Loops of spheres*, arXiv:2505.12088 (2025).
- [9] David Gabai, David T. Gay, Daniel Hartman, Vyacheslav Krushkal, and Mark Powell, *Pseudo-isotopies of simply connected 4-manifolds*, arXiv:2311.11196 (2023).
- [10] ———, *Pseudo-isotopies of simply connected 4-manifolds*, arXiv:2311.11196 (2023).
- [11] Søren Galatius and Oscar Randal-Williams, *The Alexander trick for homology spheres*, Int. Math. Res. Not. IMRN **24** (2024), 14689–14703. MR4843757
- [12] Nobuo Iida, *A Bauer-Furuta-type refinement of Kronheimer and Mrowka’s invariant for 4-manifolds with contact boundary*, Algebr. Geom. Topol. **21** (2021), no. 7, 3303–3333. MR4357606
- [13] Nobuo Iida and Masaki Taniguchi, *Seiberg-Witten Floer homotopy contact invariant*, Studia Sci. Math. Hungar. **58** (2021), no. 4, 505–558. MR4592494
- [14] Sungkyung Kang, JungHwan Park, and Masaki Taniguchi, *Exotic Dehn twists and homotopy coherent group actions*, arXiv:2409.11806 (2024).
- [15] Hokuto Konno, Jianfeng Lin, Anubhav Mukherjee, and Juan Muñoz-Echániz, *The monodromy diffeomorphism of weighted singularities and Seiberg–Witten theory*, arXiv:2411.12202 (2024).
- [16] ———, *On four-dimensional Dehn twists and Milnor fibrations*, arXiv:2409.11961 (2024).
- [17] Hokuto Konno, Abhishek Mallick, and Masaki Taniguchi, *Exotic Dehn twists on 4-manifolds*, arXiv:2306.08607 (2023).
- [18] Manuel Krannich and Alexander Kupers, *∞ -operadic foundations for embedding calculus*, arXiv:2409.10991 (2024).
- [19] Manuel Krannich and Oscar Randal-Williams, *Diffeomorphisms of discs and the second weiss derivative of $b\text{top}(-)$* , arXiv:2109.03500 (2021).
- [20] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *The Dehn twist on a sum of two $K3$ surfaces*, Math. Res. Lett. **27** (2020), no. 6, 1767–1783. MR4216604
- [21] Vyacheslav Krushkal, Anubhav Mukherjee, Mark Powell, and Terrin Warren, *Corks for exotic diffeomorphisms*, arXiv:2407.04696 (2024).
- [22] Jianfeng Lin, *Isotopy of the Dehn twist on $K3 \# K3$ after a single stabilization*, Geom. Topol. **27** (2023), no. 5, 1987–2012. MR4621924
- [23] Michael Lönne, *On the diffeomorphism groups of elliptic surfaces*, Math. Ann. **310** (1998), no. 1, 103–117. MR1600035
- [24] Jin Miyazawa, *Boundary Dehn twists on Milnor fibers and Family Bauer–Furuta invariants*, arXiv:2410.21742 (2024).
- [25] András Némethi, *On the Ozsváth-Szabó invariant of negative definite plumbed 3-manifolds*, Geom. Topol. **9** (2005), 991–1042. MR2140997
- [26] Patrick Orson and Mark Powell, *Mapping class groups of simply connected 4-manifolds with boundary*, arXiv:2207.05986 (2022).
- [27] Haochen Qiu, *The Dehn twist on a connected sum of two homology tori*, arXiv:2410.02461 (2024).
- [28] Frank Quinn, *Isotopy of 4-manifolds*, J. Differential Geom. **24** (1986), no. 3, 343–372. MR868975
- [29] Daniel Ruberman, *An obstruction to smooth isotopy in dimension 4*, Math. Res. Lett. **5** (1998), no. 6, 743–758. MR1671187
- [30] Clifford Henry Taubes, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 809–822. MR1306023
- [31] C. T. C. Wall, *Diffeomorphisms of 4-manifolds*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 131–140. MR163323
- [32] Tadayuki Watanabe, *Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of $\text{Diff}(S^4)$* , arXiv:1812.02448 (2018).

Gaussian correlation inequality for centered convex sets

辻 寛 (埼玉大学大学院理工学研究科)

1 序

1.1 Gaussian correlation 不等式と主結果

本予稿を通して $\gamma = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} dx$ は $\mathbb{R}^n$ 上の n 次元正規分布とする. $n = 2$ 次元平面 $\mathbb{R}^2$ 上の 2 つの直交する帯 $S_1 = [-1, 1] \times \mathbb{R}$ と $S_2 = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ に対して, $\gamma(S_1 \cap S_2)$ を考える. このとき Fubini の定理より

$$\gamma(S_1 \cap S_2) = \gamma(S_1)\gamma(S_2) \quad (1.1)$$

であることがわかる. では S_1, S_2 をより一般の可測集合に取り換えた場合, $\gamma(S_1 \cap S_2)$ と $\gamma(S_1)\gamma(S_2)$ の間の関係としてどのようなことが言えるであろうか? この問いに関してすぐにわかる評価は

$$\gamma(S_1 \cap S_2) \leq \sqrt{\gamma(S_1)\gamma(S_2)}$$

というものである¹. これは $S_1 \cap S_2 \subset S_i$ ($i = 1, 2$) であることと測度の単調性から容易に従う.

一方で逆向きの評価は一般に容易には期待できない. 実際 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ となる集合を考えれば, $\gamma(S_1 \cap S_2) = 0$ だが $\gamma(S_1)\gamma(S_2) \neq 0$ となることがあるためである. したがって, この状況を避けるために S_1, S_2 に対して $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ となるような適切な条件を課すことが必要となる. Gaussian correlation 不等式 (以降 GCI と略記) は原点对称 (以降, 単に対称と呼ぶ) かつ凸という条件の下であれば, 逆向きの評価が成立することを示す不等式である.

Theorem 1.1 ([20], [21]). 任意の対称な凸集合 $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\gamma(K_1 \cap K_2) \geq \gamma(K_1)\gamma(K_2). \quad (1.2)$$

K_1, K_2 に対称性や凸性がなければ, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ となることがあるので一般に (1.2) は成立しないことを注意しておく. また (1.1) で具体的に見た帯 S_1, S_2 は対称な凸集合なので, (1.2) は最良な不等式である.

GCI ははじめ Das Gupta et al.[10], Khatri[14], Šidák[23] らによって独立に調べられており, K_2 が Strip の時が最初に示されている. その後 $n = 2$ の場合は Pitt によって解決された. 一般次元の場合に関しては, 多くの部分的な解決 [6, 9, 12, 13, 22, 24] が与えられており, 最終的には Royen によって完全に解決された. またその後 Latała–Matlak[15] によってより平易な Royen の証明が与えられている. さらに最近 Milman[17] によって, GCI の簡単な別証明が与えられた. Milman の証明における最も新しい点は, GCI と inverse Brascamp–Lieb 不等式との関連を発見し, 我々が以前に導入した symmetric inverse Brascamp–Lieb 不等式 [18] の拡張版を利用したことである. Brascamp–Lieb 不等式についての詳細は 2, 3 節にて紹介するが, この不等式はもとも

¹右辺の指数 $\frac{1}{2}$ は最良である. 実際ある $\alpha > 0$ が存在して, 任意の $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\gamma(S_1 \cap S_2) \leq (\gamma(S_1)\gamma(S_2))^\alpha$$

と仮定すると, 特に $S_1 = S_2 = S$ の場合に $\gamma(S) \leq \gamma(S)^{2\alpha}$ を得る. γ は確率測度なので $\alpha \leq \frac{1}{2}$ でなければならないが, 実際 $\alpha = \frac{1}{2}$ のときが最良.

と調和解析や凸幾何学において利用・研究されてきた歴史があり、幅広い幾何学的・解析的な不等式を包括する不等式として知られている [1, 2, 5, 25].

本予稿で紹介する我々の結果は Milman の発見に感化されたものであり、GCI の一般化を与える．我々の結果を述べるために次の記号を導入する．可測集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ に対して、 γ に関する重心を

$$\text{bar}_\gamma(S) := \int_S x \frac{d\gamma}{\gamma(S)}$$

と定める．とくに S が対称な集合であれば $\text{bar}_\gamma(S) = 0$ が成り立つことがわかる．次の結果が本予稿の主結果である．

Theorem 1.2. 凸集合 $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ が

$$\text{bar}_\gamma(K_1) = \text{bar}_\gamma(K_2) = 0$$

をみたすとき、(1.2) が成り立つ．

さきほど述べたように K_1, K_2 が特に対称であれば

$$\text{bar}_\gamma(K_1) = 0 = \text{bar}_\gamma(K_2)$$

を満たすので、Theorem 1.2 は Royen の GCI を含む．非対称な凸集合に対する GCI は特別な場合に Szarek–Werner[24] や Cordero-Erausquin[9] によって示されている．またより一般に $\text{bar}_\gamma(K_1) = \text{bar}_\gamma(K_2)$ の下での (1.2) の成立は Szarek–Werner によって提示されている問題であり、我々の原論文 [19] では Szarek–Werner の問題を肯定的に解決することにも成功している．

最後に、Theorem 1.2 では二つの集合と一つの測度 γ に対してのみの関係を与えたが、複数個の集合と測度に対しても同様の結果が得られることを述べる．一般に正値対称行列 $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が与えられたとき、 γ_Σ で重心 0、共分散行列が Σ の正規分布を表すこととする．

Theorem 1.3. $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を正値対称行列であって $\Sigma_0^{-1} \geq \Sigma_i^{-1}$ ($i = 1, \dots, m$) を満たすとする．また $K_1, \dots, K_m \subset \mathbb{R}^n$ を

$$\text{bar}_{\gamma_{\Sigma_i}}(K_i) := \int_{K_i} x \frac{d\gamma_{\Sigma_i}}{\gamma_{\Sigma_i}(K_i)} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

となる凸集合とする．このとき

$$\gamma_{\Sigma_0} \left(\bigcap_{i=1}^m K_i \right) \geq \prod_{i=1}^m \gamma_{\Sigma_i}(K_i) \quad (1.3)$$

が成り立つ．

とくに $m = 2$, $\Sigma_0 = \Sigma_1 = \Sigma_2 = \text{id}_n$ の場合が Theorem 1.2 に対応する．また $\Sigma_0 = \Sigma_1 = \dots = \Sigma_m = \text{id}_n$ の場合、 $K_1, \dots, K_m$ がすべて対称な凸集合であれば (1.3) は Theorem 1.1 から帰納的な議論で容易に確認される．実際このことは K_1, K_2 が対称な凸集合であれば $K_1 \cap K_2$ も対称な凸集合となることから従う．一方で非対称な場合はその限りではない．なぜならば K_1, K_2 が重心 0 の凸集合であっても、 $K_1 \cap K_2$ が重心 0 な凸集合であるとは限らないからである．ゆえに Theorem 1.2 から (1.3) が従うかは明らかでない．

また仮定 $\Sigma_0^{-1} \geq \Sigma_i^{-1}$ は最良であることも注意しておく．すなわち、 $\Sigma_0^{-1} \geq \Sigma_i^{-1}$ が成り立たない場合は (1.3) は成立しないことが確認できる．

Theorem 1.3 の証明は Theorem 1.2 の証明と本質的に同じであるため、本予稿では Theorem 1.2 の証明にのみ言及する．

1.2 Gaussian correlation 不等式と同値な表現

本節では GCI と等価な解析的・確率論的不等式を紹介する．実際，Royen 及び Milman は GCI の確率論的不等式を直接示すことによって，GCI の証明を与えた．一方で本予稿では解析的不等式を直接示すことによって，GCI の証明を与える．とくに Milman と我々の証明では次節以降で述べる symmetric inverse Brascamp–Lieb 不等式を使う点は同じであるが，直接示す不等式が異なるという点において少し違いがあることを述べておく．

以下に Theorem 1.1 と同値な不等式を 2 つ列挙する：

- (1) 任意の非負値 log-concave 偶関数 $h_1, h_2 \in L^1(\gamma)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_1 h_2 d\gamma \geq \int_{\mathbb{R}^n} h_1 d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} h_2 d\gamma. \quad (1.4)$$

ここで $\mathbb{R}^n$ 上の非負値関数 h が log-concave であるとは， $-\log h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が $\mathbb{R}^n$ 上で convex であることを意味する．

- (2) 任意の正値対称行列 $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ と $(X_1, \dots, X_n) \sim N(0, \Sigma)$ となる確率変数 $X_1, \dots, X_n$ ， $n = n_1 + n_2$ となる $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_i| \leq 1 \right) \geq \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq n_1} |X_i| \leq 1 \right) \mathbb{P} \left(\max_{n_1+1 \leq i \leq n} |X_i| \leq 1 \right). \quad (1.5)$$

以上の同値性について簡単な証明を以下に述べる．まず (1.4) において $h_i = \mathbf{1}_{K_i}$ とすれば，(1.2) が従うことが容易にわかる．逆に (1.2) から (1.4) が従うことは，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h_1 h_2 d\gamma &= \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma(\{h_1 > s\} \cap \{h_2 > t\}) ds dt \\ &\geq \int_0^\infty \int_0^\infty \gamma(\{h_1 > s\}) \gamma(\{h_2 > t\}) ds dt = \int_{\mathbb{R}^n} h_1 d\gamma \int_{\mathbb{R}^n} h_2 d\gamma \end{aligned}$$

からわかる．

一方で (1.5) は

$$\gamma \left(\Sigma^{-\frac{1}{2}} [-1, 1]^n \right) \geq \gamma \left(\Sigma^{-\frac{1}{2}} ([-1, 1]^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) \right) \gamma \left(\Sigma^{-\frac{1}{2}} (\mathbb{R}^{n_1} \times [-1, 1]^{n_2}) \right)$$

と同値なので，とくに (1.2) の特別な場合とみなせる．最後に (1.5) から (1.2) の証明の概要を述べる．まず適切な近似により K_1, K_2 を対称な polytope としてよい．今

$$K_i = \bigcap_{j=1}^{N_i} \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, u_{ij} \rangle| \leq 1\}, \quad \exists u_{ij} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

とし，ガウシアン確率ベクトル $X \sim N(0, \text{id}_n)$ に対して $X_{j'} := \langle X, u_{ij} \rangle$ ($1 \leq j' \leq N_1$ のときは $i = 1$ かつ $j = j'$ ， $N_1 + 1 \leq j' \leq N_1 + N_2$ のときは $i = 2$ かつ $j = j' - N_1$) とすれば，(1.2) はある非負値対称行列 $\Sigma \in \mathbb{R}^{N_1+N_2}$ に対する (1.5) と書き表せる．任意の非負値対称行列は正値対称行列によって近似されるので，結局 (1.5) から (1.2) が従うことがわかる．

以上で Royen の GCI と同値な主張を 2 つ与えた．本予稿では特に解析的な主張である (1.4) を直接証明する．より具体的に Theorem 1.2 を示すためには，次の主張を示せば十分である．

Theorem 1.4. 任意の非負値 log-concave 関数 $h_1, h_2 \in L^1(\gamma)$ であって，

$$\int_{\mathbb{R}^n} x \frac{h_1 d\gamma}{\int_{\mathbb{R}^n} h_1 d\gamma} = \int_{\mathbb{R}^n} x \frac{h_2 d\gamma}{\int_{\mathbb{R}^n} h_2 d\gamma} = 0$$

となる関数に対して (1.4) が成り立つ．

上の議論と同様に $h_i := \mathbf{1}_{K_i}$ とすれば Theorem 1.2 をえる.

次節以降では Theorem 1.4 がどのように示されるかを解説する. 特に重要な道具は symmetric inverse Brascamp–Lieb 不等式である. この不等式を導入するにあたって, まず Brascamp–Lieb 不等式と inverse Brascamp–Lieb 不等式がどのような不等式であるかを紹介する.

2 Brascamp–Lieb 不等式と inverse Brascamp–Lieb 不等式

2.1 Brascamp–Lieb 不等式

Brascamp–Lieb 不等式を述べるためにいくつかの記号を用意する.

- $m \in \mathbb{N}$: 関数の個数.
- $n_1, \dots, n_m, N \in \mathbb{N}$: 空間の次元.
- $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: 指数.
- $B_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}, i = 1, \dots, m$: 線形写像.
- $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$: 対称行列.

また $\mathbf{B} = (B_i)_{i=1}^m, \mathbf{c} = (c_i)_{i=1}^m$ とあらわすことにする. このとき三つ組 $(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q)$ を Brascamp–Lieb データ (略記して BL データ) と呼ぶ. 各 BL データに対して, Brascamp–Lieb 不等式とは次の不等式を表す:

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\langle Qx, x \rangle} \prod_{i=1}^m f_i(B_i x)^{c_i} dx \leq \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q) \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i dx_i \right)^{c_i}, \quad \forall f_i \in L_+^1(\mathbb{R}^{n_i}). \quad (2.1)$$

ここで

$$L_+^1(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} f dx > 0, \quad f \geq 0 \right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

とし, $\text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q) \in (0, \infty]$ は (2.1) を満たす最良定数とする. 同じことであるが,

$$\text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q) := \sup_{f_i \in L_+^1(\mathbb{R}^{n_i})} \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q; \mathbf{f}), \quad \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q; \mathbf{f}) := \frac{\int_{\mathbb{R}^N} e^{\langle Qx, x \rangle} \prod_{i=1}^m f_i(B_i x)^{c_i} dx}{\prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i dx_i \right)^{c_i}}$$

とあらわせる. ここで $\mathbf{f} := (f_i)_{i=1}^m$ とした. 以降 $\text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q)$ を Brascamp–Lieb 定数 (略記して BL 定数) と呼ぶ.

以下に Brascamp–Lieb 不等式の具体例を述べる. もっとも単純な例として始めに Hölder 不等式を紹介する.

Example 2.1 (Hölder 不等式). $m = 2$, 固定された $n \in \mathbb{N}$ に対して $n_1 = n_2 = N := n, p \in (1, \infty)$ に対して $c_1 := \frac{1}{p}, c_2 := \frac{1}{p'} := 1 - \frac{1}{p}, B_1 = B_2 := \text{id}_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, Q := 0$ とする. このとき (2.1) は

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x)^{\frac{1}{p}} f_2(x)^{\frac{1}{p'}} dx \leq \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_1 dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_2 dx \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad \forall f_1, f_2 \in L_+^1(\mathbb{R}^n) \quad (2.2)$$

となる. とくに $h_i := f_i^{c_i}, i = 1, 2$ として取り換えれば (2.2) は

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_1 h_2 dx \leq \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, Q) \|h_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|h_2\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

となり、Hölder 不等式の形になることが確認できる。Hölder 不等式の最良定数は 1 なので

$$\text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = 1$$

であり、特に $f_1 = f_2 = e^{-\pi|\cdot|^2}$ とすれば (2.2) の等号が成立する。

もう一つ別の幾何学的な具体例として、Loomis–Whitney 不等式を紹介する。

Example 2.2 (Loomis–Whitney 不等式). Loomis–Whitney 不等式とは次の不等式である：任意の可測集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$|E| \leq \prod_{i=1}^n |P_{e_i^\perp}(E)|^{\frac{1}{n-1}}. \quad (2.3)$$

ここで $|\cdot|$ はルベーグ測度とし、 $\mathbb{R}^n$ 内の標準基底 $e_1, \dots, e_n$ に対して $P_{e_i^\perp} : \mathbb{R}^n \rightarrow e_i^\perp \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ を $e_i^\perp$ への直交射影とする。

Loomis–Whitney 不等式を (2.1) から導くために次の BL データを考える。 $m = N := n$, $n_1 = \dots = n_m := n - 1$, $c_1 = \dots = c_m := \frac{1}{n-1}$, $B_i := P_{e_i^\perp}$, $\mathcal{Q} := 0$ とする。このとき (2.1) は

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n f_i \left(P_{e_i^\perp} x \right)^{\frac{1}{n-1}} dx \leq \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_i dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad \forall f_i \in L_+^1(\mathbb{R}^{n-1}) \quad (2.4)$$

となる。ゆえに可測集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ に対して $f_i := \mathbf{1}_{P_{e_i^\perp}(E)}$ とおけば、

$$\begin{aligned} |E| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{P_{e_i^\perp}(E)} \left(P_{e_i^\perp} x \right)^{\frac{1}{n-1}} dx \\ &\leq \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbf{1}_{P_{e_i^\perp}(E)} dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} = \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \prod_{i=1}^n |P_{e_i^\perp}(E)|^{\frac{1}{n-1}} \end{aligned}$$

となり、定数を見れば Loomis–Whitney 不等式 (2.3) の形が従う。最後に $\text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = 1$ を確認すれば (2.3) を得る。実際、(2.4) の最良定数は 1 であることが知られているので、

$$\text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = 1$$

が成り立ち、さらに $f_1 = \dots = f_n = e^{-\pi|\cdot|^2}$ とすれば (2.4) の等号が成立する。

以上で挙げた不等式以外の他の不等式の例として Young の畳み込み不等式がある。ここではその詳細は述べないが、原論文の Brascamp–Lieb[7] の (2.1) を考える動機は Young の畳み込み不等式の最良定数を求めることであることを注意しておく（Young の最良定数はほぼ同時期に Beckner[4] によっても与えられている）。また他の (2.1) の例として熱流に対する hypercontractivity が知られている [16]。特にこの例は $\mathcal{Q} \neq 0$ となる例である。

上で少し述べたように Brascamp–Lieb の原論文での動機は Young の畳み込み不等式の最良定数を求めることにあった。同様に Brascamp–Lieb 不等式 (2.1) に関するもっとも基本的な問題は BL 定数 $\text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$ を求めることである。この問題に関して、Examples 2.1, 2.2 を思い出しみると、いずれの場合においても不等号の等号達成は対称なガウシアンで達成されていた。より一般に、Lieb[16] は BL 定数を求めるには対称なガウシアンだけを考えれば十分であることを示した。

Theorem 2.3 ([16]). $(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$ を、 $c_1, \dots, c_m > 0$, $\mathcal{Q} \leq 0$ となる²BL データとする。このとき

$$\text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = \text{BL}_g(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \quad (2.5)$$

²対称行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が $A \geq 0$ ($A > 0$) であることを、任意の $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ ($\langle Ax, x \rangle > 0$) とする。

が成り立つ。ここで

$$\text{BL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) := \sup_{\substack{A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \\ A_i > 0}} \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; g_{A_1}, \dots, g_{A_m})$$

とし、正値対称行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して $g_A(x) := e^{-\frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle}$ とした。

Lieb の定理は BL 定数を求めるうえで非常に強力な道具となる。実際、(2.5) の右辺の 2 乗は

$$\text{BL}_{\mathbf{g}}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})^2 = \sup_{\substack{A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \\ A_i > 0}} \frac{\det \left(2\pi \left(\sum_{i=1}^m c_i A_i - 2\mathcal{Q} \right)^{-1} \right)}{\prod_{i=1}^m (\det 2\pi A_i^{-1})^{c_i}} \quad (2.6)$$

と書き下せることがわかり、ゆえに有限次元の最適化問題に帰着される。実際 $\mathcal{Q} = 0$ の場合において、(2.6) を計算するためのアルゴリズムや計算量などが Garg et al.[11] によって調べられている。また $\mathcal{Q} = 0$ の場合において、Lieb の定理を通して BL 定数が有限となる BL データの必要十分条件、および (2.1) の等号達成のための BL データの必要十分条件などが Bennett et al.[5] によって調べられている。

2.2 Inverse Brascamp–Lieb 不等式

前節では Brascamp–Lieb 不等式と Lieb の定理について紹介した。本節では (2.1) と逆向きの不等式である inverse Brascamp–Lieb 不等式を紹介する。BL データ $(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$ が与えられたとき、inverse Brascamp–Lieb 不等式とは次の不等式を指す：

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\langle \mathcal{Q}x, x \rangle} \prod_{i=1}^m f_i(B_i x)^{c_i} dx \geq \text{I}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i dx_i \right)^{c_i}, \quad \forall f_i \in L_+^1(\mathbb{R}^{n_i}). \quad (2.7)$$

ここで $\text{I}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \in [0, \infty]$ は (2.7) を満たす最良定数とする。同じことであるが、

$$\text{I}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) := \inf_{f_i \in L_+^1(\mathbb{R}^{n_i})} \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; \mathbf{f})$$

とあらわせる。前節と同様に、inverse Brascamp–Lieb 不等式は多くの不等式をその具体例として含む。具体的には reverse Hölder 不等式、reverse Young 不等式、reverse hypercontractivity などが挙げられる。

Inverse Brascamp–Lieb 不等式ははじめ Chen–Dafnis–Paouris[8] によって考察され、その後 Barthe–Wolff[3] によって体系的な理論が構築された。とくに Barthe–Wolff は inverse Brascamp–Lieb 不等式における Lieb の定理の対応物を与えた。それを述べるためにいくつかの記号を導入する。

- $c_1, \dots, c_m$ を適当に並び替えることによって、 $m_+ \in \mathbb{N}$ を $c_1, \dots, c_{m_+} > 0 > c_{m_++1}, \dots, c_m$ とする。
- $\mathbf{B}_+ := (B_1, \dots, B_{m_+}) : \mathbb{R}^N \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{m_+} \mathbb{R}^{n_i}$ 。
- $s^-(\mathcal{Q}) : \mathcal{Q}$ の負の固有値の個数。

以上の記号の下、次の事実が Barthe–Wolff によって示されている。

Theorem 2.4 ([3]). $(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$ を,

$$\mathcal{Q}|_{\ker \mathbf{B}_+} < 0, \quad (2.8)$$

$$N \geq s^-(\mathcal{Q}) + \sum_{i=1}^{m_+} n_i \quad (2.9)$$

を満たす BL データとする。このとき

$$I(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = I_g(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \quad (2.10)$$

が成り立つ。ここで

$$I_g(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) := \inf_{\substack{A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \\ A_i > 0}} \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; g_{A_1}, \dots, g_{A_m}).$$

Lieb の定理の直後に述べたのと同様に、(2.10) は inverse Brascamp–Lieb 不等式の最良定数を求める際に非常に強力である。条件 (2.8) と (2.9) について、一般にはこれらの条件を外すことはできないことが知られており、Barthe–Wolff の非退化条件と呼ばれている。実際 (2.8) が成り立たない場合、

$$0 = I(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) < I_g(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = \infty$$

となる場合がある。しかしながらいつこの現象が起こるかは $\mathbf{B}_+$ の全射性によってのみ決まることが Barthe–Wolff によって示されている。一方で条件 (2.9) を満たさない場合、次の不等式が成り立つことがある：

$$\inf_{\substack{A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, A_i > 0 \\ a_i \in \mathbb{R}^{n_i}}} \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; \tilde{g}_{a_1, A_1}, \dots, \tilde{g}_{a_m, A_m}) < I_g(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \in [0, \infty]. \quad (2.11)$$

ここで正値対称行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ と $a \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $\tilde{g}_{a, A}(x) := e^{-\frac{1}{2}\langle A(x-a), x-a \rangle}$ とした。すなわち条件 (2.9) は非対称ガウシアンが最良定数を作り出す状況を排除するための条件を与える。次節にて我々は Barthe–Wolff の非退化条件 (2.8), (2.9) を課さない代わりに、考える関数のクラスを重心が 0 の関数に制限することで (2.10) が成り立つことを述べる。特に非対称ガウシアンの重心は 0 ではないため (2.11) の状況は次節の設定においても排除される。

3 Symmetric inverse Brascamp–Lieb 不等式

この節でははじめに、なぜ GCI が inverse Brascamp–Lieb 不等式と関連しているのかを述べたあとで、実際に GCI を示すうえで必要となる symmetric inverse Brascamp–Lieb 不等式を紹介する。まず Theorem 1.2 を示すためには Theorem 1.4 を示せば十分であったことを思い出す。とくに $f_i := h_i e^{-\frac{1}{2}|\cdot|^2}$ ($i = 1, 2$) と取り換えれば、(1.4) は

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2}|x|^2} f_1 f_2 dx \geq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f_1 dx \int_{\mathbb{R}^n} f_2 dx \quad (3.1)$$

となり、inverse Brascamp–Lieb 不等式の形になっていることがわかる。実際 BL データとして

$$m = 2, \quad n_1 = n_2 = N = n, \quad c_1 = c_2 = 1, \quad B_1 = B_2 = \text{id}_n, \quad \mathcal{Q} = \frac{1}{2} \text{id}_n \quad (3.2)$$

とすれば、(2.7) は定数部分を見捨れば (3.1) の形になる。ただし注意すべき点は、(3.1) において f_i が任意の関数ではなく、 $f_i e^{\frac{1}{2}|\cdot|^2}$ が log-concave かつ $\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i dx_i = 0$ となる関数であることである。実際 f_i にそのような仮定を課さなければ、BL データ (3.2) に対応する (2.7) の最良定数は

$I(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = 0$ となる。ゆえに (3.1) を (2.7) から示したい場合、考える関数 f_i のクラスを適切に制限しなければならない。一方で関数のクラスを制限した場合に Barthe–Wolff による Lieb の定理 (2.10) が成り立つかは明らかではない。この節で述べる我々の結果は、適切な関数のクラスであれば Lieb の定理がやはり成り立つことを確認したことである。

より具体的に我々の結果を述べるためにいくつかの用語、及び記号を導入する。非負値対称行列 $G > 0$ と関数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ に対して、 f が G -uniformly log-concave とは、 $\frac{f}{g_G}$ が $\mathbb{R}^n$ 上で log-concave であることと定める。とくに $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ であれば、これは $\nabla^2(-\log f) \geq G$ に同値である。たとえば (3.1) を得る際に $f_i = h_i e^{-\frac{1}{2}|\cdot|^2}$ として関数の取り換えを行ったが、このときの f_i は id_n -uniformly log-concave である。また一般に、正値対称行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して $A - G \geq 0$ (以降 $A \geq G$ とかく) であることは g_A が G -uniformly log-concave となることに同値である。

さらに $\mathcal{F}_G^{(o)}(\mathbb{R}^n)$ によって、 G -uniformly log-concave かつ重心 0 となる $L_+^1(\mathbb{R}^n)$ 関数全体を表すことにする、すなわち

$$\mathcal{F}_G^{(o)}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L_+^1(\mathbb{R}^n) : f \text{ is } G\text{-uniformly log-concave with } \text{bar}(f) := \int_{\mathbb{R}^n} x \frac{f dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f dx} = 0 \right\}.$$

我々の関心は次の最良定数を調べることである。

Definition 3.1. $(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$ を BL データとする。また $G_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ を非負値対称行列 ($i = 1, \dots, m$) とし、 $\mathbf{G} := (G_i)_{i=1}^m$ とかく。また

$$I_{\mathbf{G}}^{(o)}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) := \inf_{\substack{f_i \in \mathcal{F}_{G_i}^{(o)}(\mathbb{R}^{n_i}) \\ \text{bar}(f_i) = 0}} \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; \mathbf{f}),$$

$$I_{\mathbf{G}}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) := \inf_{\substack{A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \\ A_i \geq G_i}} \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; g_{A_1}, \dots, g_{A_m}).$$

以上のもと、次が我々の中核をなす結果であり、我々の設定における Lieb の定理である。

Theorem 3.2. $(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$ を、 $c_1, \dots, c_m > 0$ となる BL データとする。また $G_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ を非負値対称行列 ($i = 1, \dots, m$) とする。このとき

$$I_{\mathbf{G}}^{(o)}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = I_{\mathbf{G}}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}). \quad (3.3)$$

Theorem 3.2 は我々の以前の研究 [18] において特別な BL データと $\mathbf{G}$ の下で証明された。[18] では Blaschke–Santaló 不等式と呼ばれる凸幾何学の不等式及びその一般化を与えるために Theorem 3.2 が利用された。その後 Milman [17] によって一般の $\mathbf{G}$ に対して (3.3) が証明され、GCI の別証明が与えられた。Theorem 3.2 はこれらの先行研究 [18, 17] のどちらの主張も含んでいる。

最後に Theorem 3.2 の証明について簡単な解説を試みる。証明において重要な性質は次である：もしある関数 $f_i \in \mathcal{F}_{G_i}^{(o)}$ が存在して $I_{\mathbf{G}}^{(o)}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; \mathbf{f})$ が成り立てば、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$I_{\mathbf{G}}^{(o)}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; 2^{\frac{kn_i}{2}} \mathbf{f}^{(2^k)}(2^{\frac{k}{2}} \cdot)), \quad f_i^{(2^k)} := \overbrace{f_i * \dots * f_i}^{2^k}$$

が成り立つ。この仮定と帰結を同時に認めると、特に中心極限定理より $k \rightarrow \infty$ として $2^{\frac{kn_i}{2}} f_i^{(2^k)}(2^{\frac{k}{2}} \cdot)$ がある対称なガウシアン ξ_i に収束するので、

$$I_{\mathbf{G}}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \geq I_{\mathbf{G}}^{(o)}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; 2^{\frac{kn_i}{2}} \mathbf{f}^{(2^k)}(2^{\frac{k}{2}} \cdot)) = \text{BL}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}; \boldsymbol{\xi}) \geq I_{\mathbf{G}}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$$

となり、(3.3) をえる。

4 Gaussian correlation 不等式の証明

最後に Theorem 1.2 がどのようにして Theorem 3.2 から導かれるかを紹介する. Theorem 1.3 も殆ど同様に示されるが, その詳細は省略する.

まず我々の目標は Theorem 1.4 を示すことであった. さらに 3 節でも述べたように, Theorem 1.4 は任意の id_n -uniformly log-concave 関数 f_1, f_2 であって $\text{bar}(f_1) = \text{bar}(f_2) = 0$ となる関数に対して (3.1) が成り立つことに同値であった. 同じことであるが,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2}|x|^2} f_1 f_2 dx \geq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f_1 dx \int_{\mathbb{R}^n} f_2 dx, \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{\text{id}_n}^{(o)}(\mathbb{R}^n) \quad (4.1)$$

を示せば十分である. 一方で Theorem 3.2 より我々は次を知っている:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2}|x|^2} f_1 f_2 dx \geq I_{\mathcal{G}_G}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) \int_{\mathbb{R}^n} f_1 dx \int_{\mathbb{R}^n} f_2 dx, \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{\text{id}_n}^{(o)}(\mathbb{R}^n).$$

ここで BL データ $(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q})$ は (3.2) で与えられたものであり, $G_i = \text{id}_n$ ($i = 1, 2$) である. よって

$$I_{\mathcal{G}_G}(\mathbf{B}, \mathbf{c}, \mathcal{Q}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \quad (4.2)$$

を示せば, 証明を終える. 実際 (4.2) は定義から次の主張と同値である.

Lemma 4.1. 任意の正値対称行列 $A_1, A_2 \geq \text{id}_n$ に対して

$$\frac{\det A_1 \det A_2}{\det(A_1 + A_2 - \text{id}_n)} \geq \frac{\det \text{id}_n \det \text{id}_n}{\det(\text{id}_n + \text{id}_n - \text{id}_n)} = 1.$$

Lemma 4.1 は単純な線形代数の問題として肯定的に解決されることがわかる. ゆえに Theorem 1.2 が示される.

References

- [1] K. Ball, *Volumes of sections of cubes and related problems*, Geometric Aspects of Functional Analysis, ed. by J. Lindenstrauss and V. D. Milman, Lecture Notes in Math. 1376, Springer, Heidelberg, 1989, 251–260.
- [2] K. Ball, *Volume ratio and a reverse isoperimetric inequality*, J. Lond. Math. Soc. **44** (1991), 351–359.
- [3] F. Barthe, P. Wolff, *Positive Gaussian kernels also have Gaussian minimizers*, Mem. Am. Math. Soc., **276** (1359) (2022).
- [4] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis*, Ann. of Math. **102** (1975), 159–182.
- [5] J. Bennett, A. Carbery, M. Christ, T. Tao, *The Brascamp–Lieb inequalities: finiteness, structure and extremals*, Geom. Funct. Anal. **17** (2008), 1343–1415.
- [6] C. Borell, *A Gaussian correlation inequality for certain bodies in $\mathbb{R}^n$* , Math. Ann. **256** (1981), 569–573.
- [7] H. J. Brascamp, E. H. Lieb, *Best constants in Young’s inequality, its converse, and its generalization to more than three functions*, Adv. Math. **20** (1976), 151–173.

- [8] W. K. Chen, N. Dafnis, G. Paouris, *Improved Hölder and reverse Hölder inequalities for Gaussian random vectors*, Adv. Math. **280** (2015), 643–689.
- [9] D. Cordero-Erausquin, *Some applications of mass transport to Gaussian-type inequalities*, Arch. Ration. Mech. Anal., **161** (2002), 257–269.
- [10] S. Das Gupta, M. L. Eaton, I. Olkin, M. Perlman, L. J. Savage, M. Sobel, *Inequalities on the probability content of convex regions for elliptically contoured distributions*, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), vol. 2, 1972, pp. 241–265.
- [11] A. Garg, L. Gurvits, R. Oliveira, and A. Wigderson, *Algorithmic and optimization aspects of Brascamp–Lieb inequalities, via Operator Scaling*, Geom. Funct. Anal. **28** (2018), 100–145.
- [12] G. Hargé, *A convex/log-concave correlation inequality for Gaussian measure and an application to abstract Wiener spaces*, Probab. Theory Relat. Fields. **130** (2004), 415–440.
- [13] Y. Hu, *Itô-Wiener chaos expansion with exact residual and correlation, variance inequalities*, J. Theoret. Probab. **10** (1997), 835–848.
- [14] C. G. Khatri, *On certain inequalities for normal distributions and their applications to simultaneous confidence bounds*, Ann. Math. Statist. **38** (1967), 1853–1867.
- [15] R. Latała and D. Matlak, *Royen’s proof of the Gaussian correlation inequality*, In Geometric aspects of functional analysis, volume 2169 of Lecture Notes in Math., pages 265–275. Springer, Cham, 2017.
- [16] E. H. Lieb, *Gaussian kernels have only Gaussian maximizers*, Invent. Math. **102** (1990), 179–208.
- [17] E. Milman, *Gaussian Correlation via Inverse Brascamp–Lieb*, arXiv:2501.11018.
- [18] S. Nakamura, H. Tsuji, *A generalized Legendre duality relation and Gaussian saturation*, arXiv:2409.13611v2.
- [19] S. Nakamura, H. Tsuji, *The Gaussian correlation inequality for centered convex sets and the case of equality*, arXiv:2504.04337.
- [20] L. D. Pitt, *A Gaussian correlation inequality for symmetric convex sets*, Ann. Probability, **5** (1977), 470–474.
- [21] T. Royen, *A simple proof of the Gaussian correlation conjecture extended to some multivariate gamma distributions*, Far East J. Theor. Stat. **48** (2014), 139–145.
- [22] G. Schechtman, Th. Schlumprecht, and J. Zinn, *On the Gaussian measure of the intersection*, Ann. Probab., **26** (1998), 346–357.
- [23] Z. Šidák, *Rectangular confidence regions for the means of multivariate normal distributions*, J. Amer. Statist. Assoc. **62** (1967), 626–633.
- [24] S. Szarek, E. Werner, *A nonsymmetric correlation inequality for Gaussian measure*, J. Multivariate Anal. **68** (1999), 193–211.
- [25] R. Zhang, *The Brascamp–Lieb inequality and its influence on Fourier analysis*, The physics and mathematics of Elliott Lieb—the 90th anniversary. Vol. II, 585–628.

LCK 幾何学における Oeljeklaus-Toma 多様体の特徴づけ

東京大学大学院数理科学研究科

神田秀峰 *

概要

Oeljeklaus-Toma (OT) 多様体は Kähler 計量を持たない複素多様体の例として知られ、井上曲面の高次元への一般化とみなされている。OT 多様体は数論的データを用いて構成される可解多様体であり、いくつかの OT 多様体は局所共形 Kähler (LCK) 計量を持つ。これにより LCK 計量を持つ可解多様体が大量に構成されたことになり、OT 多様体は LCK 幾何における重要な例として盛んに研究されてきた。その構成は技巧的に見えるが、LCK 計量をもつ可解多様体はこれまで OT 多様体を除いて簡単なものしか知られていない。本講演では、ある種の可解多様体が LCK 計量を持つならば、それは本質的に OT 多様体と一致することを示す。幾何学的な制約から数論が現れることから、本結果はある種の可解多様体の構成において、数論的議論を用いることの必然性を示唆していると言える。本稿は論文 [Kan25] の内容に基づく。

1 局所共形 Kähler 多様体

複素多様体 (M, J) の上の計量 g であって、その基本形式 $\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$ が $d\omega = 0$ を満たすものを (M, J) 上の Kähler 計量といい、 (M, J, g) を Kähler 多様体という。複素多様体論における主な研究対象はコンパクト Kähler 多様体である。しかしここ数十年でコンパクト非 Kähler 多様体、つまりいかなる計量をもってしても Kähler 多様体とはならないコンパクト複素多様体の研究に注目が集まっている。

Kähler 性を少し弱めた計量を定義する。

定義 1.1. 複素多様体 (M, J) 上の計量 g が**局所共形 Kähler** (locally conformally Kähler, LCK) とは、ある M の開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ と実関数族 $f_i \in C^\infty(U_i)$ が存在して、 $e^{-f_i}g$ が U_i 上で Kähler となることである。

$e^{-f_i}g$ の基本形式は $e^{-f_i}\omega$ なので、これが Kähler となることは $d(e^{-f_i}\omega) = 0$ すなわち $d\omega = df_i \wedge \omega$ と同値である。よって $U_i \cap U_j$ 上で $df_i \wedge \omega = df_j \wedge \omega$ となるが、 ω は非退化なので $df_i = df_j$ となり、これらは貼り合って M 上の閉形式 θ を定める。これにより以下がわかる。

命題 1.2. 複素多様体 (M, J) 上の計量 g が LCK であることは、ある閉形式 θ が存在して $d\omega = \theta \wedge \omega$ となることと同値。この θ は一意に定まり、**Lee 形式**と呼ばれる。

* E-mail: shuho@ms.u-tokyo.ac.jp

古典的に知られているコンパクト非 Kähler 多様体の例として Hopf 多様体がある。これは LCK 多様体の典型例である。

例 1.3. $\lambda \in \mathbb{C}$ を $|\lambda| > 1$ をみたす複素数とする。 $\mathbb{Z}$ から $X = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ への作用を $k \cdot z = \lambda^k z$ と定め、この作用による商多様体 $X/\mathbb{Z}$ を **Hopf 多様体**という。Hopf 多様体の 1 次ベッチ数は 1 であり、コンパクト Kähler 多様体の位相的制約から、これは Kähler 多様体になり得ない。 g を $\mathbb{C}^n$ 上の標準エルミート計量の X への制限とする。 X 上の実関数 $\Psi(z) = |z|^{-2} : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ について、 Ψg は $\mathbb{Z}$ の作用について不変となる。よって $X/\mathbb{Z}$ 上の計量を定め、構成からこの計量は LCK 計量となる。

古典的に知られている多くのコンパクト非 Kähler 多様体に LCK 構造が入ることが知られており、非 Kähler 多様体論において LCK 多様体論は重要な位置を占める。LCK 構造のうち Lee 形式が平行なもの、つまり ∇ を Levi-Civita 接続としたときに $\nabla \theta = 0$ となるものを **Vaisman 多様体**という。古典的に知られている多くの LCK 多様体、例えば Hopf 多様体などは Vaisman 多様体となる。Vaisman 多様体はよく研究されているが、Kähler 多様体上での理論の類似を考えるという文脈の研究が多い。LCK 多様体論においては Vaisman という仮定はかなり強く、例えば LCK 多様体を調べるための多くの不変量が自明となってしまう。以上の理由により、Vaisman 構造の入らない LCK 多様体を構成することは重要である。

2 冪零多様体と可解多様体

この章ではコンパクト非 Kähler 多様体を構成する典型的な方法を紹介する。 G を連結かつ単連結な冪零 Lie 群とし、 Γ をその格子、つまり G の離散部分群で $\Gamma \backslash G$ がコンパクトとなるものとする。このとき多様体 $\Gamma \backslash G$ を**冪零多様体**という。冪零多様体が Kähler 多様体になるのはトーラスの場合に限ることが知られている [BG88][Has89]。よって G として非可換なものを取り、 J を左不変複素構造とすればコンパクト複素多様体 $(\Gamma \backslash G, J)$ が定まり、これは非 Kähler 多様体となる。

G の左不変複素構造 J は G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に定まる複素構造 J と対応する。ここで Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の複素構造 J とは、 $J \in \text{End } \mathfrak{g}$ であって $J^2 = -\text{id}$ かつ可積分条件

$$[X, Y] - [JX, JY] + J[X, JY] + J[JX, Y] = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

を満たすものである。以上より、非可換な冪零 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 、その上の複素構造 J 、そして対応する単連結 Lie 群 G の格子 Γ を見つければ、コンパクト非 Kähler 多様体を得ることができる。

典型例は**小平-Thurston 多様体**である。これは $\mathbb{R}$ と Heisenberg 群 $H_3(\mathbb{R})$ の直積 G を格子 $\Gamma := \mathbb{Z} \times H_3(\mathbb{Z})$ で割ったものであり、左不変な Vaisman 構造が定まる。 G の構造がよく分かっているならば格子を構成するのはさほど難しくないように感じられる。実際、冪零 Lie 群の格子の存在に関する必要十分条件として以下が知られている。

定理 2.1 ([Mal49]). 単連結冪零 Lie 群 G が格子を持つための必要十分条件は、対応する Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$ であって構造定数 $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$ が全て有理数となるものが存在することである。

この定理を用いれば G に格子が存在するかどうかはすぐに判定できる。このようにして、冪零多様体によってコンパクト非 Kähler 多様体の例をたくさん構成することができる。 G の左不変 LCK 計

量 g を考えれば $(\Gamma \backslash G, J, g)$ という LCK 多様体を得られる。複素構造のときと同様に、これは Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の LCK 構造と対応する。しかし次の命題が示すように、LCK 多様体論における重要な例を得るためには冪零多様体を考えるだけでは不十分である。

命題 2.2 ([Saw07]). 冪零 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に入る LCK 構造は全て Vaisman となる。

つまり上記の構成によって得られる冪零多様体は全て Vaisman 多様体になってしまう。コンパクト LCK 多様体であって Vaisman でないものを得るには、より広いクラスの Lie 群を考える必要がある。

冪零 Lie 群より広いクラスとして可解 Lie 群を考える。 G を連結かつ単連結な可解 Lie 群とすると、冪零 Lie 群のときと同様に議論を進めることができる。格子 Γ が存在したとき多様体 $\Gamma \backslash G$ を **可解多様体** という。これが Kähler 多様体になる状況は分類されている [Has06]。対応する Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の LCK 計量 g をとることでコンパクト LCK 多様体 $(\Gamma \backslash G, J, g)$ を得ることができ、これは Vaisman になるとは限らない。可解多様体であって非 Vaisman LCK 多様体となるものを構成するまであと一歩のように見えるが、ここで難所となるのが格子の存在である。可解 Lie 群についてはその格子の存在の判定が非常に難しく、具体的な可解 Lie 群の格子を構成するだけでも重要な研究結果となる。例えば以下のように非常に簡単な可解 Lie 群でさえ、その格子の構成は非自明である。

例 2.3. $G = \mathbb{R} \ltimes_{\phi} \mathbb{R}^2$ を 3 次元可解 Lie 群とする。ここで $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^2)$ は以下のように定義される：

$$\phi(x) := \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}.$$

行列 $M \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ であって相異なる 2 つの正の固有値 λ, λ^{-1} を持つものとする。 $P \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ をその対角化行列、つまり $P^{-1}MP = \text{diag}(\lambda, \lambda^{-1})$ を満たす行列とする。この時

$$\Gamma := ((\log \lambda)\mathbb{Z}) \ltimes_{\phi} (P^{-1}\mathbb{Z}^2)$$

は G の格子となる。

上記のように、 $G = \mathbb{R}^m \ltimes_{\phi} \mathbb{R}^n$ という形をした可解 Lie 群を **meta-abelian** という。対応する Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \ltimes_{d\phi} \mathbb{R}^n$ についても meta-abelian と呼ぶ。実は meta-abelian Lie 群のうち、nilradical が $\mathbb{R}^n$ に一致するものについては、上記の例におけるテクニックがそのまま格子の存在の必要十分条件となる。nilradical が $\mathbb{R}^n$ に一致するとは、 $X \in \mathbb{R}^m \subset \mathfrak{g}$ であって $d\phi(X)$ が nilpotent なものが 0 に限ることをいう。

命題 2.4. meta-abelian Lie 群 $G = \mathbb{R}^m \ltimes_{\phi} \mathbb{R}^n$ について、その nilradical が $\mathbb{R}^n$ とする。 G が格子を持つとき、格子 $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^m$ と正則行列 $P \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ が存在して

$$P\phi(X)P^{-1} \in \text{SL}(n, \mathbb{Z}), \quad \text{for all } X \in \Gamma_1$$

となる。このとき

$$\Gamma := \Gamma_1 \ltimes_{\phi} (P^{-1}\mathbb{Z}^n)$$

は G の格子となる。

さて、可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその上の非 Vaisman LCK 構造 J, g および対応する Lie 群 G の格子を構成することはできるだろうか。驚くべきことに、数論的考察を用いることで難なく構成できてしまう。これが次章で紹介する Oeljeklaus-Toma 多様体である。

3 Oeljeklaus-Toma 多様体

Oeljeklaus-Toma 多様体 (OT 多様体) は井上曲面の高次元化として知られる。井上曲面はもともと 1974 年にコンパクト非 Kähler 曲面の研究の中で構成された多様体の族であり、その定義に数論的考察は含まれていない [Ino74]。しかし Oeljeklaus と Toma はその構成を数論的に捉え直し、2005 年に井上曲面の高次元化に成功した [OT05]。井上曲面は非 Vaisman LCK 構造を持つことが知られていたが、高次元化された OT 多様体についても、その一部は非 Vaisman LCK 構造を持つ。さらに 2013 年には糟谷 [Kas13] によって、OT 多様体が meta-abelian Lie 群による可解多様体の構造を持つことが示された。このようにして OT 多様体は、LCK 多様体論において最も重宝される多様体の族となった。以下ではその構成について述べる。

$f \in \mathbb{Q}[x]$ を n 次の有理係数既約モニック多項式とする。 f は s 個の実根と $2t$ 個の複素根を持つとする。ここで $s, t \geq 1$ を仮定する。 $K := \mathbb{Q}[x]/(f)$ とすると K は $n = s + 2t$ 次の代数体となる。 x に f の根を代入するという操作から、 K の実埋め込み $\sigma_1, \dots, \sigma_s: K \hookrightarrow \mathbb{R}$ と複素埋め込み $\sigma_{s+1}, \dots, \sigma_{s+2t}: K \hookrightarrow \mathbb{C}$ が定義される。添え字を入れ替えて $\sigma_{s+i} = \overline{\sigma_{s+t+i}}$ としておく。

$\mathcal{O}_K$ を K の代数的整数環、つまり最小多項式として整数係数モニックなものがとれるような K の元全体とする。 $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq K$ なので、アーベル群としてのランクは n となる。 $\mathcal{O}_K^\times$ を $\mathcal{O}_K$ の単数群とする。この群には振れが存在するが、それらを取り除くように $\mathcal{O}_K^\times$ の部分群 $\mathcal{O}_K^{\times,+}$ を以下のように定義する：

$$\mathcal{O}_K^{\times,+} := \{a \in \mathcal{O}_K^\times \mid \sigma_i(a) > 0 \text{ for all } 1 \leq i \leq s\}.$$

さて、 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ を上半平面とする。作用 $\mathcal{O}_K \curvearrowright \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ を、 $a \in \mathcal{O}_K$ に対し

$$T_a(w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_t) := (w_1 + \sigma_1(a), \dots, z_t + \sigma_{s+t}(a))$$

と定義する。また作用 $\mathcal{O}_K^{\times,+} \curvearrowright \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ を、 $u \in \mathcal{O}_K^{\times,+}$ に対し

$$R_u(w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_t) := (\sigma_1(u) \cdot w_1, \dots, \sigma_{s+t}(u) \cdot z_t).$$

と定義する。この 2 つの作用により、作用 $(\mathcal{O}_K^{\times,+} \ltimes \mathcal{O}_K) \curvearrowright \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ が定まる。

さて、 $\mathcal{O}_K^{\times,+}$ の群構造は Dirichlet の単数定理により記述される。

定理 3.1 (Dirichlet の単数定理). 埋め込み

$$\begin{aligned} \log : \mathcal{O}_K^{\times,+} &\hookrightarrow \mathbb{R}^{s+t} \\ u &\mapsto (\log \sigma_1(u), \dots, \log \sigma_s(u), \log |\sigma_{s+1}(u)|^2, \dots, \log |\sigma_{s+t}(u)|^2) \end{aligned}$$

について、その像は $H := \{x \in \mathbb{R}^{s+t} \mid \sum_{i=1}^{s+t} x_i = 0\}$ 内の格子をなす。

特に、 $\mathcal{O}_K^{\times,+}$ のランクは $s + t - 1$ となる。作用 $(\mathcal{O}_K^{\times,+} \ltimes \mathcal{O}_K) \curvearrowright \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ を離散的にするために、より低いランクの部分群 $U \subset \mathcal{O}_K^{\times,+}$ をとる必要がある。

定義 3.2. $\text{pr}_{\mathbb{R}^s} : \mathbb{R}^{s+t} \rightarrow \mathbb{R}^s$ をはじめの s 個の座標への射影とする。ランク s の部分群 $U \subset \mathcal{O}_K^{\times,+}$ で $\text{pr}_{\mathbb{R}^s}(\log(U))$ が $\mathbb{R}^s$ 内の格子となるものを **admissible** という。

Dirichlet の単数定理により, admissible となる U は常に存在することがわかる。Oeljeklaus と Toma は, U が admissible であるとき作用 $(U \ltimes \mathcal{O}_K) \curvearrowright \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ が固有不連続かつ商多様体がコンパクトであることを示した。この商多様体が OT 多様体である。

定義 3.3. 代数体 K とその admissible 群 $U \subset \mathcal{O}_K^{\times,+}$ による **OT manifold** とは, 商多様体

$$X(K, U) := \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t / (U \ltimes \mathcal{O}_K).$$

のことである。 (s, t) をこの OT 多様体の**タイプ**という。

井上曲面はタイプ $(1, 1)$ の OT 多様体である。OT 多様体の LCK 構造について, 以下が成立する。

命題 3.4 ([OT05]). タイプ $(s, 1)$ の OT 多様体は LCK 構造を持つ。

Proof. 実関数 $\Psi : \mathbb{H}^s \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を

$$\Psi(w_1, \dots, w_s, z) := (\text{Im } w_1) \cdots (\text{Im } w_s)$$

として定め, $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}$ 上の関数を $F := \Psi^{-1} + |z|^2$ として定めると, $\omega := \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} F$ は Kähler となる。簡単な計算により $\Psi \omega$ が $U \ltimes \mathcal{O}_K$ 不変であることが確かめられ, $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C} / (U \ltimes \mathcal{O}_K)$ 上の計量を定める。 ω は Kähler なので, この計量は LCK である。 $\square$

逆に LCK 構造を持つ OT 多様体のタイプは $(s, 1)$ に限ることも最近示された [DV23]。また OT 多様体に入る LCK 構造は Vaisman になり得ない [Kas13]。

4 OT 多様体の可解多様体としての構造

OT 多様体は可解多様体の構造をもつ。より詳しく, 以下が成立する。

定理 4.1. タイプ (s, t) の OT 多様体 $X(K, U)$ に対し, $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ に可解 Lie 群の構造をうまく入れて G とする。埋め込み $\iota : U \ltimes \mathcal{O}_K \hookrightarrow G$ であってその像が G の格子 Γ となっているものが存在し,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t & \xlongequal{\quad} & G \\ L_{(u,a)} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow L_{\iota(u,a)} \\ \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t & \xlongequal{\quad} & G \end{array}$$

が可換となる。ここで $L_{(u,a)}$ は $(u, a) \in U \ltimes \mathcal{O}_K$ による $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ への作用。 $L_{\iota(u,a)}$ は $\iota(u, a) \in \Gamma$ を G に左からかける作用である。

具体的にどのような群構造を入れるかは省略する。 G は meta-abelian Lie 群となり, 以下のような構造を持つ。

定義 4.2. 複素行列 $C = (c_{ij})_{ij} \in \text{Mat}_{t \times s}(\mathbb{C})$ に対し $d\phi_C : \mathbb{R}^s \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^s \times \mathbb{C}^t)$ を

$$d\phi_C(t_1, \dots, t_s) = \text{diag}(t_1, \dots, t_s, (\sum_{j=1}^s c_{ij} t_j)_{i=1}^t),$$

と定める. このとき C に付随する **OT-like Lie 代数** を $\mathfrak{g}_C := \mathbb{R}^s \ltimes_{d\phi_C} (\mathbb{R}^s \times \mathbb{C}^t)$ と定める. 対応する単連結 Lie 群を G_C とかき, **OT-like Lie 群** という.

定理 4.3 ([Kas13]). タイプ (s, t) の OT 多様体 $X(K, U)$ に対しある $C \in \text{Mat}_{t \times s}(\mathbb{C})$ が存在し, $X(K, U)$ は OT-like Lie 群 G_C をある格子で割った可解多様体となる.

任意の $C \in \text{Mat}_{t \times s}(\mathbb{C})$ に対し Lie 群 G_C を定義できることに注意. つまり OT 多様体の構成は, G_C が格子を持つような C を数論的に与える方法と言える.

以下, OT-like Lie 代数であって LCK 構造をもつものについて考察する. まず以下が成立する.

命題 4.4. $C \in \text{Mat}_{t \times s}(\mathbb{C})$ に付随する OT-like Lie 代数 $\mathfrak{g}_C$ について, $\text{Re } c_{ij} = -1/2$ が全ての i, j について成立するとき, $\mathfrak{g}_C$ は非 Vaisman LCK 構造を持つ. このような $\mathfrak{g}_C$ を **LCK OT-like Lie 代数** という. 対応する Lie 群 G_C を **LCK OT-like Lie 群** という.

このような C はたくさんあるので, 任意のタイプに対し非 Vaisman LCK 構造を持つ Lie 代数をたくさん構成できたことになる. これらに付随する Lie 群の格子を見つけることができれば非 Vaisman LCK 構造を持つ可解多様体を得られる. C がタイプ $(s, 1)$ の OT 多様体から作られる行列であれば, 付随する Lie 群には格子が存在する. では **OT 多様体から構成される C の他に, LCK OT-like Lie 群であって格子を持つものは存在するだろうか.** 答えは No, つまり LCK OT-like Lie 群が格子を持つこととそれが OT 多様体から構成されることは同値である.

5 主定理

定理 5.1 ([Kan25]). $C \in \text{Mat}_{t \times s}(\mathbb{C})$ であって, 全ての i, j について $\text{Re } c_{ij} = -1/2$ となるものをとる. G_C が格子を持つならば $t = 1$ となり, あるタイプ $(s, 1)$ の OT 多様体 $X(K, U)$ が存在し C はこの OT 多様体から構成される.

証明はほぼ全て代数的な議論による. ここでは証明の概略を述べる. 行列 C から得られる Lie 群 G_C とその格子から何らかの代数体 K を構成する必要がある, ここが最も非自明である.

Lie 群 G_C は格子を持つので, 命題 2.4 によれば格子 $\Gamma \subset \mathbb{R}^s$ と正則行列 $P \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ が存在して

$$P\phi_C(X)P^{-1} \in \text{SL}(n, \mathbb{Z}), \quad \text{for all } X \in \Gamma.$$

となる. よって $\text{SL}(n, \mathbb{Z})$ の部分群 U が

$$U := \{P\phi_C(X)P^{-1} \in \text{SL}(n, \mathbb{Z}) \mid X \in \Gamma\}.$$

と定まる. これはランク s の自由アーベル群となる. $\phi_C(X)$ は対角行列なので, $A \in U$ に対し

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\mu_A^1, \dots, \mu_A^s, \lambda_A^1, \dots, \lambda_A^t)$$

とかける. $X \in \mathbb{R}^s$ の座標表示は $A = P\phi_C(X)P^{-1}$ としたとき $(\log \mu_A^1, \dots, \log \mu_A^s)$ である. よって Γ が格子をなすとは $\{(\log \mu_A^1, \dots, \log \mu_A^s) \in \mathbb{R}^s \mid A \in U\}$ が $\mathbb{R}^s$ の格子をなすということである.

この状況から環 $K = \mathbb{Q}(U)$ が体になることを示すことができる. U は $\mathcal{O}_K^{\times,+}$ の admissible 部分群となり, OT 多様体 $X(K, U)$ から定まる可解 Lie 群 G を考えるとこれは G_C と同型となる.

6 LCK OT-like Lie 群の特徴づけ

LCK OT-like Lie 群が格子を持つときにそれが OT 多様体の構成から得られることは示されたが, この LCK OT-like Lie 群とはどのくらい特殊な Lie 群だろうか. 本研究ではこの Lie 群の幾何学的特徴付けも与えた. ここでは格子を持つための必要条件である, unimodular 性を課す.

定理 6.1 ([Kan25]). unimodular meta-abelian Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \ltimes_{d\phi} \mathbb{R}^n$ が, 非 Vaisman LCK 構造を持つとする. このとき $m \leq 2$ なら, $\mathfrak{g}$ はある LCK OT-like Lie 代数と同型になる.

$m > 2$ については未解決であり, 本研究は以下の部分的な結果に留まる.

定理 6.2 ([Kan25]). unimodular meta-abelian Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \ltimes_{d\phi} \mathbb{R}^n$ が, 非 Vaisman LCK 構造を持つとする. このとき $\mathfrak{g} = J\mathbb{R}^n + \mathbb{R}^n$ なら, $\mathfrak{g}$ はある LCK OT-like Lie 代数と同型になる.

参考文献

- [BG88] C. Benson and C. S. Gordon, *Kähler and symplectic structures on nilmanifolds*, Topology **27** (1988), no. 4, 513–518.
- [DV23] A. Deaconu and V. Vuletescu, *On locally conformally Kähler metrics on Oeljeklaus-Toma manifolds*, Manuscripta Math. **171** (2023), no. 3-4, 643–647.
- [Has89] K. Hasegawa, *Minimal models of nilmanifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), no. 1, 65–71.
- [Has06] ———, *A note on compact solvmanifolds with Kähler structures*, Osaka J. Math. **43** (2006), no. 1, 131–135.
- [Ino74] M. Inoue, *On surfaces of Class VII₀*, Invent. Math. **24** (1974), 269–310.
- [Kan25] S. Kanda, *A characterization of Oeljeklaus–Toma manifolds in locally conformally Kähler geometry*, 2025, Preprint, arXiv:2502.12500.
- [Kas13] H. Kasuya, *Vaisman metrics on solvmanifolds and Oeljeklaus-Toma manifolds*, Bull. Lond. Math. Soc. **45** (2013), no. 1, 15–26.
- [Mal49] A. I. Mal'cev, *On a class of homogeneous spaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **13** (1949), 9–32.
- [OT05] K. Oeljeklaus and M. Toma, *Non-Kähler compact complex manifolds associated to number fields*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005), no. 1, 161–171.
- [Saw07] H. Sawai, *Locally conformal Kähler structures on compact nilmanifolds with left-invariant complex structures*, Geom. Dedicata **125** (2007), 93–101.

距離空間上の勾配降下上昇流と鞍点問題について

下山 翔 (東京大学大学院数理科学研究科) *

1 導入

勾配降下上昇 (Gradient Descent-Ascent: GDA) 流は、直積空間上の関数の鞍点を求める上で中心的な役割を果たし、最適化、ゲーム理論、ロバスト制御といった分野で応用されている。歴史的には、GDA 流は鞍点を近似する方法として、Arrow–Hurwicz によってユークリッド空間上の凸関数の制約付き最適化の文脈で提案され [2]、その後、Rockafellar によってバナッハ空間上へと拡張された [6]。Rockafellar による仕事は、極大単調作用素の観点から統一的に GDA 流の性質を導出しており、見通しが良い。一方、底空間が一般の距離空間、とりわけワッサーズタイン空間である場合は、GDA 流の性質を統一的に導出する枠組みは確立されておらず、特にヒルベルト空間の理論と同様の性質を導くために底空間が満たすべき幾何学的条件については、未解明な点が多い。

本講演では、底空間が距離空間の場合の GDA 流について、最近得られた結果を紹介する。ここでは、GDA 流を連立する発展変分不等式 (EVI) の解として定式化し、関数と距離空間の組に対するある凸凹性の仮定のもとで、well-posedness、GDA 流の鞍点への指数収束、古典的な勾配流と類似した正則化効果を明らかにした。特に、GDA 流の存在を得るために、De Giorgi による minimizing movement を二変数関数の場合に拡張した枠組みである minimizing-maximizing movement を構築した。応用として、可分ヒルベルト空間上のワッサーズタイン空間上の GDA 流に対し、GDA 流の大域的な存在および、関数が強い凸凹性を満たす場合に鞍点への指数収束を示した。

本講演の内容は理研の磯部伸氏との共同研究 [4] に基づく。本稿には証明を載せていないが、証明のアイデアは、Amrosio–Gigli–Savaré による [1] における距離空間上勾配流の well-posedness の証明、および、Clément–Desch による [3] における距離空間上の勾配流に対する Crandall–Liggett スキームの構築を今回の 2 変数の設定に拡張することである。詳細についてはプレプリント [4] を参照して欲しい。

* sho@ms.u-tokyo.ac.jp

2 距離空間上の鞍点問題と勾配降下上昇流 (GDA)

$(X, d_X), (Y, d_Y)$ を完備距離空間とし, $X \times Y$ には ℓ^2 -距離が入っているとする. 二変数関数 $\phi: X \times Y \rightarrow [-\infty, +\infty]$ に対し, (x^*, y^*) が ϕ の鞍点であるとは, 次の不等式を満たすことである: 任意の $(x, y) \in X \times Y$ に対し,

$$\phi(x^*, y) \leq \phi(x^*, y^*) \leq \phi(x, y^*).$$

簡単に述べると, 鞍点とは, 第一変数に対する最小解と, 第二変数に対する最大解の組みである. よって, 関数 ϕ の最小-最大化を考えたいため, 本稿では, 以降, ϕ に次の 2 条件を常に仮定する.

定義 2.1 (Properness). 関数 ϕ が**有効**であるとは, 以下を満たす事である:

$$\text{Dom} \phi := \text{Dom}_X \phi \times \text{Dom}_Y \phi \neq \emptyset,$$

ここで, $\text{Dom}_X \phi := \{x \in X \mid \text{任意の } y \in Y \text{ に対し } \phi(x, y) < +\infty\}$, $\text{Dom}_Y \phi := \{y \in Y \mid \text{任意の } x \in X \text{ に対し } \phi(x, y) > -\infty\}$ である.

定義 2.2 (Closedness). 関数 ϕ が**閉**であるとは, 以下を満たす事である:

- 任意の $x \in \text{Dom}_X \phi$ に対し, $Y \ni y \mapsto \phi(x, y)$ が上半連続;
- 任意の $y \in \text{Dom}_Y \phi$ に対し, $X \ni x \mapsto \phi(x, y)$ が下半連続.

また, 凸解析における有効領域の外側への関数の拡張の方法と同様に, ϕ は $\text{Dom} \phi$ の外側で以下の条件を満たすと仮定する:

仮定 2.3.

$$\phi(x, y) = \begin{cases} +\infty & (x, y) \in (\text{Dom}_X \phi)^c \times \text{Dom}_Y \phi \\ -\infty & (x, y) \in \text{Dom}_X \phi \times (\text{Dom}_Y \phi)^c \end{cases}.$$

話を鞍点を近似する流れである GDA 流に移す. X, Y がユークリッド空間で, ϕ が十分微分可能なとき, GDA 流は以下のように定義される.

定義 2.4 ((ユークリッド空間における) GDA 流). 曲線 $(x_t, y_t): [0, +\infty) \rightarrow X \times Y$ が ϕ に対する GDA 流であるとは, 次を満たすことである: (x_t, y_t) は C^1 であり, かつ, 任意の $t > 0$ に対し以下が成り立つ

$$\begin{cases} x'_t = -\nabla_x \phi(x_t, y_t) \\ y'_t = \nabla_y \phi(x_t, y_t) \end{cases}. \quad (1)$$

簡単に述べると, GDA 流とは, 第一変数を最小化し, 第二変数を最大化する流れである. よって, 直感としては, 時刻 $t \rightarrow +\infty$ とすると, GDA 流は鞍点に収束することが期待できる (しかし, これは一般には成り立たないことが例 3.4 から分かる).

GDA 流は古典的な勾配流と関係がある．実際，関数が $\phi(x, y) = f(x) - g(y)$ と変数に対して独立な関数の和で表示できる場合，GDA 流は単に 2 つの勾配流の組である．従って，違いが現れるのは ϕ が x と y の交互作用を含む場合である．

GDA 流を一般の距離空間上に定義する場合，定義式 (1) は空間の微分構造—線形性—を用いているため直接採用できない．この問題を回避するために，古典的な勾配流の定義を，発展変分不等式 (Evolution Variational Inequality: EVI) と呼ばれる不等式を用いて，距離空間上に拡張できる事を思い出し（例えば，[5] 参照），距離空間上の GDA 流を以下のように 2 つの EVI の連立系として定義する：

定義 2.5 (λ -EVI). $\lambda \in \mathbb{R}$ とする．曲線 $(x_t, y_t): (0, +\infty) \rightarrow \text{Dom}\phi$ が λ -EVI 流であるとは，次を満たす事である：任意の $t \in (0, +\infty)$ と $(x, y) \in \text{Dom}\phi$ に対し，

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d^+}{dt} d_X^2(x_t, x) + \frac{\lambda}{2} d_X^2(x_t, x) + \phi(x_t, y_t) \leq \phi(x, y_t), \\ \frac{1}{2} \frac{d^+}{dt} d_Y^2(y_t, y) + \frac{\lambda}{2} d_Y^2(y_t, y) + \phi(x_t, y) \leq \phi(x_t, y), \end{cases} \quad (\text{EVI}_{\lambda})$$

ここで， $\frac{d^+}{dt}$ は右 Dini 微分である．

3 距離空間上の GDA 流 (EVI 流) の性質

以降では，距離空間上の GDA 流のことを，先の定義に従い，EVI 流と呼ぶことにする．EVI 流は勾配流と似た定義式であったが，その違いの一つとして流れに沿った単調性が成立しない点が挙げられる（例 3.4 参照）．この点が EVI 流の解析を困難にする．この問題に対処するために，以下の仮定を置く：

仮定 3.1. 局所リプシッツ連続関数 $\varphi: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ，下半連続関数 $\psi_X: X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ および上半連続関数 $\psi_Y: Y \rightarrow [-\infty, +\infty)$ が存在して，次を満たす：任意の $(x, y) \in \text{Dom}\phi$ に対し，

$$\phi(x, y) = \varphi(x, y) + \psi_X(x) + \psi_Y(y).$$

この仮定のもと，EVI 流の初期点に対する安定性および勾配流と同様の正則化効果が導出される．

定理 3.2 (EIVs 流の性質). $w_t := (x_t, y_t)$ ， $w_t^0 := (x_t^0, y_t^0)$ および $w_t^1 := (x_t^1, y_t^1)$ を λ -EVI 流とする．また，仮定 2.3 および 仮定 3.1 が成り立つとする．

このとき，以下が成り立つ：

(λ -縮小性と一意性) すべての $0 \leq s < t < +\infty$ に対して，

$$d_{X \times Y}^2(w_t^0, w_t^1) \leq e^{-2\lambda(t-s)} d_{X \times Y}^2(w_s^0, w_s^1).$$

特に、任意の $w_0 \in \overline{\text{Dom}\phi}$ に対して、 $\lim_{t \downarrow 0} w_t = w_0$ を満たす λ -EVI 流 w_t は高々一つしか存在しない。

(正則化効果) 写像 $(0, +\infty) \ni t \mapsto \phi(x_t, y_t) \in \mathbb{R}$ と w_t は $(0, +\infty)$ で局所リプシッツ連続であり、写像 $(0, +\infty) \ni t \mapsto e^{\lambda t} |w'_t|(x_t, y_t) \in \mathbb{R}$ は非増加かつ右連続である。ここで、 $|w'_t|$ は w_t の距離微分で次で定義される： $\lim_{s \rightarrow t} \frac{d_Z(w_t, w_s)}{|t-s|}$ 。

特に、初期点を鞍点 w^* とした場合、EVI 流 w_t は定常的であること、つまり、 $w_t = w^*$ を満たすことが簡単に確認できる。よって、次の系を得る：

系 3.3 (指数収束). もし、 ϕ が鞍点 w^* を持つなら、任意の λ -EVI に対して以下が成り立つ：任意の $t \geq 0$ に対し、

$$d_{X \times Y}^2(w_t, w^*) \leq e^{-2\lambda t} d_{X \times Y}^2(w_0, w^*).$$

特に、 $\lambda > 0$ の場合、 w_t は指数レートで鞍点 w^* に収束する。

ただし、 $\lambda \leq 0$ の場合は、一般に鞍点への収束は成立しない。

例 3.4 ($\lambda = 0$ の場合での周期軌道). $X = Y = \mathbb{R}$ とし、 $\phi(x, y) = xy$ と定義する。このとき、0-EVI 流は次の常微分方程式の解と一致する： $\dot{x}_t = -y_t$, $\dot{y}_t = x_t$ 。初期点を $(1, 0)$ とすると EVI 流は $(x_t, y_t) = (\cos t, \sin t)$ となり、周期軌道を描く。よって、この EVI 流は一意的な鞍点 $(0, 0)$ に収束しない。

最後に EVI 流の存在について議論する。ここでは、関数 ϕ の距離関数による凸凹緩和である、以下で与えられる関数 Φ の凸凹性が重要な役割を果たす。

仮定 3.5 (Φ の $(\tau^{-1} + \lambda)$ -凸凹性). 任意の $z = (x, y) \in X \times Y$ と、任意の $z_0 = (x_0, y_0), z_1 = (x_1, y_1) \in \text{Dom}\phi$ に対して、 x_0 から x_1 への曲線 $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ と、 y_0 から y_1 への曲線 $\sigma: [0, 1] \rightarrow Y$ が存在し、次を満たす：関数

$$(x', y') \mapsto \Phi_\tau(x, y; x', y')$$

は、任意の $\tau \in (0, \frac{1}{\lambda})$ に対して、 γ と σ に沿って " $(\tau^{-1} + \lambda)$ -凸凹" である。ここで Φ_τ は以下で定義される：

$$\Phi_\tau(x, y; x', y') := \phi(x, y) + \frac{1}{2\tau} d_X^2(x, x') - \frac{1}{2\tau} d_Y^2(y, y').$$

本稿では紙面の都合上、 $(\tau^{-1} + \lambda)$ -凸凹性の厳密な定義を与えないが、簡単に述べると、これは、関数が第一変数に対して強凸であり、第二変数に対して強凹であることを表す。詳細はプレプリント [4] を見て欲しい。

この仮定の下、EVI 流の存在を得る。一意性は先に述べた λ -縮小性から導出される。

定理 3.6 (EVI_s の存在). ある $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, 仮定2.3, 3.1 および 3.5 が成り立つとする. そのとき, 任意の $w_0 = (x, y) \in \overline{\text{Dom}\phi}$ に対して, $\lim_{t \downarrow 0} w_t = w_0$ を満たす λ -EVI_s 流 w_t が一意に存在する.

例 3.7. $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ を可分ヒルベルト空間とし, $\ell: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ を $C^{1,1}$ 級関数, $L := \text{Lip}(D\ell)$ とする. ここで, $D\ell$ は ℓ のフレシェ微分である. X と Y を, それぞれ, $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ 上の 2-ワッサースタイン空間—2 次モーメント有限なボレル確率測度全体の集合にある距離を入れた距離空間—とする. 関数 $\phi: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定義する:

$$\phi(\mu, \nu) := \iint_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \ell(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) \quad (2)$$

このとき, ある (したがってすべての) $\lambda \leq -2L$ に対して, ϕ は仮定2.3, 3.1 および 3.5 を満たす.

参考文献

- [1] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*. 2nd ed. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Basel: Birkhäuser Verlag, 2008 (cit. on p. 1).
- [2] K. Arrow and L. Hurwicz. *A Gradient Method for Approximating Saddle Points and Constrained Maxima*. Santa Monica, CA: RAND Corporation, 1951 (cit. on p. 1).
- [3] P. Clément. *Introduction to Gradient Flows in Metric Spaces*. 2009. URL: <https://math.leidenuniv.nl/reports/files/2009-09.pdf> (cit. on p. 1).
- [4] N. Isobe and S. Shimoyama. *On gradient descent-ascent flows in metric spaces*. 2025. arXiv: 2506.20258 [math.FA]. URL: <https://arxiv.org/abs/2506.20258> (cit. on pp. 1, 4).
- [5] M. Muratori and G. Savaré. “Gradient flows and Evolution Variational Inequalities in metric spaces. I: Structural properties”. In: *Journal of Functional Analysis* 278.4 (2020), p. 108347 (cit. on p. 3).
- [6] R. T. Rockafellar. “Saddle-points and convex analysis”. In: *Differential Games and Related Topics (Proc. Internat. Summer School, Varenna, 1970)*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1971, pp. 109–127 (cit. on p. 1).

非特異複素代数多様体の冪零基本群について

下地泰斗（大阪大学理学研究科）

概要

本講演では「どのような単連結冪零リー群の格子が非特異複素代数多様体の基本群となるか？」という問題を考える。さらに、この問題をリー代数のコホモロジーと次数付けを用いて研究できることを説明する。この研究方法により得られた結果と今後の展望について述べる。

1 背景

1.1 Serre の問題

非特異複素代数多様体（射影的な場合も含む）の基本群は有限表示であることが知られている。有限表示群とは有限生成群 $\Gamma = \langle S \mid R \rangle$ であって関係式 R を有限集合にとれるような群のことである。

Serre は「すべての有限群が非特異複素射影代数多様体の基本群として実現できる」ことを示し [1]、一般に「どのような有限表示群（無限群）が非特異複素代数多様体の基本群となるか？」という問題を提示した。これは Serre の問題と呼ばれている。

例えば自由アーベル群について考える。可換群 $\mathbb{Z}$ は複素平面から原点を除いた集合 $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$ の基本群である。よって、任意の自由アーベル群 $\mathbb{Z}^n$ は $\mathbb{C}^*$ の直積空間 $(\mathbb{C}^*)^n$ の基本群として表すことができる。

1.2 冪零リー群の格子に対する Serre の問題

可換性を少し複雑にしたものとして冪零な場合を考えたい。そこで「どのような有限生成捩れ自由冪零群が非特異複素代数多様体の基本群となるか？」という問題を考える。以下の定理が知られている。

定理 1.2.1 ([2],[6]). 任意の有限生成捩れ自由冪零群は、ある単連結冪零リー群 N の格子 Γ と同型である。また、 N の存在は同型を除いて一意である。

さらに、単連結冪零リー群 N が格子 Γ を持つことと、 $\mathfrak{n}$ の基底 $X_1, \dots, X_n$ で $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k X_k$ と書いたとき、全ての i, j, k について $C_{ij}^k \in \mathbb{Q}$ が成立するものが存在するこ

とが同値である。つまり、 N のリー代数 $\mathfrak{n}$ が有理リー代数の拡大として表せる。ここで、格子とは商空間がコンパクトであるような離散部分群のことである。

この定理から、有限生成振れ自由冪零群が非特異複素代数多様体の基本群となるかは、単連結冪零リー群（リー代数）を用いて研究できることが示唆される。本講演では次の問題を考える。

問題 1.2.2. どのような単連結冪零リー群の格子が非特異複素代数多様体の基本群となるか？

例 1.2.3. 例えば、離散ハイゼンベルグ群 $H_3(\mathbb{Z})$ を考える。これはハイゼンベルグ群 $H_3(\mathbb{R})$ の格子である。対応するリー代数 $\mathfrak{n}$ は基底 X_1, X_2, X_3 で $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = 0 = [X_2, X_3]$ を満たすように取れる。等質空間 $M = H_3(\mathbb{Z}) \backslash H_3(\mathbb{R})$ の錘 $C(M) = H_3(\mathbb{Z}) \backslash H_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{>0}$ が非特異複素代数多様体の構造を持つことが知られている ([5])。 $C(M)$ の基本群は $H_3(\mathbb{Z})$ であるので、離散ハイゼンベルグ群についての *Serre* の問題は解決される。しかし、他の冪零な例については未だに多くのことが知られていない。

1.3 Morgan の判定法

Morgan は、非特異複素代数多様体の基本群が単連結冪零リー群の格子となるための必要条件を、対応するリー代数の次数付けとコホモロジーに関する条件を用いて記述した。 N を単連結冪零リー群とし、非特異複素代数多様体 X の基本群が N の格子であると仮定する。 N のリー代数 $\mathfrak{n}$ について以下が成り立つ。

定理 1.3.1 ([5]). 複素化 $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ は次数付け $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i \leq -1} \mathfrak{n}_i$ を持ち、以下の二条件 (W), (H) を満たす。

(W): 誘導される次数付け $H^j(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{k \geq 0} H_k^j$ について以下が成立する。

$$H^1(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = H_1^1 \oplus H_2^1$$

$$H^2(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = H_2^2 \oplus H_3^2 \oplus H_4^2.$$

(H): $k, l \in \mathbb{Z}, j = 1, 2$ に対し、部分空間たち $\mathfrak{n}_{2k+1}, H_{2l+1}^j$ の次元が偶数である。

条件 (W) は代数多様体の実係数コホモロジーの情報から従い、(H) は混合ホッジ構造の条件を用いたものである。上の定理から次が従う。

系 1.3.2. 有理リー代数の拡大として書ける冪零 $\mathbb{R}$ -リー代数 $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ の複素化が条件 (W), (H) を満たす次数付けを持たなければ、対応する単連結冪零リー群 N の格子 Γ は非特異複素代数多様体の基本群とならない。

よって、非特異複素代数多様体の基本群となる単連結冪零リー群の格子の候補を、リー代数の次数付けとコホモロジーを調べることで絞れる。主定理では、冪零リー代数のあるクラスについて判定法を調べた。

2 主定理

定義 2.0.1. 冪零リー代数 $\mathfrak{n}$ が p -filiform であるとは降中心列 $\{C^i \mathfrak{n}\}$ について、すべての $1 \leq i \leq \dim \mathfrak{n} - p$ に対し

$$\dim C^i \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{n} - p - i$$

が成立するときをいう。特に $p = 1$ のとき *filiform* と呼ばれている。また、 $p = \dim \mathfrak{n} - 1$ であることと $\mathfrak{n}$ が可換リー代数であることが同値である。

以下が主定理である。

定理 2.0.2. p -filiform リー代数 $\mathfrak{n}$ が条件 (W), (H) を満たすような次数付けを持つための必要十分条件は

$$\dim \mathfrak{n} < p + 3$$

が成り立つこと。つまり、 $p = \dim \mathfrak{n} - 1$ または $\dim \mathfrak{n} - 2$ となり、 $\mathfrak{n}$ は可換リー代数または 2-ステップ冪零リー代数と同型である。

系 2.0.3. N を単連結冪零リー群とし、 N のリー代数が p -filiform であると仮定する。このとき、非特異複素代数多様体 X の基本群 $\pi_1(X, x)$ が N の格子ならば、 $\pi_1(X, x)$ は 2-ステップ冪零群または可換群である。

冪零リー代数の分類 ([3]) から、 $p = 1$ の場合を考えると以下が分かる。

系 2.0.4. N を単連結冪零リー群とし、 N のリー代数が *filiform* であると仮定する。このとき、非特異複素代数多様体 X の基本群 $\pi_1(X, x)$ が N の格子ならば、 $\pi_1(X, x)$ は離散ハイゼンベルグ群または可換群 $\mathbb{Z}^2$ と同型である。

例 2.0.5. n 次元リー代数 $\mathfrak{n} = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ を $[X_1, X_i] = X_{i+1}$ ($2 \leq i \leq n-1$), 他の $j < k$ に対して $[X_j, X_k] = 0$ を満たすものとする。これは *filiform* であり、有理リー代数の拡大となっているので、対応する単連結冪零リー群 N は格子 Γ を持つ。上の定理より、条件 (W), (H) を満たす次数付けを持つためには $n = 3$ であることが必要十分条件である。また、例 1.2.3 から次が従う。

Γ がある非特異複素代数多様体の基本群となるための必要十分条件は $n = 3$ である。

また、群の表示を用いた明示的な反例

$$L_n := \left\langle x_1, \dots, x_n \left| \begin{array}{l} [x_1, x_i] = x_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ 1 = [x_1, x_n] = [x_j, x_k] \quad (2 \leq j < k \leq n) \end{array} \right. \right\rangle \text{ for } n \geq 4$$

を得る。

3 今後の展望

混合ホッジ構造の、二重次数付けを用いた言い換えがよく知られている。

定理 3.0.1 ([7]). (V, W, F) が混合ホッジ構造であることと、複素化 $V_{\mathbb{C}}$ が以下の条件を満たす二重次数付けを持つことは同値である。

$$\overline{V^{p,q}} = V^{q,p} \bmod \bigoplus_{s+t < p+q} V^{s,t},$$

ここで、増大、減少フィルトレーション $W_{\mathbb{C}}, F$ は以下で与えられる。

$$W_i(V_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p+q \leq i} V^{p,q}, \text{ and } F^i(V_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p \geq i, q \in \mathbb{Z}} V^{p,q}.$$

Morgan の判定条件を混合ホッジ構造（二重次数付け）の言葉で書き直す。

定理 3.0.2 ([5]). 複素化 $\mathbf{n}_{\mathbb{C}}$ は混合ホッジ構造の二重次数付け $\mathbf{n}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p,q \leq 0, p+q \leq -1} \mathbf{n}_{p,q}$ を持ち、以下の条件 **(W)** を満たす。

(W): 誘導される二重次数付け $H^j(\mathbf{n}_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{s,t \geq 0, s+t \geq 1} H_{s,t}^j$ ($j = 1, 2$) について以下が成立する。

$$H^1(\mathbf{n}_{\mathbb{C}}) = H_{1,0}^1 \oplus H_{0,1}^1 \oplus H_{1,1}^1$$

$$H^2(\mathbf{n}_{\mathbb{C}}) = H_{2,0}^2 \oplus H_{1,2}^2 \oplus H_{0,2}^2 \oplus H_{1,2}^2 \oplus H_{2,1}^2 \oplus H_{2,2}^2.$$

がともに混合ホッジ構造の二重次数付けである。つまり、 $\overline{H_{p,q}^j} = H_{q,p}^j \bmod \bigoplus_{s+t < p+q} H_{s,t}^j$

今後の展望として以下の問題を考える。

問題 3.0.3. 定理 1.3.1 を満たすが定理 3.0.2 を満たさないリー代数の例は存在するか？

この問題は、二重次数付けにまで判定法を精密化する意義を問うものである。さらに以下を考える。

問題 3.0.4. 定理 3.0.2 を満たす冪零リー代数に関する必要十分条件を求めよ。

問題 3.0.5. 定理 3.0.2 を満たす冪零リー代数に対応する単連結冪零リー群が格子 Γ を持つとする。このとき、 Γ を基本群に持つ非特異複素代数多様体を構成せよ。

ここまで解決することで、冪零リー群の格子に関する Serre の問題を解決することが目標である。

参考文献

- [1] J.-P. Serre, *Sur la topologie des varietes algebriques en caracteristique p*, *Symposium Internacional de Topologia Algebraica, Universidad Nacional Autonoma de Mexico*, 1958, pp. 2453.
- [2] A. I. Malcev *On a class of homogeneous spaces. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 13. 1949.
- [3] E.Hakavuori, V.Kivioja, T.Moisala F.Tripaldi, Gradings for nilpotent Lie algebras *Journal of Lie Theory* 32 (2022), 383–412.
- [4] J.M. Cabezas, J.R. Gómez and A.Jimenez-Merchán. *Family of p -filiform Lie algebras . Algebra and Operator Theory, Proceedings of the Colloquium in Tashkent.* 93-102,1997.
- [5] J.W. Morgan *The algebraic topology of smooth algebraic varieties. Inst. Éautes Etudes Sci.. Publ.Math.* No. **48** (1978), 137-204.
- [6] M. S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups. Springer-verlag.* New York, 1972.
- [7] P. Deligne, Théorie de Hodge. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. **40** (1971), 5–57.

対称群のオブザーバブル直径

中島啓貴

1. 測度の集中現象

測度の集中現象は、「任意の 1-Lipschitz 関数がほぼ定数関数となる」という現象であり、主に高次元空間で観察される。ここで、1-Lipschitz 関数は Lipschitz 定数が 1 以下の関数のことである。測度の集中現象は P. Lévy の仕事を拡張することで、V. Milman によって提唱されたものである。この現象が起こる空間の典型例は n 次元単位球面 $S^n(1)$ である。 $S^n(1)$ は標準的なリーマン計量から定まるリーマン距離 $d_{S^n(1)}$ が備わっているものとする。 $S^n(1)$ 上の 1-Lipschitz 関数 $f: S^n(1) \rightarrow \mathbb{R}$ の例として 1 点からの距離関数を考えよう。すなわち一点 $p_n \in S^n(1)$ を固定して、 $f_n: S^n(1) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) := d_{S^n(1)}(x, p_n) \quad \text{for } x \in S^n(1)$$

と定義する。このとき f_n は点 $x = p_n$ において最小値 0 をとり、点 $x = -p_n$ において最大値 π をとる。したがって、この関数は定数関数ではないので「ほぼ」定数関数の意味を明確にする必要がある。いま $S^n(1)$ のリーマン体積測度を正規化したものを $m_{S^n(1)}$ とおき、 $\varepsilon > 0$ に対して

$$m_{S^n(1)}(\{x \in S^n(1) : |f_n(x) - \pi/2| \geq \varepsilon\})$$

という量を考える。これは f_n の定義域において f_n が $\pi/2$ から離れている部分の割合を表している。この量は次元 n が十分に大きいとき 0 に近づくことが知られている。すなわち、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{S^n(1)}(\{x \in S^n(1) : |f_n(x) - \pi/2| \geq \varepsilon\}) = 0$$

が成り立つ。よって高次元の単位球面においては、この f_n はほぼ $\pi/2$ の値をとる定数関数とみなせる。この例を踏まえると、以下の Theorem 1.1, すなわち $S^n(1)$ における測度の集中現象が把握しやすい。

Theorem 1.1 (Lévy の補題 [5]). 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_f \inf_{c \in \mathbb{R}} m_{S^n(1)}(\{x \in S^n(1) : |f(x) - c| \geq \varepsilon\}) = 0$$

が成り立つ。ただし、 $\sup$ は任意の 1-Lipschitz 関数 $f: S^n(1) \rightarrow \mathbb{R}$ にわたって取る。

Theorem 1.1 をみると、測度の集中現象は、一つの空間ではなく空間の列に対する主張であることが分かる。また Theorem 1.1 には測度と距離が現れるので、測度の集中現象は測度距離空間の列に対して定義することが自然である。完備可分距離空間 (X, d_X) がボレル確率測度 m_X を備えているとき、三つ組 (X, d_X, m_X) を**測度距離空間**と呼ぶ。ここで測度 m_X が確率測度であるとは $m_X(X) = 1$ を満たすことをいう。紛れのないときには d_X と m_X を省略して単に X が測度距離空間であると述べることにする。測度距離空間 X に対して

$$\mathcal{Lip}_1(X) := \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f: 1\text{-Lipschitz}\}$$

The author is supported by JSPS KAKENHI Grant Number 22K13908.

とおく．また，正の整数全体の集合を $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ とおく．測度の集中現象が起こるような空間の列を以下の Definition 1.2 のように定義し Lévy family と呼ぶ．

Definition 1.2 (Lévy family). 測度距離空間の列 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が **Lévy family** であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathcal{Lip}_1(X_n)} \inf_{c \in \mathbb{R}} m_{X_n}(\{x \in X_n : |f(x) - c| \geq \varepsilon\}) = 0$$

が成り立つことをいう．

Theorem 1.1 は $(S^n(1))_{n \in \mathbb{N}}$ が Lévy family であることを主張している．測度の集中現象については，M. Ledoux の本 [4] にまとめられている．和書では T. Shioya の本 [11] がある．

2. オブザーバブル直径

測度の集中現象が起こるかどうかを特徴づける不変量のひとつにオブザーバブル直径がある．オブザーバブル直径は M. Gromov によって [3] の §3 $\frac{1}{2}$ において導入されたものである． $A \subset \mathbb{R}$ に対して通常の**直径**を

$$\text{diam } A := \begin{cases} 0 & \text{if } A = \emptyset \\ \sup_{x, y \in A} |x - y| & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義し， $\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度 μ と実数 $\alpha \in [0, 1)$ に対して**パーシャル直径**を

$$\text{diam}(\mu; \alpha) := \inf\{\text{diam } A \mid A \subset \mathbb{R}: \text{ボレル集合}, \mu(A) \geq \alpha\}$$

と定義する．このとき，測度距離空間 X と $\kappa \in (0, 1]$ に対して**オブザーバブル直径**は以下のように定義される．

$$\text{ObsDiam}(X; -\kappa) := \sup_{f \in \mathcal{Lip}_1(X)} \text{diam}(f_* m_X; 1 - \kappa).$$

ここで， $f_* m_X$ は $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ による m_X の**押し出し測度**であり

$$f_* m_X(A) := m_X(f^{-1}(A)) \quad \text{for } A \subset \mathbb{R}$$

によって定義される． $f_* m_X$ は $\mathbb{R}$ 上のボレル確率測度になっている．また，任意の $\kappa \in (0, 1]$ に対して $\text{ObsDiam}(X; -\kappa) < \infty$ が成立することに注意する．

測度距離空間列 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が Lévy family であることは，任意の $\kappa \in (0, 1)$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{ObsDiam}(X_n; -\kappa) = 0$$

が成立することとして特徴づけられる．測度距離空間 X と実数 $r > 0$ に対して，距離をスケーリングした測度距離空間 $(X, r \cdot d_X, m_X)$ を rX と表すことにする．このとき

$$\text{ObsDiam}(rX; -\kappa) = r \cdot \text{ObsDiam}(X; -\kappa)$$

が成立する．これより，測度距離空間列を適切にスケーリングすると必ず Lévy family にできることがわかる．すなわち，任意の測度距離空間列 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して，ある正の実数列 $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して $(r_n X_n)$ は Lévy family となる．オブザーバブル直径のオーダーが分かれば，測度距離空間列をどの程度スケーリングすると Lévy family になるかが分かるという意味でオブザーバブル直径のオーダー評価は重要である．測度距離空間列 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が **phase transition property** を持つとは，ある正の実数列 $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して，任意の $\kappa \in (0, 1)$ に対して

$$\text{ObsDiam}(X_n; -\kappa) \asymp r_n$$

が成り立つことをいう。ここで非負実数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して $a_n \asymp b_n$ であるとは、ある実数 $c, C > 0$ が存在して、十分大きな n に対して $c \cdot b_n \leq a_n \leq C \cdot b_n$ が成立することをいう。phase transition property は R. Ozawa と T. Shioya によって [8] において定義されたものである。今回の定義は [8] 内で述べられている同値な言い換えを採用している。

オブザーバブル直径のオーダーが決定されているような具体例についていくつか紹介する。 n 次元単位球面については

$$\text{ObsDiam}(S^n(1); -\kappa) \asymp \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{for any } \kappa \in (0, 1)$$

が成立する ($3\frac{1}{2}$.20. in [3]). 特に $(S^n(1))_{n \in \mathbb{N}}$ は phase transition property を持つ。 $S^n(1)$ のオブザーバブル直径の上からの評価は n 次元単位球面上の等周不等式 (Lévy の等周不等式 [2, 5] cf. Theorem 2.3 in [9]) から従う。下からの評価は、1-Lipschitz 関数として一点からの距離関数をとることによって与えられる。この評価が最適であることは一点からの距離関数の等位集合が等周不等式の解を与えることに由来する。 $\mathbb{R}^n$ を台集合としてユークリッド距離と n 次元標準正規分布を備えた測度距離空間を n 次元ガウス空間 Γ^n と呼ぶ。 Γ^n のオブザーバブル直径については

$$\text{ObsDiam}(\Gamma^n; -\kappa) \asymp 1 \quad \text{for any } \kappa \in (0, 1)$$

が成立する。こちらも上からの評価は等周不等式で与えられ (cf. Corollary 2.6 in [4]), 下からの評価は第 1 射影の等位集合が等周不等式の解を与えることから従う。台集合を $\{0, 1\}^n$ として l^1 -距離と一様確率測度を備えた測度距離空間をハミングキューブ Q^n と呼ぶ。 Q^n のオブザーバブル直径については

$$\text{ObsDiam}(Q^n; -\kappa) \asymp \sqrt{n} \quad \text{for any } \kappa \in (0, 1)$$

が成立する (cf. Corollary 4.10 in [7]). 上からの評価は Hoeffding 型の不等式を用いてあたえられる (cf. Corollary 1.17 in [4]). 等周不等式 ([1]) を用いて与えることもできる。下からの評価は 1 点からの距離関数の等位集合が等周不等式の解を与えることから従う。上記のように、オブザーバブル直径のオーダーの決定は基本的にはその空間における等周不等式を用いて行われる。

3. 対称群のオブザーバブル直径

今回は、 N 次対称群 $\mathfrak{S}_N$ のオブザーバブル直径のオーダーの決定を行った。 $N \in \mathbb{N}$ に対して $\mathfrak{S}_N$ は

$$\mathfrak{S}_N := \{\sigma: \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\} \mid \sigma: \text{全単射}\}$$

を台集合として、ハミング的距離

$$d_{\mathfrak{S}_N}(\sigma, \tau) := \#\{i \in \{1, \dots, N\} \mid \sigma(i) \neq \tau(i)\}$$

と一様確率測度 $m_{\mathfrak{S}_N}$ を備えた測度距離空間とする。

$\mathfrak{S}_N$ のオブザーバブル直径の上からの評価については以下の定理が知られていた。

Theorem 3.1 ([6] cf. Corollary 4.3 in [4]). 任意の $N \in \mathbb{N}$ と $\kappa \in (0, 1)$ に対して

$$\text{ObsDiam}(\mathfrak{S}_N; -\kappa) \leq 8\sqrt{2N \log(2/\kappa)}$$

が成立する。

Theorem 3.1 は確率論の Martingale 的手法によって証明されている。今回は、Theorem 3.1 の評価と同じオーダーで下からの評価を得ることができた。

Theorem 3.2. 任意の $\kappa \in (0, 1)$ に対して

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{N}} \text{ObsDiam}(\mathfrak{S}_N; -\kappa) \geq \text{diam}(\gamma^1; 1 - \kappa)$$

が成り立つ. ここで γ^1 は 1 次元の標準正規分布である.

任意の $\kappa \in (0, 1)$ に対して $0 < \text{diam}(\gamma^1; 1 - \kappa) < \infty$ が成り立つことに注意すると Theorem 3.1, 3.2 から以下の系が従う.

Corollary 3.3. 任意の $\kappa \in (0, 1)$ に対して

$$\text{ObsDiam}(\mathfrak{S}_N; -\kappa) \asymp \sqrt{N}$$

が成り立つ.

交代群 $\mathfrak{A}_N$ についても Theorem 3.1, 3.2 と同様の評価を得ることができ, 以下の定理が成り立つ.

Theorem 3.4. 任意の $\kappa \in (0, 1)$ に対して

$$\text{ObsDiam}(\mathfrak{A}_N; -\kappa) \asymp \sqrt{N}$$

が成り立つ.

Corollary 3.3 と Theorem 3.4 によって [10] の Problems 4 および 5 が解決し, それぞれ $(\mathfrak{S}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ と $(\mathfrak{A}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ は phase transition property を持つことが従う.

Theorem 3.2 の証明のスケッチ. オブザーバブル直径を下から評価するには, 良い評価を与えるような具体的な 1-Lipschitz 関数 $f_N: \mathfrak{S}_N \rightarrow \mathbb{R}$ を見つけられればよい. $K, n \in \mathbb{Z}$ を $0 \leq K, n \leq N$ を満たすものとする. 1-Lipschitz 関数 $f_{N,K,n}: \mathfrak{S}_N \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f_{N,K,n}(\sigma) := \#(\{0, 1, \dots, K\} \cap \sigma(\{0, 1, \dots, n\})) \quad \text{for } \sigma \in \mathfrak{S}_N$$

と定義すると $(f_{N,K,n})_* m_{\mathfrak{S}_N}$ は母数 N, K, n の超幾何分布になる. したがって

$$f_N := f_{N, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$$

とおくと超幾何分布に関する中心極限定理より, $N \rightarrow \infty$ で

$$\left(\frac{4}{\sqrt{N}} \cdot \left(f_N - \frac{N}{4} \right) \right)_* m_{\mathfrak{S}_N}$$

は標準正規分布 γ^1 に弱収束する. よって

$$\begin{aligned} & \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{N}} \text{ObsDiam}(\mathfrak{S}_N; -\kappa) \\ & \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{N}} \text{diam}((f_N)_* m_{\mathfrak{S}_N}; 1 - \kappa) \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{diam}\left(\left(\frac{4}{\sqrt{N}} \cdot \left(f_N - \frac{N}{4}\right)\right)_* m_{\mathfrak{S}_N}; 1 - \kappa\right) \\ & = \text{diam}(\gamma^1; 1 - \kappa) \end{aligned}$$

を得る. □

Remark 3.5. n 次元球面における評価のときと異なり 1 点からの距離関数は最適なオーダーを与えない. それどころか, 今回の評価に用いた f_N には距離関数が明示的に表れないところは注目に値する.

REFERENCES

- [1] B. Bollobás and I. Leader, *Compressions and isoperimetric inequalities*, J. Combin. Theory Ser. A **56** (1991), no. 1, 47–62.
- [2] T. Figiel, J. Lindenstrauss, and V. D. Milman, *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*, Acta Math. **139** (1977), no. 1-2, 53–94.
- [3] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, English edition, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007. Based on the 1981 French original; With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes; Translated from the French by Sean Michael Bates.
- [4] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 89, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [5] P. Lévy, *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Avec un complément sur les fonctionnelles analytiques par F. Pellegrino*, Gauthier-Villars, Paris, 1951 (French). 2d ed.
- [6] B. Maurey, *Construction de suites symétriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **288** (1979), no. 14, A679–A681 (French, with English summary).
- [7] H. Nakajima, *Isoperimetric inequality on a metric measure space and Lipschitz order with an additive error*, J. Geom. Anal. **32** (2022), no. 1, Paper No. 35, 43.
- [8] R. Ozawa and T. Shioya, *Limit formulas for metric measure invariants and phase transition property*, Math. Z. **280** (2015), no. 3-4, 759–782.
- [9] T. Shioya, *Metric measure geometry*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 25, EMS Publishing House, Zürich, 2016. Gromov's theory of convergence and concentration of metrics and measures.
- [10] ———, *Problems in metric measure geometry*, in *Facets of Contemporary Analysis, Geometry and Non-Euclidean Statistics*, Tohoku Series in Mathematical Sciences, Springer (to appear).
- [11] ———, 測度距離空間の幾何学への招待, SGC ライブラリ, vol. 195, SAIENSU - SHA, 2024.

愛媛大学大学院理工学研究科

Email address: nakajima.hiroki.nz@ehime-u.ac.jp

正方形杭問題とシンプレクティック幾何/層理論

浅野 知紘 (京都大学)*

概 要

本稿では正方形杭問題とシンプレクティック幾何との関連を概観し, 最近の超局所層理論からの進展, 特に講演者と池祐一氏による共同研究の成果 [AI25] について概説・報告する.

1 正方形杭問題

正方形杭問題 ^{*1} とは,

問題 1.1 (正方形杭問題). ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 内のジョルダン曲線 ^{*2} が任意に与えられたとき, その上の相異なる 4 点であって正方形の 4 頂点をなすものが存在するか?

という問題である. この問題は Toeplitz によって 1911 年に提起されたが, 今日においても未解決である.

初期の重要な結果として, 1929 年に Schnirelmann が滑らかな曲線に対して同境理論を用いて証明している. 正方形杭問題に関する歴史や文献については, 例えば [Mat14] を参照されたい.

本講演では正方形杭問題の長方形への一般化について考える. $[abcd]$ で頂点がこの順に反時計回りに四角形を表すことにする ^{*3}. $\theta \in (0, \pi)$ が与えられたとき, 長方形 $[abcd]$ であって, 対角線 ac と対角線 bd の交点を e としたとき対角線のなす角度 $\angle aeb$ が θ となっているものを θ -長方形と呼ぶことにする.

問題 1.2 (長方形杭問題). ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 内のジョルダン曲線と角度のパラメータ $\theta \in (0, \pi)$ が任意に与えられたとき, その上の相異なる 4 点であって θ -長方形の 4 頂点をなすものが存在するか?

注意 1.3. $\frac{\pi}{2}$ -長方形は正方形に他ならない. また, $[abcd]$ が θ -長方形であることと, $[bcda]$ が $(\pi - \theta)$ -長方形であることは同値である.

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 大学院理学研究科

e-mail: [tasano\[at\]math.kyoto-u.ac.jp](mailto:tasano[at]math.kyoto-u.ac.jp)

本研究は科研費 (課題番号:24K16920) の助成を受けたものである。

キーワード: 正方形杭問題, シンプレクティック幾何, 超局所層理論

^{*1} 英語圏では “square peg problem” もしくは “inscribed square problem” と呼ばれる. 日本語では後者の直訳で内接正方形問題と呼ばれることも多い. しかし, 内接という語が連想させる状態がこの問題の状況を必ずしも反映しないので, ここでは前者の直訳として, 正方形杭問題という訳語をあてることにした.

^{*2} 連続単射 $c: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の像

^{*3} ここでは, 頂点の順序が異なる四角形, 例えば $[abcd]$ と $[bcda]$, は区別する.

1977 年ごろの Vaughan による議論で, 任意のジョルダン曲線上に少なくとも一組, 長方形の 4 頂点をなす点たちをとれることが「向き付け不可能な閉曲面は 3 次元ユークリッド空間へ埋め込めない」といった基本的な事実の帰結として証明された.

2 Greene と Lobb の先行研究

Greene と Lobb は [GL21] において, 長方形杭問題にシンプレクティック幾何が有効に見えることを見出し, この問題を滑らかなジョルダン曲線に対して肯定的に解決した. ここでは [GL23; GL24] の議論に従いながら, 彼らによる先行研究について触れる.

2.1 トーラスの埋め込み

まず, C 上の θ -長方形を見つける問題を別の問題に帰着しよう. 以下, 平面 $\mathbb{R}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視する. 4 つの相異なる複素数 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ に対して, 四角形 $[abcd]$ が θ -長方形をなすことは

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(b+d) \\ c-a = e^{-\sqrt{-1}\theta}(d-b) \end{cases}$$

と同値である. ここで, $R_\theta: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-1}\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

で表現される線形写像とすると, 上記の条件は $R_\theta \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と書き直すことができる.

$z \in \mathbb{C}$ と $\theta \in (0, \pi)$ に対して, $R_\theta \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix}$ であるから, $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ の対角線 $\Delta_{\mathbb{C}}$ 上で R_θ は恒等写像であり, $\Delta_{\mathbb{C}}$ は退化した (4 点が等しい) 長方形に対応する. したがって, Jordan 閉曲線 $C \subset \mathbb{C}$ と $\theta \in (0, \pi)$ が与えられたとき, θ -長方形の存在を示す問題は, 共通部分から $C \times C$ の対角線 Δ_C を除いた集合について $(C \times C) \cap R_\theta(C \times C) \setminus \Delta_C \neq \emptyset$ を示す問題に言い換えられる.

2.2 正方形杭問題とシンプレクティック幾何

多様体 M に対して, その余接束 T^*M はシンプレクティック多様体と呼ばれる構造を持つ. M の局所座標を $(x_1, \dots, x_n)$ とし対応する余接座標を $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ とすれば, $\omega_{T^*M} := \sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge dx_i$ は貼りあって T^*M 上の非退化閉 2 次形式を定める. 一般に $2n$ 次元多様体 N とその上の非退化閉 2 次形式 ω の組 (N, ω) をシンプレクティック多様体と呼ぶ. $2n$ 次元シンプレクティック多様体 (N, ω) が与えられたとき, その部分多様体 L がラグランジュ部分多様体であるとは, $\dim L = n$ かつ $i_L^* \omega = 0$ となることをいう. ここで $i_L: L \rightarrow N$ は埋め込み写像である. N 上に時間変化する C^∞ 級関数 $H = (H_s)_{s \in [0,1]}: N \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられたとき, 時間変化するベクトル場

$X^H = (X_s^H)_{s \in [0,1]}$ が $\omega(X_s^H, -) = -dH_s^{*4}$ によって定まる. X^H の積分によって定まるアイソトピーをハミルトニアニアイソトピーといい, 時刻を固定したときに得られる N の微分同相をハミルトン微分同相という. ハミルトン微分同相 φ は $\varphi^*\omega = \omega$ を満たす微分同相写像 (シンプレクティック微分同相) になる.

ここでは $\mathbb{C} \simeq T^*\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ の余接束と同一視して, 上のやり方でシンプレクティック多様体とみなす. ジョルダン曲線 C が滑らかであると仮定する. このとき, C は $T^*\mathbb{R}$ のラグランジュ部分多様体である. 一般にラグランジュ部分多様体の直積はまたラグランジュ部分多様体となるので, $C \times C$ は $T^*\mathbb{R}^2$ のラグランジュ部分多様体となる. さらに, $(R_\theta)_\theta$ は (時間変化しない) 関数 $H(z_1, z_2) = \frac{1}{4}|z_1 - z_2|^2$ によって ^{*5} 定義されるハミルトニアニアイソトピーなので, 各 θ に対して $R_\theta(C \times C)$ もラグランジュ部分多様体となる. したがって, $(C \times C) \cap R_\theta(C \times C)$ はふたつのラグランジュ部分多様体の交差となる.

次に, Δ_C の部分でラグランジュはめ込みとしての構造は保つように手術を行う. もし $(C \times C) \cap R_\theta(C \times C) \setminus \Delta_C \neq \emptyset$ ならば, 手術後のラグランジュはめ込みはラグランジュ埋め込み (部分多様体) となる. このラグランジュはめ込みのマスロス数と呼ばれる不変量を計算すると 4 になるのだが, Polterovich と Viterbo のそれぞれ独立な 1990 年ごろの結果から $\mathbb{C}^2$ 内のラグランジュ部分トーラスのマスロフ数は 2 でなくてはならないので, これは埋め込みになりえない.

その後 [GL24] において $C \times C$ と $R_\theta(C \times C)$ のラグランジュ交差フレアーコホモロジーであって, 対角線 Δ_C の寄与を排除したバージョンが構成された. 彼らはこれに付随したスペクトル不変量の解析・評価を行うことで, 直径とそれが囲う領域の面積についての条件をみたす長さ有限 ^{*6} のジョルダン曲線に対して長方形杭問題を肯定的に解決した.

3 超局所層理論

層は局所と大域をつなぐ概念であり, 幾何学やそれ以外の分野で広い領域で有効に活用されている. そして, 超局所層理論は層の超局所的な性質を調べる分野である. ここで超局所とは「方向込みの局所性」・「余接束における局所性」を意味する. この理論は Kashiwara–Schapira によって 1980 年代から 1990 年頃に確立・整備されたが, その後 2006 年から 08 年頃の Nadler–Zaslow と Tamarkin の先駆的な仕事を皮切りにシンプレクティック幾何への応用が活発になった.

ここでは, 超局所層理論とそのシンプレクティック幾何への応用において重要な概念を紹介したい.

^{*4} 文献によって符号が異なるので注意されたい.

^{*5} ここでは $T^*\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}^2$ の同一視のもと, $\mathbb{C}^2$ の座標で記述している.

^{*6} 折れ線近似の制度を良くしていくにしたがって, その長さがある有限の値に収束することをいう. 求長可能 (rectifiable) とも呼ばれる.

3.1 層について

ここではまずはベクトル空間に値をとる層の定義を見てみよう．その前にいくつか記法などを確認しておく．

- 位相空間 X に対し, その開集合全体の集合を $\text{Open}(X)$ とかく．包含によって半順序集合の構造をもち, 圏とみなせる．この圏のことも $\text{Open}(X)$ とかく．
- 圏 $\mathcal{C}$ に対し, その反対圏を $\mathcal{C}^{\text{op}}$ とかく．
- 以下, 係数体 $\mathbf{k}$ を固定する． $\text{Vect}_{\mathbf{k}}$ で $\mathbf{k}$ 上のベクトル空間と線形写像のなす圏とする．

定義 3.1. 前層とは関手 $F: \text{Open}(X)^{\text{op}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbf{k}}$ のことである．また前層の間の射とは, 関手としての自然変換のことである．

定義 3.2. 前層 F は次の条件 (降下 (descent) 条件) をみたすとき層とよばれる．任意の開集合 $U \subset X$ と U の開被覆 $(U_{\alpha})_{\alpha \in I}$ について,

$$F(U) \rightarrow \prod_{\alpha \in I} F(U_{\alpha}) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta \in I} F(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$$

がイコライザ図式になることである．ここで右側の 2 つの射は $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \subset U_{\alpha}$ が誘導する射および $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \subset U_{\beta}$ が誘導する射である．また, 層の射とは, 前層としての射のことをいう．

これまで, ベクトル空間に値をとる層について述べたが, より一般に上述のような降下条件を定式化できる圏の対象たちは層の値として使うことができる．ここでは層の値として主にベクトル空間の複体の圏を用いる．複体間の射の間には自然にホモトピーの概念があるが, これを尊重した前層や層^{*7}の定義が可能である． X 上の $\mathbf{k}$ 上のベクトル空間の複体に値をとる層たちのなす圏^{*8}を $\text{Sh}(X)$ とかく．また, 係数を別の圏 $\mathcal{C}$ に取り換えた場合は $\text{Sh}(X; \mathcal{C})$ などと書くことにする．

また, $\text{Sh}(X)$ は閉な対称モノイダル構造 $\otimes$ をもち, 対応する内部 Hom 関手を $\mathcal{H}om(-, -)$ とかく．さらに, $f: X \rightarrow Y$ が局所コンパクトハウスドルフ空間の間の連続写像のとき, 関手 $f_*, f_!: \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Sh}(Y)$, $f^*, f^!: \text{Sh}(Y) \rightarrow \text{Sh}(X)$ が定義され, 随伴 $f^* \dashv f_*$ と $f_! \dashv f^!$ が成立する．これらは 6 つの関手とそれら間の自然変換などのなす枠組みは six-functor formalism とよばれる．

3.2 層のマイクロ台と μhom

X を可微分多様体として, $F \in \text{Sh}(X)$ に対しマイクロ台とよばれる閉集合 $\text{SS}(F) \subset T^*X$ が定義される．

^{*7} この意味での層は homotopy sheaf とか ∞ -sheaf と呼ばれることも多いが, ここでは単に層とよぶ．

^{*8} 正確には無限圏である．

定義 3.3. 任意の開集合 $U \subset T^*X$ について, $SS(F) \cap U = \emptyset$ であることと次の条件が同値になるように閉集合 $SS(F) \subset T^*X$ が定義される.

$x_0 \in X$ と C^∞ 級関数 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ であって $d\varphi(x_0) \in U$ を満たす任意の組に対し, $V = \{x \in X \mid \varphi(x) < \varphi(x_0)\}$ とし $B_\varepsilon(x_0) \subset X$ を x_0 中心・半径 ε の開球^{*9} とするとき, 制限写像が誘導する

$$\operatorname{colim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(V \cup B_\varepsilon(x_0)) \rightarrow F(V)$$

が擬同型になる.

これは雑に述べれば, V をその境界の x_0 において $d\varphi(x_0)$ が指定する方向にわずかに広げたときに, V 上の関数ら $F(V)$ について (コホモロジーのレベルでの) $d\varphi(x_0)$ 方向への解析接続の存在と一意性の成立を意味する. すなわち, $SS(F)$ はこれが成り立たない方向の全体であり, 層のある種の特異性を表す. 定義から $SS(F)$ は錐状, 即ち T^*X へのスカラー倍による $\mathbb{R}_{>0}$ -作用で保たれることもわかる. また, 次の基本的な性質は証明も容易だが, 重要なので明示しておく.

補題 3.4. 多様体上の層 $F, G, H \in \operatorname{Sh}(X)$ に対して, そのマイクロ台は次を満たす.

- (1) $SS(F[1]) = SS(F)$.
- (2) $F \rightarrow G \rightarrow H$ が $\operatorname{Sh}(X)$ における (コ) ファイバー列のとき, $SS(G) \subset SS(F) \cup SS(H)$.

次の補題は Morse 理論において「値の特異値をまたがずに変化させる場合に劣位集合がホモトピー型を変えない」という主張の対応物である.

補題 3.5 (超局所 Morse の補題). 層 $F \in \operatorname{Sh}(X)$ および C^∞ 級関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ と $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ であって $a < b$ をみたすものが与えられている.

- (i) f は $\operatorname{Supp}(F)$ 上で固有である
- (ii) 任意の $x \in f^{-1}([a, b))$ について, $df(x) \notin SS(F)$

をみたすとき, 制限射 $F(f^{-1}((-\infty, b))) \rightarrow F(f^{-1}((-\infty, a)))$ は擬同型である.

一方, 「特異値をまたぐ」つまり $df(x) \in SS(F)$ なる $x \in f^{-1}([a, b))$ における変化はマイクロ茎 (microstalk) や, それと密接にかかわる μhom とよばれる概念によって記述できる. 「特異値をまたぐ」場合の主張の一つの具体的なバージョンが後述の補題 3.7 である.

^{*9} ここで $B_\varepsilon(x_0)$ の定義においては X に任意にリーマン計量を固定するが, このチョイスは $SS(F)$ の定義に影響しない.

定義 3.6. $F, G \in \text{Sh}(X)$ に対し, $\mu\text{hom}(F, G) \in \text{Sh}(T^*X)$ が

$$\mu\text{hom}(F, G) := \mu_{\Delta_X} \mathcal{H}om(q_2^* F, q_1^! G)$$

によって定義される. ここで, $q_1, q_2: X \times X \rightarrow X$ はそれぞれ射影, $\Delta_X \subset X \times X$ は対角集合, μ_{Δ_X} は超局所化関手である.

超局所化関手は特殊化関手と Fourier–Sato 変換の合成として定義されるが, これらの定義および解説は割愛する. 一般に $\mu\text{hom}(F, G)$ の台はマイクロ台の共通部分 $\text{SS}(F) \cap \text{SS}(G)$ に含まれる. μhom は超局所層理論における非常に重要な概念で, 今回の応用においても大きな役割を果たしている.

3.3 Tamarkin 圏とフィルター付き複体の層

超局所層理論の幾何への応用のための大きな方針の一つに「幾何的な対象によい層を対応させ, その層を解析し, そこから幾何的な帰結を得る」というものがある. 層のマイクロ台は常に錐状であった. 錐状でない対象を層理論で扱うための Tarmakin によるアイディアは多様体 M ではなく $M \times \mathbb{R}_t$ 上の層を考えるというものであった. 写像 ρ を $\rho: \{(x, t; \xi, \tau) \in T^*(M \times \mathbb{R}_t) \mid \tau > 0\} \rightarrow T^*M; (x, t; \xi, \tau) \mapsto (x; \xi/\tau)$ によって定義する. 任意の $A \subset T^*M$ に対し, その逆像 $\rho^{-1}(A)$ は錐状である.

$F \in \text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t)$ に対し, $\text{SS}^\bullet(F) \subset T^*M \times \mathbb{R}_t$ および $\text{MS}(F) \subset T^*M$ を,

$$\text{SS}^\bullet(F) := \text{SS}(F) \cap \{(x, t; \xi, 1)\}, \quad \text{MS}(F) := \overline{\rho(\text{SS}(F) \cap \{(x, t; \xi, 1)\})}$$

として定義する. ただし, ここで $T^*(M \times \mathbb{R}_t)$ の部分集合 $\{(x, t; \xi, 1)\}$ を M の 1-jet の空間 $T^*M \times \mathbb{R}_t$ と同一視している.

ここから少し圏論的な準備を進める. 補題 3.4 より, $\text{SS}(F) \subset \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau \leq 0\}$ を満たす F たちのなす部分圏は安定部分圏になる. そのため, 安定圏としての商

$$\mathcal{T}(T^*M) := \text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) / \{F \in \text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) \mid \text{SS}(F) \subset \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau \leq 0\}\}$$

を定義できる. この圏 $\mathcal{T}(T^*M)$ は Tamarkin 圏とよばれる. $\text{MS}(F), \text{SS}^\bullet(F)$ は F を $\mathcal{T}(T^*M)$ における同型でとりかえても同じ集合になるし, $\mu\text{hom}(F, G)$ を $\{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau > 0\}$ に制限したものは $\mathcal{T}(T^*M)$ における同型で不変である. また商関手 $\text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) \rightarrow \mathcal{T}(T^*M)$ は右随伴と左随伴をもち, どちらも忠実充満である. 右随伴・左随伴どちらもその像は $\{F \in \text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) \mid \text{SS}(F) \subset \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau \geq 0\}\}$ に含まれるので, どちらかの随伴関手を用いて $\mathcal{T}(T^*M)$ を圏 $\{F \in \text{Sh}(M \times \mathbb{R}_t) \mid \text{SS}(F) \subset \{(x, t; \xi, \tau) \mid \tau \geq 0\}\}$ の部分圏とみなすことができる.

M が一点 pt のときの圏 $\mathcal{T}(T^*\text{pt})$ を $\mathcal{T}$ と略記する. 実は, $\mathcal{T}$ はフィルター付き複体の導来圏の部分圏とみなすことができる. 例えば [KSZ23] を参照されたい.

ここで, $p_1, p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_t$ を各成分への射影とし $s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_t$ を $s(t_1, t_2) = t_1 + t_2$ と定める. $\mathcal{T}$ は $F, G \in \mathcal{T}$ に対し $F \star G := s_!(p_1^* F \otimes p_2^* G)$ と定めることで閉な対称モノイ

ダル構造をもつ。また、無限圏としての性質もよく、層の係数として採用した場合にも $\mathcal{T}$ 係数版の six-functor formalism が機能する。そして自然な同一視 $\mathcal{T}(T^*M) \simeq \text{Sh}(M; \mathcal{T})$ が存在する。これによって $\mathcal{T}(T^*M)$ にも閉な対称モノイダル構造が定義できる。さらに $F, G \in \mathcal{T}(T^*M)$ に対し、 $\mathcal{T}$ -値の射の集合 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(F, G) \in \mathcal{T}$ が定義される。これをフィルター付き複体とみなすと $(\text{Hom}(F, T_a G))_{a \in \mathbb{R}}$ が対応する^{*10}。この $a \in \mathbb{R}$ を動かしたときの構造の変化を μhom によって記述するのが次の補題である。

補題 3.7. $F, G \in \mathcal{T}(T^*M)$ とし、 $\text{MS}(F)$ と $\text{MS}(G)$ はコンパクトであると仮定する。このとき、次の (コ) ファイバー列が存在する

$$\text{colim}_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Hom}(F, T_{a-\varepsilon} G) \rightarrow \text{Hom}(F, T_a G) \rightarrow \mu\text{hom}(F, T_a G)(\{\tau > 0\}).$$

また、コンパクト台ハミルトニアンアイソトピーの時刻 1 での写像 $\varphi: T^*M \rightarrow T^*M$ が与えられたとき、 φ は圏 $\mathcal{T}(T^*M)$ にも作用する。記号の濫用だが、この圏への作用も φ とかく。すると、 $\text{MS}(\varphi F) = \varphi(\text{MS}(F))$ が成立する。

3.4 ラグランジュ部分多様体の層量子化

ラグランジュ部分多様体などのよい集合 $L \subset T^*M$ に対して、 $F_L \in \mathcal{T}(T^*M)$ を $\text{MS}(F_L) = L$ みたす“よい”層^{*11}を構成することは重要な研究課題であり、今日までにいろいろな研究がなされている。この層 F_L は L の層量子化とよばれ、 L の性質をよく反映している。以前はフレアー理論でしかアプローチでなかった種類の問題に、今では層量子化を用いることでも取り組めるようになってきている。また層量子化とフレアー理論や深谷圏との関連も年々明らかになってきている。

例 3.8. C^∞ 級関数 $f \in C^\infty(M)$ の外微分 $df: M \rightarrow T^*M$ の像 Γ_{df} は完全ラグランジュ部分多様体である。ここで閉集合 $Z_f \subset M \times \mathbb{R}_t$ を、 $Z_f := \{(x, t) \mid f(x) + t \geq 0\}$ とおけば、 $\mathbf{k}_{Z_f}$ は Γ_{df} の層量子化である。ただしここで $\mathbf{k}_{Z_f}$ は Z_f 上の階数 1 の定数層を包含写像で押し出して得られる $M \times \mathbb{R}_t$ 上の層である。

コンパクト完全ラグランジュ部分多様体 $L \subset T^*M$ に対して、Guillermou と Viterbo によって独立な構成法が知られている。ここでは Viterbo の方針での層量子化の構成を紹介する。大雑把に言うと「フレアー複体の族 $(CF^*(T_x^*M, L))_{x \in M}$ を束ねる」ことによってなされる。より正確には次の様に実行できる。 $C^\infty(M)$ を各点の値の比較によって半順序集合とみなす。 $f_1 \leq f_2$ の場合、自然な射 $\Gamma_{-df_1} \rightarrow \Gamma_{-df_2}$ が T^*M の深谷圏において存在する。開集合 $U \subset M$ に対し、 $C^\infty(M, U) \subset C^\infty(M)$ で C^∞ 級関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ であって U の閉包のある近傍上で 0 になっている関数の全体とし、これも半順序集合とみなす。

^{*10} $a \in \mathbb{R}$ に対し、 $T_a: \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}_t$ を $T_a(t) := t + a$ で定める。これは $T_{a*}: \text{Sh}(\mathbb{R}_t) \rightarrow \text{Sh}(\mathbb{R}_t)$ は $T_a: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ を誘導する。また今後、記号の濫用だが $T^*(M \times \mathbb{R}_t)$ などの他の空間の t 方向のシフトやそれらが誘導する関手も T_a とかく。

^{*11} “よい”の意味については、ここでは詳しく述べない。

そして $F^{\text{pre}}(U) := \text{colim}_{f \in C^\infty(M, U)} CF^*(\Gamma_{-df}, L)$ と定義する. ただしここで $CF^*(\Gamma_{-df}, L)$ はフィルター付き複体であり, 余極限もフィルター付き複体として取る. $U_1 \subset U_2$ に対し, $C^\infty(M, U_2) \subset C^\infty(M, U_1)$ であるから, 自然に $F_L^{\text{pre}}(U_1) \rightarrow F_L^{\text{pre}}(U_2)$ が定義できる. ここで現れるフィルター付き複体たちは自然に $\mathcal{T}$ の対象とみなすこともできる. これはさらに, F_L^{pre} は M 上のフィルター付き複体の圏もしくは圏 $\mathcal{T}$ に値をとる前層を与える. F_L^{pre} の $x \in M$ での茎 $\text{colim}_{x \in U} F^{\text{pre}}(U)$ は $CF^*(T_x^*M, L)$ と同一視できる. F_L^{pre} の層化^{*12} を F_L とかく. F_L は同一視 $\text{Sh}(M; \mathcal{T}) \simeq \mathcal{T}(T^*M)$ のもと L の層量子化になっている.

3.5 層の間の距離とその完備性

Tamarkin 圏 $\mathcal{T}(T^*M)$ 上に自然にインターリービング距離^{*13} d_I が定まる. ここでは定義は割愛して重要な性質を 2 つ紹介する.

命題 3.9. コンパクト台ハミルトニアンアイソトピーの時刻 1 での写像 $\varphi: T^*M \rightarrow T^*M$ に対して, 不等式 $d_I(F, \varphi F) \leq \|\varphi\|_{\text{Hof}}$ が成り立つ. ここで $\|\varphi\|_{\text{Hof}}$ は, φ を時刻 1 の写像としてもつコンパクト台ハミルトニアンアイソトピーを生成する $H = (H_s)_{s \in [0, 1]}: T^*M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ すべてにわたった下限 $\inf_H \int_0^1 \left(\max_{p \in T^*M} H_s(p) - \min_{p \in T^*M} H_s(p) \right) ds$ によって定義される.

命題 3.10. d_I は完備である. 即ち任意の Cauchy 列に収束先が存在する.

4 主結果と証明の概略

4.1 主結果

ここで, 我々の主結果を述べる. その前に, $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ を普遍被覆とし, $\lambda = \xi dx \in \Omega^1(T^*\mathbb{R})$ としておく.

定義 4.1. 連続単射 $c: S^1 \rightarrow T^*\mathbb{R}$ が連続ルジャンドルリフトを許容する^{*14} とは, 滑らかな埋め込みの族 $(c_n: S^1 \rightarrow T^*\mathbb{R})$ が存在し, 次の条件をみたすことをいう.

- (i) c_n は c に C^0 収束する.
- (ii) $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $(c_n \circ e)^*\lambda$ の原始関数^{*15} とする. $(f_n)_n$ はある連続関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に広義一様収束する.

また, この条件は $c: S^1 \rightarrow T^*\mathbb{R}$ の S^1 のパラメータの取り換えで不変である. 像であるジョルダン曲線 $c(S^1)$ についても連続ルジャンドルリフトを許容するか否かを定義する.

^{*12} 層の圏の前層の圏への包含の左随伴. 茎を保つ.

^{*13} 正確には拡張擬距離である. 値が $+\infty$ になりうるし, $d(F, G) = 0$ は F と G が同型であることを一般には導かない. 一方で, 追加の条件を課せば $d(F, G) = 0$ から F と G の同型を導けるようになることも多い.

^{*14} 一般的な用語ではなくここだけの呼称である.

^{*15} 原始関数には定数分の任意性があるが, この定数については都合のいいように選んでよい.

定理 4.2 ([AI25]^{*16}). $C \subset T^*\mathbb{R}$ が連続ルジャンドルリフトを許容するとき、任意の $\theta \in (0, \pi)$ についてとき、 C 上の相異なる 4 点であって θ -長方形の 4 頂点をなすものが存在する。

この結果は、多くの先行研究の結果を包含し、正方形 ($\theta = \frac{\pi}{2}$) の場合に限っても真に新しい。例えば、 C が長さ有限ならば、 C は連続ルジャンドルリフトを許容することから次が従う。

系 4.3. C が長さ有限のとき、任意の $\theta \in (0, \pi)$ についてとき、 C 上の相異なる 4 点であって θ -長方形の 4 頂点をなすものが存在する。

注意 4.4. 連続ルジャンドルリフトを許容しないジョルダン曲線も多く存在する。与えられたジョルダン曲線が連続ルジャンドルリフトを許容するか否かを判定するのは一般には難しい。この条件の良い判定方法や特徴付けについては考察の余地が残されている。

4.2 層量子化の構成

以下、 $\mathbf{k} = \mathbb{F}_2$ とおき、スカラー倍により C が囲う有界開領域の面積は π であるとしてよい。まず滑らかな $C \subset T^*\mathbb{R}$ に対し、 $C \times C \subset T^*\mathbb{R}^2$ の層量子化 F_C ^{*17} を構成できる。 $C \times C$ は単調 (monotone) とよばれる性質をみだし、かつ Fukaya–Oh–Ohta–Ono による bounding cochain を許容するので、bounding cochain を指定することで、 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $x \in \mathbb{R}^2$ に対しフレアー複体 $CF^*(\Gamma_{-df}, C \times C)$, $CF^*(T_x^*\mathbb{R}^2, C \times C)$ らが定義できる。すると Viterbo の構成を適用でき^{*18}, $C \times C$ の層量子化 F_C が構成できる^{*19}。

c が滑らかでない場合、滑らかな写像の族 $(c_n: S^1 \rightarrow T^*\mathbb{R})_n$ であって c に C^0 収束するものをとる。ただし、 $C_n = c_n(S^1)$ の囲む面積も π であるようにしておく。 C_n らが Hofer 距離の意味で Cauchy 列になることを証明できる^{*20}。これと命題 3.9 から、 F_{C_n} が層の距離に関して Cauchy 列になることが確認できる。命題 3.10 の完備性により、極限の対象が存在し、実は一意的である。これを F_C と書き $C \times C$ の層量子化とよぶことに

^{*16} Stéphane Guillermou 氏も同様の結果を独立に得ている。超局所層理論を用いる点・パーシステンス加群の変化する位置に注目する点は共通しているが、議論の詳細は我々のものとは異なる。

^{*17} $C \times C$ の層量子化であるので、 $F_{C \times C}$ とかく方が自然であるが、表記を短くするために F_C とかくことにした。

^{*18} このことについては今現在、きちんと書かれている文献はおそらく存在していないので注意されたい。[AI25] では Guillermou による構成の応用として層量子化を構成したので、この議論は使われていない。

^{*19} ラグランジュ部分多様体 $C \times C$ の単調性は、 F_C には $T_\pi F_C \simeq F_C[-2]$ という性質 (もしくは構造) として反映される。シフト関手 $[-2]$ によって $\mathbb{R}_t/\pi\mathbb{Z}$ 方向にひねられた $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_t/\pi\mathbb{Z}$ 上の“層”の引き戻しとして F_C を記述できる。この“層”はねじれ層 (twisted sheaf) と呼ばれ、これらに対する超局所層理論も機能する。[AI25] においては F_C は引き戻す前のねじれ層として定義されている。以下では、本当はねじれ層として議論する必要がある部分があるのだが、この部分は誤魔化すことにする。

^{*20} 具体的にハミルトンアイソトピーを構成する。ここでは円盤やアニュラスの間の双正則写像を構成の手掛かりにした。

する. これは $\text{MS}(F_C) = C \times C$ をみたす. 一方で, $\text{SS}^\bullet(F_C)$ の決定は一般には難しいのだが, C が連続ルジャンドルリフトを許容するという仮定があると, 定義 4.1 の記号を用いて,

$$\text{SS}^\bullet(F_C) = \{(c \circ e(s_1), c \circ e(s_2), -f(s_1) - f(s_2)) \mid s_1, s_2 \in \mathbb{R}\} \subset T^*\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_t \quad (4.1)$$

であることを確認できる. このとき, 任意の $a \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ について $\text{SS}^\bullet(F_C) \cap T_a \text{SS}^\bullet(F_C) = \emptyset$ が成り立っている.

4.3 パーシステンス構造の解析

$\mathcal{T}$ -値の射の空間 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(F_C, R_\theta F_C) \in \mathcal{T}$ はフィルター付き複体としては $(\text{Hom}(F_C, T_a R_\theta F_C))_{a \in \mathbb{R}}$ に対応する. このフィルター付き複体 $(\text{Hom}(F_C, T_a R_\theta F_C))_{a \in \mathbb{R}}$ は次数を決めてコホモロジーをとると通常の意味でのパーシステンス加群を与える. 証明の基本方針としては次のようになる.

- (A) パーシステンス加群の変化は交差 $(C \times C) \cap R_\theta(C \times C)$ の部分集合によって生じる.
- (B) しかし自明な交差 Δ_C の寄与によって生み出される変化を捉えても θ -長方形についての情報を得られない. よって, Δ_C が寄与できるパーシステンス加群の変化の位置に制約を与える.
- (C) Δ_C が寄与できない位置にパーシステンス加群の変化を見つける.

以下, 順に議論を概説する.

- (A) パーシステンス加群の変化は補題 3.7 によって μhom によって与えられる. $\mu\text{hom}(F, G)$ の台は $\text{SS}(F) \cap \text{SS}(G)$ に含まれた. そして $\text{SS}(F_C)$ の $\text{SS}(T_a R_\theta F_C)$ の ρ による像が, $C \times C$ および $R_\theta(C \times C)$ である.
- (B) まず, ジョルダン曲線が連続ルジャンドルリフトを許容すると仮定する. すると任意の $a \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ に対し,

$$\text{SS}^\bullet(F_C) \cap \text{SS}^\bullet(T_a R_\theta F_C) \cap \rho^{-1}(\Delta_C) = \emptyset \quad (4.2)$$

であることが, 式 (4.1) と層に対する T_a と R_θ が $\text{SS}^\bullet$ に自然に作用することから確認できる. 補題 3.7 からパーシステンス加群の変化は $\mu\text{hom}(F_C, T_a R_\theta F_C)$ のコホモロジーによって記述される. 特に Δ_C 由来の寄与は

$$\mathcal{F}_{a,\theta} := \mu\text{hom}(F_C, T_a R_\theta F_C)|_{\rho^{-1}(\Delta_C)}$$

のコホモロジーが担っている. 式 (4.2) から $\mathcal{F}_{a,\theta}$ の台が空集合であり, Δ_C 由来の寄与は自明であることがわかる.

- (C) ある $a = a_\theta \in (0, \pi)$ においてパーシステンス加群の変化が生じることを示す. この議論が最も非自明な考察を含むのだが, ここでは割愛する. フィルトレーションのパラ

メータ a だけでなく θ を $[0, \pi]$ の範囲で動かすことが重要になる. この部分では C が連続ルジャンドリフトを許容することは仮定しなくてよい. 一方で, C の $\mathbb{R}^2$ の部分集合としてのルベーク測度が 0 であることは仮定する ^{*21} ^{*22}.

5 今後の課題

一般のジョルダン曲線 C についてもルベーク測度が 0 ならばある $0 < a_\theta < \pi$ でパーシステンス加群に変化が生じることは証明することができた. この a_θ に対応する変化を生み出している $C \times C$ と $R_\theta(C \times C)$ の交差が Δ_C の点ではないことが証明できればよい. Δ_C の寄与は $\mathcal{F}_{a,\theta} := \mu\text{hom}(F_C, T_a R_\theta F_C)|_{\rho^{-1}(\Delta_C)}$ のコホモロジーとして定式化できる. 連続ルジャンドリフトを許容するという仮定の下では, $\mathcal{F}_{a,\theta}$ の台が空集合であることが言えて, 証明がうまくいった. 仮定がないと, この台の評価がうまくいかなくなる. しかしそれでも $\mathcal{F}_{a,\theta}$ が層として 0 である可能性はあり, それならば十分である. また, $\mathcal{F}_{a,\theta}$ が層として 0 でなくとも, その大域的なコホモロジーが 0 なだけでも十分である. いずれにせよ, 層 $\mathcal{F}_{a,\theta}$ をより精密に調べられればよさそうである. しかしながら現状では, $\mathcal{F}_{a,\theta}$ をより精密に調べられるまでには, μhom に対する知見が足りていないように思われる. この種の滑らかでない対象に付随した層の μhom の解析・計算は, 今回扱った杭問題以外の観点からも現状の重要な課題である.

参考文献

- [AI25] T. Asano and Y. Ike. *The rectifiable rectangular peg problem*. 2025. arXiv: 2412.21057 [math.SG].
- [GL21] J. E. Greene and A. Lobb. “The rectangular peg problem”. *Ann. of Math.* (2) 194.2 (2021), pp. 509–517.
- [GL23] J. E. Greene and A. Lobb. “Cyclic quadrilaterals and smooth Jordan curves”. *Invent. Math.* 234.3 (2023), pp. 931–935.
- [GL24] J. E. Greene and A. Lobb. *Floer homology and square pegs*. 2024. arXiv: 2404.05179 [math.SG].
- [KSZ23] C. Kuo, V. Shende, and B. Zhang. *On the Hochschild cohomology of Tamarkin categories*. 2023. arXiv: 2312.11447 [math.SG].
- [Mat14] B. Matschke. “A survey on the square peg problem”. *Notices Amer. Math. Soc.* 61.4 (2014), pp. 346–352.

^{*21} この場合, コンパクト台で面積を保つ同相写像 $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ で $C = \phi(C_0)$ なるものをとれる. ただしここで, C_0 は半径 1 の真円とする. 実は, この同相写像 ϕ を並べた $\phi \times \phi$ も $\mathcal{T}(T^*\mathbb{R}^2)$ に作用し, $F_C \simeq (\phi \times \phi)F_{C_0}$ が成り立つ. すると, F_C 関連の計算の一部を非常に具体的な層である F_{C_0} に対する計算に帰着でき, 議論がうまくいく.

^{*22} ルベーク測度が正になるジョルダン曲線も多く存在するが, そのような曲線に対しては長方形杭問題はルベークの密度定理の簡単な系として肯定的に解決されている.

BERKOVICH GEOMETRY AND METRIC SYZ CONJECTURE

KEITA GOTO 

ABSTRACT. This paper is written for the proceedings of the 72nd Geometry Symposium. In recent years, Berkovich geometry has gained recognition through its various applications. One notable example is its contribution to mirror symmetry in the sense of Strominger–Yau–Zaslow. In this paper, we discuss the so-called Metric SYZ Conjecture, a weaker variant of their mirror symmetry proposal, and explain how Berkovich geometry offers an effective perspective on it.

1. INTRODUCTION

Let (X, L) be a projective Calabi–Yau manifold X of $\dim_{\mathbb{C}} X = n$ polarized by an ample line bundle L on X . Here, our Calabi–Yau condition merely requires the existence of a nowhere vanishing holomorphic volume form $\Omega \in H^0(X, K_X)$ on X , which yields a measure μ on X induced by $\Omega \wedge \bar{\Omega}$. By Yau’s celebrated theorem [Yau78], one has a unique metric $\omega \in c_1(L)$, which is called the *Calabi–Yau metric*, satisfying the *Monge–Ampère equation*

$$\omega^n = (L^n) \frac{\mu}{\mu(X)}. \quad (1.0.1)$$

For these Calabi–Yau manifolds, one can consider the following fibration:

Definition 1.1 (SYZ fibration). Keep the same notation as above. Let U be an open subset of X . A map $f : U \rightarrow B$, where B is a manifold of $\dim_{\mathbb{R}} B = n$, is called an *SYZ fibration* on U for L if f is a smooth torus fibration such that $\text{Im}\Omega|_{f^{-1}(b)} = 0$ and $\omega|_{f^{-1}(b)} = 0$ hold for any $b \in B$.

SYZ fibrations play essential roles in mirror symmetry in the sense of Strominger–Yau–Zaslow [SYZ96]. Motivated by their program, we focus on the following problem: Let

$$(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{D}^* := \{t \in \mathbb{C} \mid 0 < |t| < 1\} \quad (1.0.2)$$

be a holomorphic family of polarized Calabi–Yau manifolds $(\mathcal{X}_t, \mathcal{L}_t)$, where $\mathcal{X}$ is defined over the field $\mathbb{C}((t))^{\text{mero}}$ of convergent Laurent series, and $\mathcal{L}$ is a relatively ample line bundle on $\mathcal{X}$.

Conjecture 1.2 (Metric SYZ conjecture; see [Li23, Conjecture 1.1]). Assume that the above $\mathcal{X}$ is maximally degenerate (for instance, type III degenerations for K3 surfaces), which is defined in § 2.3. Then, for any sufficiently small $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that, for any $t \in \mathbb{D}^*$ with $|t| < \delta$, one has an SYZ fibration $f_t : U_t \rightarrow B_t$ from some open subset $U_t \subset \mathcal{X}_t$ with $\int_{U_t} \mu_t \geq 1 - \varepsilon$ to some B_t .

Since this concerns one-parameter families, it is helpful to have a geometry over $\mathbb{C}((t))$ that resembles the geometry over $\mathbb{C}$. Berkovich geometry provides such a natural framework of analytic spaces over a valued field such as $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ and $K := (\mathbb{C}((t)), e^{-\text{ord}_t(\cdot)})$. Furthermore, we may consider analytic spaces over a Banach ring. Here, we recall the *hybrid norm* $|\cdot|_{\text{hyb}}$ on $\mathbb{C}$. This is a map $|\cdot|_{\text{hyb}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ defined by $|z|_{\text{hyb}} := \max\{|z|, 1\}$ for $z \neq 0$, and $|0|_{\text{hyb}} := 0$. As a Banach ring over $(\mathbb{C}, |\cdot|_{\text{hyb}})$, we can consider the *hybrid ring* $\mathcal{A}$ defined as follows:

$$(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\text{hyb}}) := \left\{ f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} c_{\alpha} t^{\alpha} \in \mathbb{C}((t)) \mid c_{\alpha} \in \mathbb{C}, \|f\|_{\text{hyb}} := \sum (|c_{\alpha}|_{\text{hyb}} \cdot e^{-\alpha}) < \infty \right\}. \quad (1.0.3)$$

We may assume the above $\mathcal{X}$ is also defined over $\mathcal{A}$. Since any algebraic scheme X over a Banach ring $\mathcal{B}$ admits an associated analytic space X^{an} over $\mathcal{B}$, we obtain three kinds of analytic spaces

associated with $\mathcal{X}$: the one-parameter family $\mathcal{X}$, the $\mathcal{A}$ -analytic space $\mathcal{X}^{\text{hyb}} := \mathcal{X}_{\mathcal{A}}^{\text{an}}$, and the K -analytic space $\mathcal{X}_K^{\text{an}}$. In particular, there exists a fibration

$$\pi^{\text{hyb}} : \mathcal{X}^{\text{hyb}} \rightarrow \Delta := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| \leq e^{-1}\} \quad (1.0.4)$$

such that $\mathcal{X}^{\text{hyb}}|_{\Delta \setminus \{0\}} \simeq \mathcal{X}|_{\Delta \setminus \{0\}}$ and $\mathcal{X}^{\text{hyb}}|_{t=0} \simeq \mathcal{X}_K^{\text{an}}$. This structure suggests a deep relationship between complex analytic spaces and K -analytic spaces. In fact, by making use of such analytic spaces, one can derive the following result:

Theorem 1.3 ([GO24, Theorem 1.3]). *Set $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. If $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ is a maximally degenerating family of n -dimensional polarized abelian varieties, then Conjecture 1.2 holds. Furthermore, there exists a continuous fibration $f : \mathcal{X}^{\text{hyb}} \rightarrow B$ over Δ such that $f_t : \mathcal{X}_t \rightarrow B_t$ is an SYZ fibration for $\mathcal{L}_t$ over $t \neq 0$, and $f_0 : \mathcal{X}_K^{\text{an}} \rightarrow B_0$ is a NASYZ fibration for $\mathcal{L}_K^{\text{an}}$ over $t = 0$, which is a non-Archimedean analog of the SYZ fibration defined in Definition 2.3.*

Besides, let $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ be a maximally degenerating family of n -dimensional Calabi–Yau complete intersections $\mathcal{X}_t$ (abbreviated as CYCI) in a toric Fano variety Y given by the Batyrev–Borisov construction (see [Gro05, §3]). In particular, one has a closed immersion $\mathcal{X} \hookrightarrow Y \times \mathbb{D}^*$ over $\mathbb{D}^*$. Denote the character group of the maximal torus of Y by M , and its cocharacter group by N . For a pair $(X, L) := (\mathcal{X}_K, \mathcal{L}_K)$, the Batyrev–Borisov construction gives two polytopal complexes: the *essential skeleton* $\text{Sk}(X) \subset N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ of X and the *tropical sphere* $A_L \subset M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ associated to L , endowed with natural Lebesgue measures μ and ν . Furthermore, this construction also gives the support function $\phi_L : N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ of the Newton polytope of L (as an ample line bundle on $Y_K := Y \times_{\mathbb{C}} \text{Spec } K$). After taking a suitable finite base change, we can obtain the following sufficient condition of Conjecture 1.2 for the family $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ of CYCIs:

Theorem 1.4 ([GY24, Theorem 1.2]). *Keep the same notation as above. If there is a convex function $\phi : N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ with $\sup_{x \in N_{\mathbb{R}}} |\phi(x) - \phi_L(x)| < \infty$ such that the real Monge–Ampère equation*

$$\text{MA}_{\mathbb{R}}(\phi|_{\sigma}) = \nu(A_L) \cdot \frac{\mu|_{\sigma}}{\mu(\text{Sk}(X))} \quad (1.0.5)$$

holds for any open face $\sigma \subset \text{Sk}(X)$, where $\text{MA}_{\mathbb{R}}(\phi|_{\sigma})$ is the real Monge–Ampère operator for the convex function $\phi|_{\sigma}$ defined over σ as an open set of the affine hull $\text{aff}(\sigma) \simeq \mathbb{R}^n$ of σ (see, e.g., [Vil21, Definition 4.1]), then Conjecture 1.2 holds for the family $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ of CYCIs.

2. BERKOVICH GEOMETRY

2.1. How to extend the framework of complex analytic spaces. Consider an n -dimensional complex affine space $\mathbb{C}^n$ with coordinates $z_1, \dots, z_n$, and its coordinate ring $A_n := \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Any point $x \in \mathbb{C}^n$ yields the evaluation map $|\cdot(x)| : A_n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ defined by $|f(x)|$ for any $f \in A_n$. Obviously, this map satisfies the following: for any $f, g \in A_n$,

- (i) $|fg(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)|$ (*multiplicativity*),
- (ii) $|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ (*triangle inequality*),
- (iii) $|0(x)| = 0$ and $|1(x)| = 1$ (which guarantees *the emptiness for the zero ring*).

If a map $\chi : A_n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfies the above three conditions, χ is called a *semi-valuation* on A_n . Further, the map $|\cdot(x)|$ also satisfies the following *bounded condition*: for any $a \in \mathbb{C} \subset A_n$,

- (iv) $|a(x)| \leq |a|$, that is, the restriction of $|\cdot(x)|$ to $\mathbb{C}$ is bounded by the norm $|\cdot|$ on $\mathbb{C}$.

Denote by $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n, \text{an}}$ the set of all semi-valuations χ on A_n that satisfies the above bounded condition (iv). By Ostrowski’s theorem [Ost16], any $\chi \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n, \text{an}}$ is given by the evaluation map $|\cdot(x)|$ associated to some unique $x \in \mathbb{C}^n$. Namely, there exists a natural bijection $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n, \text{an}}$. Moreover, this can be seen as a homeomorphism by equipping $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n, \text{an}}$ with the *weakest topology such that, for any $f \in A_n$, the associated map $|f(\cdot)| : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n, \text{an}} \rightarrow \mathbb{R}$, which is defined by $|f(\chi)| := \chi(f)$, is continuous*. Under this identification, one can also rephrase analytic functions on $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n, \text{an}}$ based on semi-valuations, by

considering the *uniform seminorm* $\|\cdot\|_V := \sup_{x \in V} |\cdot|(x)$ on A_n for each compact subset $V \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n,\text{an}}$. More precisely, first denote by $\mathcal{B}(V)$ the completion of the ring of rational functions without poles on a compact subset $V \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n,\text{an}}$, with respect to the induced norm by $\|\cdot\|_V$. Then, by the Oka–Weil approximation theorem (see [Oka36] and [Wei35]), for any open set $U \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n,\text{an}}$ and $x \in U$, there exists a compact neighborhood $V \in U$ of x such that, for any $f \in \mathcal{O}^{\text{an}}(U)$, one has $f|_V \in \mathcal{B}(V)$. In particular, these $\mathcal{B}(V)$ in turn recover $\mathcal{O}^{\text{an}}(U)$ by gluing.

The above rephrased construction of $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\text{an}})$ remains valid even when $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ is replaced by a unital commutative Banach ring $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$. This is how we obtain an n -dimensional Berkovich affine space $(\mathbb{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}_{\mathcal{B}}^n}^{\text{an}})$ as a locally ringed space. In particular, we may consider the case when $n = 0$ by setting $A_0 := \mathcal{B}$. Then $\mathbb{A}_{\mathcal{B}}^{0,\text{an}}$ is often written as $\mathcal{M}(\mathcal{B})$, which is called the *Berkovich spectrum* of $\mathcal{B}$. It is a notable fact that $\mathcal{M}(k)$ is a singleton for any complete valuation field k . In the same way as complex analytic spaces, general $\mathcal{B}$ -analytic spaces are given by gluing locally closed subspaces of $\mathbb{A}_{\mathcal{B}}^{n,\text{an}}$ together. For instance, any scheme X locally of finite type over $\mathcal{B}$ induces its associated $\mathcal{B}$ -analytic space X^{an} . Furthermore, each morphism $f : X \rightarrow Y$ between such schemes induces its associated morphism $f^{\text{an}} : X^{\text{an}} \rightarrow Y^{\text{an}}$. In particular, the structure morphism $\pi : X \rightarrow \mathcal{B}$ induces $\pi^{\text{an}} : X^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{B})$. Note that, for the hybrid ring $\mathcal{A}$ defined by (1.0.3), one has $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \simeq \Delta$ (see [Poi10, Proposition 2.1.1]), and the fibration $\pi^{\text{hyb}} : \mathcal{X}^{\text{hyb}} \rightarrow \Delta$ in (1.0.4) is nothing but the associated morphism to the structure morphism $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$. For further details; see [LP24].

In what follows, we consider k -analytic spaces, where k is a complete valuation field. For simplicity, let X be a projective variety over k , and L an ample line bundle on X . If $k = (\mathbb{C}, |\cdot|)$, since $X^{\text{an}} = X(\mathbb{C})$ is Kähler, the dd^c -lemma implies that any closed $(1, 1)$ -form on $X(\mathbb{C})$ is locally given as a potential. This observation leads us to the pluripotential theory over an arbitrary k -analytic space.

Definition 2.1. A *singular metric* (resp. *continuous metric*) ϕ on L^{an} is a family of upper semi-continuous functions (resp. continuous functions) $\phi_s : U^{\text{an}} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ (resp. $\mathbb{R}$) given for any open subscheme $U \subset X$ and any nowhere-vanishing section $s \in H^0(U, L)$, such that the family ϕ is compatible with the restriction of sections, and $\phi_{fs} = -\log |f(\cdot)| + \phi_s$ holds for any $f \in H^0(U, \mathcal{O}_U^{\times})$.

Furthermore, one can define the class $\text{PSH}(X^{\text{an}}, L^{\text{an}})$ of *semi-positive metrics* on L^{an} , which are possibly singular metrics on L^{an} ; see [BE21, § 7.1] for details. In particular, if $k = (\mathbb{C}, |\cdot|)$, then the above $\text{PSH}(X^{\text{an}}, L^{\text{an}})$ coincides with the space of semi-positive metrics on $L(\mathbb{C})$ in the usual sense (see [PS23, Theorem 2.24]). As in usual pluripotential theory, each $\phi \in \text{PSH}(X^{\text{an}}, L^{\text{an}})$ yields a positive Radon measure $\text{MA}(\phi)$ on X^{an} of total mass (L^n) , where $n := \dim X$. This $\text{MA}(\cdot)$ is called the *Monge–Ampère operator*, and it serves as an analogue of taking the measure associated to the volume form ω^n for any closed $(1, 1)$ -form ω on a projective complex manifold. More precisely, we obtain the following map:

$$\text{MA}(\cdot) : \text{PSH}(X^{\text{an}}, L^{\text{an}}) / \mathbb{R} \rightarrow \{\text{positive Radon measures on } X^{\text{an}} \text{ of total mass } (L^n)\}. \quad (2.1.1)$$

See [CLD12, § 3.7] for the non-Archimedean case, and [BE21, § 8] for the general case and details.

2.2. Non-Archimedean analytic spaces. In this section, we focus on Berkovich analytic spaces over $K := (\mathbb{C}((t)), e^{-\text{ord}_t(\cdot)})$. Let X be a smooth projective K -variety. An *snc model* $\mathcal{X}$ of X (over $R := \mathbb{C}[[t]]$) means a projective flat regular R -scheme with $X \simeq \mathcal{X}_K := \mathcal{X} \times_R \text{Spec } K$ such that the special fiber $\mathcal{X}_0 := \mathcal{X} \times_R \text{Spec } (R/(t))$ has a simple normal crossing support, where we do not need its reduced-ness. The stratification of $\mathcal{X}_0$ gives rise to the *dual intersection complex* $\text{Sk}(\mathcal{X})$, which is a simplicial complex and can be embedded into X^{an} respecting each multiplicity of the irreducible component of $\mathcal{X}_0$. Furthermore, $\mathcal{X}$ also yields a strong deformation retract $\rho_{\mathcal{X}} : X^{\text{an}} \rightarrow \text{Sk}(\mathcal{X})$, which is called a *Berkovich retraction* associated to $\mathcal{X}$. These retractions are compatible with projective birational morphisms between snc models. This actually yields a homeomorphism

$$X^{\text{an}} \simeq \varprojlim_{\mathcal{X} : \text{snc}} \text{Sk}(\mathcal{X}). \quad (2.2.1)$$

In addition, we have the following analog of the result in [Yau78], which was proved under a mild assumption in [BFJ15, Theorem A], and later in greater generality in [BGGJ⁺20, Theorem D]:

Theorem 2.2. *Let L be an ample line bundle on X , and $n := \dim X$. For any positive Radon measure μ on X^{an} of total mass (L^n) that is supported on a dual complex $\text{Sk}(\mathcal{X})$ associated to some snc model $\mathcal{X}$ of X , there exists a unique metric $\phi \in \text{PSH}(X^{\text{an}}, L^{\text{an}})/\mathbb{R}$ such that $\text{MA}(\phi) = \mu$.*

2.3. Calabi–Yau case. In the sequel, we further assume that the K -variety X discussed in § 2.2 is Calabi–Yau, meaning that $K_X \simeq \mathcal{O}_X$. In addition, by the semistable reduction [KKMSD73], we may assume the existence of a *semistable* snc model $\mathcal{X}$, meaning that $\mathcal{X}_0$ is reduced. Then one can consider the *essential skeleton* $\text{Sk}(X) \subset X^{\text{an}}$ of X , which is introduced in [KS06], and studied in [MN15], [NX16], and [BJ17]. In particular, it is known that $\text{Sk}(X)$ is a *pseudo-manifold*, and $\text{Sk}(X) \subset \text{Sk}(\mathcal{X}) \subset X^{\text{an}}$ holds for any snc model $\mathcal{X}$ of X . Also, one has $\dim_{\mathbb{R}} \text{Sk}(X) \leq \dim X$. We say X is *maximally degenerate* if $\dim_{\mathbb{R}} \text{Sk}(X) = \dim X$. From now on, we further assume that our X is maximally degenerate. Then $\text{Sk}(X)$ has a (non-canonical) $\mathbb{Z}$ -affine structure away from some singular locus Γ of codim ≥ 2 , which yields a Lebesgue type measure μ on $\text{Sk}(X)$ (see [NXY19, Theorem 6.1]). By Theorem 2.2, there exists a unique $\phi \in \text{PSH}(X^{\text{an}}, L^{\text{an}})/\mathbb{R}$ such that

$$\text{MA}(\phi) = (L^n) \frac{\mu}{\mu(X^{\text{an}})}, \quad (2.3.1)$$

where $n := \dim X = \dim_{\mathbb{R}} \text{Sk}(X)$ (cf. (1.0.1)). We call this solution $\phi \in \text{PSH}(X^{\text{an}}, L^{\text{an}})/\mathbb{R}$ the *non-Archimedean Calabi–Yau metric* (abbreviated as *NACY metric*), denoted by ϕ^{NACY} .

Definition 2.3 (NASYZ fibration). We call $f : X^{\text{an}} \rightarrow \text{Sk}(X)$ a *non-Archimedean SYZ fibration* (abbreviated as *NASYZ fibration*) for L^{an} if there exists a pseudo-manifold structure on $\text{Sk}(X)$ such that, for some union Γ of codim ≥ 2 faces of $\text{Sk}(X)$, f is an n -dimensional *affinoid torus fibration* (see, e.g., [NXY19, (3.3)]) over $\text{Sk}(X) \setminus \Gamma$ and, for any $b \in \text{Sk}(X) \setminus \Gamma$, the NACY metric ϕ^{NACY} is constant on $f^{-1}(b)$, where we identify ϕ^{NACY} with some global function on X^{an} by taking its difference from a reference *model metric* on L^{an} ; see [BE21, §5.3] for model metrics.

Remark 2.4. The condition that $\phi^{\text{NACY}}|_{f^{-1}(b)}$ is constant on $f^{-1}(b)$ does not depend on the choice of a reference model metric on L^{an} . Our Definition 2.3 is still under development and may be refined further. In particular, we do not assume anything about what happens on Γ for the moment.

Let us recall the original setting. Let $(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{D}^* := \{t \in \mathbb{C} \mid 0 < |t| < 1\}$ be a holomorphic family of polarized Calabi–Yau manifolds $(\mathcal{X}_t, \mathcal{L}_t)$ such that $\mathcal{X}$ is defined over the hybrid ring $\mathcal{A}$ and $(X, L) := (\mathcal{X}_K, \mathcal{L}_K)$ is maximally degenerate, where each polarization on $\mathcal{X}_t$ is induced by a relatively ample line bundle $\mathcal{L}$ on $\mathcal{X}$. Then, the following strong theorem is known to hold:

Theorem 2.5 ([Li23, Theorem 1.3]). *If there exists a semistable snc model $\mathcal{X}$ such that, for any open face σ of $\text{Sk}(\mathcal{X})$ and $b \in \sigma$, ϕ^{NACY} is constant on $\rho_{\mathcal{X}}^{-1}(b)$, then Conjecture 1.2 holds for $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$.*

Remark 2.6. This condition is referred to as the *comparison property*. In this setting, the Berkovich retraction $\rho_{\mathcal{X}} : X^{\text{an}} \rightarrow \text{Sk}(\mathcal{X})$ is an affinoid torus fibration over each open face of $\text{Sk}(\mathcal{X})$. Moreover, if $\mathcal{X}$ is minimal, that is, if $K_{\mathcal{X}/R} \equiv 0$, then we have $\text{Sk}(\mathcal{X}) = \text{Sk}(X)$. In this sense, one may say that the comparison property requires that the Berkovich retraction $\rho_{\mathcal{X}}$ is almost a NASYZ fibration. The essential difference is that the singular locus $\Gamma \subset \text{Sk}(\mathcal{X})$ of $\rho_{\mathcal{X}}$ may have codimension one.

3. KEY IDEAS OF THE PROOFS

Thanks to Theorem 2.5, we have a sufficient condition of Conjecture 1.2 expressed in terms of Berkovich geometry. In particular, to verify this comparison property, we need to study the following:

- (i) the behavior of the NACY metric ϕ^{NACY} ,
- (ii) the existence of the desired semistable snc model $\mathcal{X}$ such that $\rho_{\mathcal{X}}$ is compatible with ϕ^{NACY} .

In the sequel, we see the key points in Theorem 1.3 and Theorem 1.4 along these lines.

3.1. Abelian varieties. In this case, the NACY metrics ϕ^{NACY} have been implicitly studied as the *Néron–Tate height* (or *canonical height*) in Diophantine geometry; see [BG06, §9] for instance. On the other hand, the desired semistable snc model $\mathcal{X}$ is obtained as a so-called *Mumford model*, which is given in [Mum72]. The key observation here is that we can obtain an isomorphism $X^{\text{an}} \simeq T^{\text{an}}/P\mathbb{Z}^n$, where $T := \text{Spec } K[M]$ is a split algebraic torus with character group $M(\simeq \mathbb{Z}^n)$ and $P = (p_{ij})_{i,j} \in \text{Mat}_n(K)$. Then, a *tropicalization map* $\text{trop} : T^{\text{an}} \rightarrow N_{\mathbb{R}} := \text{Hom}(M, \mathbb{R})$, defined by $\text{trop}(x) = (m \mapsto -\log |z^m(x)|)$, is compatible with the Berkovich retraction

$$\rho_{\mathcal{X}} : X^{\text{an}}(\simeq T^{\text{an}}/P\mathbb{Z}^n) \twoheadrightarrow \text{Sk}(X)(\simeq N_{\mathbb{R}}/(-\log |P|)\mathbb{Z}^n), \quad (3.1.1)$$

where $-\log |P| := (\text{ord}_t(p_{ij}))_{i,j} \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$. In addition, ϕ^{NACY} can be understood as a theta-type function on $N_{\mathbb{R}}$ with respect to $(-\log |P|)\mathbb{Z}^n$. In particular, we can prove the retraction $\rho_{\mathcal{X}} : X^{\text{an}} \twoheadrightarrow \text{Sk}(X)$ is a NASYZ fibration for L^{an} with no singular locus, meaning that $\text{Sk}(X) \supset \Gamma = \emptyset$.

Also, by considering a uniformization-type argument [GO24, Lemma 2.6] for the family $\mathcal{X}$ that is compatible with the isomorphism $X^{\text{an}} \simeq T^{\text{an}}/P\mathbb{Z}^n$, we can prove the latter half of Theorem 1.3.

3.2. Calabi–Yau complete intersections in a toric Fano variety given by Batyrev–Borisov constructions. In this case, we can obtain the potentially desired semistable snc model $\mathcal{X}$ by Yamamoto’s construction [Yam24, §5.2]. Roughly speaking, our model $\mathcal{X}$ is obtained by successive blow-ups of the *toric degeneration* constructed in [Gro05, §3]. The key observation is that the associated Berkovich retraction $\rho_{\mathcal{X}} : X^{\text{an}} \twoheadrightarrow \text{Sk}(X)$ is compatible with a tropicalization map $\text{trop} : T_K^{\text{an}} \rightarrow N_{\mathbb{R}}$ for the maximal torus T_K of the ambient toric Fano variety Y_K of X over each open face of $\text{Sk}(X)$; see [GY24, Lemma 3.2]. Making use of this feature, we can consider a class of metrics on L^{an} induced by metrics on $\tilde{L}^{\text{an}}$ that are compatible with $\text{trop} : T_K^{\text{an}} \rightarrow N_{\mathbb{R}}$, which is called *toric metrics* (see [BGPS14, Definition 4.3.2]), where $\tilde{L}$ is an ample line bundle on Y_K such that $\tilde{L}|_X = L$. Within this class, the condition that $\phi \in \text{PSH}(X^{\text{an}}, L^{\text{an}})$ is the NACY metric can be rephrased in terms of the existence of a simultaneous solution to the real Monge–Ampère equations (1.0.5) on each open face of $\text{Sk}(X)$, as described in Theorem 1.4.

For Calabi–Yau hypersurfaces, prior to the work [GY24], the condition of Theorem 1.4 had already been established and studied. In particular, several concrete examples were known to satisfy our condition, implying that Conjecture 1.2 holds for such pairs $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$; see [PS22], [HJMM24], and [Li24]. Furthermore, in this case, our condition can be completely reformulated in terms of a condition involving *optimal transportation plans*, as shown in [AH23]. In particular, the authors of [AH23] also found examples that do not satisfy our condition by studying such optimal transportation plans. Here, note that this does not mean Conjecture 1.2 is false. However, this suggests that our condition is restrictive. Nevertheless, all currently known examples for which Conjecture 1.2 holds satisfy our condition; see [DH25] for additional examples.

REFERENCES

- [AH23] R. Andreasson and J. Hultgren, *Solvability of Monge–Ampère equations and tropical affine structures on reflexive polytopes*, arXiv:2303.05276, 2023.
- [BE21] S. Boucksom and D. Erikssen, *Spaces of norms, determinant of cohomology and Fekete points in non-Archimedean geometry*, *Advances in Mathematics* **378** (2021), 124pp.
- [BFJ15] S. Boucksom, C. Favre, and M. Jonsson, *Solution to a non-Archimedean Monge–Ampère equation*, *Journal of the American Mathematical Society* **28** (2015), no. 3, 617–667.
- [BG06] E. Bombieri and W. Gubler, *Heights in Diophantine geometry*, *New Mathematical Monographs*, vol. 4, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [BGGJ⁺20] J. Burgos Gil, W. Gubler, P. Jell, K. Künnemann, and F. Martin, *Differentiability of non-archimedean volumes and non-archimedean monge-ampère equations (with an appendix by robert lazarsfeld)*, *Algebraic Geometry* **7** (2020), no. 2, 113–152.
- [BGPS14] J. Burgos Gil, P. Philippon, and M. Sombra, *Arithmetic geometry of toric varieties. Metrics, measures and heights*, *Astérisque* (2014), no. 360, vi+222 pp.

- [BJ17] S. Boucksom and M. Jonsson, *Tropical and non-Archimedean limits of degenerating families of volume forms*, Journal de l'École polytechnique - Mathématiques **4** (2017), 87–139.
- [CLD12] A. Chambert-Loir and A. Ducros, *Formes différentielles réelles et courants sur les espaces de Berkovich*, arXiv:1204.6277, 2012.
- [DH25] T. Delcroix and J. Hultgren, *SYZ and optimal transport stability of Weyl polytopes*, Pure and Applied Mathematics Quarterly **21** (2025), no. 4, 1437–1451.
- [GO24] K. Goto and Y. Odaka, *Special Lagrangian fibrations, Berkovich retraction, and crystallographic groups*, International Mathematics Research Notices **2024** (2024), no. 2, 1650–1684.
- [Gro05] M. Gross, *Toric degenerations and Batyrev-Borisov duality*, Mathematische Annalen **333** (2005), no. 3, 645–688.
- [GY24] K. Goto and Y. Yamamoto, *Toric degenerations of Calabi–Yau complete intersections and metric SYZ conjecture*, arXiv:2407.09133, 2024.
- [HJMM24] J. Hultgren, M. Jonsson, E. Mazzon, and N. McCleerey, *Tropical and non-Archimedean Monge–Ampère equations for a class of Calabi–Yau hypersurfaces*, Advances in Mathematics **439** (2024), 42 pp.
- [KKMSD73] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint Donat, *Toroidal Embeddings*, Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag, 1973.
- [KS06] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Affine Structures and Non-Archimedean Analytic Spaces*, The Unity of Mathematics: In Honor of the Ninetieth Birthday of I.M. Gelfand (2006), 321–385.
- [Li23] Y. Li, *Metric SYZ conjecture and non-Archimedean geometry*, Duke Mathematical Journal **172** (2023), no. 17, 3227–3255.
- [Li24] ———, *Metric SYZ conjecture for certain toric Fano hypersurfaces*, Cambridge Journal of Mathematics **12** (2024), no. 1, 223–252.
- [LP24] T. Lemanissier and J. Poineau, *Espaces de berkovich globaux : catégorie, topologie, cohomologie*, Progress in Mathematics, vol. 353, Birkhäuser/Springer, 2024 (fr).
- [MN15] M. Mustață and J. Nicaise, *Weight functions on non-Archimedean analytic spaces and the Kontsevich–Soibelman skeleton*, Algebraic Geometry **2** (2015), no. 3, 365–404.
- [Mum72] D. Mumford, *An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings*, Compositio Mathematica **24** (1972), no. 3, 239–272.
- [NX16] J. Nicaise and C. Xu, *The essential skeleton of a degeneration of algebraic varieties*, American Journal of Mathematics **138** (2016), no. 6, 1645–1667.
- [NXY19] J. Nicaise, C. Xu, and T. Y. Yu, *The non-archimedean SYZ fibration*, Compositio Mathematica **155** (2019), no. 5, 953–972.
- [Oka36] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. I. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles*, Journal of Science of the Hiroshima University. Series A **6** (1936), 245–255 (fr).
- [Ost16] A. Ostrowski, *Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x) \cdot \varphi(x) = \varphi(xy)$* , Acta Mathematica **41** (1916), no. 1, 271–284 (de).
- [Poi10] J. Poineau, *La droite de Berkovich sur $\mathbf{Z}$* , Astérisque, no. 334, Société mathématique de France, 2010 (fr).
- [PS22] L. Pille-Schneider, *Hybrid toric varieties and the non-archimedean SYZ fibration on Calabi-Yau hypersurfaces*, arXiv:2210.05578, 2022.
- [PS23] L. Pille-Schneider, *Global pluripotential theory on hybrid spaces*, Journal de l'École polytechnique. Mathématiques **10** (2023), 601–658.
- [SYZ96] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow, *Mirror symmetry is T duality*, Nuclear Physics **479** (1996), 243–259.
- [Vil21] C. Vilsmeier, *A comparison of the real and non-archimedean Monge-Ampère operator*, Mathematische Zeitschrift **297** (2021), no. 1-2, 633–668.
- [Wei35] A. Weil, *L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables*, Mathematische Annalen **111** (1935), no. 1, 178–182 (fr).
- [Yam24] Y. Yamamoto, *Non-archimedean SYZ fibrations via tropical contractions*, arXiv:2404.04972, 2024.
- [Yau78] S. T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation*, Communications on Pure and Applied Mathematics **31** (1978), no. 3, 339–411.

(Keita Goto) GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA, MEGURO-KU, TOKYO 153-8914, JAPAN

Email address: k.goto.math@gmail.com

URL: <https://sites.google.com/view/keitagoto>

計量で割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体と測地線

上野 龍 (北海道大学)*

概 要

計量で割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体は、像が 2 次超曲面に含まれるアファインはめ込みによって誘導される統計多様体のクラスである。このクラスの統計多様体に対して明らかになったアファイン接続の大域的な性質を紹介する。特に、リーマン幾何学におけるホップ・リノウの定理の統計多様体版として、計量で割り切れる 3 次形式をもつ統計多様体において、アファイン接続の完備性から測地的連結性が導かれることを紹介する。

1 序

統計多様体 (M, ∇, g) とは振率が 0 であるアファイン接続 ∇ が与えられた多様体 M に、 ∇g が全対称となるリーマン計量 g を加えたものである。ここで、 $(0, 3)$ 型テンソル場 $C = \nabla g$ を統計多様体の **3 次形式** と呼び、組 (∇, g) を **統計構造** と呼ぶ。統計多様体はアファイン微分幾何学 [10] や情報幾何学 [1] などで登場する。

統計多様体 (M, ∇, g) に対して、ある関数 $\sigma \in C^\infty(M)$ が存在して以下が成り立つとき、統計多様体の 3 次形式は **計量 g で割り切れる** という：

$$C(X, Y, Z) = d\sigma(X)g(Y, Z) + d\sigma(Y)g(Z, X) + d\sigma(Z)g(X, Y), \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM). \quad (1.1)$$

この概念は [6] で初めて言及されており、例えば、アファインはめ込みによって誘導される統計多様体が計量で割り切れる 3 次形式を持つことは、アファインはめ込みの像が実アファイン空間内のある 2 次超曲面に含まれていることと同値である [10]。さらに近年、このクラスの統計多様体は重み付きリーマン多様体の文脈でも登場している [3, 9]。しかし、野口光宣 [5] 以降、このクラスの統計多様体はほとんど研究されていない。本講演では、計量で割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体について得られた結果を報告する。特に、アファイン接続の大域的な性質について進展が得られた。この講演は [8] に基づく。

2 統計多様体

統計多様体 (M, ∇, g) に対して、次の式により定まる M 上のアファイン接続 $\bar{\nabla}$ を **共役接続** と呼ぶ：

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \bar{\nabla}_X Z), \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

ここで、共役接続 $\bar{\nabla}$ の振率も 0 であり、 $(M, \bar{\nabla}, g)$ もまた統計多様体である。

* e-mail: ueno.ryu.g1@elms.hokudai.ac.jp

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2119 の支援を受けたものです。

統計多様体はアファイン微分幾何学を起源に持つ．中心アファイン微分幾何学の例を紹介する．

例 2.1 ([10]). 実アファイン空間への超曲面はめ込み $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ が, 各 $x \in M$ に対して $\mathbb{R}f(x) \oplus f_*(T_x M) = T_{f(x)}\mathbb{R}^{n+1}$ を満たすとき, f を中心アファインはめ込みと呼ぶ．ここで, ガウスの公式

$$D_X f_* Y = f_* \nabla_X Y - g(X, Y)f, \quad X, Y \in \Gamma(TM)$$

により, 振れがないアファイン接続 ∇ と対称 $(0, 2)$ 型テンソル場 g が M 上に誘導される．ここで, ∇g は全対称である．テンソル場 g が正定値であるとき, f は局所強凸であるといい, このとき (M, ∇, g) は統計多様体である．

定義 2.2. 関数 $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ が次の条件を満たすとき, ρ は多様体 M 上の **コントラスト関数**であるという:

- (1) ρ は $\{(q, q) \mid q \in M\}$ の周りで滑らかである．
- (2) 任意の $p, q \in M$ に対して $\rho(p, q) \geq 0$, 特に $\rho(p, q) = 0$ は $p = q$ と同値である．
- (3) 任意の $p \in M$ と 0 でない $X \in T_p M$ に対して, $(X^L X^R \rho)(p, p) < 0$ である．

ただし, $X^L = (X, 0)$, $X^R = (0, X) \in T_{(p,p)}(M \times M)$ である．

多様体 M 上にコントラスト関数 ρ が与えられたとき, 以下の式によって統計構造 (∇, g) が誘導される:

$$\begin{aligned} g_p(X, Y) &= -(X^L Y^R \rho)(p, p), \\ g_p(\nabla_X Y, Z) &= -(X^L Y^L Z^R \rho)(p, p). \end{aligned}$$

ただし, $p \in M$, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ である．例えば情報幾何学では, 多様体である統計的モデルにおいて, 統計構造がカルバック・ライブラー情報量と呼ばれるコントラスト関数によって誘導される．そして, 任意の統計多様体 (M, ∇, g) に対して, (∇, g) を誘導するコントラスト関数が少なくとも一つは M 上に存在する [4]．しかし, 良い性質を持つコントラスト関数が存在するかは統計多様体の幾何学における重要な研究課題である．

3 アファイン接続と測地線

以後, 多様体 M は連結であるとする．

定義 3.1. 多様体 M にアファイン接続 ∇ が与えられているとする．次式を満たす M 上の滑らかな曲線 $\gamma: I \rightarrow M$ を ∇ -**測地線**と呼ぶ:

$$(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})(t) = 0, \quad t \in I.$$

ここで, $\dot{\gamma}$ は曲線 γ の速度ベクトルである．任意の $(p, v) \in TM$ に対して $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ を満たす ∇ -測地線 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ が存在するとき, ∇ は**完備**であるという．

定義 3.2. アファイン接続 ∇ が測地的連結であるとは、多様体上の任意の 2 点が ∇ -測地線で結べることをいう。

リーマン幾何学においては、ホップ・リノウの定理によりレヴィ=チヴィタ接続は完備であれば測地的連結である。しかしこの定理は、一般のアファイン接続に対しては成り立たない。例えば、擬リーマン多様体であるド・ジッター空間のレヴィ=チヴィタ接続は完備だが測地的連結ではなく、統計多様体のアファイン接続でも反例が存在する [8]。

4 計量で割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体

統計多様体 (M, ∇, g) の 3 次形式 $C = \nabla g$ に対して、ある関数 $\sigma \in C^\infty(M)$ があって式 (1.1) が成り立つとき、3 次形式 C は計量 g で割り切れるという。このとき、3 次形式を $C = \text{sym}(d\sigma \otimes g)$ と表す。例えば、像が 2 次超曲面に含まれるアファインはめ込みによって誘導される統計構造は、計量によって割り切れる 3 次形式を持つ。また、統計多様体 (M, ∇, g) に対して $C = \text{sym}(d\sigma \otimes g)$ であるとき、共役接続 $\bar{\nabla}$ に対して $\bar{\nabla}g = \text{sym}(-d\sigma \otimes g)$ が成り立つため、統計多様体 $(M, \bar{\nabla}, g)$ も計量 g で割り切れる 3 次形式をもつ。

計量で割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体には等積構造が与えられる。

命題 4.1 ([8]). 次元が n の統計多様体 (M^n, ∇, g) が 3 次形式 $C = \text{sym}(d\sigma \otimes g)$ を持つとする。多様体 M 上の体積要素 $\theta = \exp(-\frac{n+2}{2}\sigma)\omega_g$ は $\nabla\theta = 0$ を満たす。ただし、 ω_g はリーマン計量 g による体積要素である。

さらに、もう一つリーマン計量が与えられる。

命題 4.2 ([8]). 統計多様体 (M, ∇, g) が 3 次形式 $C = \text{sym}(d\sigma \otimes g)$ を持つとき、多様体 M 上のリーマン計量 $\tilde{g} = \exp(\sigma)g$ のレヴィ=チヴィタ接続 $\nabla^{\tilde{g}}$ と ∇ は次の関係を持つ：

$$\nabla_X^{\tilde{g}} Y = \nabla_X Y + d\sigma(X)Y + d\sigma(Y)X, \quad X, Y \in \Gamma(TM). \quad (4.1)$$

関係式 (4.1) を満たす 2 つのアファイン接続は射影的に同値であるという。特に、アファイン接続に対して局所的に、アファイン接続と射影的に同値である平坦接続が存在するとき、アファイン接続は射影的に平坦であるという。

命題 4.3 ([8]). 統計多様体 (M, ∇, g) が 3 次形式 $C = \text{sym}(d\sigma \otimes g)$ を持つとする。アファイン接続 ∇ が射影的に平坦であることと、 $(M, \tilde{g} = \exp(\sigma)g)$ が定曲率リーマン多様体であることは同値である。

また、2 つのアファイン接続が射影的に同値であるとき、一方のアファイン接続の測地線に適当なパラメータ変換を行えばもう一方のアファイン接続の測地線が得られる。従って、命題 4.2 において ∇ と $\nabla^{\tilde{g}}$ の測地的連結性は同値である。

定理 4.4 ([8]). 統計多様体 (M, ∇, g) が 3 次形式 $C = \text{sym}(d\sigma \otimes g)$ を持ち、関数 σ は M 上で下に有界であるとする。このとき、以下が成り立つ：

- (1) ∇ が完備であるとき、 ∇ は測地的連結である。
- (2) ∇^g が完備であるとき、 ∇ は測地的連結である。

5 計量で割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体上のコントラスト関数

統計多様体 (M, ∇, g) は 3 次形式 $C = \text{sym}(d\sigma \otimes g)$ を持つとする。統計多様体 (M, ∇, g) には良い性質をもつコントラスト関数が誘導される。

命題 5.1 ([8]). リーマン計量 $\tilde{g} = \exp(\sigma)g$ による M 上の距離関数を $\tilde{d}$ とする。このとき、次で定める関数 ρ は統計構造 (∇, g) を誘導するコントラスト関数である：

$$\rho(p, q) = \exp(-\sigma(p))(\tilde{d}(p, q))^2, \quad p, q \in M. \quad (5.1)$$

このコントラスト関数を用いることで、アファイン接続の完備性を特徴付けすることができる。

定義 5.2. 多様体 M とコントラスト関数 ρ の組 (M, ρ) が劣位集合の意味で完備であるとは、ある $p \in M$ が存在して任意の $L > 0$ に対して閉集合 $C_L(p) = \{q \in M \mid \rho(p, q) \leq L\}$ がコンパクトになることである。

定理 5.3 ([8]). 統計多様体 (M, ∇, g) が 3 次形式 $C = \text{sym}(d\sigma \otimes g)$ を持つとし、コントラスト関数 ρ を式 (5.1) によって定める。このとき、以下が成り立つ：

- (1) ∇ が完備であり、 σ が下に有界であるとき、 (M, ρ) は劣位集合の意味で完備である。
- (2) (M, ρ) が劣位集合の意味で完備であり、 σ が上に有界であるとき、アファイン接続 ∇ は完備である。
- (3) (M, ρ) が劣位集合の意味で完備であり、 σ が下に有界であるとき、共役接続 $\bar{\nabla}$ は完備である。

従って、コンパクトな統計多様体 (M, ∇, g) が g で割り切れる 3 次形式を持つとき、アファイン接続 ∇ と共役接続 $\bar{\nabla}$ は共に完備かつ測地的連結である。(注意：コンパクト多様体上でも、一般にアファイン接続は完備とは限らず、また完備であっても測地的連結ではない例が存在する [2, 7].)

例 5.4. アファインはめ込み $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ において、 M がコンパクトかつ $f(M)$ が楕円面であるとする。このとき、 f によって誘導される統計構造 (∇, g) は g で割り切れる 3 次形式を持つ。従って、アファイン接続 ∇ と共役接続 $\bar{\nabla}$ に対して、定理 5.3 により $\nabla, \bar{\nabla}$ は共に完備であり、定理 4.4 により $\nabla, \bar{\nabla}$ は共に測地的連結である。

参考文献

- [1] S. Amari and H. Nagaoka, Differential Geometry of Smooth Families of Probability Distributions. Technical Report METR 82-7, University of Tokyo (1982)
- [2] L. Bates, You can't get there from here, Differential Geom. Appl. **8**(3), 273-274 (1998)
- [3] J. Li and C. Xia, An Integral Formula for Affine Connections, J. Geom. Anal. **27**(1), 2539-2556 (2017)
- [4] T. Matumoto, Any statistical manifold has a contrast function—on the C^3 -functions taking the minimum at the diagonal of the product manifold, Hiroshima Math. **23**(2), 327-332 (1993)
- [5] M. Noguchi, Geometry of statistical manifolds, Differential Geom. Appl. **2**(3), 197-222 (1992)
- [6] K. Nomizu, U. Pinkall, Cubic form theorem for affine immersions, Results Math. **13**(3-4), 338-362 (1988)
- [7] B. Opozda, Completeness in affine and statistical geometry, Ann. Global Anal. Geom., **59**(3), 367-383 (2021)
- [8] R. Ueno, Geodesic Connectedness on Statistical Manifolds with Divisible Cubic Forms, arXiv:2503.10024 (2025)
- [9] D. Yeroshkin, Holonomy of Manifolds with Density, arXiv:2009.08733 (2020)
- [10] 野水克己, 佐々木武, アファイン微分幾何学. 裳華房 (1994)

Hermitian-Yang-Mills 接続のモジュライ空間について

佐々木 淳 (東京科学大学 D1)*

概要

コンパクト Kähler 多様体と、その上の滑らかな Hermite ベクトル束を固定する．本講演では、

- その Hermitian-Yang-Mills 接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\text{HYM}}$ が適当な条件を満たす点のまわりで複素多様体であること、
 - 単純な Higgs 構造のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\text{Higgs}}$ に対して、 $\mathcal{M}_{\text{HYM}}$ から $\mathcal{M}_{\text{Higgs}}$ への連続で単射な開写像が存在すること、
- について、[3] で得られる結果を紹介する．

1 Higgs 束と Hermitian-Yang-Mills 接続

(M, g) を連結な n 次元コンパクト Kähler 多様体、 (E, h) を M 上の階数 r の滑らかな Hermite ベクトル束とする． $k \in \mathbb{Z}$ に対して、 $\Omega^k(E)$ で E に値をとる滑らかな k 形式のなすベクトル空間を表す．

定義 1.1. E の Higgs 構造とは、 $\mathbb{C}$ -線形写像 $D'' : \Omega^0(E) \rightarrow \Omega^1(E)$ で、以下の 2 条件を満たすもののことをいう．

(Leibniz 則) $\forall f \in C^\infty(M), \forall s \in \Omega^0(E), D''(fs) = fD''s + s \otimes \bar{\partial}f$

(可積分条件) $D'' \circ D'' = 0 : \Omega^0(E) \rightarrow \Omega^2(E)$

ベクトル束 E に Higgs 構造 D'' が与えられたとき、組 (E, D'') のことを Higgs 束という．これは正則ベクトル束の一般化である．Higgs 束の概念は、まず底空間が Riemann 面の場合に Hitchin[2] により導入され、その後 Simpson[4] によって一般次元の Kähler 多様体の場合に拡張された． E の Higgs 構造のなす集合には、 E のゲージ群が右から作用する．この作用に関する商空間を $\mathcal{M}_{\text{Higgs}}$ と書く．

E の接続 D が与えられたとき、計量 h により、 $D = D' + D''$ を満たす $\mathbb{C}$ -線形写像

* 〒152-8551 東京都 目黒区 大岡山 2-12-1 東京科学大学 理学院 数学系 数学コース
email: sasaki.j.ac@m.titech.ac.jp, sasaki.j.fb69@m.isct.ac.jp
本研究は科研費 (課題番号: 25KJ1222) の助成を受けたものである．

$D', D'' : \Omega^0(E) \rightarrow \Omega^1(E)$ が以下のように与えられる (cf. [5, p.13]). 接続 D を分解 $\Omega^1(E) = \Omega^{1,0}(E) \oplus \Omega^{0,1}(E)$ に従い $D = D^{1,0} + D^{0,1}$ と分解する. このとき, 半接続 $\tilde{D}^{1,0}, \tilde{D}^{0,1}$ であって, $D^{1,0} + \tilde{D}^{0,1}, D^{0,1} + \tilde{D}^{1,0}$ がそれぞれ (E, h) の計量接続となるものが一意に存在する. よって

$$\begin{aligned}\partial^E : \Omega^0(E) &\rightarrow \Omega^{1,0}(E), & \bar{\partial}^E : \Omega^0(E) &\rightarrow \Omega^{1,0}(E), \\ \theta : \Omega^0(E) &\rightarrow \Omega^{1,0}(E), & \theta^* : \Omega^0(E) &\rightarrow \Omega^{1,0}(E)\end{aligned}$$

をそれぞれ

$$\begin{aligned}\partial^E &= \frac{1}{2} (D^{1,0} + \tilde{D}^{1,0}), & \bar{\partial}^E &= \frac{1}{2} (D^{0,1} + \tilde{D}^{0,1}), \\ \theta &= \frac{1}{2} (D^{1,0} - \tilde{D}^{1,0}), & \theta^* &= \frac{1}{2} (D^{0,1} - \tilde{D}^{0,1})\end{aligned}\tag{1.1}$$

と定め, $D' = \partial^E + \theta^*, D'' = \bar{\partial}^E + \theta$ と定義する.

定義 1.2. E の接続 D が Hermitian-Yang-Mills (HYM) 接続であるとは, 以下の 2 条件を満たすことをいう.

(可積分条件) $D = D' + D''$ とするとき, D'' が E の Higgs 構造を定める.

(Hermitian-Yang-Mills (HYM) 方程式) D の曲率を $R(D)$ とするとき, D が以下の曲率方程式を満たす.

$$\sqrt{-1}\Lambda R(D) = c \operatorname{id}_E, \quad c = \frac{2\pi \deg E}{r \cdot (n-1)! \cdot \operatorname{Vol}(M, g)}$$

ただし Λ は (M, g) の Kähler 形式 ω による縮約であり, $\deg E = \int_M c_1(E) \wedge \omega^{n-1}$ である.

E の HYM 接続のなす集合には, (E, h) のゲージ群が右から作用する. この作用に関する商空間を $\mathcal{M}_{\text{HYM}}$ と書く.

E の接続 D が与えられたとき, (1.1) の記号を用いて $\nabla = \partial^E + \bar{\partial}^E, \Theta = \theta + \theta^*$ とすると, $D = \nabla + \Theta$ を満たす (E, h) の計量接続 ∇ と $\Theta \in \Omega^1(\operatorname{Herm}(E, h))$ を得る. このとき, HYM 方程式は以下のようにも記述できる.

$$\sqrt{-1}\Lambda(R(\nabla) + \Theta \wedge \Theta) = c \operatorname{id}_E$$

HYM 接続は, Hermitian-Einstein (HE) 接続の一般化である. これは, HYM 接続の定義における可積分条件を, 条件『 D'' が E の正則構造を定める』に置き換えることで定義されるものであり, その際, HYM 方程式は Hermitian-Einstein (HE) 方程式と呼ばれる.

2 無限小変形から得られる楕円型複体

HYM 接続 $D = \nabla + \Theta$ に対して, 次の楕円型複体を考える.

$$(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) : 0 \longrightarrow \mathcal{B}^0 \xrightarrow{D_{\text{End}(E)}} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{D_0} \mathcal{B}^0 \oplus \mathcal{C}^2 \xrightarrow{D_2} \mathcal{C}^3 \xrightarrow{D''_{\text{End}(E)}} \dots \xrightarrow{D''_{\text{End}(E)}} \mathcal{C}^{2n} \longrightarrow 0$$

ただし $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $\mathcal{B}^k = \Omega^k(\text{Herm}_{\text{skew}}(E, h))$, $\mathcal{C}^k = \Omega^k(\text{End}(E))$ であり, $\alpha_1 \in \mathcal{C}^1, \varphi + \alpha_2 \in \mathcal{B}^0 \oplus \mathcal{C}^2$ に対して, $\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1$ と歪 Hermite 成分と Hermite 成分に分解するとき,

$$D_0 \alpha_1 = \left(\Lambda(\nabla \beta_1 + [\Theta \wedge \gamma_1]), D''_{\text{End}(E)}(\beta_1'' + \gamma_1') \right), \quad D_2(\varphi + \alpha_2) = D''_{\text{End}(E)} \alpha_2$$

である.

$D = D' + D''$ とするとき, D'' は E の Higgs 構造を定めるため, Dolbeault-Higgs 複体 (cf.[1]) を考えることができる. それを $(\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*)$ とし, $(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*), (\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*)$ の k 次コホモロジー群をそれぞれ $H_D^k(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*), H_{D''}^k(\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*)$ とすると, それらの間に以下の関係が成り立つ.

命題 2.1. 実ベクトル空間の間関係として, 次の自然な同型写像がある.

- (1) $H_D^0(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq H_{D''}^0(\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*)$
- (2) $H_D^1(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) \simeq H_{D''}^1(\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*)$
- (3) $H_D^2(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) \simeq H_D^0(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) \oplus H_{D''}^2(\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*)$
- (4) $H_D^q(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) \simeq H_{D''}^q(\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*), q \geq 3$

また $\text{Herm}_{\text{skew}}^0(E, h), \text{End}^0(E)$ をそれぞれ $\text{Herm}_{\text{skew}}(E, h), \text{End}(E)$ のトレースフリーなものなす部分束とし, $(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*), (\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*)$ の定義において $\mathcal{B}^k, \mathcal{C}^k$ をそれぞれ

$$\tilde{\mathcal{B}}^k := \Omega^k(\text{Herm}_{\text{skew}}^0(E, h)), \quad \tilde{\mathcal{C}}^k := \Omega^k(\text{End}^0(E))$$

に置き換えて得られる部分複体を $(\tilde{\mathcal{B}}_{\text{HYM}}^*), (\tilde{\mathcal{C}}_{\text{Higgs}}^*)$ とする. これらの k 次コホモロジー群をそれぞれ $\tilde{H}_D^k(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*), \tilde{H}_{D''}^k(\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*)$ とするとき, これらの間にも命題 2.1 と同様の関係が成り立つ.

3 モジュライ空間の局所構造

HYM 接続 D に対して, D におけるスライス $\mathcal{S}_D$ を

$$\mathcal{S}_D = \{ \alpha \in \Omega^1(\text{End}(E)) \mid D_0 \alpha + Q(\alpha) = 0, D^* \alpha = 0 \}$$

と定める. ただし $\alpha \in \Omega^1(\text{End}(E))$ に対して, 歪 Hermite 成分と Hermite 成分に $\alpha = \beta + \gamma$ と分解するとき,

$$Q(\alpha) = (\Lambda(\beta \wedge \beta + \gamma \wedge \gamma), (\beta'' + \gamma') \wedge (\beta'' + \gamma'))$$

であり, 条件 $D_0\alpha + Q(\alpha) = 0$ は, $D + \alpha$ が (E, h) の HYM 接続であるための必要十分条件である. このとき, 陰関数定理を用いることで, 以下の補題が示せる.

補題 3.1 (スライスの補題). HYM 接続 D に対して, 写像 $p_D : \mathcal{S}_D \rightarrow \mathcal{M}_{\text{HYM}}$ を $p_D(\alpha) = [D + \alpha]$ とする. このとき, D が $\tilde{H}_D^0(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) = 0$ を満たすとする, $0 \in \mathcal{S}_D$ の近傍と $[D] \in \mathcal{M}_{\text{HYM}}$ の近傍で, p_D がそれらの間の同相写像となるものが存在する.

条件 $\tilde{H}_D^0(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) = 0$ は, HYM 接続 D が既約であることと同値である. また命題 2.1 よりこの条件は $\tilde{H}_{D''}^0(\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*) = 0$ とも同値であり, これは Higgs 束 (E, D'') が単純であることを意味する. ただし, Higgs 束 (E, D'') が単純であるとは, $D''_{\text{End}(E)}$ に関して平行な滑らかな $\text{End}(E)$ の切断が id_E の定数倍のものに限ることをいう.

楕円型複体 $(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*)$ の Green 作用素を G とするとき, 倉西写像 $k_D : \Omega^1(\text{End}(E)) \rightarrow \Omega^1(\text{End}(E))$ を

$$k_D(\alpha) = \alpha + (D_0^* \circ G)(Q(\alpha))$$

と定める. このとき, 調和積分論から, $k_D(\mathcal{S}_D) \subset H_D^1(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*)$ であることが分かる. また, 逆関数定理により, 以下の定理が示せる.

定理 3.2. HYM 接続 D が $\tilde{H}_D^2(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) = 0$ を満たすとき, $0 \in \mathcal{S}_D$ の近傍と $0 \in H_D^1(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*)$ の近傍で, 倉西写像 $k_D : \mathcal{S}_D \rightarrow H_D^1(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*)$ がそれらの間の同相写像となるものが存在する.

補題 3.1 と定理 3.2 を組みあわせることにより, モジュライ空間 $\mathcal{M}_{\text{HYM}}$ の, $\tilde{H}_D^0(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) = 0, \tilde{H}_D^2(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) = 0$ を満たす点 $[D]$ まわりの座標近傍を得る. またこのようにして得られる座標近傍に関して, 座標変換が正則であることが示せる. このことから, 次の定理を得る.

定理 3.3 ([3]). HYM 接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\text{HYM}}$ は, $\tilde{H}_D^0(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) = 0, \tilde{H}_D^2(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) = 0$ を満たす点 $[D]$ のまわりで複素多様体であり, その接空間は $H_D^1(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*)$ と同型である.

4 HYM 接続のモジュライ空間から Higgs 構造のモジュライ空間への埋め込み

写像 $f : \mathcal{M}_{\text{HYM}} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{Higgs}}$ を $f([D]) = [D'']$ とすると, これは well-defined である. $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{HYM}}, \widetilde{\mathcal{M}}_{\text{Higgs}}$ をそれぞれ既約な HYM 接続, 単純な Higgs 構造のモジュライ空間とする

と, $f(\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{HYM}}) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\text{Higgs}}$ であり, $f: \widetilde{\mathcal{M}}_{\text{HYM}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\text{Higgs}}$ は連続な単射となる. 更に, 陰関数定理から次が得られる.

定理 4.1 ([3]). f は開写像である.

この定理により, モジュライ空間 $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{HYM}}$ は $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{Higgs}}$ の開集合と同相であり, Higgs 束に対する Kobayashi-Hitchin 対応 [4] から, その開集合は slope 安定な Higgs 構造のモジュライ空間である.

参考文献

- [1] A. Fujiki, *HyperKähler structure on the moduli space of flat bundles*, Prospects in Complex Geometry, Lecture Notes in Math., vol. 1468, 1991, pp. 1–83.
- [2] N. J. Hitchin, *The Self-Duality Equations on a Riemann Surface*, Proc. London Math. Soc., vol. s3-55, 1987, pp. 59–126.
- [3] J. Sasaki, *The moduli space of Hermitian-Yang-Mills connections*, 2025, arXiv:2409.16625.
- [4] C. T. Simpson, *Constructing Variations of Hodge Structure Using Yang-Mills Theory and Applications to Uniformization*, J. Amer. Math. Soc., vol. 1, 1988, pp. 867–918.
- [5] ———, *Higgs bundles and local systems*, Publications Mathématiques de l’IHÉS, vol. 75, 1992, pp. 5–95.

特異点をもつ部分多様体の絶対全曲率

横浜国立大学大学院理工学府 数物・電子情報系理工学専攻

山内優太 (Yuta YAMAUCHI) *

概要

本講演では $(n+r)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+r}$ 内のフロンタルと呼ばれる、特異点をもつ n 次元部分多様体に対する Chern-Lashof の定理の拡張について紹介する。まず、 $\mathbf{R}^{n+r}$ 内の許容的かつコンパクトな n 次元フロンタルに対し、その絶対全曲率がベッチ数の総和以上となることを証明する。さらに、絶対全曲率が 2 に等しく、かつ全ての特異点が第一種である場合、そのフロンタルの像は $\mathbf{R}^{n+r}$ 内の n 次元アファイン部分空間に含まれる閉凸体と一致する。本講演の内容は [13] に基づく。

1 導入

n, r を正の整数とする。向き付けられたコンパクトな n 次元多様体 M^n から $(n+r)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+r}$ へのはめ込み $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ を考える。 B を f の単位法ベクトル束、 G を Lipschitz-Killing 曲率とする。この時、

$$\tau(M^n, f) = \frac{1}{\text{vol}(S^{n+r-1})} \int_B |G| d\mu_B$$

を f の絶対全曲率と呼ぶ。ただし $\text{vol}(S^{n+r-1})$ は $(n+r-1)$ 次元単位球面 S^{n+r-1} の体積を表す。絶対全曲率について、次が知られている。

事実 1.1 (Chern-Lashof の定理 [1, 2]). M^n を向き付けられたコンパクトな n 次元多様体、 $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ を $(n+r)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+r}$ へのはめ込みとする。

- (1) b_i を M^n の i 次ベッチ数とする ($0 \leq i \leq n$)。この時、絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ に対して以下が成り立つ。

$$\tau(M^n, f) \geq \sum_{i=0}^n b_i(M^n).$$

- (2) 絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ が 3 未満ならば、 M^n は n 次元単位球面 S^n と位相同型となる。
- (3) 絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ が 2 に等しいならば、像 $f(M^n)$ は $\mathbf{R}^{n+r}$ 内の n 次元アファイン部分空間に埋め込まれた凸超曲面となる。逆もまた成り立つ。

これまで Chern-Lashof の定理は様々な形で一般化されてきた (cf. [12, 7, 10, 3, 4])。一方、特異点を持つ部分多様体には絶対全曲率を定義されるクラスが存在する。Kossowski と Scherfner は特異点をもつ曲面として $\mathbf{R}^3$ 内の 2 次元波面に対して Chern-Lashof の定理を拡張した ([6])。しかし、そこでは最小絶対全曲率と凸性との関係は明らかにされていない。本講演では、さらに対象を広げて、 $\mathbf{R}^{n+r}$ 内の n 次元フロンタルに対して得られた Chern-Lashof 型定理と、最小絶対全曲率とフロンタルの凸性との関係について得られた結果を紹介する。

*E-mail: yamauchi-yuta-hj@ynu.jp

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2178 の支援を受けたものである。

2 準備

2.1 フロンタルと特異点

この節ではフロンタルの定義を紹介する．部分多様体の一般化としてのフロンタルの概念は [5] にて紹介されている．また，曲面，超曲面の場合は詳細に調べられている．詳しくは [8, 11] を見よ．

n, r を正の整数とする． n 次元多様体 M^n からユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+r}$ への滑らかな写像 $f : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ に対して，点 $p \in M^n$ で f がはめ込みであるとき p を**正則点**と呼び，そうでない時は**特異点**と呼ぶ． Σ_f を f の特異点集合とし，正則点集合 M_{reg}^n を $M_{\text{reg}}^n := M^n \setminus \Sigma_f$ とおく．正則点集合が稠密な写像 f が**フロンタル**であるとは， M^n 上の任意の点 p とその開近傍 U に対し，滑らかな写像 $\Pi : U \rightarrow \widetilde{Gr}(n, n+r)$ が存在して，

$$df_q(X) \in \Pi(q) \quad (q \in U, X \in T_q M^n)$$

を満たす時をいう．ここで $\widetilde{Gr}(n, n+r)$ は $\mathbf{R}^{n+r}$ 内の向き付き n 次元部分空間のグラスマン多様体を指す．また，このような Π を f の **generalized Gauss map** と呼ぶ．

定義 2.1. フロンタル $f : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ の generalized Gauss map Π が M^n 上で大域的に定められる時，フロンタル f は**余向き付け可能**であるという．

例として，はめ込み f は余向き付け可能である．これは， $\Pi(q) := df_q(T_q M^n)$ ($q \in M^n$) とおくことで確かめられる． M^n の二重被覆を取ることで，必要ならば一般性を失うことなく f を余向き付け可能とすることができる．よって，本稿ではフロンタルは余向き付け可能だと仮定する．

フロンタル f とその generalized Gauss map Π に対し， $\Pi^\perp(p)$ を $\Pi(p)$ の直交補空間とする．任意の M^n の座標近傍 $(U; u_1, u_2, \dots, u_n)$ に対し， U 上の関数 λ を

$$\lambda(p) = \det(f_1(p), f_2(p), \dots, f_n(p), E_1(p), \dots, E_r(p))$$

で定める．ただし， $f_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}$ とし， $\{E_1, \dots, E_r\}$ は $\Pi^\perp$ の滑らかな正規直交枠である．この λ を f の**符号付き体積密度関数**と呼ぶ． p がフロンタル f の特異点であることと， $\lambda(p) = 0$ であることは同値である．

定義 2.2. 特異点 $p \in M^n$ が**非退化特異点**であるとは， $(d\lambda)_p$ が 0 とならないことを指す．

非退化性は，局所座標の取り方及び正規直交枠の取り方に依らない．

補題 2.3 (cf. [13]). 特異点 p が非退化特異点であるとき， $\text{rank}(df)_p = n - 1$ が成り立つ．

p をフロンタル $f : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ の非退化特異点とする．補題 2.3 より， $\dim(\ker(df)_p) = 1$ が成り立つ．この $\ker(df)_p$ を p における**退化空間**と呼ぶ．フロンタル $f : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ の特異点が全て非退化特異点であるならば，陰関数定理より特異点集合 Σ_f は M^n の $n - 1$ 次元部分多様体となる．

定義 2.4. フロンタル $f : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ の特異点は全て非退化特異点であるとする． p を特異点とした時， $\ker(df)_p \not\subset T_p \Sigma_f$ が成り立つならば， $p \in M^n$ を**第 1 種特異点**と呼び，そうでない時は $p \in M^n$ を**第 2 種特異点**と呼ぶ．

C_f を M^n 上の f の第 2 種特異点の集合とする．

定義 2.5 ([13]). フロンタル $f : M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ が以下を満たす時， f を**許容的なフロンタル**と呼ぶ

- 非退化特異点のみを持つ．
- ある Σ_f の超曲面 $\mathcal{H}$ が存在し， $C_f \subseteq \mathcal{H}$ が成り立つ．

例として，特異点が全て第 1 種特異点であるフロンタルは許容的である．また，高々 A_{k+1} 特異点をもつフロンタルは許容的である (cf. [9]).

2.2 絶対全曲率

ここでは Lipschitz-Killing 曲率の定義を紹介し、許容的なフロンタルに対して絶対全曲率を定める (定義 2.8).

ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^{n+r}$ に対し、 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ で標準的な内積を表す. また、 $\mathbf{u}$ のノルムを $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ で表す. 各 $p \in M^n$ に対し $B_p = \{\mathbf{v} \in \Pi^\perp(p) \mid \|\mathbf{v}\| = 1\}$ と表し、 f の単位法ベクトル束 B を

$$B = \bigcup_{p \in M^n} B_p$$

で定める. B の滑らかな切断を f の単位法ベクトル場と呼ぶ. N を f の単位法ベクトル場とする. この時、正則点集合 M_{reg}^n 上で次のワインガルテンの公式が成り立つ.

$$D_X N = -df(A_N X) + D_X^\perp N.$$

ただし、 X を M^n 上の任意のベクトル場、 D を $\mathbf{R}^{n+r}$ の標準的な接続、 $D^\perp$ を法接続、 A_N を N に関する型作用素とする. B_{reg} を $B_{\text{reg}} := \bigcup_{p \in M_{\text{reg}}^n} B_p$ によって定める. $(p, \xi) \in B_{\text{reg}}$ に対し、**Lipschitz-Killing 曲率** $G(p, \xi)$ を

$$G(p, \xi) = \det A_\xi$$

で定める.

M^n の局所座標系 $(U; u_1, \dots, u_n)$ に対し、

$$d\hat{V} = \lambda du_1 \wedge \dots \wedge du_n, \quad dV = |\lambda| du_1 \wedge \dots \wedge du_n$$

をそれぞれ f の符号付き体積要素, (符号無し) 体積要素と呼ぶ. この時、 $d\hat{V}$ は局所座標 $(u_1, \dots, u_n)$ と $\Pi^\perp$ の向きに同調した正規直交枠 $\{E_1, \dots, E_r\}$ の取り方に依らない. また、 dV は M^n の向きに同調した局所座標 $(u_1, \dots, u_n)$ の取り方、及び $\Pi^\perp$ の向きに同調した正規直交枠 $\{E_1, \dots, E_r\}$ の取り方に依らない. また、 $d\sigma$ を B の各ファイバー上の体積要素とし、 B の符号付き体積要素 $d\hat{\mu}_B$, (符号無し) 体積要素 $d\mu_B$ をそれぞれ

$$d\hat{\mu}_B = d\hat{V} \wedge d\sigma, \quad d\mu_B = dV \wedge d\sigma$$

によって定める.

滑らかな写像

$$\nu : B \rightarrow S^{n+r-1}; (p, \xi) \mapsto \xi$$

を f の標準的ガウス写像と呼ぶ.

命題 2.6 ([13, Proposition 2.5]). $d\mu_{S^{n+r-1}}$ を S^{n+r-1} の体積要素とする. この時、標準的ガウス写像 ν による $d\mu_{S^{n+r-1}}$ の引き戻しを $\nu^* d\mu_{S^{n+r-1}}$ と表す. B_{reg} 上で以下が成り立つ.

$$\nu^* d\mu_{S^{n+r-1}} = (-1)^n G(p, \xi) d\hat{\mu}_B$$

したがって、 G を B_{reg} 上で定義される Lipschitz-Killing 曲率とすると、命題 2.6 より $G(p, \xi) d\hat{\mu}_B$ は特異点集合を越えて B 全体で定義されるなめらかな $(n+r-1)$ 次微分形式を定める. したがって、次の系が得られる.

系 2.7 ([13, Corollary 2.6]). $|G(p, \xi)| d\mu_B$ は B 上の連続な $(n+r-1)$ 次微分形式である.

今後、 M^n を向き付けられたコンパクトな n 次元多様体、 $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ は許容的なフロンタルであるとし、 Π を f の generalized Gauss map とする。この時、 f の特異点はすべて非退化であるため、特異点集合 Σ_f は M^n 内の超曲面となる。 $\bar{f}$ を f の Σ_f への制限とする。 $\bar{\Pi}: \Sigma_f \rightarrow \widetilde{Gr}(n-1, n+r)$ を

$$\bar{\Pi}(p) := (df)_p(T_p M^n) \quad (p \in \Sigma_f)$$

と定める。この時、 p は非退化特異点であるため、補題 2.3 より $df_p(T_p M^n)$ は $(n-1)$ 次元部分空間になることに注意する。 $\bar{\Pi}$ は $\bar{f}$ の generalized Gauss map となるので、 $\bar{f}: \Sigma_f \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ は余向き付け可能なフロンタルとなる。 $\bar{f}$ の単位法束、標準的ガウス写像、Lipschitz-Killing 曲率をそれぞれ $\bar{B}, \bar{\nu}, \bar{G}$ とおく。

定義 2.8 ([13]). M^n をコンパクトかつ向き付け可能な n 次元多様体とし、 $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ は余向き付け可能な許容的なフロンタルであるとする。この時、絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ を次のように定める。

$$\tau(M^n, f) = \frac{1}{\text{vol}(S^{n+r-1})} \int_B |G(p, \xi)| d\mu_B + \frac{1}{\text{vol}(S^{n+r-1})} \int_{\bar{B}} |\bar{G}(q, \eta)| d\mu_{\bar{B}}.$$

3 主結果

フロンタルに対する Chern-Lashof 型定理として、次の定理 A を得た。

定理 A ([13]). M^n をコンパクトかつ向き付け可能な n 次元多様体とし、 $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ は余向き付け可能な許容的なフロンタルであるとする。この時、以下が成り立つ。

- (1) b_i を M^n の i 次ベッチ数とする ($0 \leq i \leq n$)。この時、絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ に対して以下が成り立つ。

$$\tau(M^n, f) \geq \sum_{i=0}^n b_i(M^n).$$

- (2) 絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ が 3 未満ならば、 M^n は n 次元単位球面 S^n と位相同型となる。
- (3) 絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ が 2 に等しいならば、像 $f(M^n)$ は $\mathbf{R}^{n+r}$ 内の n 次元アファイン部分空間に含まれる。

Chern-Lashof の定理 (事実 1.1) と比べて、定理 A はフロンタルの像が $(n+1)$ 次元アファイン部分空間に含まれることまでしか主張できていない。しかし、特異点について条件を加えることで次の定理 B を得られる。

定理 B ([13]). M^n をコンパクトかつ向き付け可能な n 次元多様体とし、 $f: M^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+r}$ を余向き付け可能なフロンタルであるとする。特異点集合 Σ_f が空でなく、かつ特異点が全て第 1 種特異点であるとする。この時、 $\tau(M^n, f) = 2$ であることと、次の三つの条件が同時に成り立つことは同値となる。

- (a) f の像 $f(M^n)$ は n 次元アファイン部分空間に含まれる閉凸体となる、
- (b) M^n は S^n と同相であり、 Σ_f は S^{n-1} と同相である、
- (c) 特異点集合の像 $f(\Sigma_f)$ は $f(M^n)$ の境界と一致する。

Chern-Lashof の定理 (事実 1.1) の場合、最小全曲率をもつはめ込み f の像 $f(M^n)$ は $(n+1)$ 次元アファイン部分空間に含まれたが、定理 B の場合、最小全曲率をもつフロンタル f の像 $f(M^n)$ は n 次元アファイン部分空間に含まれることに注意する。

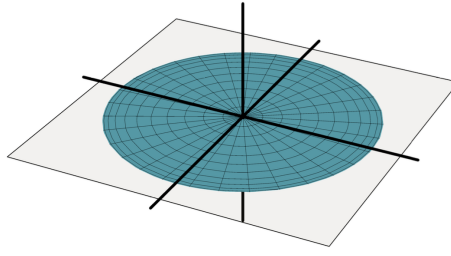


図 1: $\mathbf{R}^3$ 内の定理 B の仮定を満たす, 絶対全曲率が 2 のフロンタルの図.

参考文献

- [1] S. -S. Chern and R. K. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds*, Am. J. Math. **79** (1957), 306–318.
- [2] S. -S. Chern and R. K. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds. II*, Mich. Math. J. **5** (1958), 5–12.
- [3] J. A. Hoisington, *On the total curvature and Betti numbers of complex projective manifolds*, Geom. Topol. **26** (2022), 1–45.
- [4] A. Honda, C. Tanaka, and Y. Yamauchi, *The total absolute curvature of closed curves with singularities*, Adv. Geom. **25** (2025), 93–104.
- [5] G. Ishikawa. *Singularities of frontals*, in: Singularities in Generic Geometry, in: Advanced Studies in Pure Mathematics (ASPM), vol. 78, Math. Soc. Japan, 2018, pp. 55–106.
- [6] M. Kossowski and M. Scherfner, *Total curvature for C^∞ -singular surfaces with limiting tangent bundle*, Ann. Global Anal. Geom. **28** (2005), 179–199.
- [7] N. Koike, *The Lipschitz-Killing curvature for an equiaffine immersion and theorems of Gauss-Bonnet type and Chern-Lashof type*, Result. Math. **39** (2001), 230–244.
- [8] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. Math. **169-2** (2009), 491–529.
- [9] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *A_k singularities of wave fronts*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **146** (2009), 731–746.
- [10] E. Teufel and G. Solanes, *Horo-tightness and total (absolute) curvatures in hyperbolic spaces*, Isr. J. Math. **194** (2013), 427–459.
- [11] M. Umehara, K. Saji, and K. Yamada, *Differential geometry of curves and surfaces with singularities*, Series in Algebraic and Differential Geometry 1. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Hackensack, NJ, xvi, 370 p. (2022).
- [12] T. J. Willmore and B. A. Saleemi, *The total absolute curvature of immersed manifolds*, J. Lond. Math. Soc. **41** (1966), 153–160.
- [13] Y. Yamauchi, *The total absolute curvature of submanifolds with singularities*, preprint (arXiv:2412.19147).

Analysis of Contraction Mappings to the Complement of Closed Curves

折笠 俊一郎 (京都大学)*

概 要

スカラー曲率と剛性に関する Gromov の問題提起に対する講演者の研究 [Ori25] を中心に、本稿ではその幾何学的背景とアプローチを概説する。

1. 背景:剛性が破れるのはいつか?

スカラー曲率に関して、「剛性」と呼ばれる現象が知られている。その中でも最も基本的な定理は以下の Llarull によるものである。ここで Riemann 多様体 X, Y 間の C^1 級写像 $f: X \rightarrow Y$ が **1-contracting** であるとは $\text{Dil}_1(f) \leq 1$ であることとし、**area-decreasing** であるとは $\text{Dil}_2(f) \leq 1$ であることとする。(次節の k -dilation $\text{Dil}_k(f)$ の定義も参照。) 以降 S^n は単位球面 $S^n = (S^n, g_{std})$ とする。

Theorem 1.1 (Llarull, [Lla98]) M を n 次元のコンパクト、スピン Riemann 多様体とする。さらに写像度が非ゼロの 1-contracting map $f: (M, g) \rightarrow (S^n, g_{std})$ および任意の $x \in M$ に対して、

$$Sc(g)_x \geq n(n-1)$$

を仮定する。このとき $f: (M, g) \xrightarrow{\cong} (S^n, g_{std})$ は等長同型である。

したがって、上の定理の帰結として特に、球面上の Riemann 計量 g であって $Sc(g) \geq Sc(g_{std}) \equiv n(n-1)$ および $g \geq g_{std}$ を各点で満たすならば、 $g \equiv g_{std}$ であることがわかる。

近年の Gromov による問い ([Gro18]) として、上記のような剛性は、部分集合 Σ を除いていくと破れるのであろうか? という問いが提起されている。

Question 1.2 (Gromov, [Gro18]) $\Sigma \subset S^n$ を余次元 2 以上の閉部分集合とし、 g を $S^n \setminus \Sigma$ 上の Riemann 計量であって $g \geq g_{std}$ かつ $Sc(g) \geq Sc(g_{std}) \equiv n(n-1)$ を満たすとする。このとき Σ がどのような条件であれば、 $g \equiv g_{std}$ となるか?

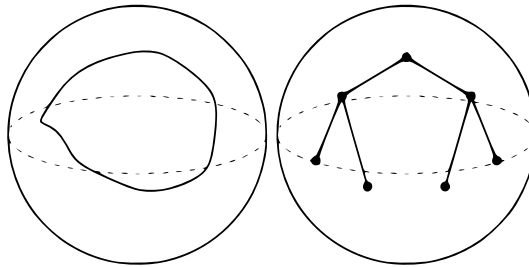


図 1: 単位球面内の閉部分集合 Σ

上の問いは完備性を課さないが、定義域が完備な場合も Riemann 多様体の端がワイルドである可能性も含むので、十分難しく次の問いもある。

Question 1.3 (Gromov, [Gro18]) $\Sigma \subset S^n$ を余次元 2 以上の閉部分集合とし、 X を向き付けられた n 次元完備 Riemann 多様体とする。また、 $f: X \rightarrow S^n \setminus \Sigma$ を proper かつ写像度が非

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2110 の支援を受けたものである。

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学理学研究科 数学教室

e-mail: orikasa.shunichiro.34x@st.kyoto-u.ac.jp

ゼロの滑らかな写像とし、さらにこの写像が 1-contracting (または area-decreasing) であるとする。このとき Σ がどのような条件であれば、 $\inf Sc(X) < n(n-1)$ となるか? 特に滑らかな閉曲線 $Z \subset S^n (n \geq 3)$ で、単位球面のスピン構造に関するホロノミーが非自明なものに対して、不等式 $\inf Sc(X) < n(n-1)$ が成り立つかどうか?

これらの問いに対する先行研究は Question 1.2 に関して、適切な条件下で剛性が成り立つという結果がある。(Σ が有限集合で特に対蹠点の場合 [BBH⁺24] の結果がある。また計量が L^∞ 計量のクラスで Σ が単位半球面に含まれる場合の研究 [WX24] があるようである。) Question 1.3 に関しては [Xie23] で Σ が単位半球面に含まれ、1-dilation の条件を緩めた場合の結果があるが、元の問いの設定で特にホロノミーが非自明な場合は知られていなかった。

本講演の主定理は、Question 1.3 の部分的な解答を与えるものである。本講演の内容は [Ori25] に基づく。主定理の前に定義を行う。Theorem 1.5 において、埋め込まれた閉曲線 Σ と任意の管状近傍 $W(\Sigma)$ を考える。このときホモロジー類 $h \in H_2(S^n, W(\Sigma); \mathbb{R})$ に対して、

$$\text{Area}_g(h) := \inf \{ \text{Area}_g(C); [C] = h, C \in C_2(S^n, W(\Sigma); \mathbb{R}) \}$$

と定める。(stable norm とも呼ばれる、stable norm については [Kat07] を参照。)

まず Question 1.3 に関して Gromov により主張がされていた Theorem 1.4 の証明を与えた。

Theorem 1.4 ([Ori25]) $n = 2m$ とする。 $\Sigma \subset S^n$ を有限個の辺を持つ tree ないし、閉曲線であって Σ 上での主スピン束 $P_{\text{Spin}(n)}(S^n)|_\Sigma$ のモノドロミー変換が自明であると仮定する。 (X, g) を n 次元のスピン完備 Riemann 多様体とする。 $f: X \rightarrow S^n \setminus \Sigma$ が proper かつ写像度が非ゼロの 1-contracting な写像であるとき、次の評価が成り立つ：

$$\inf_{x \in X} Sc(g)_x < n(n-1)$$

次に Theorem 1.5 でホロノミーが非自明な場合に関して、 Σ を張る曲面の面積とホロノミーの条件のもとで次の結果を与えた。

Theorem 1.5 ([Ori25]) $n > 4$ かつ $n \equiv 0 \pmod{4}$ とする。ある普遍定数 $C(n)$ が存在して、以下の主張が成り立つ: Σ を滑らかに埋め込まれた閉曲線 $\iota: S^1 \hookrightarrow S^n$ とし、 g を $S^n \setminus \Sigma$ 上の完備 Riemann 計量とし、 S^+ を S^n 上の positive spinor bundle、 $\{e^{2\pi i \theta_i}\}_i$ は $\iota^* S^+$ に沿ったホロノミーパラメータとする。 $f: (S^n \setminus \Sigma, g) \rightarrow S^n \setminus \Sigma$ は 1-contracting な微分同相写像とし、

$$\text{Area}_g(h) > C(n) \cdot \max_i \{|\theta_i|\}$$

とする。(ただし $W(\Sigma)$ は Σ の任意の管状近傍、 $h \in H_2(S^n, W(\Sigma); \mathbb{Z})$ は整数係数の生成元) このとき次の評価が成り立つ:

$$\inf_{x \in X} Sc(g)_x < n(n-1)$$

証明方法は Gromov-Lawson の解析 [GL83] (の定量版) と閉曲線の近傍を変形する写像を組み合わせることによる。今回用いた Gromov-Lawson の解析 [GL83] は Schoen-Yau の手法 [SY87] と関係するものであり、次節でその説明を行う。

2. スカラー曲率による Riemann 多様体への幾何学的制約

本節では、必要な概念の定義を導入しつつ、スカラー曲率によって Riemann 多様体に与える幾何学的制約の概要を振り返る。まず、スカラー曲率と多様体 M のトポロジーとの関係を理解することは、微分幾何学における主要な問題の一つである。よく知られているように n 次元トーラス T^n は正のスカラー曲率を持つ計量を許容しない。

Theorem 2.1 (Schoen-Yau ,[SY87], Gromov-Lawson, [GL83]) T^n 上の Riemann 計量 g が非負のスカラー曲率を持つならば, g は平坦である.

この定理は, Schoen-Yau により次元 $n < 8$ の場合に [SY87] において証明された. その証明は極小曲面の手法によるものである. この結果は最終的に, Gromov-Lawson が spinor を用いて任意の次元に対して一般化した ([GL83] を参照).

本稿の話題のように, T^n から部分集合 K を除いた場合に, その補集合 $T^n \setminus K$ 上に正のスカラー曲率をもつ計量が存在するかどうか, というのは自然に生じる問いである. この問いに対する近年の進展は述べないが, [GL83] により K が部分多様体 $T^{n-1} \subset T^n$ と共通部分を持たないコンパクト部分集合であるとき, $T^n \setminus K$ 上に完備な正スカラー曲率計量が存在しないことは知られている. これは Theorem 2.5 から従う事実である.

まず, Riemann 多様体 $(M^m, g), (N^n, h)$ の間の C^1 級写像 $f : M \rightarrow N$ に対して, その k -dilation を以下のように定義する:

Definition 2.2 $F : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ を C^1 級写像とする. F は k -dilation を以下で定義する.

$$\text{Dil}_k(F) := \sup_{\Sigma^k \subset M} \frac{\text{Vol}_k(F(\Sigma))}{\text{Vol}_k(\Sigma)},$$

ここで Σ^k は滑らかな k 次元部分多様体であり, Vol_k は k 次元 Hausdorff 測度である.

この量は微分 $dF_x : T_x M \rightarrow T_{F(x)} N$ の特異値分解から得られる特異値 $s_1 \geq s_2 \geq \dots$ を用いて計算することで, $\text{Dil}_k(F) = \sup_{x \in M} |\wedge^k dF_x|$ と等しいことがわかる.

Remark 2.3 $\text{Dil}_k(F)$ は, 次元 k が異なると真に異なる状況を生み出すことがある. たとえば, ユークリッド空間内の単位閉球 $\bar{B}^3 \rightarrow \bar{B}^2$ の全射であって Dil_2 を任意に小さくできる写像の族が存在し, これは Dil_1 の場合とは異なる現象である. またスカラー曲率に関しても, area-enlargeable であって enlargeable でないコンパクト多様体が存在するかどうかは, 現在のところ分かっていない (cf. [CS21]).

(area-)enlargeable の定義は以下である.

Definition 2.4 M を次元 n の向き付けられた連結 C^∞ 級多様体とし, $k \in \{1, 2\}$ とする. M 上の Riemann 計量 g が **enlargeable in dimension k** であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 以下を満たす連結被覆 $\widetilde{M} \rightarrow M$ と写像

$$f : (\widetilde{M}, \bar{g}) \rightarrow \mathbb{S}^n$$

が存在することをいう:

- f はコンパクト台を持つ, すなわちあるコンパクト部分集合 $K \subset \widetilde{M}$ が存在して, $f|_{\widetilde{M} \setminus K}$ は定値写像である.
- f は写像度が 0 でない (f はコンパクト台を持つため写像度が定義できる).
- f は k -dimensionally ε -contracting である. つまり $\text{Dil}_k(f) \leq \varepsilon$.

ここで, $\bar{g}$ は g を被覆空間 $\widetilde{M}$ に持ち上げた Riemann 計量である. 任意の (完備であるか否かを問わず) Riemann 計量 g に対して, M が enlargeable in dimension k であるとき, M を **enlargeable in dimension k** という. (M がコンパクトならば, すべての計量が同値であるため, ある 1 つの計量に対して条件を確認するだけで十分である.) 特に $k = 2$ のとき, area-enlargeable と呼ばれ, $k = 1$ のときには単に enlargeable という.

enlargeable であれば area-enlargeable である. また先ほどの $T^n \setminus K$ (ただし K は部分多様体 $T^{n-1} \subset T^n$ と共通部分を持たないコンパクト部分集合) は area-enlargeable である. 次の結果がよく知られている.

Theorem 2.5 (Gromov-Lawson, [GL83]) area-enlargeable な多様体は、正のスカラー曲率を持つ完備 Riemann 計量を持たない。

それでは、スカラー曲率が正であるとき、Riemann 多様体に課される幾何学的制約はどのようなものがあるか。最も代表的な結果は、以下の Gromov-Lawson による Urysohn 幅の評価である。

Theorem 2.6 (Gromov-Lawson, [GL83]) (M^3, g) を単連結な 3 次元完備 Riemann 多様体とし、 $Sc(g) \geq 2$ を満たすとする。このとき、距離グラフ (K, d) と 1-Lipschitz 写像 $\varphi : (M, g) \rightarrow (K, d)$ が存在し、任意の点 $p \in K$ に対して

$$\text{diam}(\varphi^{-1}(p)) \leq \frac{12}{\sqrt{3}}\pi$$

が成り立つ。つまり M の Urysohn 1-幅が $\frac{12}{\sqrt{3}}\pi$ 以下であることを意味する。

スカラー曲率が体積の比 $\frac{\text{Vol}(B_g(p; r))}{\omega^n r^n}$ の $r \rightarrow 0$ におけるテイラー展開の 2 次の係数として現れることに着目した Theorem 2.6 の一般化に相当する結果も知られている。次の Guth による 2 つの結果の証明では、ある被覆を用いて空間を近似し、その脈体に関して極小曲面論を用いた解析を行う手法に基づいている。

Theorem 2.7 (Guth, [Gut11]) ある定数 $n > 0$ が存在して、次のことが成り立つ。 (M^n, g) を閉 Riemann 多様体とし、ある半径 $R > 0$ が存在して、 (M^n, g) 内の任意の半径 R のボールの体積が高々 nR^n であると仮定する。このとき、Urysohn 幅 $UW_{n-1}(M^n, g) \leq R$ が成り立つ。

さらに球面への写像と体積の増大に関しては、次のことが示されている。

Theorem 2.8 (Guth, [Gut11]) (M^n, g) から単位球面への写像度 1 の 1-Lipschitz 写像 $f : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ があるとする。このとき任意の $R \leq 1$ に対して

$$V(R) \geq \delta(n)R^n$$

が成り立つ。

再び spinor を用いた手法に戻る。極小曲面を用いたアプローチではスカラー曲率が正の下で、極小曲面の直径や 2 次シストールの評価が示されていた。その類似が Dirac operator の解析にも存在し、主に次の結果の証明に用いられた。(この手法は [GL83] において Schoen-Yau の手法と spinor を用いた手法の関係性として指摘されている。)

Theorem 2.9 (Gromov-Lawson, [GL83]) X をコンパクトな enlargeable 多様体とする。このとき $X \times \mathbb{R}^2$ 上において、次の条件を満たすような様に正のスカラー曲率を持つ完備な Riemann 計量 g は存在しない： $X \times \mathbb{R}^2$ 内に、 $\{*\} \times \mathbb{R}^2$ と同じ局所有限ホモロジー類に属し、かつ面積有限な proper に埋め込まれた曲面が存在しない。

Theorem 1.5 の証明は、この Gromov-Lawson の解析の応用によるものである。

3. 主結果の証明の概略

本節では、主結果 Theorem 1.5 の証明の概略について述べる (Theorem 1.4 も同様の議論によって示される)。証明は背理法による。つまり $\inf_{x \in X} Sc(g)_x \geq n(n-1)$ を仮定する。Llarull の定理 [Lla98] の証明と同様に単位球面上の Clifford 束 $Cl(TS^n)$ の f による引き戻しを考えたい。より正確には、 $f : S^n \setminus \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \Sigma$ に Σ の管状近傍の deform を施した h に対して引き戻し $E = h^*Cl(TS^n)$ を考える。次元が 4 以上であるため、 S^1 が標準的な埋め込みとアイソトピックになる。上記の h と整合的になるような微分同相写像 $\phi : S^n \setminus \Sigma \rightarrow S^{n-2} \times \mathbb{R}^2$ を固定する。 ϕ に $\mathbb{R}^2$ の動径方向と偏角の方向の成分を合成することで、 $\delta : S^n \setminus \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 、および $\beta : X_{>0} \rightarrow S^1$ を定める。ただし δ による level set を $X_{[a,b]} := \delta^{-1}([a,b])$ のように定める。

次のステップとして微分1形式 $\varphi = \beta^* d\theta$ を考え、以下の「Plateau問題」を考察する：

$$e(a) := \inf \{ \text{Area}_g(T) \mid T \in C_2(X_{[0,a]}, X_{[a-1,a]}), \partial T(\varphi) = 1 \}.$$

この関数 $e(a)$ は単調非減少である。仮に

$$\lim_{a \rightarrow \infty} e(a) \leq C(n) \cdot \max_i \{ |\theta_i| \}$$

が成立すると、境界が Σ の管状近傍にかかるような

十分大きいサイクルで条件を破るものが取れてしまう。よって $\lim_{a \rightarrow \infty} e(a) > C(n) \cdot \max_i \{ |\theta_i| \}$ が必要である。($C(n)$ は最後のステップで取り方が確定する。)

以上により $e(a)$ は下からの評価がとれて、Gromov-Lawson の議論 [GL83] (の定量版) により微分2形式の comass ノルム $\|d\omega\|$ の制約を満たす微分1形式 φ の拡張 ω がとれる。これを元に Clifford 束と X の端で同型になる複素ベクトル束 F が構成される (この構成において h の定め方を用いる)。つまり、 S^1 上では Clifford 束の接続1形式は θ_i を用いて直線束の直和に分解され、 h を用いて X の端においては引き戻される。 ω を用いて X 上に拡張された直線束と大域的な接続1形式が定まりそれらの直和として F を定義すればよい。

最後のステップでは、インデックスの計算を行う。まず、twisted Dirac operator $\mathcal{D}_E^+$ および $\mathcal{D}_F^+$ の解析的インデックスがゼロであることは Weitzenböck formula より導かれる。さらに relative index theorem より twisted Dirac operator の解析的インデックスの差は特性類 ($\hat{A}$ 類と Chern 類) で計算される。解析的インデックスはゼロである一方、トポロジカルなインデックスは非ゼロであり矛盾が導かれる。

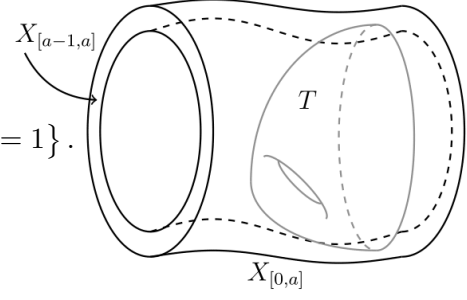


図 2: T の状況

参考文献

- [BBH⁺24] Christian Bär, Simon Brendle, Bernhard Hanke, Yipeng Wang, et al., *Scalar curvature rigidity of warped product metrics*, SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications **20** (2024), 035.
- [CS21] Simone Cecchini and Thomas Schick, *Enlargeable metrics on nonspin manifolds*, Proceedings of the American Mathematical Society **149** (2021), no. 5, 2199–2211.
- [GL83] Mikhael Gromov and H Blaine Lawson, *Positive scalar curvature and the dirac operator on complete riemannian manifolds*, Publications Mathématiques de l’IHÉS **58** (1983), 83–196.
- [Gro18] Misha Gromov, *Metric inequalities with scalar curvature*, Geometric and Functional Analysis **28** (2018), 645–726.
- [Gut11] Larry Guth, *Volumes of balls in large riemannian manifolds*, Annals of mathematics (2011), 51–76.
- [Kat07] Mikhail Gersh Katz, *Systolic geometry and topology*, no. 137, American Mathematical Soc., 2007.
- [Lla98] Marcelo Llarull, *Sharp estimates and the dirac operator*, Mathematische Annalen **310** (1998), no. 1, 55–71.
- [Ori25] Shunichiro Orikasa, *Analysis of contraction mappings to the complement of closed curves*, 2025, arXiv:2502.15135 [math.DG].
- [SY87] Richard Schoen and Shing-Tung Yau, *The structure of manifolds with positive scalar curvature*, Directions in partial differential equations, Elsevier, 1987, pp. 235–242.
- [WX24] Jinmin Wang and Zhizhang Xie, *Scalar curvature rigidity of spheres with subsets removed and l^∞ metrics*, 2024.
- [Xie23] Zhizhang Xie, *A quantitative relative index theorem and gromov’s conjectures on positive scalar curvature (with an appendix by jinmin wang and zhizhang xie)*, Journal of Noncommutative Geometry **17** (2023), no. 2, 609–662.

アファインはめ込みと quasi-Codazzi 構造

嘉陽海渡 (Kaito KAYO)*

概要

2つの torsion-free なアファイン接続が非退化な計量に関して双対であるとき、これを Codazzi 構造と呼ぶ。非退化な等積アファインはめ込みが与えられたとき、その誘導接続やアファイン基本形式を用いて、Codazzi 構造が自然に誘導されることが知られている。また逆に、Codazzi 構造が与えられたとき、それを誘導するアファイン接続が存在するための条件も知られている。本研究では、Codazzi 構造の定義を退化する計量を許容するように拡張し、それが（退化）等積アファインはめ込みと、上述のような関係を持つことを示す。

1 はじめに

多様体がアファインはめ込みとして実現可能であるための条件を調べることは、微分幾何における重要な問題の一つである。1918 年、Radon は 2 次元多様体がアファインはめ込みとして実現できるための条件を調べた [8]。一方、多次元の場合については 1990 年に Dillen–Nomizu–Vranksen により、統計構造が関与する形でその理論が拡張された [3]（定理 2.7）。統計構造は Codazzi 構造とも呼ばれ、計量を用いて定義される幾何構造である。講演者は先行研究 [4] において、quasi-Codazzi 構造を導入した。これは計量の退化を許容するように Codazzi 構造を一般化した幾何構造である。本研究では、quasi-Codazzi 構造が自然に現れる具体例としてアファインはめ込みを取り上げる。さらに、定理 2.7 の仮定を退化する計量へと弱めた際には、quasi-Codazzi 構造が関与する形で定理が拡張できることを紹介する。以下に概要を述べる。

2つの torsion-free なアファイン接続が計量に関して双対な関係にあるとき、それらを Codazzi 構造と呼ぶ。特にそのアファイン接続が共に平坦であるときには Hesse 構造と呼ばれ、Hesse 構造は様々な応用を持つ。しかし、応用上は計量が退化する場合があります。そのような場合には Hesse 構造を定義することができない。Nakajima–Ohmoto [6] により、計量の退化を許容する Hesse 構造として quasi-Hesse 構造が導入された。今回紹介する quasi-Codazzi 構造は Codazzi 構造の一般化であり、特に、接続が共に平坦な quasi-Codazzi 構造は quasi-Hesse 構造となっている。

アファインはめ込みとは超曲面はめ込み $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ と横断的ベクトル場 ξ の組であり、特にアファインはめ込みが非退化かつ等積であるとき、 M 上に計量とアファイン接続が誘導され、それらは Codazzi 構造をなす。逆に、アファイン微分幾何学の基本定理より、Codazzi 構造が与えられたとき、それを誘導する非退化等積アファインはめ込みが存在するための条件も知られている。本研究では、同様の関係が quasi-Codazzi 構造に対しても成り立つことを示す。すなわち、（退化）等積アファインはめ込みが与えられたときそれが quasi-Codazzi 構造を誘導することを示し、逆に quasi-Codazzi 構造が与えられたとき、それを誘導する（退化）等積アファインはめ込みが存在するための条件を報告する。

*E-mail : kayo.kaito.b9@elms.hokudai.ac.jp

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2119 の支援を受けたものです。

2 準備

2.1 Codazzi 構造

本節では統計多様体の定義とその性質を解説する．より詳しい解説は [1, 2, 5] を参照されたい． (M, h) を n 次元擬リーマン多様体とし， ∇ を M 上のアファイン接続とする．また， $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ とする．

定義 2.1 ([1, 2, 5]). ∇ の計量 h に関する双対接続 ∇^* を次で定義する．

$$Xh(Y, Z) = h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla_X^* Z).$$

h の非退化性より ∇^* は一意に存在し，明らかに $(\nabla^*)^* = \nabla$ が成り立つ．

また， ∇ と ∇^* が共に torsion-free，つまり，

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \quad \nabla_X^* Y - \nabla_Y^* X - [X, Y] = 0$$

が成り立つとき，3 つ組 (h, ∇, ∇^*) を M 上の Codazzi 構造という．特に ∇ と ∇^* が共に平坦（曲率が消えている）なとき，Hesse 構造と呼ぶ

命題 2.2 ∇ が torsion-free であるとする．このとき， ∇^* が torsion-free であるという条件と $(0, 3)$ -テンソル $\nabla h(X, Y, Z) := Xh(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$ が全対称であることが同値である．

2.2 アファインはめ込み

本節ではアファインはめ込みの定義と性質を紹介する．より詳しい解説は [5, 7] を参照されたい． $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ をはめ込み， D を $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の標準接続とする．

定義 2.3 $\xi \in \Gamma(f^*T\mathbb{R}^n)$ が f に沿った横断的ベクトル場であるとき，つまり，直和分解 $T\mathbb{R}^n = f_*TM \oplus \text{Span}\{\xi\}$ が成り立つとき，組 $\{f, \xi\}$ をアファインはめ込みと呼ぶ．

アファインはめ込み $\{f, \xi\}$ が与えられたとき，上記の直和分解を用いて， M 上に次の諸量が誘導される：

$$D_X f_* Y = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi, \quad D_X \xi = -f_*(S(X)) + \tau(X)\xi.$$

∇ を誘導接続， h をアファイン基本形式， S をアファイン型作用素， τ を横断的接続形式と呼ぶ．特に ∇ は torsion-free であり， h は対称性をもつ．これらの諸量は次の 4 つの基本方程式をみたすことが知られている．

- (i) Gauss 方程式： $R^\nabla(X, Y)Z = h(Y, Z)S(X) - h(X, Z)S(Y)$;
- (ii) Codazzi 方程式 (I)： $(\nabla_X h)(Y, Z) + \tau(X)h(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z) + \tau(Y)h(X, Z)$;
- (iii) Codazzi 方程式 (II)： $(\nabla_X S)(Y) - \tau(X)S(Y) = (\nabla_Y S)(X) - \tau(Y)S(X)$;
- (iv) Ricci 方程式： $h(X, S(Y)) - h(S(X), Y) = (\nabla_X \tau)(Y) - (\nabla_Y \tau)(X) = d\tau(X, Y)$.

$\tau \equiv 0$ が成り立つとき, $\{f, \xi\}$ を等積アファインはめ込みと呼ぶ. また, h が非退化であるときには $\{f, \xi\}$ を非退化アファインはめ込みと呼ぶ. $\{f, \xi\}$ が非退化等積アファインはめ込みであるとき, Codazzi 方程式 (I) と命題 2.2 により (h, ∇, ∇^*) は Codazzi 構造となる. ただし, ∇^* は ∇ の h に関する双対接続である.

例 2.4 $f: \mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, \phi(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\xi = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ とする. ただし, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ である. このとき $\{f, \xi\}$ はアファインはめ込みとなり, 特に ϕ によるグラフはめ込みと呼ばれる. グラフはめ込みに対して諸量を計算すると, 各 i, j について,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0, \quad h\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}, \quad S \equiv 0, \quad \tau \equiv 0$$

となる. したがって h が非退化, つまり ϕ のヘッセ行列が正則行列であるとき, グラフはめ込みは Hesse 構造を誘導する.

アファインはめ込みにより誘導される Codazzi 構造について, 双対接続は次のようにして構成することもできる.

定義 2.5 $\mathbb{R}_{n+1}$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ の双対空間とし, $\langle \alpha, \mathbf{v} \rangle := \alpha(\mathbf{v})$ とする. ただし, $\alpha \in \mathbb{R}_{n+1}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ である. このとき, 余法線写像 $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}_{n+1}$ を各点 $p \in M$ で

$$\langle \nu(p), f_* X_p \rangle = 0, \quad \langle \nu(p), \xi_p \rangle = 1$$

をみたすようにとる.

余法線写像の定義より, 微分写像 ν_* を計算すると,

$$\langle \nu_* X, f_* Y \rangle = -h(X, Y), \quad \langle \nu_* X, \xi \rangle = -\tau(X)$$

が成り立つ. したがって, h が非退化であるとき ν ははめ込みとなり, さらに ν は自身に横断的である. つまり, $\{\nu, -\nu\}$ はアファインはめ込みとなる. このとき $\{\nu, -\nu\}$ により誘導される接続は ∇ の h に関する双対接続となっている.

また, Codazzi 構造を誘導するアファインはめ込みの存在性について次の事実が知られている.

定義 2.6 ∇ を torsion-free なアファイン接続とする. 局所的に平坦な接続 $\bar{\nabla}$ と閉形式 ρ が存在し

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \rho(X)Y + \rho(Y)X$$

をみたすとき, ∇ を射影平坦であるという.

定理 2.7 [3] M を単連結多様体, (h, ∇, ∇^*) を Codazzi 構造とする. ∇ の Ricci テンソルが対称, ∇^* が射影平坦であるとき. この Codazzi 構造を誘導するアファインはめ込み $\{f, \xi\}$ が存在する.

3 Quasi-Codazzi 構造

本節では quasi-Codazzi 構造の定義, 及び, その構造と等積アファインはめ込みとの関連を紹介する. ここで quasi-Codazzi 構造とは, Codazzi 構造を計量の退化を許容するように拡張したもの

である．今回は簡単のために quasi-Codazzi 構造を特別な形で定義する．より詳細な定義は [4] を参照されたい．

E^+ を M 上の n 階のベクトル束， E^- を E^+ の双対ベクトル束とし， $E = E^+ \oplus E^-$ を $2n$ 階のベクトル束とする．また， $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ， $\eta^\pm, \zeta^\pm \in \Gamma(E^\pm)$ とする． E 上の計量 θ を

$$\theta(\eta^+ \oplus \eta^-, \zeta^+ \oplus \zeta^-) = \frac{1}{2} \{ \zeta^-(\eta^+) + \eta^-(\zeta^+) \}$$

として定める．

定義 3.1 ∇^+ を E^+ 上の接続とする．双対接続 ∇^- を E^- 上の接続として，次で定める．

$$X\theta(\eta^+, \eta^-) = \theta(\nabla_X^+ \eta^+, \eta^-) + \theta(\eta^+, \nabla_X^- \eta^-).$$

θ の非退化性から ∇^- は一意に決まる．

束写像 $\Phi := \Phi^+ \oplus \Phi^- : TM \ni X \mapsto \Phi^+(X) \oplus \Phi^-(X) \in E^+ \oplus E^-$ を $\text{rank } \Phi = n$ かつ $\theta(\Phi^+(X), \Phi^-(Y)) = \theta(\Phi^+(Y), \Phi^-(X))$ が成り立つようにとる．このとき， M 上の対称 $(0, 2)$ テンソル h を $h(X, Y) := \theta(\Phi(X), \Phi(Y))$ として定めると， $h(X, Y) = 2\theta(\Phi^+(X), \Phi^-(Y))$ が成り立つ．

定義 3.2 次の 2 つの条件，

$$\nabla_X^+ \Phi^+(Y) - \nabla_Y^+ \Phi^+(X) - \Phi^+([X, Y]) = 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla_X^- \Phi^-(Y) - \nabla_Y^- \Phi^-(X) - \Phi^-([X, Y]) = 0 \quad (3.2)$$

が成り立つとき，組 $(h, E, \Phi, \nabla^+, \nabla^-)$ を M 上の quasi-Codazzi 構造と呼ぶ．特に ∇^+ と ∇^- が共に平坦（曲率が消えている）なとき，quasi-Hesse 構造となる [6]．

注意 3.3 $(h, E, \Phi, \nabla^+, \nabla^-)$ を quasi-Codazzi 構造とする． h が非退化であることと， Φ^+ と Φ^- が同型写像になっていることは同値である．したがって， h が非退化であるときには， M 上のアファイン接続 ∇, ∇^* を $\Phi^+(\nabla_X Y) = \nabla_X^+ \Phi^+(Y)$ ， $\Phi^-(\nabla_X^* Y) = \nabla_X^- \Phi^-(Y)$ として定義することができる．このとき条件 (3.1) から，

$$\begin{aligned} \Phi^+(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) &= \Phi^+(\nabla_X Y) - \Phi^+(\nabla_Y X) - \Phi^+([X, Y]) \\ &= \nabla_X^+ \Phi^+(Y) - \nabla_Y^+ \Phi^+(X) - \Phi^+([X, Y]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ． ∇^* も同様である．したがって， ∇ と ∇^* は共に torsion-free であり， (h, ∇, ∇^*) は Codazzi 構造となる．

命題 3.4 M 上の $(0, 3)$ テンソル C を

$$C(X, Y, Z) = -2\{\theta(\nabla_X^+ \Phi^+(Y), \Phi^-(Z)) - \theta(\Phi^+(Z), \nabla_X^- \Phi^-(Y))\}$$

で定める． $\Phi^+ : TM \rightarrow E^+$ が同型であり，条件 (3.1) が成り立つと仮定する．このとき，条件 (3.2) が成り立つことと， C が全対称であることが同値である．

注意 3.5 Φ^+ が同型のとき, $\Phi^+(\nabla_X Y) := \nabla_X^+ \Phi^+(Y)$ として M 上の接続を定義すると,

$$\begin{aligned} C(X, Y, Z) &= -2\{\theta(\nabla_X^+ \Phi^+(Y), \Phi^-(Z)) - \theta(\Phi^+(Z), \nabla_X^- \Phi^-(Y))\} \\ &= -2\{\theta(\nabla_X^+ \Phi^+(Y), \Phi^-(Z)) - X\theta(\Phi^+(Z), \Phi^-(Y)) + \theta(\nabla_X^+ \Phi^+(Z), \Phi^-(Y))\} \\ &= 2\{X\theta(\Phi^+(Z), \Phi^-(Y)) - \theta(\Phi^+(\nabla_X Y), \Phi^-(Z)) - \theta(\Phi^+(\nabla_X Z), \Phi^-(Y))\} \\ &= Xh(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \\ &= \nabla h(X, Y, Z) \end{aligned}$$

が成り立つ.

例 3.6 (h, ∇, ∇^*) を M 上の Codazzi 構造とする. $E = E^+ \oplus E^- := TM \oplus T^*M$, $\Phi^+(X) := \text{id}(X)$, $\Phi^-(X) := h(X, -)$, $\nabla^+ := \nabla$, $\nabla_X^- \Phi^-(Y) := \Phi^-(\nabla_X^* Y)$ とする. このとき, $(h, TM \oplus T^*M, \Phi^+ \oplus \Phi^-, \nabla^+, \nabla^-)$ が quasi-Codazzi 構造となる.

次に (退化) 等積アファインはめ込みから自然に quasi-Codazzi 構造が誘導されることを紹介する. $\{f, \xi\}$ を等積アファインはめ込み, ν を余法線写像とする. $E = E^+ \oplus E^- := f_*TM \oplus (f_*TM)^*$, $\Phi^+ := f_*$, $\Phi^- := -\nu_*$ とし, E^+ 上の接続 ∇^+ を $\nabla_X^+ f_*(Y) := f_*(\nabla_X Y)$ とする. h は非退化とは限らないので ∇ の双対接続は定義できない. しかし, θ を用いて E^- 上に定義 3.1 の意味で双対接続を取ることができる.

$$X\theta(\eta^+, \eta^-) = \theta(\nabla_X^+ \eta^+, \eta) + \theta(\eta^+, \nabla_X^- \eta).$$

∇^+ の定義から条件 (3.1) が成り立ち, さらに, Codazzi 方程式 (I) と命題 3.4 から条件 (3.2) も成り立つ. したがって, $(h, f_*TM \oplus (f_*TM)^*, f_* \oplus -\nu_*, \nabla^+, \nabla^-)$ は quasi-Codazzi 構造になっている.

例 3.7 $\{f, \xi\}$ を ϕ によるグラフはめ込みとする. 例 2.4 では ϕ のヘッセ行列が正則行列であるときには Hesse 構造が誘導されることを紹介した. もし正則でないときには, 上記の記号の取り方によって quasi-Hesse 構造が誘導される.

逆に quasi-Codazzi 構造が与えられたとき, それを誘導するアファインはめ込みが存在するための条件は以下の通りである.

定義 3.8 $\mathcal{E}$ を M 上の n 階のベクトル束, $\nabla^\mathcal{E}$ を $\mathcal{E}$ 上の接続, $\psi: TM \rightarrow \mathcal{E}$ を束写像とし,

$$\nabla_X^\mathcal{E} \psi(Y) - \nabla_Y^\mathcal{E} \psi(X) - \psi([X, Y]) = 0$$

をみたすとする. $\nabla^\mathcal{E}$ が $(\mathcal{E}, \psi)$ に関して射影平坦であるとは, 局所的に $\mathcal{E}$ 上の平坦接続 $\bar{\nabla}^\mathcal{E}$ と $\rho \circ \psi$ が閉形式となる $(0, 1)$ -テンソル $\rho: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し,

$$\bar{\nabla}_X^\mathcal{E} \gamma = \nabla_X^\mathcal{E} \gamma + \rho(\gamma) \psi(X) + \rho \circ \psi(X) \gamma$$

が成り立つときをいう. ただし, $\gamma \in \Gamma(\mathcal{E})$ である.

定理 3.9 M を単連結多様体, $(h, E, \Phi^+ \oplus \Phi^-, \nabla^+, \nabla^-)$ を M 上の quasi-Codazzi 構造, Φ^+ は同型とする. この quasi-Codazzi 構造を誘導するアファインはめ込みが存在するための条件は, $\text{tr}\{\eta^- \mapsto R^-(X, Y)\eta^-\} = 0$ かつ, ∇^- が (E^-, Φ^-) に関して射影平坦であることである. ただし, R^- は ∇^- の曲率である.

参考文献

- [1] S. Amari, *Information Geometry and Its Application*, Applied Math. Sci., 194, Springer (2016).
- [2] S. Amari, H. Nagaoka, *Method of Information Geometry*, A.M.S., Oxford Univ. Press (2000).
- [3] F. Dillen, K. Nomizu, L. Varanken, Conjugate Connections and Radon's Theorem in Affine Differential Geometry, *Monatsh. Math.* **109** (1990), 221–235
- [4] K. Kayo, Statistical manifold with degenerate metric, *Information Geometry* **7** (2024), 229–252.
- [5] H. Matsuzoe, Statistical manifolds and affine differential geometry, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **57** (2010), 303–321.
- [6] N. Nakajima, T. Ohmoto, The dually flat structure for singular models, *Information Geometry. J.* **4** (2021), 31–64.
- [7] K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine Differential Geometry-Geometry of Affine Immersions-*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [8] J. Radon, Die Grundgleichungen der affinen Flächentheorie, *Leipziger Berichte* **70** (1918), 91–107.

対合付き 4 次元正則シンプレクティック多様体の解析的振率

今池 大 (ウエスタンデジタル合同会社)

1 導入

解析的振率は、コンパクト Kähler 多様体の Laplacian のスペクトルに対して定まる実数であり、Ray と Singer によって導入された。吉川は、K3 曲面と反シンプレクティック対合の組に対して、解析的振率の同変版である同変解析的振率を用いた不変量を構成した。この不変量は、各変形族のモジュライ空間上の関数として或る方程式を満たしている。さらにこの不変量は、Borcherds 積と Siegel モジュラー形式のテンソル積として得られる保型形式の Petersson ノルムで表されることも示されている。

単連結なコンパクト Kähler 多様体 X であって、至る所非退化な正則 2-形式 η が存在して $H^0(X, \Omega_X^2)$ が η で生成される時、 X を正則シンプレクティック多様体という。 X は複素偶数次元であり、2 次元正則シンプレクティック多様体は K3 曲面である。また、K3 曲面の n 点の Hilbert スキームもまた正則シンプレクティック多様体である。このような多様体と変形同値な正則シンプレクティック多様体を $K3^{[n]}$ 型多様体という。正則シンプレクティック多様体 X の正則対合 $\iota: X \rightarrow X$ であって、 $H^0(X, \Omega_X^2)$ に -1 倍で作用するものを反シンプレクティック対合と呼ぶ。

本講演では、 $K3^{[2]}$ 型多様体とその反シンプレクティック対合の組について考察する。この同変解析的振率を用いて不変量を構成し、周期領域から定まる直交型モジュラー多様体上の関数としてある方程式を満たすことを示す。またその応用として吉川の不変量や、ある種の 4 次元 Calabi-Yau 多様体の BCOV 不変量との比較に関する結果を紹介する。

2 不変量の構成

不変量を構成するために、まず同変解析的振率を定義する。 V をコンパクト Kähler 多様体、 $\theta: V \rightarrow V$ を正則対合とする。 θ が生成する位数 2 の群を μ_2 と表し、 θ により誘導される V の μ_2 -作用を考える。 $\overline{E} = (E, h_E)$ を μ_2 -同変正則ベクトル束とその μ_2 -不変 Hermite 計量の組とする。 $g \in \mu_2$ に対して、 $\overline{E}$ の同変解析的振率を、

$$\tau_g(\overline{E}) = \exp\left\{-\sum_{q \geq 0} (-1)^q q \zeta'_{0,q,g}(0)\right\}$$

と定義する．ここで， $\zeta_{0,q,g}(s)$ は， V 上の E に値をとる滑らかな $(0,q)$ -形式に作用するラプ
ラシアンのゼータ関数である． $g = 1$ の場合には， $\tau_1(\bar{E})$ の代わりに $\tau(\bar{E})$ と表す．

(X, ι) を反シンプレクティック対合付き $K3^{[2]}$ 型多様体とする． h_X を X の ι 不変 Kähler
計量とし，対応する Kähler 形式を ω_X とする．簡単のため h_X は Ricci 平坦であると仮定す
る． h_X が誘導する正則余接束 Ω_X^1 の Hermite 計量も h_X で表す． $\bar{\Omega}_X^1 = (\Omega_X^1, h_X)$ の同変
解析的振率を $\tau_\iota(\bar{\Omega}_X^1)$ と表す．

対合 $\iota : X \rightarrow X$ の固定点集合を X^ι とする． X^ι は連結とは限らない滑らかな複素曲面で
ある．自明直線束 $\mathcal{O}_{X^\iota}$ とその自明な計量の組を $\bar{\mathcal{O}}_{X^\iota}$ で表す． $\bar{\mathcal{O}}_{X^\iota}$ の解析的振率を $\tau(\bar{\mathcal{O}}_{X^\iota})$
と表す．

$t = \text{Tr}(\iota^*|_{H^{1,1}(X)})$ とする． (X, ω_X) の体積を $\text{Vol}(X, \omega_X)$ で表す． $\omega_{X^\iota} = \omega_X|_{X^\iota}$ とし，
 $(X^\iota, \omega_{X^\iota})$ の体積を $\text{Vol}(X^\iota, \omega_{X^\iota})$ で表す． $\text{Vol}_{L^2}(H^1(X^\iota, \mathbb{Z}), \omega_{X^\iota})$ を $H^1(X^\iota, \mathbb{R})$ の格子
 $\text{Im}(H^1(X^\iota, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X^\iota, \mathbb{R}))$ の， ω_{X^ι} が誘導する L^2 -計量に関する余体積とする．

定義 1. 実数 $\tau(X, \iota)$ を次のように定める．

$$\tau(X, \iota) = \tau_\iota(\bar{\Omega}_X^1) \text{Vol}(X, \omega_X)^{\frac{(t-1)(t-7)}{16}} \tau(\bar{\mathcal{O}}_{X^\iota})^{-2} \text{Vol}(X^\iota, \omega_{X^\iota})^{-2} \text{Vol}_{L^2}(H^1(X^\iota, \mathbb{Z}), \omega_{X^\iota}).$$

定理 2 ([6]). $\tau(X, \iota)$ は ι 不変な Ricci 平坦 Kähler 計量の取り方に依らず， (X, ι) の不変量
を与える．

格子 L_2 を $L_2 = L_{K3} \oplus \mathbb{Z}e$ と定める．ここで， L_{K3} は $K3$ 格子， e は $e^2 = -2$ と
 $(e, L_{K3}) = 0$ を満たす元である．Boissière-Camere-Sarti [1] は，対合付き $K3^{[2]}$ 型多様体
 (X, ι) の不変部分空間 $H^2(X, \mathbb{Z})^\iota$ として得られる L_2 の双曲型部分格子を分類した．このよ
うな格子を許容的部分格子と呼ぶ．許容的部分格子 M に対し， $K3^{[2]}$ 型多様体の MBM 類か
ら M の正錐に部屋構造が定まり，各部屋は Kähler 的部屋と呼ばれる．対合付き $K3^{[2]}$ 型多
様体の変形同値類は許容的部分格子 M と Kähler 的部屋 $\mathcal{K}$ の組によって定まる．

反シンプレクティック対合付き $K3^{[2]}$ 型多様体 (X, ι) は， $(M, \mathcal{K})$ に対応する変形同値類に
属する時， $(M, \mathcal{K})$ 型対合付き $K3^{[2]}$ 型多様体であるという． $(M, \mathcal{K})$ 型対合付き $K3^{[2]}$ 型多様
体の同型類全体の集合を $\tilde{\mathcal{M}}_{M, \mathcal{K}}$ と表す．Joumaah[7] は $(M, \mathcal{K})$ 型対合付き $K3^{[2]}$ 型多様体
の周期の空間として直交型モジュラー多様体 $\mathcal{M}_{M, \mathcal{K}}$ と，周期写像 $P_{M, \mathcal{K}} : \tilde{\mathcal{M}}_{M, \mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{M, \mathcal{K}}$
を構成し， $P_{M, \mathcal{K}}$ の像が Zariski 開部分集合 $\mathcal{M}_{M, \mathcal{K}}^\circ := \mathcal{M}_{M, \mathcal{K}} \setminus \bar{\mathcal{Q}}_{M^\perp}$ であることを示した．
ここで $\bar{\mathcal{Q}}_{M^\perp}$ は $\mathcal{M}_{M, \mathcal{K}}$ の或る因子である．さらに周期写像 $P_{M, \mathcal{K}} : \tilde{\mathcal{M}}_{M, \mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{M, \mathcal{K}}^\circ$ は或る
因子を除いて単射であることを示した．

定理 2 と Joumaah の定理により，不変量 τ を各 $\mathcal{M}_{M, \mathcal{K}}^\circ$ 上の関数の見なすことができる．
このようにして τ から得られる $\mathcal{M}_{M, \mathcal{K}}^\circ$ 上の関数を $\tau_{M, \mathcal{K}}$ で表す．

3 曲率公式

$\tau_{M,\mathcal{K}}$ の曲率公式を説明する． $\omega_{\mathcal{M}_{M,\mathcal{K}}}$ を, Bergman 計量が誘導する $\mathcal{M}_{M,\mathcal{K}}$ の軌道体としての Kähler 形式とする． $\mathcal{M}_{M,\mathcal{K}}^\circ$ 上の $(1,1)$ -形式 $\sigma_{M,\mathcal{K}}$ を次で定める． 任意の $(X, \iota) \in \tilde{\mathcal{M}}_{M,\mathcal{K}}$ に対して,

$$\mathcal{P}_{M,\mathcal{K}}^* \sigma_{M,\mathcal{K}} = c_1(\pi_* \Omega_{\mathcal{X}^\iota / \text{Def}(X, \iota)}^1, h_{L^2}) - c_1(R^1 \pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\iota}, h_{L^2}) - 2c_1(\pi_* K_{\mathcal{X}^\iota / \text{Def}(X, \iota)}, h_{L^2}).$$

ここで, $\mathcal{P}_{M,\mathcal{K}} : \text{Def}(X, \iota) \rightarrow \mathcal{M}_{M,\mathcal{K}}$ は (X, ι) の倉西族 $\pi : (\mathcal{X}, \iota) \rightarrow \text{Def}(X, \iota)$ の周期写像である．

定理 3 ([6]). 関数 $\tau_{M,\mathcal{K}}$ は, $\mathcal{M}_{M,\mathcal{K}}^\circ$ 上で以下の方程式を満たす．

$$-dd^c \log \tau_{M,\mathcal{K}} = \frac{(t+1)(t+7)}{8} \omega_{\mathcal{M}_{M,\mathcal{K}}} + \sigma_{M,\mathcal{K}}.$$

定理 3 の応用として, $\tau_{M,\mathcal{K}}$ と 2-初等 K3 曲面の不変量との比較公式が得られる． そのために 2-初等 K3 曲面について説明する． M_0 を L_{K3} の原始的 2-初等双曲型部分格子とする． K3 曲面とその正則対合の組 (Y, σ) が M_0 型 2-初等 K3 曲面であるとは, $\alpha(H^2(X, \mathbb{Z})^\sigma) = M_0$ となる同型 $\alpha : H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow L_{K3}$ が存在することである． M_0 型 2-初等 K3 曲面のモジュライ空間は $M_0^\perp$ に付随する直交型モジュラー多様体 $\mathcal{M}_{M_0}$ の或る Zariski 開集合 $\mathcal{M}_{M_0}^\circ$ である ([9]). 吉川 [9] は, 同変解析的振率を用いて M_0 型 2-初等 K3 曲面 (Y, σ) の不変量 $\tau_{M_0}(Y, \sigma)$ を構成し, τ_{M_0} は Borcherds 積と Siegel モジュラー形式のテンソル積として得られる $\mathcal{M}_{M_0}$ 上の保形形式の Petersson ノルムで表されることを示した． M_0 型 2-初等 K3 曲面 (Y, σ) に対して, 2 点の Hilbert スキーム $Y^{[2]}$ の反シンプレクティック対合 $\sigma^{[2]} : Y^{[2]} \rightarrow Y^{[2]}$ が自然に誘導される．

定理 4 ([4]). 格子 M_0 の階数が 17 以下であることと, $\mathcal{M}_{M_0}$ の判別因子の既約性を仮定する． このとき, M_0 のみに依存する正定数 C_{M_0} が存在し, 任意の M_0 型 2-初等 K3 曲面 (Y, σ) に対して, 次が成り立つ．

$$\tau(Y^{[2]}, \sigma^{[2]}) = C_{M_0} \tau_{M_0}(Y, \sigma)^{-2(\text{rk}(M_0)-9)}.$$

M_0 型 2-初等 K3 曲面 (Y, σ) から上の構成で得られる対合付き K3^[2] 型多様体 $(Y^{[2]}, \sigma^{[2]})$ を (X_Y, ι_Y) と表す． Camere-Garbagnati-Mongardi [3] は, 商 X_Y / ι_Y の自然なクレパント特異点解消として 4 次元 Calabi-Yau 多様体 Z_Y を構成した． $\tau_{BCOV}(Z_Y)$ を Z_Y の BCOV 不変量とする

定理 5 ([5]). M_0 は定理 4 と同様であるとする． このとき, M_0 のみに依存する正定数 C'_{M_0} が存在し, 任意の M_0 型 2-初等 K3 曲面 (Y, σ) に対して, 次が成り立つ．

$$\tau_{BCOV}(Z_Y) = C'_{M_0} \tau(X_Y, \iota_Y).$$

具体例を述べるために、以下 $M_0 = U(2) \oplus E_8(2)$ を仮定する． M_0 型 2-初等 K3 曲面 (Y, σ) に対して、商 Y/σ は Enriques 曲面であり、この対応により $\mathcal{M}_{M_0}^\circ$ は Enriques 曲面の粗モジュライ空間である． $\mathcal{M}_{M_0}^\circ$ 上に零点を持たない重さ 4 の保型形式 Φ が Borchers [2] により構成されており、Borchers Φ 関数と呼ばれる．一方、Oguiso-Schröer [8] と Camere-Garbagnati-Mongardi [3] によると、 Z_Y は Enriques 曲面 Y/σ の 2 点の Hilbert スキームの普遍被覆である．

定理 6 ([5]). 正定数 C が存在し、任意の Enriques 曲面 S に対して、

$$\tau_{BCOV}(\widetilde{S^{[2]}}) = C \|\Phi([S])\|$$

が成り立つ．ここで、 $\widetilde{S^{[2]}}$ は S の 2 点の Hilbert スキームの普遍被覆であり、 $\|\Phi([S])\|$ は Borchers Φ 関数の Enriques 曲面 S の周期における Petersson ノルムの値である．

参考文献

- [1] S. Boissière, C. Camere, and A. Sarti, *Classification of automorphisms on a deformation family of hyper-Kähler four-folds by p -elementary lattices*, Kyoto J. Math. **56** (2016), no. 3, 465–499.
- [2] R. E. Borcherds, *The moduli space of Enriques surfaces and the fake Monster Lie superalgebra*, Topology **35** (1996), no. 3, 699–710.
- [3] C. Camere, A. Garbagnati, and G. Mongardi, *Calabi-Yau quotients of hyperkähler four-folds*, Canad. J. Math. **71** (2019), no. 1, 45–92.
- [4] D. Imai, *Analytic torsion for irreducible holomorphic symplectic fourfolds with involution, II: the singularity of the invariant*, preprint arXiv:2411.13911 (2024), with an appendix by Ken-Ichi Yoshikawa.
- [5] ———, *Analytic torsion for irreducible holomorphic symplectic fourfolds with involution, III: relation with the BCOV invariant*, preprint arXiv:2412.00041 (2024).
- [6] ———, *Analytic torsion for irreducible holomorphic symplectic fourfolds with involution, I: Construction of an invariant*, International Journal of Mathematics **36** (2025), no. 07.
- [7] M. Joumaah, *Non-symplectic involutions of irreducible symplectic manifolds of $K3^{[n]}$ -type*, Math. Z. **283** (2016), no. 3-4, 761–790.
- [8] K. Oguiso and S. Schröer, *Enriques manifolds*, J. Reine Angew. Math. **661** (2011), 215–235.
- [9] K.-I. Yoshikawa, *$K3$ surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space*, Invent. Math. **156** (2004), no. 1, 53–117.

平行移動写像と弱鏡映部分多様体の アファイン微分幾何学

森本 真弘 (東京都立大学)*

1 序論

1988 年, R. S. Palais と C.-L. Terng [10, 11] はヒルベルト空間の部分多様体論の研究を開始した. 彼らは, Palais-Smale の無限次元モース理論や微分トポロジーの結果を応用するのに適した, Proper Fredholm (PF) 部分多様体と呼ばれるクラスを導入した. その具体例として, 彼らはゲージ変換群作用の軌道を研究し, その過程において, **平行移動写像**と呼ばれる同変な沈め込み写像 $\Phi: V_{\mathfrak{g}} \rightarrow G$ を導入した. ここで G は両側不変リーマン計量を備えた連結コンパクト・リー群であり, $V_{\mathfrak{g}} := L^2([0, 1], \mathfrak{g})$ は閉区間 $[0, 1]$ から G のリー代数 $\mathfrak{g}$ への L^2 写像全体のなす可分ヒルベルト空間を表す.

1995 年, C.-L. Terng と G. Thorbergsson [12] は, 平行移動写像 Φ がリーマン沈め込みとなることを示した. 更に, コンパクト・リーマン対称空間 G/K と射影 $\pi: G \rightarrow G/K$ に対して, リーマン沈め込み $\Phi_{G/K} := \pi \circ \Phi: V_{\mathfrak{g}} \rightarrow G \rightarrow G/K$ を研究した. 今日, それは G/K 上の平行移動写像と呼ばれる. G/K の部分多様体 M に対して, 逆像 $\Phi_{G/K}^{-1}(M)$ は $V_{\mathfrak{g}}$ の PF 部分多様体となる. 彼らは G/K の部分多様体幾何を, $V_{\mathfrak{g}}$ の PF 部分多様体幾何に還元する画期的研究を行った. G/K が非コンパクト型の場合, 両側不変リーマン計量の非存在が問題となるが, 小池直之 [3] により, 平行移動写像 $\Phi, \Phi_{G/K}$ が擬リーマン沈め込みとなることが示され, 擬リーマン幾何学の枠組みで研究が行われている.

講演者 [5, 6] は最近, より一般にアファイン対称空間や reductive 等質空間上において, 平行移動写像が (計量に無依存に) 定義され, それが安部直人・長谷川和志 [1] が導入した「水平分布つきアファイン沈め込み」となることを示した. また, 弱鏡映部分多様体という特殊な部分多様体 (井川治・酒井高司・田崎博之 [2]) との関係について, 講演者の以前の結果が一般化されることも示した. 本講演では, これらの結果について発表する.

2 アファインはめ込みとアファイン沈め込み

等長はめ込みやリーマン沈め込みの一般化として, アファインはめ込みやアファイン沈め込みが定義される [1, 9]. 本節ではその基本事項を復習する. 本節で述べる事実は, 多様体が無限次元ヒルベルト多様体の場合においても成り立つ.

M と N を C^∞ 級多様体, $\varphi: M \rightarrow N$ をはめ込みとする. φ の**横断束**とは, 引き戻し束 φ^*TN の部分束 $\mathcal{W}$ であって, 条件 $\varphi^*TN = d\varphi(TM) \oplus \mathcal{W}$ を満たすものをいう.

* 〒192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1 東京都立大学 大学院理学研究科, 日本学術振興会特別研究員 PD
e-mail: morimoto.mshr@gmail.com

本研究は特別研究員奨励費 (課題番号: 23KJ1793) の助成を受けたものである.

(M, ∇^M) , (N, ∇^N) をアファイン多様体, $\varphi: M \rightarrow N$ をはめ込み, $\mathcal{W}$ を φ の横断束とする. φ が **アファインはめ込み with 横断束** $\mathcal{W}$ であるとは, 条件

$$d\varphi(\nabla_X^M Y) = (\nabla_X^{\varphi^*TN} d\varphi(Y))^\top, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

が成り立つことをいう. ここで $\top$ は接成分への射影を表し, $\mathfrak{X}(M)$ は M 上の C^∞ 級ベクトル場全体を表す. ガウス公式・ワインガルテン公式

$$\nabla_X^{\varphi^*TN} d\varphi(Y) = d\varphi(\nabla_X^M Y) \oplus \alpha^\varphi(X, Y), \quad \nabla_X^{\varphi^*TN} Z = -d\varphi(A_Z^\varphi(X)) \oplus \nabla_X^\mathcal{W} Z$$

を通して, **アファイン基本形式** α^φ , **形作用素** A^φ 及び **横断接続** $\nabla^\mathcal{W}$ が定まる ($Z \in \Gamma(\mathcal{W})$). $\Gamma(\mathcal{W})$ は $\mathcal{W}$ の C^∞ 級切断全体を表す.

M を C^∞ 級多様体, (N, ∇^N) をアファイン多様体, $\varphi: M \rightarrow N$ をはめ込み, $\mathcal{W}$ を φ の横断束とする. このとき M のアファイン接続 ∇^M がただ一つ存在して, $\varphi: (M, \nabla^M) \rightarrow (N, \nabla^N)$ はアファインはめ込み with 横断束 $\mathcal{W}$ となる.

$\hat{N}$, N を C^∞ 級多様体, $\pi: \hat{N} \rightarrow N$ を沈め込みとする. このとき π の **垂直分布** $\mathcal{V}$ が $\mathcal{V}_u := \text{Ker}(d\pi)_u$ ($u \in \hat{N}$) により定まる. π の **水平分布** とは, $T\hat{N}$ の部分束 $\mathcal{H}$ であって $T\hat{N} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$ を満たすものをいう.

(N, ∇) , $(\hat{N}, \hat{\nabla})$ をアファイン多様体, $\pi: \hat{N} \rightarrow N$ を沈め込み, $\mathcal{H}$ を π の水平分布とする. π が **アファイン沈め込み with 水平分布** $\mathcal{H}$ であるとは, 条件

$$(\hat{\nabla}_{\hat{X}} \hat{Y})^\mathcal{H} = (\nabla_X Y)^\mathcal{H} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(N)$$

が成り立つことをいう. ここで $\hat{X}$ は X の水平リフトを表す. 左辺の $\mathcal{H}$ は水平成分への射影を表す. 垂直成分への射影は $\mathcal{V}$ で表す. 擬リーマン沈め込みの場合と同様に, 基本テンソル $\mathcal{T}$ と $\mathcal{A}$ が次で定義される ($Z, W \in \mathfrak{X}(\hat{N})$):

$$\mathcal{T}_Z W = (\hat{\nabla}_{Z^\mathcal{V}} W^\mathcal{V})^\mathcal{H} + (\hat{\nabla}_{Z^\mathcal{V}} W^\mathcal{H})^\mathcal{V}, \quad \mathcal{A}_Z W = (\hat{\nabla}_{Z^\mathcal{H}} W^\mathcal{H})^\mathcal{V} + (\hat{\nabla}_{Z^\mathcal{H}} W^\mathcal{V})^\mathcal{H},$$

特に, $\mathcal{A}$ の $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ への制限が交代形式であるとき, (N, ∇) の測地線の水平リフトは $(\hat{N}, \hat{\nabla})$ の測地線となる. この性質は, 擬リーマン沈め込みにおいては常に成り立つ.

3 平行移動写像

G を有限次元連結リー群, $\mathfrak{g}$ をそのリー代数とする. 単位元を e で表す. 閉区間 $[0, 1]$ から $\mathfrak{g}$ への L^2 可積分写像全体のなす空間 $V_{\mathfrak{g}} := L^2([0, 1], \mathfrak{g})$ は, 通常, $\mathfrak{g}$ の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を固定して L^2 内積 $\langle u, v \rangle_{L^2} := \int_0^1 \langle u(t), v(t) \rangle dt$ を定め, L^2 ノルムが有限という条件により定義される. しかし, $\mathfrak{g}$ の有限次元性から, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の取り方を変えても得られる L^2 ノルムは互いに同値となる. よって $\mathfrak{g}$ に内積を固定しなくても, 完備な内積が存在する位相ベクトル空間 (いわゆる Hilbertable 空間) として $V_{\mathfrak{g}} := L^2([0, 1], \mathfrak{g})$ が定まる.

連続写像 $c: [0, 1] \rightarrow G$ が Sobolev クラス H^1 に属するとは, G の任意の局所座標 (U, ϕ) に対して $\phi \circ c: I' := c^{-1}(U) \rightarrow U \rightarrow \mathbb{R}^n$ が Sobolev 空間 $H^1(I', \mathbb{R}^n)$ に属す

ることをいう．Sobolev クラス H^1 に属する写像 $[0, 1] \rightarrow G$ 全体を $\mathcal{G} := H^1([0, 1], G)$ で表す． $\mathcal{G}$ はヒルベルト多様体となる．更に $\mathcal{G}$ の群構造が各点積により定まり，その群構造は滑らか，つまり $\mathcal{G}$ はヒルベルト・リー群となる． $\mathcal{G}$ は $V_{\mathfrak{g}}$ にアファイン変換 $g * u := \text{Ad}(g)u - dr_g^{-1}(g')$ により推移的に作用する．ここで g' は g の弱微分を表し， r_g は g による右移動を表す． g による左移動は l_g で表す．

平行移動写像 $\Phi : V_{\mathfrak{g}} \rightarrow G$ は，従来と同様に，常微分方程式 $dl_g^{-1}(g') = u$, $g(0) = e$ の一意解 $g = g_u \in \mathcal{G}$ により $\Phi(u) := g_u(1)$ と定義される．ただしその解の一意存在性は自明でない．既知の証明では G のコンパクト性を用いるため，別の証明が必要となる [5]．

命題 3.1 (Palais-Terng [10, 11]). $\Phi(g * u) = g(0)\Phi(u)g(1)^{-1}$. つまり，次の図式は可換：

$$\begin{array}{ccccc} g & \in & \mathcal{G} & \curvearrowright & V_{\mathfrak{g}} & g * u := \text{Ad}(g)u - dr_g^{-1}(g') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Phi & \\ (g(0), g(1)) & \in & G \times G & \curvearrowright & G & (b, c) \cdot a := bac^{-1} \end{array}$$

平行移動写像 $\Phi : V_{\mathfrak{g}} \rightarrow G$ の $\mathcal{G}$ 不変な水平分布 $\mathcal{H}^G$ が $\mathcal{H}^G(\hat{0}) := \hat{\mathfrak{g}}$ により一意に定まる．ここで $\hat{x} \in V_{\mathfrak{g}}$ は $x \in \mathfrak{g}$ に値を持つ定道を表し， $\hat{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ に値を持つ定道全体を表す．

G の標準接続を ∇^G で表す ($\nabla_X^G Y := \frac{1}{2}[X, Y]$, $X, Y \in \mathfrak{g}$). $V_{\mathfrak{g}}$ の平坦接続を D で表す．

定理 3.2 ([5]). 平行移動写像 $\Phi : (V_{\mathfrak{g}}, D) \rightarrow (G, \nabla^G)$ は，アファイン沈め込み with 水平分布 $\mathcal{H}^G$ となる．更に，基本テンソル $\mathcal{A}$ の $\mathcal{H}^G \times \mathcal{H}^G$ への制限は交代形式である．

注意 3.3. Terng と Thorbergsson [12] は， G がコンパクト・リー群 with 両側不変リーマン計量 ρ のとき， $\Phi : (V_{\mathfrak{g}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}^{\rho}) \rightarrow (G, \rho)$ がリーマン沈め込みとなることを示した．ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}^{\rho}$ は $\text{Ad}(G)$ 不変な $\mathfrak{g}$ の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\rho}$ から定まる L^2 内積を表す．Koike [3] は， G が半単純リー群 with 両側不変な擬リーマン計量 ρ のとき， $\Phi : (V_{\mathfrak{g}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}^{\rho}) \rightarrow (G, \rho)$ が擬リーマン沈め込みとなることを示した．これら双方の場合において，計量から定まる水平分布は上の $\mathcal{H}^G$ と一致する．従って，定理 3.2 はこれら双方の結果を拡張する．

K を G の閉部分群 with リー代数 $\mathfrak{k}$ とする．射影を $\pi : G \rightarrow G/K$ で表す．等質空間 G/K 上の平行移動写像が $\Phi_{G/K} := \pi \circ \Phi : V_{\mathfrak{g}} \rightarrow G \rightarrow G/K$ で定まる．特に $\Phi_{G/\{e\}} = \Phi$ である．また， $\Phi_{(G \times G)/\Delta G}$ は Φ と自然に同一視できる．

命題 3.4. $\mathcal{G}_K := \{g \in \mathcal{G} \mid g(1) \in K\}$ とおく． $g \in \mathcal{G}_K$ および $u \in V_{\mathfrak{g}}$ に対して $\Phi_{G/K}(g * u) = g(0)\Phi_{G/K}(u)$ が成り立つ．つまり，次の図式は可換：

$$\begin{array}{ccccc} g & \in & \mathcal{G}_K & \curvearrowright & V_{\mathfrak{g}} & g * u := \text{Ad}(g)u - dr_g^{-1}(g') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \Phi_{G/K} & \\ g(0) & \in & G & \curvearrowright & G/K & b \cdot aK := (ba)K \end{array}$$

以下，等質空間 G/K が **reductive**，つまり $\mathfrak{g}$ の $\text{Ad}(K)$ 不変部分空間 $\mathfrak{p}$ が存在して $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ (ベクトル空間の直和) が成り立つと仮定する．このとき， $\Phi_{G/K}$ の $\mathcal{G}_K$ 不変な

水平分布 $\mathcal{H}^{G/K}$ が $\mathcal{H}^{G/K}(\hat{0}) = \hat{\mathfrak{p}}$ により一意に定まる．また，トーシヨン 0 かつ G 不変な G/K の接続であって，任意の $X \in \mathfrak{p}$ に対して $(\exp tX)K$ が G/K の測地線となるものが一意に定まる．これを G/K の natural torsion-free 接続と呼び $\nabla^{G/K}$ で表す [8].

定理 3.5 ([6]). $\Phi_{G/K} : (V_{\mathfrak{g}}, D) \rightarrow (G/K, \nabla^{G/K})$ は，アファイン沈め込み with 水平分布 $\mathcal{H}^{G/K}$ となる．更に，基本テンソル $\mathcal{A}$ の $\mathcal{H}^{G/K} \times \mathcal{H}^{G/K}$ への制限は交代形式である．

上の定理を G/K が対称空間である場合に適応することで，次を得る：

系 3.6 ([5]). G/K を対称空間， $\nabla^{G/K}$ を G/K 標準接続とする．このとき平行移動写像 $\Phi_{G/K} : (V_{\mathfrak{g}}, D) \rightarrow (G/K, \nabla^{G/K})$ は，アファイン沈め込み with 水平分布 $\mathcal{H}^{G/K}$ となる．更に，基本テンソル $\mathcal{A}$ の $\mathcal{H}^{G/K} \times \mathcal{H}^{G/K}$ への制限は交代形式である．

上の系は， G/K がコンパクトまたは非コンパクト型リーマン対称空間の場合 (Terng-Thorbergsson [12], Koike [3]) の拡張である（計量から定まる水平分布は $\mathcal{H}^{G/K}$ と一致）．

4 フレドホルム性

V を Hilbertable 空間， D を平坦接続， M を (V, D) の部分多様体 with 横断束 $\mathcal{W}$ とする．次の 2 条件を考える：

- (A) 終点写像 $\eta : \mathcal{W} \rightarrow V$, $(p, \xi) \mapsto p + \xi$ は指数 0 のフレドホルム写像
(i.e. 各 $(p, \xi) \in \mathcal{W}$ に対して $\text{Ker}(d\eta)_{(p, \xi)}$ と $\text{Coker}(d\eta)_{(p, \xi)}$ は有限次元かつ同次元)
- (B) 各 $(p, \xi) \in \mathcal{W}$ に対して $A_{\xi} : T_p M \rightarrow T_p M$ はコンパクト作用素．

条件 (B) は， A_{ξ} の固有値（主曲率）を扱う上で重要である．フレドホルム作用素の一般論から「(B) $\Rightarrow$ (A)」が従うが，逆は一般に不明である． M がヒルベルト空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の（リーマン）部分多様体ならば， A_{ξ} の自己共役性から (A) と (B) は同値となり，これらの同値条件を満たす部分多様体はフレドホルム部分多様体と呼ばれる [10, 11].

次の定理は， G/K がコンパクトまたは非コンパクト型リーマン対称空間の場合の結果 (Terng-Thorbergsson [12], Koike [3]) の一般化である：

定理 4.1 ([7]). G/K を reductive 等質空間 with 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とする． $\Phi_{G/K} : V_{\mathfrak{g}} \rightarrow G/K$ を平行移動写像とする． M を G/K の部分多様体 with 横断束 $\mathcal{W}$ とする． $\mathcal{W}$ の水平リフトを $\hat{\mathcal{W}}$ で表す．このとき逆像 $\Phi_{G/K}^{-1}(M)$ は $V_{\mathfrak{g}}$ の部分多様体 with 横断束 $\hat{\mathcal{W}}$ であって条件 (B) を満たす．

本稿では，(B) を満たす部分多様体を**フレドホルム部分多様体**と呼ぶことにする．

5 弱鏡映部分多様体

(N, ∇^N) をアファイン多様体， M を N の部分多様体 with 横断束 $\mathcal{W}$ とする． M が**弱鏡映** [2, 5] であるとは，各 $(p, \xi) \in \mathcal{W}$ に対してあるアファイン変換 $\nu : N \rightarrow N$ が存在し

て条件 $\nu(p) = p$, $\nu(M) = M$, $d\nu(\xi) = -\xi$, $d\nu(W) = W$ が成り立つことをいう。特に、各 ν が特定の群 S から選べるとき、 M は S 弱鏡映であるという。

次の定理は、 G/K がコンパクト正規等質空間の場合 [4] を一般化すると同時に、アファイン弱鏡映部分多様体の非自明な例を与える。

定理 5.1 ([5]). G/K を reductive 等質空間 with 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ とする。このとき、平行移動写像 $\Phi_{G/K} : V_{\mathfrak{g}} \rightarrow G/K$ の各ファイバーは $(V_{\mathfrak{g}}, D)$ の弱鏡映フレドホルム部分多様体である（横断束は水平分布の制限として定める）。

次の定理は、アファイン対称空間内の弱鏡映部分多様体の特徴づけを与える。これは、 N が既約なコンパクト型リーマン対称空間の場合 [4] を一般化する。

定理 5.2 ([5]). (N, ∇^N) をアファイン対称空間、 $p \in N$ とする。アファイン変換群を $\tilde{G}$ 、単位元連結成分を G 、 p における $\tilde{G}$ の固定部分群を $\tilde{K}$ とし $K := \tilde{K} \cap G$ とおく。 M を $G/K = N$ の部分多様体 with 横断束 W とする。 $\hat{M} := \Phi_{G/K}^{-1}(M)$ の横断束を W の水平リフト $\hat{W}$ で定める。このとき次は同値：(i) M は弱鏡映、(ii) $\hat{M}$ は S -弱鏡映かつフレドホルム。ここで $S := \{g \in H^1([0, 1], \tilde{G}) \mid g(1) \in \tilde{K}\}$ 。

参考文献

- [1] N. Abe, K. Hasegawa, *An affine submersion with horizontal distribution and its applications*, Differential Geom. Appl. **14** (2001), no. 3, 235–250.
- [2] O. Ikawa, T. Sakai, H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*. J. Math. Soc. Japan **61** (2009), no. 2, 437–481.
- [3] N. Koike, *Submanifold geometries in a symmetric space of non-compact type and a pseudo-Hilbert space*, Kyushu J. Math. **58** (2004), no. 1, 167–202.
- [4] M. Morimoto, *On weakly reflective PF submanifolds in Hilbert spaces*, Tokyo J. Math. **44** (2021), no. 1, pp. 103–124.
- [5] M. Morimoto, *The parallel transport map over affine symmetric space*, preprint.
- [6] M. Morimoto, *The parallel transport map over reductive homogeneous space*, preprint.
- [7] M. Morimoto, *On curvatures of affine Fredholm submanifolds*, in preparation.
- [8] K. Nomizu, *Invariant affine connections on homogeneous spaces*, Amer. J. Math. **76** (1954), 33–65.
- [9] K. Nomizu, T. Sasaki, *Affine Differential Geometry*, Cambridge Tracts in Math., 111 Cambridge University Press, Cambridge, 1994, xiv+263 pp.
- [10] R. S. Palais, C.-L. Terng, *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, **1353**. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [11] C.-L. Terng, *Proper Fredholm submanifolds of Hilbert space*. J. Differential Geom. **29** (1989), no. 1, 9–47.
- [12] C.-L. Terng, G. Thorbergsson, *Submanifold geometry in symmetric spaces*. J. Differential Geom. **42** (1995), no. 3, 665–718.

概 Hermitian 多様体上の偏微分方程式について

川村 昌也 (梶山女学園大学)*

1 概要

近年, 非 Kähler 幾何学の研究が盛んに行われている. この背景には, 物理学における非 Kähler 性の要請, 例えば弦理論における Strominger システムの非 Kähler 幾何学における研究が挙げられる. Kähler 性の概複素の場合の代替として, いくつかの特別な計量が知られており, それらの計量の特徴を調べることで非 Kähler の場合の偏微分方程式の解の性質が調べられている. 例えば, balanced 計量 ($d(\omega^{n-1}) = 0$ を満たす) や SKT (Strong Kähler with torsion) 計量 ($\partial\bar{\partial}\omega = 0$ を満たす) は弦理論との関わりが知られており活発に研究が進められている. 本稿では, 概複素構造が可積分でない場合に話を一般化して問題を考察する. 多くの先行研究では, 複素構造が入っている場合を調べており, Hermitian 多様体における研究がほとんどである. その理由として, 概複素構造が可積分でない場合, つまり Nijenhuis テンソルが消えない場合は計算が非常に煩雑になり, 例えば偏微分方程式の滑らかな解の存在性を示す際に不可欠であるアプリオリ評価を得ることが難しくなることが挙げられる. まず初めに, 概複素幾何におけるふたつの困難を紹介する.

2 概複素の場合の困難

概複素多様体 (M, J) 上の概微分作用素 d は次のように分解される:

$$d : \Lambda^{p,q} M \rightarrow \Lambda^{p+2,q-1} M \oplus \Lambda^{p+1,q} M \oplus \Lambda^{p,q+1} M \oplus \Lambda^{p-1,q+2} M, \\ d = A + \partial + \bar{\partial} + \bar{A}.$$

ここで,

$$\partial : \Lambda^{p,q} M \rightarrow \Lambda^{p+1,q} M, \quad \bar{\partial} : \Lambda^{p,q} M \rightarrow \Lambda^{p,q+1} M, \\ A : \Lambda^{p,q} M \rightarrow \Lambda^{p+2,q-1} M, \quad \bar{A} : \Lambda^{p,q} M \rightarrow \Lambda^{p-1,q+2} M.$$

この作用素 A が消えることと, 概複素構造 J が可積分であることは同値である. 概複素の場合の困難の一つとして次が挙げられる.

困難 1. (i) $\partial^2 = 0$ が成り立たない. ($\partial^2 = -A\bar{\partial} - \bar{\partial}A$)

(ii) $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$ が成り立たない. ($\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial - A\bar{A} - \bar{A}A$)

困難 1. から, Hermitian の場合に一般に知られている滑らかな解のグラディエント評価を得る方法を適用することが難しくなる. 更にもう一つ以下の困難が挙げられる.

困難 2. 滑らかな実数値関数 u に対して $\nabla_{\bar{q}}\nabla_q\nabla_{\bar{p}}\nabla_p u$ と $\nabla_{\bar{p}}\nabla_p\nabla_{\bar{q}}\nabla_q u$ の差を計算するとき, $T_{\bar{p}\bar{q}}^r = N_{\bar{p}\bar{q}}^r$ を含む項が残る, $e_q\{T_{\bar{p}\bar{q}}^r e_r e_p(u)\}$ をどのように処理するかが問題になる. ここで, ∇ は Chern 接続, T はトーション, N は Nijenhuis テンソル, $\{e_i\}$ は局所 $(1,0)$ フレーム.

困難 2. における計算は, 滑らかな解の 2 階微分のアプリオリ評価をする際に必要であり, このままでは 3 階の微分が残るため求める評価が得られない. これら 2 つの困難を乗り越えるための方法を次に紹介する.

本研究は科研費 (課題番号: JP21K13798) の助成を受けたものである.

2020 Mathematics Subject Classification. 32Q60 (primary); 53C15, 53C55 (secondary)

キーワード: 概 Hermitian 多様体, 偏微分方程式

*〒464-8662 愛知県名古屋市千種区星が丘元町 17-3 e-mail: kawamura-m@sugiyama-u.ac.jp

3 概複素幾何学のための新しい方法

次の特別な局所ユニタリー $(1, 0)$ フレームの存在が計算に必要なになる.

補題 3.1. (cf. [8, Lemma 2.4]) (M, J, α) を概 Hermitian 多様体, ∇ を概 Hermitian 計量 α に関する Chern 接続とする. 任意の点 $p_0 \in M$ のまわりで, 局所ユニタリー $(1, 0)$ 枠 $\{e_r\}_r$ で

$$\alpha_{i\bar{j}}(p_0) = \delta_{ij}, \quad \nabla e_r(p_0) = 0$$

を満たすように取れる.

概 Hermitian 多様体 (M, J, α) における一般の局所 $(1, 0)$ 枠 $\{e_p\}_p$ に対して $T_{ij}^k = T^k(e_i, e_j)$, $T_{i\bar{j}}^k = T^k(e_i, e_{\bar{j}})$ を α に関するトーション $T = T' + T''$ ($T' \in \Gamma(\Lambda^{2,0}M \otimes T^{1,0}M)$, $T'' \in \Gamma(\Lambda^{0,2}M \otimes T^{1,0}M)$) の成分, Lie ブラケット積の構造係数 $B_{kj}^s, B_{ij}^{\bar{k}}$ は $[e_i, e_j] =: B_{ij}^k e_k + B_{ij}^{\bar{k}} e_{\bar{k}}$ で定義される. Γ_{ij}^k は Christoffel の記号で, $\Gamma_{ij}^k = \alpha^{k\bar{l}} e_i(\alpha_{j\bar{l}}) - \alpha^{k\bar{l}} \alpha_{j\bar{s}} B_{il}^s$ で与えられる. ここで, $T_{i\bar{j}}^k = N_{i\bar{j}}^k = -B_{i\bar{j}}^k$, N は Nijenhuis テンソル. また M 上の滑らかな関数 φ に対して,

$$\partial_p \partial_{\bar{q}} \varphi = (e_p e_{\bar{q}} - [e_p, e_{\bar{q}}]^{(0,1)})(\varphi), \quad e_i e_{\bar{j}}(\varphi) = \nabla_i \nabla_{\bar{j}} \varphi + B_{i\bar{j}}^{\bar{k}} e_{\bar{k}}(\varphi).$$

補題 3.1 より, p_0 のまわりで特別な局所 $(1, 0)$ 枠 $\{e_r\}_r$ を取れば, この $(1, 0)$ 枠 $\{e_r\}_r$ に対して $\Gamma_{ij}^k(p_0) = 0$, $T_{ij}^k(p_0) = -B_{ij}^k(p_0)$, $B_{ij}^k(p_0) = B_{i\bar{j}}^{\bar{k}}(p_0) = 0$ が得られることに注意する.

補題 3.1 の局所ユニタリー $(1, 0)$ 枠 $\{e_r\}_r$ を用いることで以下の 2 つの補題が得られる.

補題 3.2. (cf. [5, Lemma 3.1, 3.3]) M 上の滑らかな実数値関数 φ に対して次が得られる:

$$\partial^2 \varphi(e_k, e_j) = T_{jk}^{\bar{s}} \bar{\partial} \varphi(e_{\bar{s}}),$$

$$\partial^2 \bar{\partial} \varphi(e_k, e_j, e_{\bar{i}}) = \bar{\partial}(T_{jk}^{\bar{s}})(e_{\bar{i}}) \bar{\partial} \varphi(e_{\bar{s}}), \quad \bar{\partial} \partial \bar{\partial} \varphi(e_{\bar{k}}, e_j, e_{\bar{i}}) = \partial(T_{ik}^{\bar{s}})(e_j) \bar{\partial} \varphi(e_{\bar{s}}).$$

補題 3.3. (cf. [5, Lemma 3.2]) M 上の滑らかな実数値関数 φ に対して

$$T_{jk}^s e_i e_s(\varphi) = \mathcal{H}_{k\bar{j}i}^s e_s(\varphi) + T_{k\bar{j}}^r T_{ir}^{\bar{s}} e_{\bar{s}}(\varphi).$$

ここで, $\mathcal{H}$ は Chern 曲率の成分で, $\mathcal{H} \in \Gamma(\Lambda^{2,0}M \otimes \text{End}(T^{1,0}M))$.

補題 3.2 と補題 3.3 により, 2 階及び 3 階の微分を 1 階の微分に落とすことができるため, 困難 1. と困難 2. を乗り越えるための方法になる.

4 放物型 Monge-Ampère 型方程式への応用

本稿では, コンパクト概 Hermitian 多様体上の放物型 Monge-Ampère 型方程式に関する結果を紹介する. 以下 (M^{2n}, J, α) を実 $2n$ 次元 ($n \geq 3$) のコンパクト概 Hermitian 多様体とし, α_0 をもうひとつの M 上の概 Hermitian 計量とする. 次の放物型 Monge-Ampère 型方程式を任意の $\psi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ に対して考察する. 以下, $*$ は Hodge のスター作用素とする.

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = \log \frac{\left(\varpi + \frac{1}{n-1} [(\Delta u) \alpha - \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u] + Z(\partial u) \right)^n}{\alpha^n} - \psi, & u(0) = u_0 \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ \varpi + \frac{1}{n-1} [(\Delta u) \alpha - \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u] + Z(\partial u) > 0 & \text{on } M, \end{cases}$$

$\varpi := \frac{1}{(n-1)!} * \alpha_0^{n-1}$, $\Delta u = \alpha^{i\bar{j}} \partial_i \partial_{\bar{j}} u$, $Z(\partial u) := \frac{1}{(n-1)!} * [\text{Re}(\sqrt{-1} \partial u \wedge \bar{\partial}(\alpha^{n-2}))]$ とする. Zheng は [9] において, コンパクト Hermitian 多様体上で Gauduchon 性 ($\partial \bar{\partial}(\omega^{n-1}) = 0$) を保存す

る放物型方程式 (1) の解の収束を示すことで Gauduchon 予想 (cf. [9, Conjecture 1.2]) の別証明を与えている. 論文 [5] では Zheng の議論を概 Hermitian に一般化して以下の結果を示している. ここで, 方程式 (1) の線形化作用素は 2 階の楕円型作用素なので放物型理論によって (1) の滑らかな解の短時間存在が分かることに注意する (短時間解の存在定理).

定理 4.1. (cf. [5, Theorem 1.1]) $M \times [0, \infty)$ 上で方程式 (1) の滑らかな一意解が存在する. ここで, u の正規化を $\text{Vol}_\alpha(M) := \int_M \alpha^n$ に対して,

$$(2) \quad \tilde{u}(x, t) := u(x, t) - \frac{1}{\text{Vol}_\alpha(M)} \int_M u(y, t) \alpha^n(y)$$

と定義すると, $\tilde{u}$ は $t \rightarrow \infty$ のとき, 滑らかな関数 $\tilde{u}_\infty$ に収束し, $\tilde{u}_\infty$ は次の楕円型方程式の一意解になる:

$$\log \frac{(\varpi + \frac{1}{n-1}[(\Delta \tilde{u}_\infty)\alpha - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\tilde{u}_\infty] + Z(\partial\tilde{u}_\infty))^n}{\alpha^n} = \psi + \tilde{b},$$

$$\tilde{b} := \frac{1}{\text{Vol}_\alpha(M)} \int_M \left(\log \frac{(\varpi + \frac{1}{n-1}[(\Delta \tilde{u}_\infty)\alpha - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\tilde{u}_\infty] + Z(\partial\tilde{u}_\infty))^n}{\alpha^n} - \psi \right) \alpha^n.$$

定理 4.1 より, 与えられた滑らかな関数 $F \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ に対して, $\psi = (n-1)F$ と選び実定数 $\tilde{b} \in \mathbb{R}$ を加えると, 滑らかな関数 $\tilde{u}_\infty$ はコンパクト概 Hermitian 多様体 (M, J, α) 上で概 Hermitian 計量 α_0 に対して次の方程式の一意解になる:

$$(3) \quad \log \frac{\left(\varpi + \frac{1}{n-1}[(\Delta_\alpha u)\alpha - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u] + Z(\partial u) \right)^n}{\alpha^n} = (n-1)(F + b).$$

この方程式は

$$(4) \quad \omega^{n-1} = \alpha_0^{n-1} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u \wedge \alpha^{n-2} + \text{Re}\left(\sqrt{-1}\partial u \wedge \bar{\partial}(\alpha^{n-2})\right) > 0.$$

で与えられる概 Hermitian 計量 ω に対して次の方程式に同値:

$$(5) \quad \omega^n = e^{F+b}\alpha^n.$$

この議論から, [4, Theorem 1.2] の結果と同様に次の系が得られる.

系 4.1. (M^{2n}, J, α) を実 $2n$ 次元 ($n \geq 3$) のコンパクト概 Hermitian 多様体とし, α_0 をもう一つの概 Hermitian 計量とする. 任意に与えられた $F \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ に対して, 組 $(u, b) \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ で, (4) で与えられる ω が方程式 (5) を満たすものが一意に存在する.

注意 4.1. 系 4.1 の証明は, Huang と Zhang による 2023 年の論文 [4, Theorem 1.2] の放物型方程式を用いた別証明である.

5 定理の証明の概要

実 $2n$ 次元 ($n \geq 3$) のコンパクト概 Hermitian 多様体 (M^{2n}, J, α) 上で, 補題 3.1 より任意の点 $p_0 \in M$ のまわりで, 概 Hermitian 計量 α に関する局所ユニタリー $(1, 0)$ フレーム $\{e_r\}$ で $\alpha_{i\bar{j}}(p_0) = \delta_{ij}$ かつ $\nabla e(p_0) = 0$ を満たすように取れる. この局所 $(1, 0)$ フレーム $\{e_r\}$ を用いることで方程式 (1) の滑らかな解 u に対して補題 3.2 と補題 3.3 から次の関係式を得る.

$$(6) \quad T_{j\bar{k}}^s e_i e_s(u) = \mathcal{H}_{\bar{k}j}^s e_s(u) + T_{k\bar{j}}^r T_{ir}^{\bar{s}} e_{\bar{s}}(u),$$

$$(7) \quad \partial^2 u(e_k, e_j) = T_{jk}^{\bar{s}} \bar{\partial} u(e_{\bar{s}}),$$

$$(8) \quad \partial^2 \bar{\partial} u(e_k, e_j, e_{\bar{i}}) = \bar{\partial}(T_{jk}^{\bar{s}})(e_{\bar{i}}) \bar{\partial} u(e_{\bar{s}}), \quad \bar{\partial} \partial \bar{\partial} u(e_{\bar{k}}, e_i, e_{\bar{j}}) = \partial(T_{i\bar{k}}^s)(e_j) \partial u(e_s).$$

点 p_0 は任意に取られていたので、上式 (6), (7), (8) は M 全体で成り立つ。以下、 $T \in (0, \infty]$ は方程式 (1) の最大存在時間とする。

命題 5.1. (cf. [5, Proposition 4.1]) u を $M \times [0, T)$ 上の方程式 (1) の滑らかな解とすると、正の定数 C が存在して $\sup_{M \times [0, T)} |\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u|_{\alpha} \leq CK$ を満たす。ここで C は (M^{2n}, J, α) , α_0 , $\sup_M |\psi|$ に依存する定数で、 $K := 1 + \sup_{M \times [0, T)} |\nabla u|_{\alpha}^2$ とする。

証明の概要. 関係式 (6) によって、 $e_q \{T_{p\bar{q}}^r e_p e_r(u)\}$ は $e_q \{\mathcal{H}_{\bar{q}p}^s e_s(u) + T_{\bar{q}p}^r T_{pr}^{\bar{s}} e_{\bar{s}}(u)\}$ で表され、微分の階数をひとつ落とすことができる。□

関係式 (7), (8) と 2 階のアプリオリ評価を用いることで、次のアプリオリなグラディエント評価が得られる。

命題 5.2. (cf. [5, Proposition 5.1]) u を $M \times [0, T)$ 上の方程式 (1) の滑らかな解とする。任意に有限時間 $0 < T' < T \leq \infty$ を選ぶ。このとき、 (M^{2n}, J, α) , α_0 , u_0 , $\sup_M |\psi|$, $\|v\|_{C^2(M)}$ に依存する正の定数 C が存在して $\sup_{M \times [0, T')} |\nabla u|_{\alpha}^2 \leq C$ を満たす。

証明の概要. (i) (7) によって $\partial^2 u$ はトーション $T = T' + T''$ の成分 $\bar{T}''$ と $\bar{\partial} u$ で表せて、(8) によって、 $\partial^2 \bar{\partial} u$ (resp. $\bar{\partial} \partial \bar{\partial} u$) は $\bar{\partial} \bar{T}''$ (resp. $\partial T''$) と $\bar{\partial} u$ (resp. ∂u) で表せる。

(ii) Guo-Phong-Tong のグラディエント評価を得る方法 (cf. [3]) と、解析学でよく知られた方法である Sobolev 不等式や Moser の反復法などを援用する。□

命題 5.1, 命題 5.2 の 1 階と 2 階のアプリオリ評価より方程式 (1) は一様放物型であり Schauder 評価によって、高階のアプリオリ評価を得るためには $\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u$ の Hölder 評価が得られれば十分である (cf. [2, Lemma 6.1])。この Hölder 評価は [1, Theorem 5.3] から得られる。方程式 (1) を微分してブートストラッピング法を適用することで高階のアプリオリ評価が得られる。

命題 5.3. (cf. [5, Lemma 6.1]) u を $M \times [0, T)$ 上の方程式 (1) の滑らかな解とする。任意に有限時間 $0 < T' (< T \leq \infty)$ を選ぶ。このとき、任意の $\varepsilon \in (0, T')$ と正の整数 k に対して、 $k, \varepsilon, (M^{2n}, J, \alpha)$, α_0 , u_0 に依存する正の定数 C_k が存在して $\sup_{M \times [\varepsilon, T')} |\nabla^k u(x, t)| \leq C_k$ を満たす。

解の一意性は一般的な放物型方程式の理論から得られる。長時間解については、高階のアプリオリ評価 (命題 5.3) と短時間解の存在性定理から、 $T < \infty$ とすると解を延長できることが分かり T が最大存在時間であることに反するため $T = \infty$ が得られる。Zheng より [9] で証明されている Harnack 不等式は、概 Hermitian 幾何でも Hermitian の場合と同様に証明可能であり (cf. [2, Lemma 7.2])、この Harnack 不等式と (2) で定義した u の正規化 $\tilde{u}$ の C^0 評価 (cf. [9, Proposition 3.2]) により $\tilde{u}$ の定理 4.1 の収束の結果を得る。

6 その他の応用例

実 $2n$ 次元コンパクト概 Hermitian 多様体 (M^{2n}, J, ω) 上でのその他の応用例を紹介する。

- (i) Fu-Yau 方程式 (cf. [6]) : Strominger システムを一般化した完全非線形 (fully non-linear) 方程式

$$(9) \quad \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}(e^u\omega - \alpha e^{-u}\rho) \wedge \omega^{n-2} + n\alpha\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u \wedge \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u \wedge \omega^{n-2} + \mu\frac{\omega^n}{n!} = 0$$

ここで $\alpha(\neq 0)$ はスロープパラメータと呼ばれる定数で, ρ は滑らかな実 $(1,1)$ 形式, μ は滑らかな実数値関数とする.

- (ii) Calabi フロー (cf. [7]) : 満洲エネルギーのグラディエントフローである 4 階の準線形 (quasilinear) 放物型方程式

$$(10) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = R_u, \quad u(0) = 0$$

ここで $R_u := \text{tr}_{\omega_u} \text{Ric}^{(1,1)}(\omega_u)$ は $\omega_u = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u$ の Chern スカラー曲率である.

(i), (ii) において, (M^{2n}, J, ω) は擬 (quasi-)Kähler とすると $\bar{\partial}\omega = 0$ は, ω に関するトーションについて $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ に対して $T_{ij}^k = 0$ (i.e., $T'(\omega) = 0$) であることと同値なので補題 3.2 と $\bar{\partial}(T_{jk}^s)(e_{\bar{i}}) = T_{kj}^l T_{li}^s$ より次の補題が得られる. 計算は任意の点 $p_0 \in M$ のまわりで補題 3.1 の局所ユニタリー $(1,0)$ フレーム $\{e_r\}$ で行う.

補題 6.1. M 上の滑らかな実数値関数 φ に対して次が成り立つ:

$$(11) \quad \partial^2 \bar{\partial} \varphi(e_k, e_j, e_{\bar{i}}) = 0, \quad \bar{\partial} \partial \bar{\partial} \varphi(e_{\bar{k}}, e_i, e_{\bar{j}}) = 0.$$

関係式 (11) において点 p_0 は任意で取られているので, $\partial^2 \bar{\partial} \varphi = 0, \bar{\partial} \partial \bar{\partial} \varphi = 0$ が M 上全体で成り立つ. この関係式は, (9) の場合には C^0 評価を得るのに不可欠であり, (10) の場合には擬 Kähler 性が Calabi フローに沿って保存されることを示すことに用いられる.

References

- [1] Chu, J. $C^{2,\alpha}$ regularities and estimates for nonlinear elliptic and parabolic equations in geometry, Calc. Var. **55**, 8 (2016).
- [2] Chu, J. The Monge-Ampère equation on compact almost Hermitian manifolds, J. Reine Angew. Math. **761** (2020), 1-24.
- [3] Guo, B., Phong, D.H. and Tong, F. A new gradient estimate for the complex Monge-Ampère equation, Math. Ann. **388** (2024), 1045-1051.
- [4] Huang L., Zhang, J. Fully non-linear elliptic equations with gradient terms on compact almost Hermitian manifolds, Math. Z. **303**, Article number 36 (2023).
- [5] Kawamura, M. On a parabolic Monge-Ampère type equation on compact almost Hermitian manifolds, Mathematische Nachrichten **297** (11) (2024), 4232-4272.
- [6] Kawamura, M. The limit of the Fu-Yau equations on a product of two compact quasi-Kähler manifolds, preprint
- [7] Kawamura, M. A Calabi flow on quasi-Kähler manifolds, preprint
- [8] Yu, C.-J. Nonpositively curved almost Hermitian metrics on products of compact almost complex manifolds, Acta Mathematica Sinica **31** (2015), 61-70.
- [9] Zheng, T. A parabolic Monge-Ampère type equation of Gauduchon metrics, IMRN, **2019**, Issue 17 (2019), 5497-5538.

例外型コンパクト対称空間の極大対蹠集合 II

宇都宮大学 共同教育学部 佐々木優

Maximal antipodal sets of some compact symmetric spaces of exceptional type II

Yuuki Sasaki

Cooperative Faculty of Education,
Utsunomiya University

本講演の内容は、2022 年に東京理科大学で行われた第 69 回幾何学シンポジウムでの拙講演「例外型コンパクト対称空間の極大対蹠集合」の続きの内容である。

1 概要

リーマン多様体 M の各点 p に対して、 p を孤立固定点とするような対合的等長変換 s_p が対応しているとき、 M を対称空間といい s_p を p における点対称と呼ぶ。本講演では、 M は連結であるとする。 M の 2 点 $p, q \in M$ が対蹠的であるとは、 $s_p(q) = q (\Leftrightarrow s_q(p) = p)$ をみたすことをいう。部分集合 $S \subset M$ の任意の 2 点が対蹠的であるとき、 S を対蹠集合と呼ぶ [4]。対蹠集合間の包含関係で極大なものを極大対蹠集合といい、最大の濃度を持つ対蹠集合を大対蹠集合と呼ぶ。また、大対蹠集合の濃度を 2-number と呼び $\#_2 M$ と記す。定義から、大対蹠集合は極大対蹠集合である。以下、対称空間 M はコンパクトであると仮定する。

対蹠集合は、対称空間上の様々な数理と関連を持つことが指摘されている。例えばトポロジーとの関連として、 $\chi(M)$ を M のオイラー数とすれば

$$\chi(M) \leq \#_2 M$$

が成り立つ [4]。さらに、 $H_*(M; \mathbb{Z}_2)$ を M の $\mathbb{Z}_2$ -係数ホモロジーとすれば

$$\#_2 M \leq \dim H_*(M; \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つことも知られており [2]、特に対称 R 空間と呼ばれる特別なコンパクト対称空間では等号が成立する [10] (対称 R 空間でないコンパクト対称空間であっても等号が成り立つ例は存在する (例えば $G_2, G_2/SO(4), F_4$ など))。トポロジー以外にも、Tanaka-Tasaki によりコンパクトエルミート対称空間の 2 つの実形が横断的に交わるとき、その交叉は対蹠集合になることが示され [12]、この事実は Floer ホモロジーの計算へと応用されている [5]。また、Kurihara-Okuda は対蹠集合とデザインとの関係についても調べている [6]。

こうした背景から、対蹠集合について様々な研究が進められており、その一般化についても調べられている。例えば、Sugimoto はリーマン対称空間とは限らない擬リーマン対称空間において対蹠集合を決定する研究を行っている [9]。Ohno-Sakai は対蹠集合を対称空間だけではなく、より広く拡張されたクラスである Γ -対称空間において調べている。さらに、Tamaru は対称空間をカ

ンドルの特別なものと考えることで、対蹠集合をはじめとした点対称によって定まる構造を様々なカンドルにおいて調べている [11]. このように、対蹠集合に関する様々な研究が進められている一方で、全てのコンパクト対称空間について、その極大対蹠集合の分類・構成が完成しているわけではない. ここで、極大対蹠集合の分類とは極大対蹠集合の合同類の分類のことである. 例えば、古典型コンパクト対称空間においては、多くの対称空間で極大対蹠集合の分類・構成が完成しているが、有向実グラスマン多様体やスピノ群 $Spin(n), Ss(n)$ などにおいては極大対蹠集合の分類・構成は完成していない.

本講演では、単連結例外型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類・構成を紹介する. 単連結例外型コンパクト対称空間とは、

$$\begin{aligned} & \text{例外型コンパクト単純リー群 } G_2, F_4, E_6, E_7, E_8, \\ & G, FI, FII, EI, EII, EIII, EIV, EV, EVI, EVII, EVIII, EIX \text{ 型} \end{aligned}$$

の 17 種類のコンパクト対称空間のことである. これまでの先行研究により、

$$G_2, F_4, E_6, E_8, G \text{ 型}, FI \text{ 型}, FII \text{ 型}, EI \text{ 型}, \dots, EIV \text{ 型}, EVII \text{ 型}$$

については極大対蹠集合の分類・構成が完成している [1, 7, 8, 13, 15]. そこで本講演では、

$$E_7, EV \text{ 型}, EVI \text{ 型}, EVIII \text{ 型}, EIX \text{ 型}$$

についての極大対蹠集合の分類・構成を紹介する.

2 極地と極大対蹠集合

集合 X と全単射 $f: X \rightarrow X$ について $F(f, X) := \{x \in X; f(x) = x\}$ とする. コンパクト対称空間 M と $o \in M$ について、 $F(s_o, M)$ の連結成分を M における o の極地という [3]. 1 点集合となる極地を極とよぶ. $\{o\}$ は o の極となるので、自明な極という. o の極地を M_i^+ ($0 \leq i \leq k$) とし、 M_0^+ を自明な極とすれば、 $F(s_o, M) = \sqcup_{i=0}^k M_i^+$. 極地は M の全測地的部分多様体であるので、極地自身もコンパクト対称空間になる. G を M の合同変換群とし、 K_o を G の o におけるイソトロピー群とすれば K_o はそれぞれの極地に推移的に作用することが知られている.

2.1 M の極大対蹠集合から極地の極大対蹠集合

M_i^+ を極ではない極地とし、 $A(M_i^+)$ を M_i^+ の極大対蹠集合とする. このとき、 $\{o\} \cup A(M_i^+)$ は M の対蹠集合であるので、これを含む M の極大対蹠集合 $A(M)$ が存在する. $A(M) \cap M_i^+$ は M_i^+ の対蹠集合であり、 $A(M_i^+) \subset A(M) \cap M_i^+$ であるので、 $A(M_i^+)$ の極大性から $A(M_i^+) = A(M) \cap M_i^+$ となる. したがって、 M_i^+ の極大対蹠集合を調べるためには、 M の極大対蹠集合が分かればよい. さらに、 o を含む M の極大対蹠集合の K_o -作用の同値類の個数が l 個であるとする. それらの代表元を $A_a(M)$ ($1 \leq a \leq l$) と記す. このとき、 M_i^+ の任意の極大対蹠集合は $A_a(M) \cap M_i^+$ ($1 \leq a \leq l$) のいずれかと合同となり、 M_i^+ の極大対蹠集合の合同類を決定するためには $A_a(M) \cap M_i^+$ ($1 \leq a \leq l$) の中で M_i^+ の極大対蹠集合になるものを調べればよい.

2.2 極地の極大対蹠集合から M の極大対蹠集合

また, M における o の極地が $M_0^+, \dots, M_3^+$ であるとし, M_3^+ が極であり $M_3^+ = \{p\}$ であるとする. さらに, M_1^+, M_2^+ はそれぞれ極でないとする. このとき, M 上には各点をそれぞれの非自明な極へと移す被覆変換 τ が存在する. 被覆変換 τ は $\tau^2 = \text{id}_M$ を満たし, M 上の任意の合同変換と可換になることが知られている. さらに, $\tau(M_1^+) = M_2^+$ が成り立つ. そこで, $A(M_1^+)$ を M_1^+ の極大対蹠集合とすれば

$$A^\tau(M_1^+) := \{o\} \cup A(M_1^+) \cup \tau(A(M_1^+)) \cup \{p\}$$

は M 上の極大対蹠集合となる. 逆に, $A(M)$ を M の o を含む極大対蹠集合とすれば, $\tau(A(M)) \subset A(M)$ であることから $A(M) \cap M_1^+$ は M_1^+ の極大対蹠集合となる. したがって, M の極大対蹠集合を調べるためには M_1^+ の極大対蹠集合が分かればよい. さらに, M_1^+ の極大対蹠集合の合同類の個数が m 個であるとする. それらの代表元を $A_b(M_1^+)$ ($1 \leq b \leq m$) と記す. このとき, $A_b^\tau(M_1^+)$ ($1 \leq a \leq m$) は M の極大対蹠集合の合同類の代表元の候補となり, これらが互いに M の合同変換で移り合うか否かを調べることで M の極大対蹠集合の合同類を分類できる.

3 主結果

まず, 先行研究の結果から E_8 の極大対蹠集合について次の結果が得られている.

定理 3.1. [1] 例外型単純コンパクトリー群 E_8 について, 極大対蹠集合の合同類の数は 2 であり, 各合同類に含まれる極大対蹠集合の濃度はそれぞれ 256, 512 である. とくに, $\#_2 E_8 = 512$ である.

E_8 の 2 種類の極大対蹠集合のうち, 濃度が 256 であるものは $Spin(8)$ の極大対蹠集合から構成されるものであり, 濃度が 512 であるものは極大トーラスの極大対蹠集合から構成できるものである. E_8 の極大対蹠集合の 2 種類の合同類から, それぞれ単位元を含む代表元を選び, それらを $A_i(E_8)$ ($i = 1, 2$) と記す. ただし, $\#A_1(E_8) = 256, \#A_2(E_8) = 512$ であるとする. E_8 の極地は $EVIII, EIX$ 型コンパクト対称空間であることが知られている. そこで, $EVIII, EIX$ 型をそれぞれ単位元の極地であると考え. このとき各 $i = 1, 2$ について, $A_i(E_8) \cap EVIII$ は $EVIII$ の極大対蹠集合になることが確かめられ次の主張を得る.

定理 3.2. $EVIII$ 型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の合同類の数は 2 であり, 各合同類に含まれる極大対蹠集合の濃度はそれぞれ 199, 391 である. とくに, $\#_2 EVIII = 391$ である.

$EVIII$ 型の 2 種類の極大対蹠集合のうち, 濃度が 199 であるものは $Spin(8)$ の極大対蹠集合から得られるもので, 濃度が 391 であるものは極大トーラスから得られるものである. とくに, ワイル群の軌道は濃度が 391 の極大対蹠集合の部分集合となる. 次に EIX 型に関して, 各 $i = 1, 2$ について $A_i(E_8) \cap EIX$ は EIX 型の極大対蹠集合になることが確かめられ, 次の主張を得る.

定理 3.3. EIX 型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の合同類の数は 2 であり, 各合同類に含まれる極大対蹠集合の濃度はそれぞれ 56, 120 である. とくに, $\#_2 EIX = 120$ である.

EIX 型の 2 種類の極大対蹠集合のうち, 濃度が 56 であるものは $Spin(8)$ の極大対蹠集合から得られるもので, 濃度が 120 であるものは E_8 のワイル群の軌道である. EIX 型の 1 点 p を固定する. EIX 型の極大対蹠集合の 2 種類の合同類から, それぞれ p を含む代表元を選び, それらを $A_i(EIX)$ ($i = 1, 2$) と記す. ただし, $\#A_1(EIX) = 256, \#A_2(EIX) = 512$ であるとする. EIX 型の極地は $S^2 \cdot EVII$ と EVI 型コンパクト対称空間であることが知られている. そこで, これらの対称空間を EIX 型における p の極地であると考え. このとき各 $i = 1, 2$ について, $A_i(EIX) \cap EVI$ は EVI 型の極大対蹠集合になることが確かめられ, 次の主張を得る.

定理 3.4. EVI 型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の合同類の数は 2 であり, 各合同類に含まれる極大対蹠集合の濃度はそれぞれ 31, 63 である. とくに, $\#_2 EVI = 63$ である.

EVI 型の 2 種類の極大対蹠集合のうち, 濃度が 31 であるものは $Spin(8)$ の極大対蹠集合から得られるもので, 濃度が 63 であるものは E_7 のワイル群の軌道である.

次に E_7 の極大対蹠集合について考える. E_7 の極地は, 極が 1 つと EVI 型が 2 つであることが知られている. とくに, E_7 においては前節の議論を適用することができて, 次の主張が得られる.

定理 3.5. 例外型単純コンパクトリー群 E_7 について, 極大対蹠集合の合同類の数は 2 であり, 各合同類に含まれる極大対蹠集合の濃度はそれぞれ 64, 128 である. とくに, $\#_2 E_7 = 128$ である.

E_7 の 2 種類の極大対蹠集合のうち, 濃度が 64 であるものは $Spin(8)$ の極大対蹠集合から構成されるものであり, 濃度が 128 であるものは極大トーラスの極大対蹠集合である. 最後に EV 型の極大対蹠集合を考える. EV 型の極地は極が 1 つと, $G_4^*(\mathbb{C}^8)$ が 2 であることが知られている. ここで, $G_4(\mathbb{C}^8)$ は $\mathbb{C}^8$ の 4 次元部分空間からなるグラスマン多様体であり, $G_4^*(\mathbb{C}^8)$ は $G_4(\mathbb{C}^8)$ の bottom space である. $G_4^*(\mathbb{C}^8)$ の極大対蹠集合は Tanaka-Tasaki により分類されており, 極大対蹠集合の合同類の数は 3 であり, それぞれの合同類の代表元の濃度は 27, 35, 63 である [14]. この結果を使うことで次の主張を得る.

定理 3.6. EV 型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の合同類の数は 3 であり, 各合同類に含まれる極大対蹠集合の濃度はそれぞれ 56, 72, 128 である. とくに, $\#_2 EV = 128$ である.

EV 型の 3 種類の極大対蹠集合のうち, 濃度が 56 であるものは $Spin(8)$ の極大対蹠集合から得られるもので, 濃度が 72 であるものは E_7 のワイル群の軌道, 濃度が 128 であるものは極大トーラスの極大対蹠集合である.

以上から単連結例外型コンパクト対称空間について, 極大対蹠集合の分類・構成が完成した. その結果を次の表にまとめる.

M	合同類 の数	濃度	$\#_2 M$		M	合同類 の数	濃度	$\#_2 M$
G_2	1	8	8		G 型	1	7	7
F_4	1	32	32		FI 型	1	28	28
					FII 型	1	3	3
E_6	2	32, 64	64		EI 型	2	28, 64	64
					EII 型	2	28, 36	36
					$EIII$ 型	1	27	27
					EIV 型	2	31, 63	63
E_7	2	64, 128	128		EV 型	3	56, 72, 128	128
					EVI 型	2	31, 63	63
					$EVII$ 型	1	56	56
E_8	2	256, 512	512		$EVIII$ 型	2	199, 391	391
					EIX 型	2	56, 120	120

参考文献

- [1] J. F. Adams, *2-tori in E_8* , Math. Ann., **278**(1987), 2939
- [2] M. Amann, *Maximal Antipodal Sets and the Topology of Generalised Symmetric Spaces*, arXiv:2101.01587
- [3] B.Y.Chen, T.Nagano, *Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces II*, Duke. Math. J., **44**(1977), 745-755
- [4] B.Y.Chen, T.Nagano, *A Riemmanian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. J., **308**(1988), 273-297
- [5] H. Iriyeh, T. Sakai, H. Tasaki, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan **65** no.4 (2013), 1135-1151
- [6] H.Kurihara, T.Okuda, *Great antipodal sets on complex Grassmannian manifolds as designs with the smallest cardinalities*, J. Algebra, **559**(2020), 432-466
- [7] Y.Sasaki, *Maximal antipodal sets of F_4 and FI* , Journal of Lie Theory, **32**, No.1(2022), 281-300
- [8] Y.Sasaki, *Maximal antipodal sets of E_6 and some compact symmetric spaces*, Differential Geometry and its Applications, **85**(2022), 101934
- [9] K. Sugimoto, *Antipodal sets of pseudo-Riemannian symmetric R -spaces*, Differential Geometry and its Applications **93**(2024), 102104
- [10] M.Takeuchi, *Two-number of symmetric R -spaces*, Nagoya Math. J., **115**(1989),43-46
- [11] 田丸博士 「離散的な対称空間と quandle」 数学/日本数学会 編 77.2 (2025), 172-185.
- [12] M.S.Tanaka, H.Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan, **64** No.4 (2012), 1297-1332
- [13] M. S. Tanaka, H. Tasaki, *Antipodal sets of symmetric R -spaces*, Osaka J. Math. **50** No.1 (2013), 161-169
- [14] M. S. Tanaka, H. Tasaki, *Maximal antipodal sets of compact classical symmetric spaces and their cardinalities I*, Differential Geometry and its Applications **73** (2020) 101682
- [15] M.S.Tanaka, H.Tasaki, O.Yasukura, *Maximal antipodal sets related to G_2* , Proc. Amer. Math. Soc. vol.**150** No.10 (2022), 4533-4542

非コンパクト多様体の Morse 不等式

岸本大祐（九大数理）

1 背景

本講演では加藤毅さん（京都大）と蔦谷充伸さん（九州大）との共同研究で得られた、閉多様体上の Galois 被覆の全空間であるような非コンパクト多様体に対する Morse 不等式の解説をする。先行研究 [6] ではこのような多様体上の有界なベクトル場に対して Poincaré-Hopf の定理が成り立つことを証明しており、この研究はその続きである。これらの研究は有限伝搬ユニタリ作用素のホモトピー論 [3, 4, 5] から派生したのだが、ここではこのホモトピー論には言及しない。

まず古典的な Morse 不等式を思い出そう。 M を n 次元閉多様体とし、 b_i をその i 次 Betti 数とする。Morse 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して c_i を f の指数 i の臨界点の個数とする。このとき、不等式

$$c_k - c_{k-1} + \cdots + (-1)^k c_0 \geq b_k - b_{k-1} + \cdots + (-1)^k b_0$$

($k = 0, 1, \dots, n$) と等式

$$c_n - c_{n-1} + \cdots + (-1)^n c_0 = (-1)^n \chi(M)$$

が成り立つ。ただし、 $\chi(M)$ は M の Euler 標数である。これが古典的な Morse 不等式であり、その重要さや様々な応用に関しては述べるまでもないだろう。本講演では Morse 不等式を非コンパクト多様体に拡張することを考える。誰もが考えるようなこの問題に関する結果が、Morse 関数の臨界点の数が有限である場合など、本質的にコンパクトな場合から抜け出せないものが少しあるだけなのは驚きである。（非コンパクトな複素多様体に対する結果で Morse 不等式と題されるものはあるが、ここで考える素朴なものとは異なるので除外する。）一方、Roe は非コンパクト多様体の指数定理に関する論文 [10] に

I hope to show elsewhere that the numbers β' also satisfy “Morse inequalities” with respect to a suitably well-behaved Morse function.

と記しているが、残念ながら彼は Morse 不等式に関する結果を出版しなかった。ここで、 β' は彼が考えた Betti 数の亜種である。我々が考える非コンパクト多様体は Roe が論文 [10, 11] で考えたものの最も重要な例のひとつなので、我々の Morse 不等式は Roe の希望を少しは叶えているかもしれない。

2 設定

我々が考える非コンパクト多様体と Morse 関数を設定する.

2.1 多様体

Morse 不等式を非コンパクト多様体に拡張するとき, 次の素朴な問題がもちあがる.

問題 2.1. 1. Morse 関数の臨界点が無限個あるとき, どう数えるのか?

2. ホモロジーが無限次元のとき, Betti 数をどう定義するのか?

我々は非コンパクト多様体の Poincaré-Hopf の定理に関する先行研究 [6] のアイデアを応用してひとつめの問題を解決する. そのために, 以下, M は次の多様体とする.

- Galois 被覆 $G \rightarrow M \rightarrow M/G$ があり, M/G は向きづけられた n 次元連結閉多様体である.
- M/G の計量をもちあげて M の計量を与える.

M が非コンパクトであることと G が無限群であることが同値なことに注意する. 上記の通り, 群 G が従順なとき多様体 M は Roe [10, 11] が考えた非コンパクト多様体の最も重要な例の一つである. ([10, (6.6) Proposition] 参照)

多様体 M に対して, L^2 -Betti 数と呼ばれる Betti 数の亜種を考えることができ, 我々は問題 2.1 のふたつめをこの L^2 -Betti 数を採用することで解決する. L^2 -Betti 数の定義を述べる代わりに Lück によって証明された次の性質を紹介する. $b_k^{(2)}$ を M の k 次 L^2 -Betti 数とする.

定理 2.2. 正規部分群の列 $G = G_1 \triangleright G_2 \triangleright G_3 \triangleright \cdots$ が存在し, すべての k で指数 $|G_k : G_{k+1}|$ が有限のとき,

$$b_k^{(2)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k(M/G_k)}{|G : G_k|}$$

が成り立つ.

2.2 Morse 関数

Hirsch [2] は任意の連結な非コンパクト多様体は臨界点のない関数をもつことを証明した. よって, 非コンパクト多様体上には臨界点をもたない Morse 関数を常に存在するので, Morse 関数に制約がなければ Morse 不等式を考える意味がない. そこで, ここでは非コンパクト多様体の研究においてよくある有界性という制約 (cf. [6, 14]) を考える. 以下, 接続は Levi-Civita とする.

定義 2.3. n 次元 Riemann 多様体 X 上の関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が有界とは、 $0 \leq i \leq \max\{3, \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ に対して $\nabla^i f$ が有界であることをいう。

注意 2.4. この有界性には不満がある。本質的に重要なのは ∇f の有界性であり、それ以外は技術的な条件である。特に、関数 f 自身の有界性は仮定したくないが、いまのところどうやって仮定を外せばよいのかわからない。

Morse 関数の臨界点が集積点をもつと解析的に扱いづらくなるので、少なくとも私の手には負えなくなる。そこで、Morse 関数に次の制約も与える。

定義 2.5. Riemann 多様体 X 上の Morse 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が一様とは、ある $\epsilon > 0$ が存在し、 f のどのふたつの臨界点も 2ϵ は離れていることをいう。

さらに臨界点に技術的な制約を加えた Morse 関数も考える。部分集合 $A \subset M$ の ϵ 近傍を $N(A; \epsilon)$ で表す。以下、 M/G の三角形分割を固定し、そのもちあげである M の G 不変な三角形分割を考える。

定義 2.6. 多様体 M 上の Morse 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ が強一様とは、 $\epsilon > 0$ に関して一様であり、さらに次の条件をみたすことをいう。

1. すべての $p \in \text{Crit}(f)$ に対して M のある開 n 単体 σ が存在し、 $N(p; \epsilon) \subset \sigma$ となる。
2. ある $\delta > 0$ に対して

$$|\nabla f| \geq \delta$$

が $M - N(\text{Crit}(f); \epsilon)$ で成り立ち、すべての $p \in \text{Crit}(f)$ に対して $\nabla^2 f(p)$ のすべての固有値 λ が

$$|\lambda| \geq \delta$$

をみたす。

注意 2.7. 強一様性の定義で不満なのはのひとつめの条件である。なぜなら、これだけが群 G の M への作用と微妙に関係するからである。この条件は外すことができると思っているが、どうすればよいのかわからない。強一様性のふたつめの条件は臨界点が「衰退」する様な場合を除くものであり、解析的な困難を避けるためのものである。

3 結果

主結果とその応用を紹介する。

3.1 基本領域

多様体 M の基本領域を導入する。 M/G の各開 n 単体の M へのもちあげをひとつずつ選ぶ。そして、 M/G の各開 k 単体 ($k < n$) の M へのもちあげを、す

でに選んだある開 n 単体の M へのもちあげの閉包に含まれるようひとつ選ぶ．
このようにして選んだ開単体のもちあげの和集合を K と書き， M の基本領域と呼ぶ．

例 3.1. $\mathbb{R}^2$ への $\mathbb{Z}^2$ の平行移動による作用を考える．このとき， $\mathbb{R}^2$ の単位正方形から平行な辺の一方をそれぞれ除いたものは $\mathbb{R}^2$ の基本領域である．この基本領域はトーラス $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ を切り開いたものであり，一般の M に対しても基本領域は M/G を切り開いたものだと考えられる．

定義より

$$M = \coprod_{g \in G} gK \quad (3.1)$$

が成り立つ．一様な Morse 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して関数

$$c_k: G \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \mapsto |\text{Crit}_k(f) \cap gK|$$

を定義する．ここで， $\text{Crit}_k(f)$ は f の指数 k の臨界点の集合である．Morse 関数の一様性の定義と K の閉包のコンパクト性より，関数 c_k は well-defined な有界関数である． c_k は $\text{Crit}_k(f)$ のタイル張り (3.1) に関する「雑な配置」を表すと考えられる．したがって，この関数 c_k は指数 k の臨界点を「数える」とみなせ，問題 2.1 のひとつめの解決だということにする．

3.2 主結果

主定理を述べるために記号を用意する． $\ell^\infty(G)$ を G 上の有界関数のなす Banach 空間とする．今， G は $\ell^\infty(G)$ に

$$(g \cdot \phi)(x) = \phi(xg)$$

により作用する．ただし， $x, g \in G, \phi \in \ell^\infty(G)$ である． $\ell^\infty(G)$ の部分空間で $g \cdot \phi - \phi$ により生成されるものを $\mathcal{I}$ とする．ただし， $g \in G, \phi \in \ell^\infty(G)$ である． $\bar{\mathcal{I}}$ を $\mathcal{I}$ の弱位相による閉包とする．関数 c_k は基本領域の選び方に依存しているが， $c_k \bmod \mathcal{I}$ が基本領域の選び方によらないことが次のようにわかる．分解 (3.1) を用いて [6] で有界微分形式の $\ell^\infty(G)/\mathcal{I}$ に値をもつ「積分」が定義された．この「積分」が基本領域の選び方によらないことが [6] で予想されており，Milizia [8] によりこの予想は肯定的に解決された．今，関数 c_k はある有界微分形式の「積分」の極限となるので $c_k \bmod \mathcal{I}$ は基本領域の選び方によらない．詳しくは [7] を参照せよ．

今， $\ell^\infty(G)$ は関数を各点で評価することにより順序 $\leq$ が与えられる． $\phi_1, \phi_2 \in \ell^\infty(G)$ に対して

$$\phi_1 \leq \phi_2 \bmod \bar{\mathcal{I}}$$

を，ある $\phi \in \ell^\infty(G)$ に対して $\phi_1 + \phi \leq \phi_2$ をみたすことと定義する．これは $\ell^\infty(G)$ の順序が誘導する $\ell^\infty(G)/\bar{\mathcal{I}}$ の前順序に他ならない．さらに，

$$\phi_1 \approx \phi_2 \bmod \bar{\mathcal{I}}$$

を $\phi_1 \leq \phi_2 \pmod{\bar{J}}$ かつ $\phi_2 \leq \phi_1 \pmod{\bar{J}}$ であることと定める. $\mathbb{1} \in \ell^\infty(G)$ を値が 1 である定数関数とする.

主定理は以下の通りである.

定理 3.2. $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ を有界な強一様 Morse 関数とすると,

$$c_k - c_{k-1} + \cdots + (-1)^k c_0 \geq (b_k^{(2)} - b_{k-1}^{(2)} + \cdots + (-1)^k b_0^{(2)}) \mathbb{1} \pmod{\bar{J}}$$

($k = 0, 1, \dots, n$) と

$$c_n - c_{n-1} + \cdots + (-1)^n c_0 \approx (-1)^n \chi(M/G) \mathbb{1} \pmod{\bar{J}}$$

が成り立つ.

群 G が従順とは, G 不変平均と呼ばれる正值線型写像 $\mu: \ell^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$ で $\mu(\mathbb{1}) = 1$ をみたすものが存在することをいう. 定理 3.2 は群 G が従順なときしか意味をなさないことに注意する. 実際, 次の条件が同値であることが知られている.

1. 群 G は従順である.
2. $\ell^\infty(G) \neq \bar{J}$ が成り立つ.
3. $\mathbb{1} \not\equiv 0 \pmod{\bar{J}}$ が成り立つ.

G 不変平均は余不変量加群と呼ばれる $\ell^\infty(G)/\bar{J}$ を経由するので, $\bar{J}$ による商はある種の繰り込み, もしくは, 平均 (これは Roe [10] が自分の指数定理や Atiyah の Γ 指数定理の説明として用いた文言である) の前段階だとみなせる. 一方, Block-Weinberger [1] は距離空間のラージスケールな性質を調べるために一様有限ホモロジーを導入し, それが擬等長不変量であることを示した. 今, 余不変量加群 $\ell^\infty(G)/\bar{J}$ は G の 0 次元の一様有限ホモロジーと自然に同型である. したがって, 包含写像 $G \rightarrow M$ は擬等長なので $\ell^\infty(G)/\bar{J}$ は M の擬等長不変量である. しかし, $\ell^\infty(G)/\bar{J}$ が M の擬等長不変量かはわからない.

G 不変平均は $\ell^\infty(G)/\bar{J}$ を経由することから次の平均 Morse 不等式が得られる.

系 3.3. $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ を有界な強一様 Morse 関数とし, 群 G が G 不変平均 μ をもつ従順群とする. このとき,

$$\mu(c_k) - \mu(c_{k-1}) + \cdots + (-1)^k \mu(c_0) \geq b_k^{(2)} - b_{k-1}^{(2)} + \cdots + (-1)^k b_0^{(2)}$$

($k = 0, 1, \dots, n$) と

$$\mu(c_n) - \mu(c_{n-1}) + \cdots + (-1)^n \mu(c_0) = (-1)^n \chi(M/G)$$

が成り立つ.

L^2 -Betti 数の新しい性質を平均 Morse 不等式から導く. 次の補題は [7] で証明されている.

補題 3.4. 群 G が無限群で $\phi \in \ell^\infty(G)$ が有限個の $x \in G$ を除いて $\phi(x) = 0$ をみたすなら $\phi \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}}$ となる.

今, 系 3.3 より弱平均 Morse 不等式

$$\mu(c_k) \geq b_k^{(2)}$$

が得られる. よって, 次で与えられる L^2 -Betti 数の新しい性質が補題 3.4 から示せる. 群 G の作用と本質的に無関係な M のトポロジカルな性質を L^2 -Betti 数が導くという点でこの結果は興味深い.

系 3.5. 群 G が無限従順群なら $b_k^{(2)} \neq 0$ のとき M 上の任意の有界な強一様 Morse 関数は指数 k の臨界点を無限個もつ.

これ以外の応用として, Novikov と Shubin による π_1 作用を組み込んだ Morse 不等式 [9] が G が従順のときに再現できるというのもあげられる.

4 証明

以下, 定理 3.2 の証明の流れを解説する. 大まかな流れは, 基本的に Roe の本 [13] にある Witten 変形を用いた閉多様体に対する Morse 不等式の証明と同じだが, 用いる道具はいちから組み立てる.

4.1 区分的トレース

ベクトル束 $F \rightarrow X$ に対して $L^2(F)$ を L^2 切断のなす Hilbert 空間とする. G 不変な (計量が与えられた) ベクトル束 $E \rightarrow M$ に対して, $\{e_i\}_{i \in I}$ を $L^2(E|_K)$ の正規直交基底とする. 今, 同型写像

$$g^{-1}: E|_{gK} \rightarrow E|_K, \quad x \mapsto g^{-1}x$$

の導く同型写像 $(g^{-1})^*: L^2(E|_K) \rightarrow L^2(E|_{gK})$ を用いて $e_i^g = (g^{-1})^*(e_i)$ とすると, $\{e_i^g\}_{i \in I}$ は $L^2(E|_{gK})$ の正規直交基底である.

定義 4.1. 有界作用素 $A: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ が区分的 Hilbert-Schmidt とは

$$\rho_2(A): G \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \mapsto \left(\sum_{i \in I} \|Ae_i^g\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

が well-defined な有界関数であることをいう.

$\rho_2(A)$ は $\ell^\infty(G)$ に値をもつ「ノルム」と考えられる. 有界作用素 A と区分的 Hilbert-Schmidt 作用素 B に対して $\rho_2(AB) \leq \|A\| \rho_2(B)$ という基本的な不等式が成り立つ. しかし, 一般に

$$\rho_2(BA) \not\leq \rho_2(B)\|A\|, \quad \rho_2(A^*) \neq \rho_2(A)$$

となるので, 区分的 Hilbert-Schmidt 作用素は通常の Hilbert-Schmidt 作用素と全く同じようには扱えない.

補題 4.2. 区分的 Hilbert-Schmidt 作用素 $A, B: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ に対して関数

$$\rho_2(A, B): G \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \mapsto \sum_{i \in I} \langle Ae_i^g, Be_i^g \rangle$$

は well-defined な有界関数である.

補題 4.2 により, 次の定義は意味をなす.

定義 4.3. 作用素 $A: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ が区分的トレースクラスとは区分的 Hilbert-Schmidt 作用素 B, C により $A = B^*C$ となることをいう. このとき, 区分的トレースを

$$\text{Tr}(A) = \rho_2(B, C)$$

により定める.

Roe [10] はある種の非コンパクト多様体上の作用素に対してトレースを定義した. 特に, G が従順なとき区分的トレースクラス作用素 $A: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ に対して, Roe のトレース $\tau(A)$ はが定義できる. 今, ある G 不変平均 $\mu: G \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$\tau(A) = \frac{\mu(\text{Tr}(A))}{\text{vol}(M/G)}$$

が成り立つことがわかる. よって, 区分的トレースは Roe のトレースの (3.1) に関する分解であると考えられる. 定義より次がすぐにわかる.

命題 4.4. 正值区分的トレースクラス作用素 $A: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ に対して次が成り立つ.

$$\text{Tr}(A) \geq 0$$

ここで扱いやすい区分的 Hilbert-Schmidt 作用素を導入する.

定義 4.5. なめらかな作用素 $A: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ がガウス伝搬をもつとは, ある $C_1, C_2 > 0$ に対して A の核関数 $k_A(x, y)$ が[‡]

$$|k_A(x, y)| \leq C_1 e^{-C_2 d(x, y)^2}$$

をみたすことをいう.

補題 4.6. ガウス伝搬をもつなめらかな作用素 $A: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ に対して A と A^* は区分的 Hilbert-Schmidt である. 特に, ガウス伝搬をもつなめらかな作用素 $A, B: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ に対してその積 $AB: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ は区分的トレースクラスである.

擬等長写像である包含写像 $G \rightarrow M$ を正確に評価することにより, ガウス伝搬をもつ作用素に対して区分的トレースの交換性が証明できる.

命題 4.7. なめらかな作用素 $A, B: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ がガウス伝搬をもつなら

$$\text{Tr}(AB) \equiv \text{Tr}(BA) \pmod{\bar{J}}$$

が成り立つ.

4.2 Witten 変形

ある種の有界性をみたす関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して作用素

$$d_t = e^{-tf} de^{tf}: L^2(\Lambda TM) \rightarrow L^2(\Lambda TM)$$

を関数 f による微分 d の **Witten 変形** という。ここで、 ΛTM は TM の外積束である。

$$D_t = d_t + d_t^*$$

とする。このとき、 D_t は本質的に自己共役であり、一次作用素 A に対して $D_t^2 = \nabla \nabla^* + A$ となるので、[12, Chapter 5] の意味で一般 Dirac 作用素である。一般 Dirac 作用素の汎関数計算を行うために次の関数のクラスを導入する。

定義 4.8. Schwartz 関数 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ である $C_1, C_2 > 0$ に対して

$$|\widehat{\phi}^{(i)}(x)| \leq C_1 e^{-C_2 x^2}$$

($i = 0, 1, \dots, 2\lceil \frac{n}{2} \rceil$) をみたすものの全体を $\mathcal{G}$ で表す。ただし、関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $\widehat{f}$ は Fourier 変換、 $f^{(i)}$ は i 階微分を意味する。

一般 Dirac 作用素の有限伝搬性 [13, Proposition 7.20] を用いて次が証明される。

命題 4.9. 任意の一般 Dirac 作用素 $\tilde{D}$ と $\phi \in \mathcal{G}$ に対して $\phi(\tilde{D})$ は Gauss 伝搬をもつ。特に、 $\phi(\tilde{D})$ は区分的 Hilbert-Schmidt である。

区分的トレースの正值性 (命題 4.4) とトレース性質 (命題 4.7) を用いて次が証明される。

命題 4.10. 関数 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が $\phi(x^2) \in \mathcal{G}$ をみたすとする。有界関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 、関数 $\psi(x) = x\phi(x)^2$ と $t > 0$ に対して

$$\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \text{Tr}(\psi(D_t^2|_{\Lambda^i TM})) \geq 0 \pmod{\bar{J}}$$

($k = 0, 1, \dots, n-1$) と

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \text{Tr}(\psi(D_t^2|_{\Lambda^i TM})) \equiv 0 \pmod{\bar{J}}$$

が成り立つ。

系 4.11. 関数 ψ, f を命題 4.10 の通りとする。 $\psi(x) \geq e^{-x^2}$ をみたすとき、 $t > 0$ と $s > 2$ に対して

$$\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \text{Tr}(\psi(D_t^2|_{\Lambda^i TM})) \geq \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \text{Tr}(e^{-sD_t^2}|_{\Lambda^i TM}) \pmod{\bar{J}}$$

($k = 0, 1, \dots, n-1$) と

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \text{Tr}(\psi(D_t^2|_{\Lambda^i TM})) \equiv \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \text{Tr}(e^{-sD_t^2}|_{\Lambda^i TM}) \pmod{\bar{J}}$$

が成り立つ。

強一様 Morse 関数に対して次が比較的簡単に証明される。

補題 4.12. 関数 ψ を命題 4.10 の通りとする。有界な強一様 Morse 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、 $t \rightarrow \infty$ のとき $\text{Tr}(\psi(D_t^2|_{\Lambda^i TM}))$ は c_i に一様収束する。

$\text{Tr}(e^{-sD_t^2}|_{\Lambda^i TM})$ と L^2 -Betti 数を結びつけるために次の作用素を考える。

定義 4.13. 作用素 $\tilde{d}: C_c^\infty(\Lambda TM) \rightarrow C_c^\infty(\Lambda TM)$ が抽象微分とは、次の条件をみたすことをいう。

1. $\tilde{d}^2 = 0$
2. $\tilde{D} = D + A$ が本質的に自己共役な作用素 A で $\nabla^i A$ ($i = 0, 1, \dots, \lceil \frac{n}{2} \rceil$) が有界なものに対して成り立つ。ここで、 $\tilde{D} = \tilde{d} + \tilde{d}^*$ である。

有界な関数による Witten 変形は抽象微分を与えることに注意する。 $\mathcal{C}$ をコンパクトな台をもつ関数 $\phi: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ で $\phi(x^2)$ はなめらか、 $0 \leq \phi \leq 1$ と $\phi(0) = 1$ をみたすもののなす集合とする。Roe によって導入された正規化された Betti 数 [12] の区分版を導入する。

定義 4.14. 抽象微分 $\tilde{d}$ の区分的に正規化された k 次 Betti 数 $b_k(\tilde{d})$ を

$$b_k(\tilde{d}): G \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \mapsto \inf_{\phi \in \mathcal{C}} \text{Tr}(\phi(\tilde{D}^2|_{\Lambda^k TM}))(g)$$

により定める。

区分的に正規化された Betti 数は有界関数である。一般にコンパクトな台をもつ関数 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ にたいして $\phi(\tilde{D}^2)$ は区分的トレースクラスとは限らないが、ここでは区分的トレースを拡張することで上の定理を実現している。通常の微分 d に対して

$$b_k(d) = b_k^{(2)} \mathbb{1}$$

となることに注意する。また、次も証明できる。

命題 4.15. 任意の抽象微分 $\tilde{d}$ に対して $\text{Tr}(e^{-s\tilde{D}^2}|_{\Lambda^i TM})$ は $s \rightarrow \infty$ のとき $b_i(\tilde{d})$ に弱収束する。

Roe によって証明された正規化された Betti 数の不変性 [12, (2.6) Theorem] と同様の不変性が区分的に正規化された Betti 数に対して証明できる。

命題 4.16. 有界で自己共役な同型写像 $F: \Lambda TM \rightarrow \Lambda TM$ に対して抽象微分 $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2$ が $F\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 F$ をみたすなら、

$$b_i(\tilde{d}_1) \approx b_i(\tilde{d}_2) \pmod{\bar{J}}$$

($i = 0, 1, \dots, n$) が成り立つ。

定理 3.2 の証明。関数 e^{-tf} をかけるという写像 $\Lambda TM \rightarrow \Lambda TM$ は有界で自己共役な同型写像なので、命題 4.16 より

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{Tr}(e^{-sD_t^2}|_{\Lambda^i TM}) = \lim_{s \rightarrow \infty} \text{Tr}(e^{-sD^2}|_{\Lambda^i TM}) = b_k^{(2)} \mathbb{1}$$

となる。よって、系 4.11 と命題 4.12 より定理 3.2 は証明される。 $\square$

参考文献

- [1] J. Block and S. Weinberger, Aperiodic tilings, positive scalar curvature, and amenability of spaces, *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), no. 4, 907-918.
- [2] M.W. Hirsch, On imbedding differentiable manifolds in euclidean space, *Ann. of Math. (2)* **73** (1961), 566-571.
- [3] T. Kato, D. Kishimoto, and M. Tsutaya, Homotopy type of the unitary group of the uniform Roe algebra on $\mathbb{Z}^n$, *J. Topol. Anal.* **15** (2023), no. 2, 495-512.
- [4] T. Kato, D. Kishimoto, and M. Tsutaya, Homotopy type of the space of finite propagation unitary operators on $\mathbb{Z}$, *Homology Homotopy Appl.* **25** (2023), no. 1, 375-400.
- [5] T. Kato, D. Kishimoto, and M. Tsutaya, Hilbert bundles with ends, *J. Topol. Anal.* **16** (2024), no. 2, 291-322.
- [6] T. Kato, D. Kishimoto, and M. Tsutaya, Vector fields on non-compact manifolds, *Algebr. Geom. Topol.* **24** (2024), no. 7, 3985-3996.
- [7] T. Kato, D. Kishimoto, and M. Tsutaya, Morse inequalities for noncompact manifolds, [arXiv:2411.04463](#).
- [8] F. Milizia, Bounded differential forms and coinvariants of bounded functions, [arXiv:2311.07731](#).
- [9] S.P. Novikov and M.A. Shubin, Morse inequalities and von Neumann II_1 -factors, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **289** (1986), no. 2, 289-292.
- [10] J. Roe, An index theorem on open manifolds. I, *J. Diff. Geom.* **27** (1988), no. 1, 87-113.
- [11] J. Roe, An index theorem on open manifolds. II, *J. Diff. Geom.* **27** (1988), no. 1, 115-136.
- [12] J. Roe, *Elliptic operators, Topology and Asymptotic Methods*, Pitman Res. Notes Math. Ser. **179**, Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.
- [13] J. Roe, On the quasi-isometry invariance of L^2 Betti numbers, *Duke Math. J.* **59** (1989), no. 3, 765-783.
- [14] S. Weinberger, Fixed-point theories on noncompact manifolds, *J. Fixed Point Theory Appl.* **6** (2009), 15-25.

CAT(0) 空間への等長埋め込み可能性について

豊田 哲 (工学院大学)

概 要

興味深い性質を持つさまざまな距離空間上の有限個の点の間の距離たちは、三角不等式だけでなく、空間の性質に応じたさまざまな不等式を満たす。CAT(0) 空間と呼ばれる、非正曲率性を持つ距離空間に対しても、その上で常に成立する不等式が数多く発見されている。では、逆に、CAT(0) 空間上で常に成立する不等式 (の族) を適切に指定して、CAT(0) 空間の部分集合を特徴づけることができるだろうか？ すなわち、距離空間上の任意の有限個の点の間の距離たちが指定された不等式を全て満たすなら、その距離空間は必ず何らかの CAT(0) 空間の部分集合と距離空間として同型になることが証明できるだろうか？ この問題に関わる研究のここ十年間くらいの進展について述べる。

1 CAT(0) 空間

定義 1. 距離空間 (X, d_X) が **CAT(0) 空間**であるとは、任意の $x, y \in X$ と任意の $t \in [0, 1]$ に対して、 $z_{x,y,t} \in X$ が存在して、任意の $w \in X$ に対して

$$d_X(z_{x,y,t}, w)^2 \leq (1-t)d_X(x, w)^2 + td_X(y, w)^2 - t(1-t)d_X(x, y)^2 \quad (1)$$

が成り立つことである。

いわゆる距離の公理のうち、三角不等式を除くものを全て満たす空間を半距離空間と呼ぶことにすると、半距離空間 (X, d_X) において、 $x, y, w \in X$ が三角不等式

$$d_X(x, y) \leq d_X(x, w) + d_X(y, w)$$

を満たすことは、任意の $t \in [0, 1]$ に対して

$$t(1-t)d_X(x, y)^2 \leq (1-t)d_X(x, w)^2 + td_X(y, w)^2 \quad (2)$$

が成り立つことと同値である。(2) は明らかに (1) から従うから、仮に、定義 1 において「距離空間」を「半距離空間」に置き換えたとしても、定義の条件を満たす空間のクラスに影響はない。定義 1 において、任意の $w \in X$ に対して (1) を満たすような $z_{x,y,t} \in X$ は、存在するなら x, y, t に対して一意的である。そこで、 X が CAT(0) 空間のとき、任意の $x, y \in X$ に対して、写像 $\gamma: [0, d_X(x, y)] \rightarrow X$ を $\gamma(td_X(x, y)) = z_{x,y,t}$, $t \in [0, 1]$ によって定めると、 γ は x と y を結ぶ測地線^{*1} となる。したがって、任意の CAT(0) 空間は測地的距離空間^{*2} である。CAT(0) 空間についてのより詳しい説明は [2], [4], [5], [17]などを参照されたい。

本研究は科研費 (課題番号:21K03254) の助成を受けたものである。

^{*1} $\mathbb{R}$ の区間 $[a, b]$ から距離空間 X への距離を保つ写像 $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ を $\gamma(a)$ と $\gamma(b)$ を結ぶ測地線と呼ぶ。

^{*2} 任意の $x, y \in X$ に対して、 x と y を結ぶ測地線が存在するとき、距離空間 X は測地的であるという。

2 CAT(0) 空間の 4 点間の距離が満たす不等式

Gromov [8] と Sturm [17] は、独立に、全ての CAT(0) 空間において次の不等式族が成り立つことを証明した。

定義 2. 距離空間 (X, d_X) が **⊠ 不等式** を満たすとは、任意の $s, t \in [0, 1]$, $x, y, z, w \in X$ に対し、次の不等式が成り立つことである：

$$\begin{aligned} & s(1-s)d_X(x, z)^2 + t(1-t)d_X(y, w)^2 \\ & \leq (1-s)(1-t)d_X(x, y)^2 + s(1-t)d_X(y, z)^2 + st d_X(z, w)^2 + (1-s)t d_X(w, x)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

不等式 (3) において、例えば $s = 1$ とすると (文字の役割は異なるが) 不等式 (2) が得られる。したがって、定義 1 について言及したのと同様に、⊠ 不等式を満たすという条件を半距離空間に対する条件として定義したとしても、条件を満たす空間のクラスに影響はない。「⊠ 不等式」という言葉は、Gromov の記号の使い方に基づく。Sturm は不等式 (3) を「weighted quadruple inequality」と呼んでいる。Gromov [8] と Sturm [17] は、任意の CAT(0) 空間が ⊠ 不等式を満たすという事実だけでなく、次の事実も証明している。

定理 3 (Gromov [8], Sturm [17]) 任意の測地的距離空間 X に対して、 X が ⊠ 不等式を満たすことは、 X が CAT(0) 空間であることと同値である。

不等式 (3) において、 $s = t = 1/2$ とすると、次の有名な不等式が得られる。

$$d_X(x, z)^2 + d_X(y, w)^2 \leq d_X(x, y)^2 + d_X(y, z)^2 + d_X(z, w)^2 + d_X(w, x)^2 \quad (4)$$

Berg と Nikolaev [7] は、測地的距離空間が CAT(0) 空間であるためには、実は、(4) さえ満たせば十分であることを証明した。また、佐藤 [16] はこの事実の別証明を与えている。

定理 4 (Berg-Nikolaev [7]) 任意の測地的距離空間 X に対して、任意の $x, y, z, w \in X$ に対して (4) が成り立つことは、 X が CAT(0) 空間であることと同値である。

(半) 距離空間 (X, d_X) から (半) 距離空間 (Y, d_Y) への写像 $f: X \rightarrow Y$ は、任意の $x, y \in X$ に対して $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$ を満たすとき、**等長埋め込み**と呼ばれる。また、(半) 距離空間 X に対して、CAT(0) 空間 Y と等長埋め込み $f: X \rightarrow Y$ が存在するとき、 X は **CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能**であるという。次節で改めて述べるが、CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な距離空間を特徴づけることは、Gromov が提示した有名な未解決問題である。しかし、CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な距離空間を特徴づけるためには、(まわりの) 空間が測地的であるという内在的でない条件は仮定するわけにはいかない。次の例は、空間が測地的であるという条件を排除すると、不等式 (4) の成立は CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であるための十分条件にはならないことを示している。

例 5 ([9, Proposition 3.3]). $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ とし, 半距離 $d_X: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ を

$$\begin{aligned} d_X(x_1, x_2) &= d_X(x_2, x_3) = d_X(x_3, x_4) = 1, \\ d_X(x_4, x_1) &= d_X(x_1, x_3) = d_X(x_2, x_4) = \sqrt{3} \end{aligned}$$

で定めると, (X, d_X) は距離空間であり, 任意の $x, y, z, w \in X$ は不等式 (4) を満たす. しかし, (X, d_X) は, $s = t = 1/(1 + \sqrt{3})$ に対する $\square$ 不等式は満たさないから, 如何なる CAT(0) 空間へも等長に埋め込むことはできない.

不等式 (4) の成立が CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であるための十分条件にはならないという事実を受けて, 次が自然な問いとなる.

質問 6 $\square$ 不等式を満たす距離空間は CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能か?

実は, 後に述べるように, 現在では質問 6 の答えは No であることが知られている. しかし, 次節で述べるように $\square$ 不等式の成立は CAT(0) 空間の部分集合の持つ性質を非常によく捉えているように見えるため, 十年ほど前にこの問題に取り組み始めた頃の筆者は, 正直なところ, どちらかといえば答えは Yes かもしれないと想像していた.

3 Gromov が導入したいろいろなもの

Gromov [8] は, 「It is unclear if there is a simple $\exists$ -free description of (non-geodesic!) subspaces in CAT(κ)-spaces.」 ([8, §15, Remarks.(b)]) と述べた. Gromov は同じ趣旨の問題提起を他の文献の中でも行っており, ここで提起されている問題は, しばしば, 次の形の「Gromov の問題」として取り上げられる.

問題 7 (Gromov) κ を実数とすると, CAT(κ) 空間へ等長埋め込み可能な距離空間を特徴づけよ.

本講演で主な興味の対象となるのは $\kappa = 0$ の場合だが, いくつかの主張を正確に述べるため, 本節では必要に応じて一般の実数 κ に対して記述を行う. $\kappa \neq 0$ に対する CAT(κ) 空間の定義については, [2], [4], [5]などを参照されたい.

Gromov [8] は, 問題 7 を念頭に, CAT(κ) 空間や CAT(0) 空間の部分集合のさまざまな内在的な性質を見出して名前を授けた. 本節では, それらのうち, 重要な二種類の性質について述べる. 実数 κ に対して, M_κ^2 を一定のガウス曲率 κ を持つ完備かつ単連結な 2 次元リーマン多様体, d_κ を M_κ^2 のリーマン計量が定める距離関数, D_κ を M_κ^2 の直径とする. すなわち,

$$D_\kappa = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} & \text{if } \kappa > 0, \\ \infty & \text{if } \kappa \leq 0 \end{cases}$$

である. Gromov [8] は, CAT(κ) 空間の部分集合の内在的な性質として, 次のような概念を定義した.

定義 8 (Gromov [8]). κ を実数, n を 4 以上の整数とする. また, $C_n = (V, E)$ を V を頂点集合, E を辺集合とする n 頂点のサイクルグラフとする. 距離空間 (X, d_X) が **Cycl_n(κ) 空間**であるとは, $\sum_{\{u,v\} \in E} d_X(f(u), f(v)) < 2D_\kappa$ を満たすような任意の写像 $f: V \rightarrow X$ に対して, 写像 $g: V \rightarrow M_\kappa^2$ で, 任意の $u, v \in V$ に対して次を満たすものが存在することである:

$$\begin{cases} d_\kappa(g(u), g(v)) \leq d_X(f(u), f(v)), & \text{if } \{u, v\} \in E, \\ d_\kappa(g(u), g(v)) \geq d_X(f(u), f(v)), & \text{if } \{u, v\} \notin E. \end{cases}$$

Reshetnyak's majorization theorem [15] により, $\text{CAT}(\kappa)$ 空間へ等長埋め込み可能な距離空間は, 任意の整数 $n \geq 4$ に対して $\text{Cycl}_n(\kappa)$ である. さらに, Gromov は次の二つの事実を示した.

定理 9 (Gromov [8]) κ を実数とするとき, 任意の測地的距離空間 X に対して, X が $\text{Cycl}_4(\kappa)$ 空間であることと X が $\text{CAT}(\kappa)$ 空間であることは同値である.

定理 10 (Gromov [8]) 任意の距離空間 X に対して, X が $\text{Cycl}_4(0)$ 空間であることと X が $\square$ 不等式を満たすことは同値である.

前節の定理 3 は, 定理 9 と定理 10 から直ちに従う. また, 定理 10 より, 前節の質問 6 は, 次のように言い換えることができる.

質問 11 $\text{Cycl}_4(0)$ 空間は $\text{CAT}(0)$ 空間へ等長埋め込み可能か?

さらに, Gromov [8] は, $\text{CAT}(0)$ 空間の部分集合の内在的な性質として, 次のような不等式族を満たすという性質を定義した.

定義 12 (Gromov [8]). n を 4 以上の整数とする. 半距離空間 (X, d_X) が **Wir_n 空間**であるとは, 任意の写像 $f: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow X$ が, 任意の $j \in \{2, 3, \dots, n-2\}$ に対して

$$\sin^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} d_X(f(i), f(i+j))^2 \leq \sin^2 \frac{j\pi}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} d_X(f(i), f(i+1))^2 \quad (5)$$

を満たすことである.

不等式 (5) は, S^1 上の関数に対する古典的な Wirtinger 不等式の離散的かつ非線形の類似物とみなすことができる. 不等式 (5) において, j を $n-j$ に置き換えて得られる不等式は明らかに (5) と同じものであるから, $n/2$ を越えない最大の整数を $\lfloor n/2 \rfloor$ と表せば, Wir_n 不等式は $(\lfloor n/2 \rfloor - 1)$ 個の異なる不等式からなる. また, $\iota_n: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\iota_n(k) = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}k}{n}\right) \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

で定まる $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ のユークリッド平面 $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ への標準的な埋め込みとすると, 任意の $j \in \{2, 3, \dots, n-2\}$ に対して, (5) は $X = \mathbb{R}^2$, $f = \iota_n$ のとき等号で成立する.

任意の整数 $n \geq 4$ に対して, ユークリッド空間が Wir_n 不等式を満たすことは, Gromov が Wir_n 不等式を導入するより前に Pech [14] が証明していた. この事実と $\text{Cycl}_n(0)$ 空間の定義により, 任意の $\text{Cycl}_n(0)$ 空間は Wir_n である. すなわち, 任意の整数 $n \geq 4$ に対して, 次の関係が成り立つ:

$$\text{CAT}(0) \text{ 空間へ等長埋め込み可能} \implies \text{Cycl}_n(0) \implies \text{Wir}_n. \quad (6)$$

質問 11 および質問 6 では, $\text{Cycl}_4(0)$ 空間が, (6) の一番左にある条件「CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能」を満たすかが問われている. この問題に取り組むにあたって, まず, $\text{Cycl}_4(0)$ 空間が, (6) に並ぶ, より弱い二つの条件である $\text{Cycl}_n(0)$ や Wir_n を満たすかを問うことは自然であろう. ただし, 定理 9 より, 「測地的な $\text{Cycl}_4(0)$ 空間」は CAT(0) 空間そのものであり, 明らかに (6) に並ぶ全ての条件を満たすので, 問題となるのは $\text{Cycl}_4(0)$ 空間が測地的でない場合である.

Gromov も [8] において, 既にこの課題を取り上げている. まず, 「 $\text{Cycl}_4(0)$ 空間は Wir_n か?」という問いについては「Does the Cycl_4 -inequality imply all Wir_k , $k = 5, 6, \dots$, without assuming the space in question is geodesic?」([8, §25, Question]) という明示的な問いとして提示した. この問いは, 近藤, 筆者, 上原 [9] により肯定的に解決された.

定理 13 (Kondo-T.-Uehara [9]) 任意の $\text{Cycl}_4(0)$ 空間は, 任意の整数 $n \geq 4$ に対して Wir_n 空間である.

一方, より強い「 $\text{Cycl}_4(0)$ 空間は $\text{Cycl}_n(0)$ か?」という問いについては, Gromov は次のような否定的な見通しを示した. 「We shall see later on that $\text{Cycl}_4 \Rightarrow \text{Cycl}_k$ for all $k \geq 5$ in the geodesic case but this is apparently not so in general.」([8, §15, Remarks.(b)]). しかし, 空間が測地的であることを仮定しなくても「 $\text{Cycl}_4 \Rightarrow \text{Cycl}_k$ for all $k \geq 5$ 」が成立することが筆者 [19] により証明された.

定理 14 (T. [19]) κ を任意の実数とする. 任意の $\text{Cycl}_4(\kappa)$ 空間は, 任意の整数 $n \geq 4$ に対して $\text{Cycl}_n(\kappa)$ 空間である.

定理 13 および定理 14 は, $\text{Cycl}_4(0)$ 条件を満たすこと, すなわち, $\boxtimes$ 不等式の成立は CAT(0) 空間の部分集合の持つ性質をよく捉えていることを示唆しているように見える.

4 Lebedeva の 6 点空間

前節で述べたように, $\text{Cycl}_4(0)$ 条件, すなわち, $\boxtimes$ 不等式を満たすという条件は, CAT(0) 空間の部分集合の持つ性質をよく捉えているように見える. さらに, Gromov は [8, §7] において, 次の事実が成り立つことも言及している.

定理 15 (Gromov [8, §7]) $|X| \leq 4$ であるような任意の距離空間 X に対して, X が $\text{Cycl}_4(0)$ であることと, X が CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であることは同値である.

しかし, 2017 年に, 既に出版されていた Alexander-Kapovitch-Petrinin [1] の arXiv 版が更新され, 「 $\boxtimes$ 不等式を満たすにも関わらず, 如何なる CAT(0) 空間へも等長埋め込み不可能な 6 点距離空間が Nina Lebedeva により構成された」という事実が追記された. $\mathbb{R}^3$ 上の 2 点 p, q を結ぶ線分 $\{(1-t)p + tq \mid t \in [0, 1]\}$ を $[p, q]$, 集合 $[p, q] \setminus \{p, q\}$ を (p, q) と表す. また, $\mathbb{R}^3$ の部分集合 S の凸包を $\text{conv}(S)$ と表す. どの 2 点も互いに異なる 6 点 $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{z}_0, \tilde{z}_1 \in \mathbb{R}^3$ を,

$$\mathcal{I} = [\tilde{x}_0, \tilde{x}_1] \cup [\tilde{y}_0, \tilde{y}_1] \cup [\tilde{x}_0, \tilde{y}_0] \cup [\tilde{y}_0, \tilde{x}_1] \cup [\tilde{x}_1, \tilde{y}_1] \cup [\tilde{y}_1, \tilde{x}_0]$$

とおくとき, 次を満たすようにとる (図 1 参照):

$$|(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1) \cap (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1)| = 1, \quad |(\tilde{z}_0, \tilde{z}_1) \cap (\text{conv}(\{\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{x}_1, \tilde{y}_1\}) \setminus \mathcal{I})| = 1. \quad (7)$$

このとき, $L = \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{z}_0, \tilde{z}_1\}$ とし, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $d_\varepsilon: L \times L \rightarrow [0, \infty)$ を

$$d_\varepsilon(p, q) = \begin{cases} \|p - q\| + \varepsilon, & \text{if } \{p, q\} = \{\tilde{z}_0, \tilde{z}_1\}, \\ \|p - q\|, & \text{if } \{p, q\} \neq \{\tilde{z}_0, \tilde{z}_1\} \end{cases} \quad (8)$$

で定める. Lebedeva が証明したのは次の事実である.

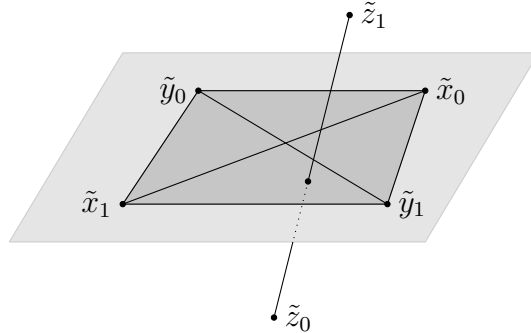


図 1 $\mathbb{R}^3$ 中の「Lebedeva の 6 点」

定理 16 (Lebedeva, cf. the arXiv version of [1, Section 7.2]) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 半距離空間 (L, d_ε) は如何なる CAT(0) 空間へも等長埋め込み不可能である. また, ある $C_L > 0$ が存在して, 任意の $\varepsilon \in (0, C_L]$ に対して, (L, d_ε) は $\boxtimes$ 不等式を満たす.

以下では, どの 2 点も互いに異なる 6 点 $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{z}_0, \tilde{z}_1 \in \mathbb{R}^3$ で (7) を満たすものがなす集合 $L = \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{z}_0, \tilde{z}_1\}$ に対して, (8) が定める半距離空間の族 $\{(L, d_\varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ を **Lebedeva の 6 点空間族** と呼ぶ.

定理 16 より, 質問 6 と質問 11 の答えはいずれも No となる. 質問 6 の否定的解決は CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な距離空間を特徴づけるためには $\boxtimes$ 不等式だけでは条件が足りないことを意味する. そのため, 全ての CAT(0) 空間上で成立する不等式で, その成立が $\boxtimes$ 不等式成立のための必要条件とならない新たな不等式を探さなければなら

ない. 定理 16 によれば, 次の問題の答えが得られれば, そのような不等式の最初の例も得られることになる.

問題 17 $\{(L, d_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ を任意の Lebedeva の 6 点空間族とすると, 如何なる $\varepsilon > 0$ に対しても (L, d_ε) が満たさない不等式で, 全ての CAT(0) 空間が満たすようなものを探せ.

CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な距離空間を特徴づけるためには, 問題 17 のように新たな不等式を探すことも重要だが, むしろ, 見つけてきた不等式の成立が CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であるための十分条件となることを証明することがより困難な課題となり得る. 定理 15 により, CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な距離空間の特徴づけに向けては, 何はともあれ, 次が最初の課題である.

問題 18 CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な, 含まれる点の個数が 5 の距離空間を特徴づけよ.

現在では, 問題 17 の答えとなる不等式が発見されており, 問題 18 も解決されている. 後に続く二つの節では, これらの問題の解決について述べる.

5 二次距離不等式

距離空間 (X, d_X) に対する条件が, 対角成分が全て 0 の n 次実対称行列 (a_{ij}) により, 「任意の $x_1, \dots, x_n \in X$ に対して

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} d_X(x_i, x_j)^2 \quad (9)$$

が成り立つ」という形で表すことができるとき, Andoni-Naor-Neiman [3, Section 1.4.1] にならって, この条件を (n 点に関する) **二次距離不等式**と呼ぶ. また, 任意の CAT(0) 空間が満たす二次距離不等式を **CAT(0) 二次距離不等式**と呼ぶことにする. 例えば, $\boxtimes$ 不等式, Wir_n 不等式, 1 節で述べた不等式 (2) などは CAT(0) 二次距離不等式である.

3 節で述べたように, Gromov [8] は CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であるためのさまざまな必要条件を導入した. しかし, 必要条件をどれだけ多く集めてきたとしても, 一般には, それは依然として必要条件である. Andoni, Naor, Neiman [3] による次の定理はその意味で重要である.

定理 19 (Andoni-Naor-Neiman [3, Proposition 3]) n を正の整数とする. $|X| = n$ である任意の距離空間 X に対して, X が CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であることは, X が n 点に関する全ての CAT(0) 二次距離不等式を満たすことと同値である.

定理 19 では, 距離空間が CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であるための十分条件が与えられてはいるものの, 「全ての」CAT(0) 二次距離不等式というものがどのようなものかほとんどわからないことが課題である. 定理 19 は, CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能

な距離空間を特徴づけるためには、次の問題を解決すればよいことを主張している (cf. Andoni-Naor-Neiman [3, Section 5]).

問題 20 CAT(0) 二次距離不等式を特徴づけよ.

筆者 [18] は次の事実を証明した.

定理 21 (T. [18]) 任意の距離空間 X に対して, X が $\square$ 不等式を満たすならば, X は 5 点に関する全ての CAT(0) 二次距離不等式を満たす.

この事実と定理 19 より次が従い, 前節で述べた問題 18 が解決する.

系 22 (T.[18]) $|X| = 5$ の任意の距離空間 X に対して, X が CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であることと X が $\square$ 不等式を満たすことは同値である.

Lebedeva-Petrinin [10] は定理 19 を経由しない系 22 の別証明を与えている. 系 22 は, CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な 5 点距離空間を特徴づけるには, $\square$ 不等式の他にも何ら新しい不等式を必要としないことを主張している. しかし, 定理 16 により, より多くの点を含む距離空間に対して CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能なものを特徴づけるには, 問題 17 が問うているような新たな不等式を探さなくてはならない.

Andoni, Naor, Neiman [3, Section 5.1] は, 問題 20 を念頭に, 既に知られている CAT(0) 二次距離不等式の確立方法を一般化し, 次のような大量の CAT(0) 二次距離不等式のリストを書き下した.

定理 23 (Andoni-Naor-Neiman [3]) n, m を正の整数とし, $c_1, \dots, c_m$ を正の実数とする. 各 $k \in [m]$ に対して, $p_1^k, \dots, p_n^k, q_1^k, \dots, q_n^k$ を, $\sum_{i=1}^n p_i^k = \sum_{j=1}^n q_j^k = 1$ を満たす正の実数とする. 各 $k \in [m]$ に対して, $(a_{ij}^k), (b_{ij}^k)$ を非負の実数を成分とする $n \times n$ 行列で, 任意の $i, j \in [n]$ に対して, $\sum_{s=1}^n a_{is}^k + \sum_{s=1}^n b_{sj}^k = p_i^k + q_j^k$ を満たすものとする. このとき, 任意の CAT(0) 空間 (X, d_X) と任意の $x_1, \dots, x_n \in X$ に対して次が成り立つ:

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i,j \in [n]: a_{ij}^k + b_{ij}^k > 0} \frac{c_k a_{ij}^k b_{ij}^k}{a_{ij}^k + b_{ij}^k} d_X(x_i, x_j)^2 \leq \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_k p_i^k q_j^k d_X(x_i, x_j)^2. \quad (10)$$

ここで, 正の整数 n に対して, $[n]$ は集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ を表す.

Andoni, Naor, Neiman が [3, Section 5.1] で述べているように, (当時は未発見の, 次節で述べる (11) を除く) これまでに使用されてきた全ての CAT(0) 二次距離不等式は悉く (10) の形で表されるように思われる. そのため, これらの不等式が CAT(0) 二次距離不等式の全貌を捉えているか, すなわち, (10) の形で表される全ての不等式を満たすことが CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であるための必要十分条件となるかということが自然な質問となる (cf. [3, Question 31]). 筆者 [21] は次を証明し, (10) の形で表される全ての不等式を満たすことは, 6 点距離空間に限ったとしても, CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能

であるための十分条件にはならないことを示した。

定理 24 (T. [21]) 任意の Lebedeva の 6 点空間族 $\{(L, d_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ に対して, ある $\tilde{C}_L > 0$ が存在して, 任意の $\varepsilon \in (0, \tilde{C}_L]$ に対して (L, d_ε) は (10) の形で表される不等式を全て満たす。

6 CAT(0) 空間の 6 点間の距離が満たす不等式

前節の定理 24 より, 問題 17 の答えとなる不等式は, (10) の形の不等式の中には見出せない。筆者 [20] は, 問題 17 の答えとなる次のような不等式の族を発見した。

定理 25 (T. [20]) (X, d_X) を CAT(0) 空間とする。このとき, $a \leq s$ であるような任意の $a, b, c, s, t \in [0, 1]$ に対して, 任意の $x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1 \in X$ は次の不等式を満たす:

$$\begin{aligned} & sta((1-t)(1-a) + (1-s)tb) d_X(x_0, x_1)^2 \\ & + s(1-t)t(1-b)b d_X(y_0, y_1)^2 + ab(1-c)c d_X(z_0, z_1)^2 \\ & \leq (1-s)tab(1-c) d_X(x_0, z_0)^2 + stab(1-c) d_X(x_1, z_0)^2 + (1-t)ab(1-c) d_X(y_1, z_0)^2 \\ & + (1-s)tabc d_X(x_0, z_1)^2 + stabc d_X(x_1, z_1)^2 + (1-t)abc d_X(y_1, z_1)^2 \\ & + s(1-t)t(1-a)(1-b) d_X(x_0, y_0)^2 + s(1-t)ta(1-b) d_X(x_1, y_0)^2 \\ & + (1-t)t(s-a)b d_X(x_0, y_1)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

また, 任意の Lebedeva の 6 点空間族 $\{(L, d_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ に対して, L のみに依存する定数 $a, b, c, s, t \in (0, 1)$ で $a < s$ となるものが存在して, 如何なる $\varepsilon > 0$ に対しても (L, d_ε) はその定数 a, b, c, s, t に関して不等式 (11) を満たさない。逆に, $a < s$ を満たす任意の $a, b, c, s, t \in (0, 1)$ に対して, Lebedeva の 6 点空間族 $\{(L, d_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ で, 如何なる $\varepsilon > 0$ に対しても (L, d_ε) がその a, b, c, s, t に関して不等式 (11) を満たさないものが存在する。

定理 25 は問題 17 の答えとなる不等式を与えている。また, これらの不等式は, その成立が 図 不等式の成立のための必要条件にならないことが証明された最初の CAT(0) 二次距離不等式でもある。しかし, (11) の形で表される不等式の族が CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な 6 点距離空間を特徴づけるか否かは現時点では分かっていない。

7 最後に

CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な距離空間を特徴づける問題についての比較的最近の進展について述べてきたが, 述べてきたことをごく雑に総括すれば, しばらく動きがなかった問題にここ七, 八年くらいの間に少しだけ動きがあったということに過ぎず, 問題解決への道はまだ見えていない。また, 本稿で述べたのは等長埋め込みに関する問題だが, CAT(0) 空間へ bi-Lipschitz embedding や coarse embedding が可能な空間を特徴づけることも重要な問題であり, 多くのことが未解決である ([3], [6]などを参照)。さらに, CAT(0) 空間の他にも, 例えば, 曲率が下に有界な Alexandrov 空間など, 他の距離空間の

クラスに対しても同種の問題が考えられ、やはり多くのことが未解決である ([13]などを参照)。最後に、本稿の中で述べるべきであったが、述べることができなかった興味深い内容として、graph comparison に関する Lebedeva と Petrunin による結果がある。この結果については、[11] および [12] を参照されたい。

参考文献

- [1] S. B. Alexander, V. Kapovitch and A. Petrunin, Alexandrov meets Kirszbraun, in *Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference 2010*, 88–109, Int. Press, Somerville, MA, 2011; updated version: arXiv:1012.5636v2, 2017.
- [2] S. B. Alexander, V. Kapovitch and A. Petrunin, *Alexandrov geometry—foundations*, Graduate Studies in Mathematics, 236, Amer. Math. Soc., Providence, RI, [2024] ©2024.
- [3] A. Andoni, A. Naor and O. Neiman, Snowflake universality of Wasserstein spaces, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **51** (2018), no. 3, 657–700.
- [4] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 319, Springer, Berlin, 1999.
- [5] D. Y. Burago, Y. D. Burago and S. V. Ivanov, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [6] A. Eskenazis, M. Mendel and A. Naor, Nonpositive curvature is not coarsely universal, *Invent. Math.* **217** (2019), no. 3, 833–886.
- [7] I. D. Berg and I. G. Nikolaev, Quasilinearization and curvature of Aleksandrov spaces, *Geom. Dedicata* **133** (2008), 195–218.
- [8] M. Gromov, *J. Math. Sci. (N.Y.)* **119** (2004), no. 2, 178–200; translated from *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* **280** (2001), 100–140, 299–300.
- [9] T. Kondo, T. Toyoda and T. Uehara, On a question of Gromov about the Wirtinger inequalities, *Geom. Dedicata* **195** (2018), 203–214.
- [10] N. D. Lebedeva and A. Petrunin, 5-point CAT(0) spaces after Tetsu Toyoda, *Anal. Geom. Metr. Spaces* **9** (2021), no. 1, 160–166.
- [11] N. D. Lebedeva and A. Petrunin, Trees meet octahedron comparison, *J. Topol. Anal.*, online ready, <https://doi.org/10.1142/S1793525323500231>, 2023.
- [12] N. D. Lebedeva and A. Petrunin, Graph comparison meets Alexandrov, *Sib. Math. J.* **64** (2023), no. 3, 624–628.
- [13] N. D. Lebedeva and A. Petrunin, Five-point Toponogov theorem, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2024**, no. 5, 3601–3624.
- [14] P. Pech, Inequality between sides and diagonals of a space n -gon and its integral analog, *Časopis Pěst. Mat.* **115** (1990), no. 4, 343–350.
- [15] Y. G. Reshetnyak, Non-expansive maps in a space of curvature no greater than K , *Sibirsk. Mat. Ž.* **9** (1968), 918–927.
- [16] T. Sato, An alternative proof of Berg and Nikolaev’s characterization of CAT(0)-spaces via quadrilateral inequality, *Arch. Math. (Basel)* **93** (2009), no. 5, 487–490.
- [17] K.-T. Sturm, Probability measures on metric spaces of nonpositive curvature, in *Heat kernels and analysis on manifolds, graphs, and metric spaces (Paris, 2002)*, 357–390, *Contemp. Math.*, 338, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [18] T. Toyoda, An intrinsic characterization of five points in a CAT(0) space, *Anal. Geom. Metr. Spaces* **8** (2020), no. 1, 114–165.
- [19] T. Toyoda, A non-geodesic analogue of Reshetnyak’s majorization theorem, *Anal. Geom. Metr. Spaces* **11** (2023), no. 1, Paper No. 20220151, 22 pp..
- [20] T. Toyoda, Inequalities on six points in a CAT(0) space, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2025**, no. 6, Paper No. rna060, 10 pp..
- [21] T. Toyoda, The Andoni-Naor-Neiman inequalities and isometric embeddability into a CAT(0) space, arXiv:2404.13871, 2024.

粗凸空間のホロ境界

東京都立大学 大学院理学研究科 数理科学専攻
佐藤一慶 (Ikkei SATO) *

概要

ホロ境界とは、連続関数を用いて構成される距離空間のコンパクト化である。距離空間の大域的な情報を含む概念であり、測地的 Gromov 双曲空間や CAT(0) 空間, Busemann 空間を始めとする非正曲率空間では、同じく非正曲率空間の大域的な情報を含む概念である理想境界との対応が研究されてきた。本研究では、非正曲率空間の一般化と見なせる「粗凸空間」において、そのホロ境界と理想境界の対応について調べた。

1 粗凸空間

粗凸空間は、測地的 Gromov 双曲空間, CAT(0) 空間を始めとする非正曲率空間を統一する概念として、深谷友宏氏及び尾國新一氏 [FO20] により導入された。この節では、粗凸空間の定義と具体例、及び関連する諸概念について紹介する。

1.1 粗凸空間

(X, d) を距離空間とする。 X 上で定義される bicombing $\Gamma: X \times X \times [0, 1] \rightarrow X$ とは、 $x, y \in X$ に対して、 $\Gamma(x, y, 0) = x$, $\Gamma(x, y, 1) = y$ を満たす写像のことである。

$\lambda \geq 1, k \geq 0$ を定数とする。 bicombing Γ が (λ, k) -quasi geodesic bicombing であるとは、任意の $x, y \in X$ と任意のパラメータ $t, s \in [0, 1]$ に対して、以下の不等式が成り立つことを意味する。

$$\frac{1}{\lambda}|t-s|d(x, y) - k \leq d(\Gamma(x, y, t), \Gamma(x, y, s)) \leq \lambda|t-s|d(x, y) + k$$

また、 bicombing Γ が geodesic bicombing であるとは、任意の $x, y \in X$ と任意のパラメータ $t, s \in [0, 1]$ に対して、以下の等式が成り立つことを意味する。

$$d(\Gamma(x, y, t), \Gamma(x, y, s)) = |t-s|d(x, y)$$

定義 1.1 (Coarsely convex bicombing). (X, d) を距離空間、 $\lambda \geq 1, k \geq 0, E \geq 1, C \geq 0$ を定数とする。また、 $\theta: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を非減少関数とする。 (X, d) 上の $(\lambda, k, E, C, \theta)$ -coarsely convex bicombing とは、 (λ, k) -quasi geodesic bicombing であって、以下の条件を満たすものである。

* E-mail:sato-ikkei@ed.tmu.ac.jp

- (1) $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ と $a, b \in [0, 1]$ に対して, $y'_1 := \Gamma(x_1, y_1, a)$, $y'_2 := \Gamma(x_2, y_2, b)$ とする. このとき, 任意の $c \in [0, 1]$ に対して以下が成立する.

$$d(\Gamma(x_1, y_1, ca), \Gamma(x_2, y_2, cb)) \leq (1-c)Ed(x_1, x_2) + cEd(y'_1, y'_2) + C$$

- (2) $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ と $t, s \in [0, 1]$ に対して, 以下が成立する.

$$|td(x_1, x_2) - sd(y_1, y_2)| \leq \theta(d(x_1, x_2) + d(\Gamma(x_1, y_1, t), \Gamma(x_2, y_2, s)))$$

特に geodesic bicombing Γ で, 条件 (1) を満たすものを **geodesic (E, C) -coarsely convex bicombing** という.

注 1.2. Γ が geodesic bicombing の場合, Γ は定義 1.1 の条件 (2) を自動的に満たす.

定義 1.3 (粗凸空間). ある定数 $\lambda \geq 1, k \geq 0, E \geq 1, C \geq 0$ と非減少関数 $\theta: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ があって, $(\lambda, k, E, C, \theta)$ -coarsely convex bicombing が定義されている距離空間 (X, d) を $(\lambda, k, E, C, \theta)$ -**粗凸空間** (もしくは単に**粗凸空間**) という. 特に, geodesic (E, C) -coarsely convex bicombing が定義されている距離空間を**測地的 (E, C) -粗凸空間** (もしくは単に**測地的粗凸空間**) という.

例 1.4. V をノルム空間とする. V 上の bicombing を, 2 点を結ぶ Affine 直線で与えると V は測地的 $(1, 0)$ -粗凸空間である.

例 1.5. 距離空間 (X, d) が **Busemann 空間** であるとは, 測地空間であり, 更に任意の測地線 $\gamma_1: [0, a_1] \rightarrow X$, $\gamma_2: [0, a_2] \rightarrow X$ と, 任意の $t \in [0, 1]$ に対して以下の不等式が成り立つことを意味する.

$$d(\gamma_1(ta_1), \gamma_2(ta_2)) \leq (1-t)d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) + td(\gamma_1(a_1), \gamma_2(a_2))$$

したがって, Busemann 空間 (X, d) は一意測地的である. 特に, Busemann 空間 (X, d) 上では canonical な $(1, 0)$ -coarsely convex bicombing を定義できることから, Busemann 空間は測地的 $(1, 0)$ -粗凸空間である.

以下の定義は, section 1.2 及び section 3.1 で用いる.

定義 1.6. (X, d) を距離空間, $\Gamma: X \times X \times [0, 1] \rightarrow X$ を X 上で定義された (λ, k) -quasi geodesic bicombing とする. このとき, **reparametrized bicombing** $\text{rp}\Gamma: X \times X \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$ を以下のように定義する.

$$\text{rp}\Gamma(x, y, t) := \begin{cases} \Gamma\left(x, y, \frac{t}{d(x, y)}\right) & \text{if } t \leq d(x, y) \\ y & \text{if } t > d(x, y). \end{cases}$$

geodesic bicombing に対しても, 同様に reparametrized bicombing を定義できる.

1.2 理想境界

測地的 Gromov 双曲空間, CAT(0) 空間を始めとする非正曲率空間では, 空間の無限遠点とそこに向かう測地光線を同一視することにより, **理想境界**を定義することができた.

同様の概念は粗凸空間に対しても定義することが出来る.

定義 1.7. (X, d) を固有な $(\lambda, k, E, C, \theta)$ -粗凸空間, $o \in X$ を基点とする. このとき, o を始点とする Γ に対応する擬測地光線を適切な同値関係で割ることで, X の**理想境界** $\partial_o X$ を定義する. また, その位相も Γ を用いて定義する. また X の理想境界は, o の取り方に依らない.

注 1.8. $\partial_o X$ はコンパクト距離化可能空間である.

2 ホロ境界

2.1 ホロ境界

(X, d) を固有な距離空間として, $o \in X$ を基点として固定する. また, $C(X)$ を X 上で定義される $\mathbb{R}$ -値連続関数全体の集合とし, 広義一様収束の位相を入れる.

このとき, $\phi: X \rightarrow C(X)$ を以下のように定義する.

$$x \mapsto \phi_x(-) := d(-, x) - d(o, x)$$

定義 2.1 (ホロ境界). (X, d) を固有な距離空間, $o \in X$ を基点として固定する. $\phi: X \rightarrow C(X)$ を上記で定義した写像とする. このとき, 距離空間 (X, d) の**ホロ境界** $\partial_h X$ を

$$\partial_h X := \text{cl } \phi(X) \setminus \phi(X)$$

と定義する. ここで, cl は $C(X)$ の位相に関する閉包を表している.

注 2.2. $\phi: X \rightarrow C(X)$ は基点を固定して定義しているが, ホロ境界は基点に依らず定まる. また, $C(X)$ は位相空間として Hausdorff 空間であることから, ホロ境界も Hausdorff 空間である.

例 2.3. $(\mathbb{R}^2, l^1)$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ に l^1 -距離を入れた距離空間とする. ここで l^1 -距離とは, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$l^1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

と定義される $\mathbb{R}^2$ 上の距離である. このとき, ホロ境界 $\partial_h(\mathbb{R}^2, l^1)$ は $\partial[-\infty, \infty]^2$ と同相である.

2.2 被約ホロ境界

定義 2.4. (X, d) を固有な距離空間, $\partial_h X$ を X のホロ境界とする. $\xi, \eta \in \partial_h X$ に対して $\xi \sim \eta$ であるとは,

$$\sup_{x \in X} |\xi(x) - \eta(x)| < \infty$$

と定義する. このとき, $\sim$ は $\partial_h X$ に対して同値関係を定める. (X, d) の**被約ホロ境界**を, ホロ境界 $\partial_h X$ を同値関係 $\sim$ で割った空間 $\partial_h X / \sim$ として定義する. また, その位相は $\partial_h X$ から誘導される商位相を入れる.

一般に固有な測地的 Gromov 双曲空間に対して, その理想境界とホロ境界が必ずしも一致するとは限らない. しかし, Webster と Winchester[WW03] は以下の定理を示した.

定理 2.5 ([WW03, Theorem 4.5]). (X, d) を固有な測地的 Gromov 双曲空間とし, $o \in X$ を基点として固定する. $\partial_o X$ を基点 o に関する X の理想境界とし, また $\partial_h X$ を X のホロ境界とする. このとき, $\partial_h X$ から $\partial_o X$ に自然な商写像が存在する.

定理 2.5 の系として, 測地的 Gromov 双曲空間においては理想境界と被約ホロ境界は位相を込めて一致することが従う. しかし, 同様の結果は粗凸空間に対して成り立たない. 例えば, 例 1.4 でノルム空間が測地的粗凸空間であることを見たが, $(\mathbb{R}^2, l^1)$ の被約ホロ境界は Hausdorff 空間にならない. 一方で, 粗凸空間の理想境界は距離化可能であることから Hausdorff 空間である.

3 主結果

3.1 錐距離

Andreev は Busemann 空間に対して**錐距離**を定義し, 固有な Busemann 空間においては錐距離を用いたホロ境界と, Busemann 空間に元々定義されていた距離による理想境界が位相を込めて一致することを示した [And18, Theorem. 3.4]. 我々は, 粗凸空間に対しても錐距離を定式化した.

定義 3.1. (X, d) を $(\lambda, k, E, C, \theta)$ -粗凸空間, Γ を X 上で定義された $(\lambda, k, E, C, \theta)$ -coarsely convex bicombing, $\text{rp}\Gamma$ を Γ の reparametrized bicombing とする. また $o \in X$ を基点として固定する. このとき, $x, y \in X$ に対して**錐距離** $d_c(x, y)$ を以下のように定義する.

$$d_c(x, y) := |d(o, x) - d(o, y)| \\ + d(\text{rp}\Gamma(o, x, \lfloor \min\{d(o, x), d(o, y)\} \rfloor), \text{rp}\Gamma(o, y, \lfloor \min\{d(o, x), d(o, y)\} \rfloor))$$

錐距離の定義より, 任意の $x \in X$ に対して $d_c(o, x) = d(o, x)$ が成立する.

注 3.2. 例 1.5 で見たように, Busemann 空間は測地的 $(1, 0)$ -粗凸空間である. このとき定義 3.1 で与えた錐距離の定義は, Andreev が [And18] で与えた錐距離の定義と一致している.

3.2 錐距離によるホロ境界

この節では錐距離を用いたホロ境界を定義し, 理想境界との対応について解説する. (X, d) を固有な $(\lambda, k, E, C, \theta)$ -粗凸空間として, $o \in X$ を基点として固定する. また, $B(X)$ を X 上で定義される $\mathbb{R}$ -値関数全体の集合とし, 広義一様収束の位相を入れる.

このとき, $\psi: X \rightarrow B(X)$ を以下のように定義する.

$$x \mapsto \psi_x(-) := d_c(-, x) - d_c(o, x)$$

定義 3.3 (錐距離によるホロ境界). (X, d) を固有な $(\lambda, k, E, C, \theta)$ -粗凸空間, $B_b(X)$ を X 上で定義される有界連続関数全体の集合とする. また $\psi: X \rightarrow B(X)$ を上記のように定義する. X 上で定義された関数の集合 $B_{b, \lambda, E}(X)$ を以下のように定義する.

$$B_{b, \lambda, E}(X) := \left\{ f \in B(X) \mid \frac{1}{\lambda E} \psi_x - \beta \leq f \leq \lambda E \psi_x + \beta, \exists x \in X, \exists \beta \in B_b(X) \right\}$$

このとき、錐距離によるホロ境界 $\partial_h^c X$ を以下のように定義する。

$$\partial_h^c X := \text{cl } \psi(X) \setminus B_{b,\lambda,E}(X)$$

ここで、 cl は $B(X)$ の位相に関する閉包を表している。

錐距離によるホロ境界に対して、我々は以下の命題が成り立つことを示した。

命題 3.4. (X, d) を固有な $(\lambda, k, E, C, \theta)$ -粗凸空間として、 $o \in X$ を基点として固定する。このとき、錐距離によるホロ境界 $\partial_h^c X$ から理想境界 $\partial_o X$ に全射連続写像 $\text{Pr}: \partial_h^c X \rightarrow \partial_o X$ を構成できる。

3.3 錐距離による被約ホロ境界

定義 2.4 と同様に、定義 3.3 で定義された錐距離によるホロ境界に対しても、被約ホロ境界を定義できる。

定義 3.5. (X, d) を固有な距離空間、 $\partial_h^c X$ を X の錐距離によるホロ境界とする。 $\xi, \eta \in \partial_h^c X$ に対して $\xi \sim \eta$ であるとは、

$$\sup_{x \in X} |\xi(x) - \eta(x)| < \infty$$

と定義する。このとき、 $\sim$ は $\partial_h^c X$ に対して同値関係を定める。 (X, d) の錐距離による被約ホロ境界を、錐距離によるホロ境界 $\partial_h^c X$ を同値関係 $\sim$ で割った空間 $\partial_h^c X / \sim$ として定義する。また、その位相は $\partial_h^c X$ から誘導される商位相を入れる。

錐距離による被約ホロ境界に対して、命題 3.4 の系として以下の定理が従う。

定理 3.6 (主定理). (X, d) を固有な $(\lambda, k, E, C, \theta)$ -粗凸空間、 $o \in X$ を基点として固定する。このとき、錐距離による被約ホロ境界 $\partial_h^c X / \sim$ と理想境界 $\partial_o X$ は位相を込めて一致する。

Busemann 空間では、錐距離によるホロ境界とその商集合である被約ホロ境界は一致している。したがって定理 3.6 は、Andreev が固有な Busemann 空間に対して示した結果 [And18, Theorem. 3.4] の固有な粗凸空間への一般化となっている。

参考文献

- [And18] Pavel Andreev. The cone metric of a busemann space. *Journal of Geometry*, 109(1):25, 2018.
- [FO20] Tomohiro Fukaya and Shin-ichi Oguni. A coarse Cartan-Hadamard theorem with application to the coarse Baum-Connes conjecture. *J. Topol. Anal.*, 12(3):857–895, 2020.
- [WW03] Corran Webster and Adam Jeremiah Winchester. Boundaries of hyperbolic metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 221:147–158, 2003.

リー群上の左不変統計構造のモジュライ空間*

小林彦蔵[†] (広島大学)

概要

多様体上の統計構造とは、リーマン計量と捩れのないアフイン接続の組であって適切な条件を満たすものとして定義される。本稿では、リー群上の左不変統計構造のモジュライ空間という概念を導入し、左不変リーマン計量のモジュライ空間が 1 点集合となる 3 系列のリー群に対して、そのモジュライ空間の構造を詳しく調べる。応用として、これらのリー群における左不変共役対称統計構造および左不変双対平坦構造 (左不変ヘッセ構造) の分類を行う。本稿の内容は、大野優氏、奥田隆幸氏 (広島大学)、田丸博士氏 (大阪公立大学) との共同研究に基づく。

1 導入

微分幾何学において、多様体上の幾何構造を分類することは基本的な問題である。多様体が追加の幾何構造や適切な群作用を備えている場合、それらと両立する幾何構造を考えるのが自然である。特に、与えられたリー群が特定の左不変幾何構造を持つかどうかを調べ、さらにそれらを分類することは重要な課題である。この文脈において、左不変幾何構造のモジュライ空間という概念は、分類や変形理論を理解する上で重要な役割を果たす (例: [2, 4, 8, 9, 10])。

本稿では、多様体上の統計構造 (cf. [11, 13]) に焦点を当てる。統計構造は情報幾何に由来し、リーマン計量と捩れのないアフイン接続の組 (g, ∇) であって、 $(0, 3)$ -テンソル場 ∇g が全対称となるものとして定義される。統計構造において特に注目されてきた二つのクラスがある: ひとつは、双対平坦構造 (dually flat structure) である (cf. [1])。この構造は、接続 ∇ が平坦となる統計構造として特徴付けられ、特に情報幾何において重要な役割を果たす (cf. [1])。もうひとつは、双対平坦構造を含むより広い概念である共役対称統計構造 (conjugate symmetric statistical structure) (cf. [13]) である。共役対称統計構造は、 $R^\nabla = R^{\bar{\nabla}}$ を満たす統計構造として定義される。ただし、 $\bar{\nabla}$ は ∇ の g に関する共役接続である。この構造はアフイン超曲面論や定曲率統計多様体と深い関係を持つ (cf. [14, 6])。与えられた多様体がこれらの構造を持つかどうか、またそれらを分類することは重要な問題である。

リー群上の統計構造が左不変であるとは、計量と接続の両方が左不変であることを意味する (cf. [3, 5])。本稿ではこの構造に注目し、以下の問題を扱う:

Problem A. 与えられたリー群 G に対して、すべての左不変双対平坦構造および左不変共役対称統計構造を求めよ。

* 幾何学シンポジウム (於 筑波大学, 2025/8/26–2025/8/29) 講演予稿。本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2132 の支援を受けたものである。

[†] e-mail: hikocho-kobayashi@hiroshima-u.ac.jp

この Problem A に関連する先行研究を振り返る。双対平坦構造はヘッセ構造と等価であることが知られている (cf. [16]). 志摩はこの構造を深く研究し, 左不変ヘッセ構造を持つことができるのは可解リー群に限られることを示した (cf. [15]). ただし, 可解リー群であっても左不変ヘッセ構造を持たないものもあり, 完全な分類は未達であると言える。

左不変共役対称統計構造に関しては, 典型的な例として一変数正規分布族の空間 $\mathcal{N}$ があり, これはリー群 $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ に同型である。古畑–井ノ口–小林 [3] により, この空間 $\mathcal{N}$ 上の Amari–Chentsov α -接続は, Fisher 計量に関して共役対称である唯一の左不変統計接続であることが示された。さらに小林–大野 [7] によって, 多変数正規分布族に対しても同様の主張が成立することが示された。高次元のリー群に対しては, 左不変共役対称統計構造の分類問題はより複雑であり, [7] で扱われた多変数正規分布族のリー群を除けば, 未解決の部分が多い。

本稿では, Problem A に対する新たな枠組みを導入し, 任意の次元のリー群に適用可能な方法を提案する。この研究は, 児玉–高原–田丸によって導入された左不変リーマン計量のモジュライ空間の概念 (cf. [8]) に着想を得ている。

リー群 G 上の左不変統計構造全体の空間 $\mathcal{LStat}(G)$ には, 群 $\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G)$ が自然に作用する (詳細は第 2 節を参照されたい)。この作用の軌道空間を左不変統計構造のモジュライ空間と呼び, $\mathcal{MLStat}(G)$ と記す。この作用は双対平坦性や共役対称性といった統計構造の性質を保つため, 以下の部分空間が定まる:

- $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G)$: 左不変共役対称統計構造のモジュライ空間,
- $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G)$: 左不変双対平坦構造のモジュライ空間。

このとき, Problem A は次のように言い換えられる:

Problem B. 与えられたリー群 G に対し, モジュライ空間 $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G)$ および $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G)$ を決定せよ。

たとえば, $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G) = \emptyset$ であれば, G は左不変双対平坦構造を持たないことになる。なお, どのようなリー群においても, 左不変リーマン計量とその Levi-Civita 接続の組は共役対称統計構造になるため, $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G) \neq \emptyset$ は常に成立する。したがって, $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G)$ については, 非自明な統計構造が存在するかどうかの問題となる。

まずは $\mathcal{MLStat}(G)$ が小さいリー群に対して Problem B を考えるのが自然である。このような群の自然な候補として, 左不変リーマン計量のモジュライ空間 $\mathfrak{PM}(G)$ (cf. [8]) が小さい群が挙げられる。具体的に, 以下の 3 系列のリー群は, $\mathfrak{PM}(G)$ が 1 点集合 (左不変リーマン計量が本質的に一意) であることが知られている (cf. [12, 8]):

$$\mathbb{R}^n, \quad G_{\mathbb{RH}^n} \ (n \geq 2), \quad H^3 \times \mathbb{R}^{n-3} \ (n \geq 3). \quad (1.1)$$

ここで, $G_{\mathbb{RH}^n}$ は実双曲空間 $\mathbb{RH}^n$ に対するリー群 ($SO_0(n, 1)$ の岩澤分解の可解部分) であり, $\mathbb{RH}^n$ 上に単純推移的に作用する。また H^3 は 3 次元ハイゼンベルグ群である。

本稿では, 上記 3 系列のリー群に対して Problem B に取り組む。それぞれのモジュライ空間 $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G)$ および $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G)$ の代表元の集合を表 1 にまとめる。

2 左不変統計構造のモジュライ空間

本節では、リー群 G 上の左不変統計構造のモジュライ空間 $\mathcal{MLStat}(G)$ の定義を紹介する。また、 G の左不変リーマン計量のモジュライ空間が 1 点集合となる時、モジュライ空間 $\mathcal{MLStat}(G)$ はリー環 $\mathfrak{g}$ 上の対称 $(0, 3)$ -テンソルの空間 $S^3(\mathfrak{g}^*)$ の軌道空間として表せることを紹介する。以下、 G を連結成分有限個の有限次元リー群とする。

$\mathcal{LStat}(G)$ を左不変統計構造全体の集合とする。すなわち、

$$\mathcal{LStat}(G) := \{(g, \nabla) \mid (g, \nabla): G \text{ 上の左不変統計構造}\}$$

とする。 G 上の左不変リーマン計量 g を固定したとき、 $\mathcal{LA}_{\text{Stat}}(G, g)$ によって g との組で左不変統計構造となる左不変アファイン接続全体の集合を表すと、 $\mathcal{LA}_{\text{Stat}}(G, g) \ni \nabla \mapsto \nabla g \in S^3(\mathfrak{g}^*)$ は全単射となる。従って、次の同型を得る。

$$\mathcal{LStat}(G) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathfrak{M}}(G) \times S^3(\mathfrak{g}^*), \quad (g, \nabla) \mapsto (g, \nabla g). \quad (2.1)$$

ここで、 $\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ は G 上の左不変リーマン計量全体の空間である。特に同型 (2.1) より、 $\mathcal{LStat}(G)$ は底空間を $\widetilde{\mathfrak{M}}(G) \cong GL(n, \mathbb{R})/O(n)$ 、ファイバー空間を実ベクトル空間 $S^3(\mathfrak{g}^*)$ とする自明ベクトル束と見なすことができる。以後この同一視 $\mathcal{LStat}(G) \cong \widetilde{\mathfrak{M}}(G) \times S^3(\mathfrak{g}^*)$ を行う。

直積リー群 $\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G)$ は、 $\mathcal{LStat}(G)$ に次によってなめらかに作用する。

$$(r, \varphi) \cdot (g, \nabla) = (r \cdot (\varphi^{-1})^* g, (\varphi^{-1})^* \nabla) \quad ((r, \varphi) \in \mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G), (g, \nabla) \in \mathcal{LStat}(G)). \quad (2.2)$$

我々は、この群作用による軌道空間を G 上の**左不変統計構造のモジュライ空間**と呼ぶ。

注意 2.1. 式 (2.2) の群作用は、左不変統計構造の持つ共役対称性や双対平坦性などといった性質を保つ。

命題 2.2. G 上の左不変リーマン計量のモジュライ空間が 1 点集合、すなわち群作用 $\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G) \curvearrowright \widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ が推移的となる場合、次の位相空間としての同型が成り立つ。

$$\mathcal{MLStat}(G) \cong (\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G))^g \backslash S^3(\mathfrak{g}^*). \quad (2.3)$$

ただし、 $(\mathbb{R}_{>0} \times \text{Aut}(G))^g$ は g の固定化部分群である。

3 結果

本節では、式 (1.1) に挙げた各リー群 G に対して、モジュライ空間 $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G)$ および $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G)$ の代表元集合を明示的に与える。

式 (1.1) に挙げた 3 系列のリー群 G に対しては、左不変リーマン計量のモジュライ空間が 1 点集合となるため、第 2 節の議論より、モジュライ空間 $\mathcal{MLStat}(G)$ は対称 $(0, 3)$ -テンソルの空間 $S^3(\mathfrak{g}^*)$ 上のある群作用による軌道空間として記述できることに注意されたい。また、モジュライ空間 $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G)$ および $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G)$ の代表元集合とは、これらのモジュライ空間への射影が全射となるような $S^3(\mathfrak{g}^*)$ の部分集合のことを指す。この射影が全単射であるとき、その集合は完全代表元集合と呼ばれる。なお、次の表 1 に現れる部分集合 V^+ 、および v_0, w_0 の定義は後述する。

表 1 式 (1.1) のリー群 G に対する $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G)$ および $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G)$ の代表元集合

G	$\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G)$	$\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G)$
$\mathbb{R}^n$	$S^3(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}^*)$	V^+
$G_{\mathbb{RH}^n}$	$\mathbb{R}v_0$	$\{\pm v_0\}$
H^3	$\{0\}$	$\emptyset$
$H^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$	$\mathbb{R}w_0 \odot S^1(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^{n-3}}^*) \oplus S^3(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^{n-3}}^*)$	$\emptyset$

代表元集合の詳細な記述を得るためには、基底を固定する必要がある。以下に、式 (1.1) のそれぞれのリー群のリー代数における標準的な基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ の非自明な括弧積を示す：

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &: (\text{none}), \\ G_{\mathbb{RH}^n} &: [e_1, e_i] = e_i \quad (i = 2, \dots, n), \\ H^3 \times \mathbb{R}^{n-3} &: [e_1, e_2] = e_3. \end{aligned}$$

それぞれの双対基底を $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathfrak{g}^*$ とする。以下で、3 系列のリー群それぞれについての結果を詳しく述べる。まずはじめに、可換リー群 $\mathbb{R}^n$ に対する結果を述べる。

定理 3.1. 可換リー群 $\mathbb{R}^n$ に対して、以下が成り立つ：

- (1) $\mathbb{R}^n$ 上のすべての左不変統計構造は共役対称である。
- (2) 次の集合は $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(\mathbb{R}^n)$ の代表元集合である：

$$V^+ := \{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^3 \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0\}.$$

特に $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(\mathbb{R}^n)$ は商空間 $\mathbb{R}_{>0} \backslash \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0\}$ と同相である。

次に、単連結可解リー群 $G_{\mathbb{RH}^n}$ に対する結果を述べる。

定理 3.2. $v_0 := 4x_1^3 + 6 \sum_{i=2}^n x_1 x_i^2 \in S^3(\mathfrak{g}_{\mathbb{RH}^n}^*)$ とおく。

- (1) $\mathbb{R}v_0$ は $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(G_{\mathbb{RH}^n})$ の完全代表元集合である。特に、モジュライ空間は部分空間 $\mathbb{R}v_0$ と同相である。
- (2) 2 点集合 $\{v_0, -v_0\}$ は $\mathcal{MLStat}^{\text{DF}}(G_{\mathbb{RH}^n})$ の完全代表元集合である。特に、モジュライ空間は 2 点離散空間に同相である。

最後に、3 次元ハイゼンベルグ群と可換リー群の直積リー群の場合について述べる。ただし、 $\odot$ によって対称テンソル積を表す。

定理 3.3. $w_0 := x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 \in S^2(\mathfrak{h}_3^*)$ とおく。

- (1) 部分空間 $\mathbb{R}w_0 \odot S^1(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^{n-3}}^*) \oplus S^3(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^{n-3}}^*)$ は $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(H^3 \times \mathbb{R}^{n-3})$ の代表元集合である。特に $n = 3$ のとき、 $\mathcal{MLStat}^{\text{CS}}(H^3)$ は 1 点集合であり、このとき左不変共役対称統計構造は左

不変リーマン計量とその Levi-Civita 接続の組に限る.

(2) リー群 $H^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$ は左不変双対平坦構造を持たない.

H^3 に関する主張は, 井ノ口-大野 [5] においてすでに示されていることに注意されたい. 本稿のモジュライ空間による議論は, それとは異なるアプローチを提供し, この結果をより高次元の場合へと一般化するものである. 特に, $n = 3$ の場合とは異なり, $H^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$ ($n \geq 4$) の場合には, 非自明な左不変共役対称統計構造が存在する.

参考文献

- [1] Shun-ichi Amari and Hiroshi Nagaoka, *Methods of information geometry*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 191, American Mathematical Society, Providence, RI; Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [2] Luis Pedro Castellanos Moscoso and Hiroshi Tamaru, *A classification of left-invariant symplectic structures on some Lie groups*, Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry **64** (2023), no. 2, 471–491.
- [3] Hitoshi Furuhata, Jun-ichi Inoguchi, and Shimpei Kobayashi, *A characterization of the alpha-connections on the statistical manifold of normal distributions*, Inf. Geom. **4** (2021), no. 1, 177–188.
- [4] Takahiro Hashinaga, Hiroshi Tamaru, and Kazuhiro Terada, *Milnor-type theorems for left-invariant Riemannian metrics on Lie groups*, J. Math. Soc. Japan **68** (2016), no. 2, 669–684.
- [5] Jun-ichi Inoguchi and Yu Ohno, *Homogeneous statistical manifolds*, arXiv preprint arXiv:2408.01647 (2024).
- [6] Shimpei Kobayashi and Yu Ohno, *On a constant curvature statistical manifold*, Information Geometry **5** (2022), 31–46.
- [7] Shimpei Kobayashi and Yu Ohno, *A characterization of the alpha-connections on the statistical manifold of multivariate normal distributions*, Osaka Journal of Mathematics **62** (2025), no. 2, 22.
- [8] Hiroshi Kodama, Atsushi Takahara, and Hiroshi Tamaru, *The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling*, Manuscripta Math. **135** (2011), no. 1-2, 229–243.
- [9] Yuji Kondo, *A classification of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on some nilpotent Lie groups*, Hiroshima Math. J. **52** (2022), no. 3, 333–356.
- [10] Akira Kubo, Kensuke Onda, Yuichiro Taketomi, and Hiroshi Tamaru, *On the moduli spaces of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on Lie groups*, Hiroshima Math. J. **46** (2016), no. 3, 357–374.
- [11] Takashi Kurose, *Dual connections and affine geometry*, Mathematische Zeitschrift **203** (1990), 115–121.
- [12] Jorge Lauret, *Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups*, Differential Geom. Appl. **18** (2003), no. 2, 177–194.
- [13] Stefan L Lauritzen, *Statistical manifolds*, Differential geometry in statistical inference **10** (1987), 163–216.
- [14] Barbara Opozda, *Curvature bounded conjugate symmetric statistical structures with complete metric*, Ann. Global Anal. Geom. **55** (2019), no. 4, 687–702.
- [15] Hirohiko Shima, *Homogeneous Hessian manifolds*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **30** (1980), no. 3, 91–128.
- [16] ———, *The geometry of Hessian structures*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007.

カンドルの距離について

甲斐 涼哉 (大阪公立大学理学研究科)

1 導入

本稿は [IKK25] に基づく. **カンドル** は群の共役演算の一般化とみなされる代数系である. 近年, カンドルは数学の様々な分野で研究されている. 実際, 結び目理論では結び目の不変量として, 対称空間論では対称空間の離散化として研究されている. カンドルの公理は結び目図式の基本変形 (詳しくは [Kam17] を参照), もしくは対称空間の点対称が満たす性質 (詳しくは [Loo69] を参照) に対応する. これらの分野では, 結び目不変量の具体的な計算可能性や, コンパクト対称空間の離散化としての対応から, 有限カンドルが着目されることが多かった. 一方で, 非自明な結び目の基本カンドルや, 非コンパクト対称空間の離散部分カンドルなど, 興味深い可算無限カンドルも多くある. 本研究では, そのような可算無限カンドルに着目する. しかし, 群と同様に, 無限カンドルの研究には困難が多い. そこで, 無限離散群の研究手法の一つである幾何学的群論の手法に着目する. 群の Cayley グラフは, 群作用のグラフと言える Schreier グラフに一般化される. Schreier グラフによって, カンドルに距離構造を導入する.

カンドル構造は内部自己同型群と displacement 群と呼ばれる二つの群を定め, それらはカンドルに自然に右から作用する. これらの群作用に関する Schreier グラフを用いて, カンドルにグラフ構造を定義する. 特に, 内部自己同型群の作用が定める Schreier グラフは, Winker [Win84] によって導入され, 近年 [HS18] などで研究されている, **カンドルの diagram** の一般化になっている. Schreier グラフの性質からただちに, 作用する群の有限生成集合のとりかたに依らずに, カンドルの連結成分上の距離の擬等長類が定まることが従う (定理 3.4). ここで, 有限生成カンドルの内部自己同型は有限生成であるが, displacement 群は有限生成であるとは限らないことに注意する. また, 内部自己同型群と displacement 群のどちらも有限生成である場合, カンドルの連結成分には二種類の擬等長類が定まるが, それらは一般には擬等長でない (命題 3.5).

さらに, 典型的な距離空間と擬等長同型な連結成分を持つカンドルの例を与える. 例えば, 自由群の場合と同様に, inner 距離を持つ自由カンドルの連結成分は木と擬等長同型となる. さらに, displacement 距離を持つ一般化 Alexander カンドルにも着目する. ここで, 一般化 Alexander カンドルは, 群自己同型写像から定まるカンドル演算を持つ群で, 近年 [HK24] などで詳細に研究されている. すべての等質カンドルは一般化 Alexander カンドルの商で表せることが知られており, カンドル理論において重要なクラスである. displacement 距離が与えられた一般化 Alexander カンドルの連結成分は, 語距離が与えられた displacement 群と擬等長同型となる (定理 4.3). このようなカンドルのクラスによって, 連結成分が Euclid 空間, 双曲平面と擬等長同型となるカンドルを与える.

2 準備

この節では準備として, Joyce [Joy82] と Matveev [Mat82] によって独立に導入された代数系であるカンドルと, 群作用から定まるグラフである Schreier グラフを導入する. まず, カンドルとその構造から定まる自然な群作用について紹介する.

定義 2.1 ([Joy82]). 二項演算 $\triangleleft$ が与えられた空でない集合 X が以下の条件を満たすとき, X をカンドルという:

1. 任意の $x \in X$ に対して, $x \triangleleft x = x$,
2. 任意の $y \in X$ に対して, 右からの演算 $s_y: X \rightarrow X$, $s_y(x) := x \triangleleft y$ は全単射.
3. 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$.

右からの演算 $s_y: X \rightarrow X$ を y での**点対称**という.

X, Y をカンドルとする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ がカンドル演算を保つとき**カンドル準同型**であるという. また, 全単射なカンドル準同型を**カンドル同型**といい, カンドル同型が存在するとき, 二つのカンドルは**同型**であるという. カンドル X の自己カンドル同型全体の集合を $\text{Aut}(X)$ と書き, $\text{Aut}(X)$ の群構造を $fg := g \circ f$ で定める. このとき, $\text{Aut}(X)$ を X の**自己同型群**といい, X に右から作用する. $\text{Aut}(X)$ の右作用が推移的であるとき, X を**等質**であるという. カンドルの二番目と三番目の公理から点対称 s_y はカンドル同型となる.

定義 2.2. カンドル X に対して, 点対称のなす集合 $\{s_y \mid y \in X\}$ が生成する $\text{Aut}(X)$ の部分群を**内部自己同型群**といい, $\text{Inn}(X)$ とあらわす. $\text{Inn}(X)$ の X への右作用の軌道を, X の**連結成分**という. 特に連結成分が一つ (つまり, $\text{Inn}(X)$ の作用が推移的) のとき, X は**連結**であるという.

次の群は Joyce [Joy82] によって transvection group として導入された.

定義 2.3. カンドル X に対して, $\{s_x s_y^{-1} \mid x, y \in X\}$ で生成される $\text{Aut}(X)$ の部分群を **displacement 群**といい, $\text{Dis}(X)$ とあらわす.

ここで, カンドルのいくつかの例を与える.

例 2.4. 整数 $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して, $x \triangleleft y := 2y - x$ で定めると, $\mathbb{Z}$ 上のカンドル演算となる. このとき, $R_\infty := (\mathbb{Z}, \triangleleft)$ を**無限二面体カンドル**という. R_∞ は自然に対称空間 $\mathbb{R}$ の離散部分カンドルとなる.

例 2.5. 群 G とその元 z に対して, g の共役類を $z^G = \{g^{-1}zg \mid g \in G\}$ と表す. このとき, $x, y \in z^G$ に対して, $x \triangleleft y := y^{-1}xy$ で定めると, z^G 上のカンドル演算となる. このとき, $\text{Conj}(z^G) := (z^G, \triangleleft)$ を z^G 上の**共役カンドル**という. より一般に, 共役演算で閉じた部分集合 $X \subset G$ は共役カンドルの構造を持つ.

続けて, Schreier グラフを紹介する.

定義 2.6. 群 G が空でない集合 X へ右作用しているとする. また, G の生成集合 S をとる. このとき, S に関する G の X への右作用の **Schreier グラフ** $\text{Sch}(X, G, S)$ とは, 頂点集合を X , 辺集合を $\{(x, x \cdot s) \mid x \in X, s \in S\}$ とする (無向) グラフである.

注意 2.7. $X = G$ として、右作用を $x \cdot g := xg$ で定めると、対応する Schreier グラフは、群の Cayley グラフと一致する。

$\text{Sch}(X; G, S)$ の連結成分は、右作用の軌道と 1:1 に対応することが簡単に確かめられる。 $\text{Sch}(X; G, S)$ の各連結成分は、グラフ構造から定まる弧長距離 d_S^{Sch} によって距離空間となる。したがって、この距離の制限によって、右作用の各軌道は距離空間となる。この距離は生成集合 S の取り方に依存するが、擬等長類は有限生成集合の取り方に依らずに定まる。

命題 2.8. 群 G が空でない集合 X へ右作用しているとする。このとき、有限生成集合 $S, T \subset G$ と X の G -軌道 O に対して、恒等写像 $\text{id}: (O, d_S^{\text{Sch}}) \rightarrow (O, d_T^{\text{Sch}})$ は擬等長同型写像である。

3 カンドルの距離

この節では、Schreier グラフの枠組みを用いて、カンドルにグラフ構造と距離を導入する。

定義 3.1. X をカンドルとする。

1. 生成集合 $A \subset \text{Inn}(X)$ に関する $\text{Inn}(X)$ の X への右作用の Schreier グラフを $\Gamma_A^{\text{Inn}}(X)$.
2. 生成集合 $U \subset \text{Dis}(X)$ に関する $\text{Dis}(X)$ の X への右作用の Schreier グラフを $\Gamma_U^{\text{Dis}}(X)$.

$\Gamma_A^{\text{Inn}}(X)$ は Winker [Win84] によって導入された**カンドルの diagram**の一般化になっている。 $\text{Inn}(X)$ と $\text{Dis}(X)$ の作用に着目する理由は以下の命題が成立するからである。

命題 3.2. X をカンドルとする。このとき、 X の連結成分全体の集合、 $\Gamma_A^{\text{Inn}}(X)$ の連結成分全体の集合、 $\Gamma_U^{\text{Dis}}(X)$ の連結成分全体の集合は、それぞれ 1:1 に対応する。

よって、グラフ構造から定まる弧長距離の制限として、カンドルの各連結成分に距離が定まる。

定義 3.3. O をカンドル X の連結成分とする。 $\Gamma_A^{\text{Inn}}(X)$ から定まる O 上の距離を、 $A \subset \text{Inn}(X)$ に関する **inner 距離** といい、 d_A^{Inn} で表す。 $\Gamma_U^{\text{Dis}}(X)$ から定まる O 上の距離を、 $U \subset \text{Dis}(X)$ に関する **displacement 距離** といい、 d_U^{Dis} で表す。

群の語距離の場合と同様に、これらの距離の擬等長類は有限生成集合に依らずに定まる。

定理 3.4. O をカンドル X の連結成分とする。

1. 有限生成集合 $A, B \subset \text{Inn}(X)$ に対して、二つの距離空間 (O, d_A^{Inn}) , (O, d_B^{Inn}) は擬等長同型である。
2. 有限生成集合 $U, V \subset \text{Dis}(X)$ に対して、二つの距離空間 (O, d_U^{Dis}) , (O, d_V^{Dis}) は擬等長同型である。

有限生成カンドルの内部自己同型群は有限生成である。一方で、有限生成カンドルであっても displacement 群が有限生成であるとは限らない。実際、自由カンドルや非ファーバー結び目の結び目カンドルは、有限生成カンドルであるが、displacement 群は有限生成ではない。

定理 3.4 より、 $\text{Inn}(X)$ と $\text{Dis}(X)$ がどちらも有限生成であるとき、それぞれの作用に関する Schreier グラフから、カンドル X の各連結成分には二種類の距離の擬等長類が定まる。一般にこれらの擬等長類は異なるものである。

命題 3.5. 以下の条件を満たすカンドル X とその連結成分 O が存在する：

1. $\text{Inn}(X)$ と $\text{Dis}(X)$ は有限生成.
2. 任意の有限生成集合 $A \subset \text{Inn}(X)$ と $U \subset \text{Dis}(X)$ に対して, 二つの距離空間 (O, d_A^{Inn}) と (O, d_U^{Dis}) は擬等長同型ではない.

実際, 無限二面体カンドル R_∞ は命題 3.5 の条件を満たす例となる. この節の最後に, 特別な場合についてこれらの距離の性質を述べる.

命題 3.6. O と O' を等質カンドル X の連結成分とする.

1. 有限生成集合 $A \subset \text{Inn}(X)$ に対して, 距離空間 (O, d_A^{Inn}) , (O', d_A^{Inn}) は擬等長同型である.
2. 有限生成集合 $U \subset \text{Dis}(X)$ に対して, 距離空間 (O, d_U^{Dis}) , (O', d_U^{Dis}) は擬等長同型である.

命題 3.7. カンドル X のある連結成分 O に, $\text{Dis}(X)$ は自由に作用しているとする. このとき, $\text{Dis}(X)$ の有限生成集合に関する displacement 距離を持つ O と, 有限生成集合に関する語距離を持つ $\text{Dis}(X)$ は擬等長同型である.

カンドルの一番目の公理から, $\text{Inn}(X)$ では命題 3.7 のような状況, つまり, $\text{Inn}(X)$ の作用が自由になることはない. また, Eisermann [Eis14] によって導入されたカンドルの被覆理論によると, 単連結カンドルは命題 3.7 の仮定を満たす. したがって, 命題 3.7 は, 単連結カンドルが自身に作用するある有限生成群と擬等長同型であることも示している.

4 例

最後に, 典型的な距離空間と擬等長同型となるような連結成分を持つカンドルの例を与える. 初めに, 自由カンドルを考える. 自由カンドルの詳細は [Kam17] を参照せよ. 有限ランクの自由群は木と擬等長同型であったが, 自由カンドルも同様の性質を持つ.

命題 4.1. A を濃度が 2 以上の有限集合とする. このとき, A 上で生成される自由カンドル $FQ[A]$ は有限生成 (したがって, $\text{Inn}(FQ[A])$ は有限生成) で, 各連結成分は inner 距離に関して木と擬等長同型である.

注意 4.2. 濃度が 2 以上の有限集合上で生成される自由カンドルの displacement 群は有限生成ではない. したがって, 定理 3.4 を適用することができない.

以下, カンドルの特別なクラスに対して, displacement 距離を持つ場合を考える. 群 G とその群自己同型写像 $\sigma \in \text{Aut}(G)$ に対して, G 上のカンドル演算 $\triangleleft$ を

$$x \triangleleft y := \sigma(xy^{-1})y \quad x, y \in G$$

で定める. このカンドルを**一般化 Alexander カンドル**といい, $\text{GAlex}(G, \sigma) = (G, \triangleleft)$ と書く. 特に, $\text{GAlex}(G, \sigma)$ は等質で, 各連結成分に displacement 群が自由に作用する. また, 任意の等質カンドルは一般化 Alexander カンドルの商として表せることが知られている. したがって, 前節で述べた結果から次が従う.

定理 4.3. 群 G とその群自己同型 $\sigma \in \text{Aut}(G)$ から定まる一般化 Alexander カンドルを $X := \text{GAlex}(G, \sigma)$ とする. このとき, $\text{Dis}(X)$ が有限生成ならば, 任意の X の連結成分は displacement 距離に関して, 有限生成集合に関する語距離を持つ $\text{Dis}(X)$ と擬等長同型である.

一般化 Alexander カンドルの displacement 群は以下のように与えられる.

補題 4.4 (cf. [HK24]). $X := \text{GAlex}(G, \sigma)$ とし, 単位元 $1 \in G$ を含む X の連結成分を P とおく.

1. P は G の部分群で, $\text{Dis}(X)$ と同型である.
2. σ が $g \in G$ の内部自己同型, つまり, $\sigma(x) := g^{-1}xg$ で与えられているとき, 群 P は交換子部分群 $[\langle\langle g \rangle\rangle_G, \langle\langle g \rangle\rangle_G]$ に同型である. ただし, $\langle\langle g \rangle\rangle_G$ は $\{g\}$ の G での正規閉包である.

定理 4.3, 補題 4.4 を用いることで, Euclid 空間や双曲平面と擬等長な連結成分を持つカンドルの例を構成できる.

命題 4.5. $t \in \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ とする. このとき, displacement 距離に関して $\text{GAlex}(\mathbb{Z}^n, t)$ の各連結成分は k 次元 Euclid 空間と擬等長同型である. ただし, $k := \text{rank}(1 - t^{-1})$.

命題 4.6. $\Delta^+(p, q, r)$ を以下の表示で定義される群とする:

$$\Delta^+(p, q, r) = \langle a, b, c \mid a^p = b^q = c^r = abc = 1 \rangle_{\text{Grp}}.$$

また, 群自己同型 $\sigma : \Delta^+(p, q, r) \rightarrow \Delta^+(p, q, r)$ を生成元 a での内部自己同型とする. このとき, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ ならば, displacement 距離に関して $\text{GAlex}(\Delta^+(p, q, r), \sigma)$ の連結成分は双曲平面と擬等長同型である.

注意 4.7. $\theta \in \mathbb{R}$ に対して, 双曲平面の各点にその点を中心とする θ -回転によって点対称を定めるとカンドルになる. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ とする. このとき, $Y := \text{Conj}(a^{\Delta^+(p, q, r)})$ は $\frac{2\pi}{p}$ -回転によるカンドル構造を持つ双曲平面の離散部部分カンドルになる.

また, 3 次元球面内の結び目を特異点とする軌道体の基本群を用いて, 3 次元の単連結等質 Riemann 多様体と擬等長な連結成分を持つカンドルも構成できる [IKK25, Proposition 5.6].

References

- [Eis14] Michael Eisermann. Quandle coverings and their Galois correspondence. *Fundamenta Mathematicae*, 225(1):103–167, 2014.
- [HK24] Akihiro Higashitani and Hirotake Kurihara. Generalized Alexander quandles of finite groups and their characterizations. *European Journal of Mathematics*, 10(3):41, September 2024.
- [HS18] Jim Hoste and Patrick D. Shanahan. An enumeration process for racks. *Mathematics of Computation*, 88(317):1427–1448, August 2018.
- [IKK25] Kohei Iwamoto, Ryoya Kai, and Yuya Kodama. Metrics for quandles, May 2025.
- [Joy82] David Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 23(1):37–65, 1982.
- [Kam17] Seiichi Kamada. *Surface-Knots in 4-Space*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Singapore, Singapore, 2017.
- [Loo69] Ottmar Loos. *Symmetric Spaces. I: General Theory*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.
- [Mat82] S. V. Matveev. Distributive groupoids in knot theory. *Mat. Sb. (N.S.)*, (no. 1):78–88, 160, 1982.
- [Win84] Steven Karl Winker. *QUANDLES, KNOT INVARIANTS, AND THE N-FOLD BRANCHED COVER*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1984.

サイクルが及ぼすグラフラプラシアン第1固有値の発散

五明工 (大阪大学大学院理学研究科)*

グラフの各辺に長さを指定したとき, 対応する頂点の重みと辺の重みを適切に定めて, 離散ラプラシアンが定義される. このとき, 辺の長さ (辺長パラメータ) を動かしてラプラシアンの第1固有値を最大化する問題を考える. 本講演では, サイクルを含む任意のグラフに対して第1固有値が発散することを主定理として報告する. 本講演の内容は, 名古屋大学の納谷信氏との共同研究 [4] に基づく.

準備 $G = (V, E)$ をループと多重辺のない連結な有限グラフとする. ここで, V は頂点集合, E は辺集合を表す. 頂点の重み $m_0: V \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を与え, 頂点集合 V 上の関数全体 $\mathbb{R}^V$ に次のような内積を定める.

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \sum_{u \in V} m_0(u) \varphi_1(u) \varphi_2(u), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}^V.$$

辺の重み $m_1: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を与え, グラフ G 上の重み付き離散ラプラシアン $\Delta_{(m_0, m_1)}: \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^V$ を次のように定義する.

$$(\Delta_{(m_0, m_1)} \varphi)(u) = \sum_{v \sim u} \frac{m_1(uv)}{m_0(u)} (\varphi(u) - \varphi(v)), \quad u \in V.$$

$\Delta_{(m_0, m_1)}$ は半正定値であり, 固有値 0 を持つ (定数関数が固有関数に対応する) ことに注意する. $\Delta_{(m_0, m_1)}$ の最小正固有値 (第1固有値) $\lambda_1(G, (m_0, m_1))$ は次のように特徴付けられる.

$$\begin{aligned} \lambda_1(G, (m_0, m_1)) &= \min_{\varphi} \frac{\langle \Delta_{(m_0, m_1)} \varphi, \varphi \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle} \\ &= \min_{\varphi} \frac{\sum_{uv \in E} m_1(uv) (\varphi(u) - \varphi(v))^2}{\sum_{u \in V} m_0(u) \varphi(u)^2}. \end{aligned}$$

このとき, φ は $\sum_{u \in V} m_0(u) \varphi(u) = 0$ をみたすようなゼロでない関数全体にわたる.

次に, グラフラプラシアン $\Delta_{(m_0, m_1)}$ の行列表示についても述べておく. 頂点集合を $V = \{1, \dots, |V|\}$ としたとき, $\mathbb{R}^V$ の正規直交基底を次のようにとる.

$$e_i: j \in V \mapsto \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{m_0(i)}} \in \mathbb{R}, \quad i \in V.$$

このとき対応する $\Delta_{(m_0, m_1)}$ の表現行列 L は $L = D^{-1/2} L_0 D^{-1/2}$ と表される. ここで $D = \text{diag}(m_0(1), \dots, m_0(|V|))$ であり, L_0 は辺の重み付きラプラシアン行列である. す

* e-mail: gomyou@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

なわち, 各成分は次のように定められる.

$$(L_0)_{i,i} = \sum_{j \sim i} m_1(ij), \quad i \in V,$$

$$(L_0)_{i,j} = \begin{cases} -m_1(ij), & ij \in E, \\ 0, & ij \notin E. \end{cases}$$

設定 辺長パラメータ $l: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を与え, 藤原 [2] に従って, 頂点の重み $m_0: V \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ と辺の重み $m_1: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を

$$m_1(uv) = l(uv)^{-1}, \quad uv \in E,$$

$$m_0(u) = \sum_{v \sim u} l(uv), \quad u \in V$$

と定める. このとき, グラフラプラシアン $\Delta_{(m_0, m_1)}$ は l を変数に持つため, $\Delta_l := \Delta_{(m_0, m_1)}$ と表記する. また, 第 1 固有値についても $\lambda_1(G, l) := \lambda_1(G, (m_0, m_1))$ とする. このとき, $\lambda_1(G, l)$ の最大化問題を考える.

問題 1 辺長パラメータ l で正規化条件

$$\sum_{u \in V} m_0(u) = 1$$

をみたすものの全体にわたって $\lambda_1(G, l)$ を最大化せよ. すなわち, 次を求めよ.

$$\Lambda_1(G) := \sup_l \lambda_1(G, l).$$

研究の背景 上述したように頂点と辺の重みは藤原 [2] に従って定めたが, そうすると l のスケーリングによる第 1 固有値の振る舞いがリーマン計量の場合と同様になる. すなわち, $\lambda_1(G, cl) = c^{-2} \lambda_1(G, l)$ である. (l^2 をリーマン計量の離散類似とみなしている.) また問題 1 の背景には, 次のような曲面上の固有値最大化問題がある.

問題 2 閉曲面 M 上のリーマン計量 g に対して, その (正値) ラプラシアン $\Delta_g: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ の最小正固有値 (第 1 固有値) を $\lambda_1(g)$ と表すとき, リーマン計量 g で $\text{Area}(g) = 1$ をみたすものの全体にわたって $\lambda_1(g)$ を最大化せよ.

問題 2 について, 次の Nadirashvili [6] の結果が知られている.

定理 1 (Nadirashvili, 1996) g を問題 2 の解であるリーマン計量とすると, Δ_g の第 1 固有関数を適当に並べて得られる写像 $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N): M \rightarrow \mathbb{R}^N$ で (適当な半径の) $N - 1$ 次元球面への極小等長はめ込みになるものが存在する.

これらの背景を踏まえて, 我々の先行研究にあたる [3] では, 問題 1 を導入し, 次を得た.

定理 2 l を $\lambda_1(G, l)$ の極大値を与える辺長パラメータとする. このとき, $\lambda_1(G, l)$ に対する固有関数 $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ を並べた写像 $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N): V \rightarrow \mathbb{R}^N$ で次をみたすものが存在する.

$$l(uv)^2 = \frac{\|\varphi(u) - \varphi(v)\|^2}{1 - \lambda_1(G, l) (\|\varphi(u)\|^2 + \|\varphi(v)\|^2)}, \quad uv \in E.$$

定理 2 の主張をみたす写像 φ は, 極大値を与える辺長パラメータ l を明示的に記述しており, その意味でグラフのユークリッド空間へのよい実現を与えている. この結果は, 定理 1 のグラフにおける類似となっている.

今ひとつの背景 グラフ上の重み付きラプラシアンに対して, 問題 1 と類似の第 1 固有値最大化問題が Göring-Helmberg-Wappler [5] によって定式化されていた. 彼らは, l と m_0 は独立に与えて固定し, 次の問題を提起した. ($m_0 \equiv 1, l \equiv 1$ の場合は Fiedler [1] による.)

問題 3 辺の重み m_1 で正規化条件

$$\sum_{uv \in E} m_1(uv) l(uv)^2 = \sum_{uv \in E} l(uv)^2$$

をみたすものの全体にわたって $\Delta_{(m_0, m_1)}$ の最小正固有値 $\lambda_1(G, (m_0, m_1))$ を最大化せよ.

問題 3 の最適解に対応するグラフ埋め込みについて次が得られる.

定理 3 (Göring-Helmberg-Wappler, 2011) $m_1: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を問題 3 の最適解とする. このとき, $\lambda_1(G, (m_0, m_1))$ に対する固有関数 $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ を並べた写像 $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N): V \rightarrow \mathbb{R}^N$ で次をみたすようなものが存在する.

$$l(uv)^2 = \|\varphi(u) - \varphi(v)\|^2, \quad uv \in E.$$

我々は定理 2 の証明と同様の手法により, こちらの別証明を与えた.

主結果 Göring 等による設定では常に第 1 固有値の最大値が存在する. 一方で, 我々の設定では発散するケースがある. 実際, 頂点数が 4 までの全てのグラフに対して問題 1 を数値的に解き [3], 特に, サイクルグラフ C_3, C_4 と paw graph に対しては $\Lambda_1(G)$ が発散することを確認している. ここで paw graph とは, 三角形と次数 1 の頂点一つが繋がれた 4 頂点連結グラフである. これらの計算例からサイクルを含むグラフに対しては $\Lambda_1(G)$ は発散することが予測され, 今回の主結果としてこのことを示した.

定理 4 グラフ G がサイクルを部分グラフに持つとき, $\Lambda_1(G) = \infty$ である.

この定理の証明においては次の 2 つの主張が根幹をなしている.

主張 (i) $n \geq 3$ のとき, n 頂点サイクルグラフ C_n に対して $\Lambda_1(C_n) = \infty$ である.

主張 (i) の証明の概要

C_n の辺集合を $E = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)\}$ とし, $0 < t < \epsilon$ に対して長さ関数 l_t を次のように定める.

$$l_t(i, i+1) = \begin{cases} t, & 1 \leq i \leq n-1, \\ 1, & i = n, \end{cases}$$

ただし $n+1 = 1$ としている. $t \rightarrow 0$ のとき, C_n のラプラシアン Δ_{l_t} の表現行列 $L = D^{-1/2} L_0 D^{-1/2}$ において, L_0 は n 頂点パス P_n のラプラシアン行列と定数成分のみからなる行列の和で表され, 第 1 固有値は発散する. また, $D^{-1/2}$ によるスケーリングで固有値が発散することには変わりはない.

主張 (ii) 次数が 1 の頂点を持つグラフ G において, その頂点と接続する辺を縮約して得られるグラフを $\tilde{G}$ としたとき, $\Lambda_1(\tilde{G}) \leq \Lambda_1(G)$ である.

以上の 2 つの主張 (i), (ii) を用いることで定理 4 は次のように示される.

定理 4 の証明の概要

グラフ G がサイクルグラフ C_m を含むとき, G から頂点の縮約を繰り返すことで主張 (ii) により $\Lambda_1(G)$ の不等式による評価列を作り, 最終的に C_m まで潰れたところで主張 (i) によって定理が証明される. 次数が 1 の頂点が無い場合は, 辺を切除することで (その操作で第 1 固有値は増加しない) 次数 1 の頂点を生じさせて前述の操作を繰り返す.

すなわち, グラフのマイナーを取る操作のうち主要な「辺の除去」と「辺の縮約」における $\Lambda_1(G)$ のモノトーン性が主定理の証明の一翼を担っている. 特に主張 (ii) を示すための手段として, 辺長パラメータ l の変化を辺の縮約とみなして統一的に扱っている.

また, 定理 4 の逆の主張についても成り立つことが予測され, パスグラフの場合に成り立つことを確認している.

参考文献

- [1] M. Fiedler, Absolute algebraic connectivity of trees, Linear Multilinear Algebra 26 (1990) 85–106.
- [2] Fujiwara, K. Eigenvalues of Laplacians on a closed Riemannian manifold and its nets. Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), no. 8, 2585–2594.
- [3] T. Gomyou and S. Nayatani, Maximization of the first Laplace eigenvalue of a finite graph, Linear Algebra and its Applications. 720 (2025) 72–90.
- [4] T. Gomyou and S. Nayatani, Maximization of the first Laplace eigenvalue of a finite graph II, arXiv:2412.02179.
- [5] Göring, F; Helmberg, C; Wappler, M. The rotational dimension of a graph. J. Graph Theory 66 (2011), no. 4, 283–302.
- [6] Nadirashvili, N. Berger’s isoperimetric problem and minimal immersions of surfaces. Geom. Funct. Anal. 6 (1996), no. 5, 877–897.

Quiver から得られる 2-step nilpotent Lie 代数と幾何構造

大阪公立大学 溝口史華

概要

Nilpotent Lie 群上の幾何構造において, グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数は重要な役割を果たす. 最近, cycle を含まない有限 quiver から nilpotent Lie 代数を得る新たな方法が提案された. この方法により, 任意の step 数の nilpotent Lie 代数が得られる. 本稿では, quiver から得られる nilpotent Lie 代数が 2-step のときに注目する. グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数との関係を用いて, これらの nilpotent Lie 代数が Ricci-flat 擬 Riemann 計量を許容することを述べる. さらに, symplectic 構造を許容するこれらの nilpotent Lie 代数を分類する.

1 導入

微分幾何学において, 与えられた多様体が特別な幾何構造を許容するかどうかを調べることは重要な問題である. Lie 群では, 左不変幾何構造の存在が自然に考えられるが, 一般に特別な幾何構造を許容する Lie 群の分類は困難な問題である.

我々は, 特に nilpotent Lie 群上の左不変幾何構造に関心を持っており, Einstein や Ricci soliton のような特別な Riemann 計量や擬 Riemann 計量, symplectic 構造について考える. しかし, 2-step nilpotent Lie 群においてさえ, これらの幾何構造については完全には解明されていない. 単連結リー群の上の左不変幾何構造とリー代数上の幾何構造が対応しているので, それらを同一視して議論を行う.

2-step nilpotent Lie 代数上の幾何構造を研究において, 単純有向グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数が知られている ([DM]). さらに, 最近, cycle を含まない有限 quiver から nilpotent Lie 代数を構成する方法が提案された ([MT]). この方法は, 任意の step 数の nilpotent Lie 代数を構成することが可能であり, これらの Lie 代数が Ricci soliton Riemann 計量を許容する ([MT]). 本稿では, 2-step の場合に注目し, グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数との関係を述べる. さらに, その関係を用いて, これらの nilpotent Lie 代数が Ricci-flat 擬 Riemann 計量を許容することを示す. 加えて, symplectic 構造を許容するこれらの Lie 代数を分類する.

2 Quiver から得られる nilpotent Lie 代数

以下では, quiver から Lie 代数を得る方法を紹介する. quiver とは多重辺とループを許す有向グラフのことであり, 表現論をはじめとする様々な分野で研究されている. ここでは, [ASS] を参照する. cycle を含まない有限 quiver から任意の step 数の nilpotent Lie 代数が得られる.

2.1 quiver

定義 2.1 集合 V, E , 写像 $s, t: E \rightarrow V$ に対して, 組 $Q = (V, E, s, t)$ を quiver という. V の元を 頂点, E の元を 辺, $\alpha \in E$ に対して, $s(\alpha)$ を 始点, $t(\alpha)$ を 終点 という.

定義 2.2 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$ に対して, $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ ($1 \leq i \leq n-1$) であるとき, 辺の列 $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ が 道 であるという. このとき, n を 道の長さ という.

例 2.3 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, E = \{a, b, c, d, e\}$ とし, $s(a) = v_1, s(b) = v_2, s(c) = v_3, s(d) = v_3, s(e) = v_4, t(a) = v_2, t(b) = v_4, t(c) = v_4, t(d) = v_4, t(e) = v_5$ とすると quiver となり, 図示すると, 図 1 のようになる.

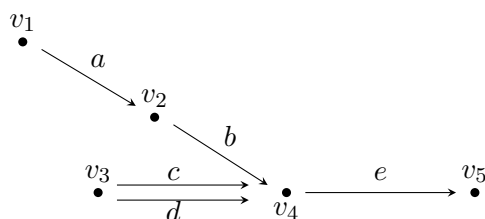


図 1 例 2.3 の quiver

この quiver の道は, $a, b, c, d, e, ab, be, ce, de, abe$ の 10 個.

2.2 nilpotent Lie 代数の構成

定義 2.4 (M.-Tamaru, [MT]) quiver $Q = (V, E, s, t)$ に対して, Q のすべての道の集合を $\text{Path}(Q)$ とし, $\mathfrak{n}_Q$ を次で定める:

$$\mathfrak{n}_Q := \text{span Path}(Q).$$

また, $x, y \in \text{Path}(Q)$ に対して, 積と括弧積を

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & (t(x) = s(y)), \\ 0 & (t(x) \neq s(y)), \end{cases} \quad [x, y] = x \cdot y - y \cdot x$$

と定めると, $\mathfrak{n}_Q$ は Lie 代数となる. これを Q から得られる Lie 代数 という.

注意 2.5 $\mathfrak{n}_Q$ に積 $\cdot$ を入れたものは道代数として既に知られている. 道代数の場合は, 頂点を長さ 0 の道として含めるのが一般的である. 今回は, 長さ 1 以上の辺を道として扱う.

quiver Q の道 x に対して, $s(x) = t(x)$ であるとき, x を cycle という. cycle を持つ quiver から得られる Lie 代数は無次元になる. 辺が有限集合である有限 quiver が cycle を含まないとき, quiver のすべての道の長さの最大値が存在する. これを quiver の長さ という.

命題 2.6 Q を cycle を含まない有限 quiver とすると, $\mathfrak{n}_Q$ は有限次元の nilpotent Lie 代数となる. また, 長さが m の quiver から得られる Lie 代数は, m -step nilpotent Lie 代数である.

2.3 例

例 2.7 次の図 2 の quiver から得られる Lie 代数 $\mathfrak{n}$ は 3 次元 Heisenberg 代数と同型.



図 2 例 2.7

3 既知の例との比較

Nilpotent Lie 代数上の幾何構造の研究において, 具体例の一つとしてグラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数が知られている. 以下では, グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数を紹介し, それらの Lie 代数と quiver から得られる nilpotent Lie 代数について比較する.

3.1 グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数

集合 V と集合 $E \subset \{(x, y) \in V \times V \mid x \neq y\}$ の組 $\Gamma = (V, E)$ を単純有向グラフという. V の元を頂点といい, E の元を辺という. 辺 $e = (x, y)$ に対して, x を e の始点といい, y を e の終点という. 単純有向グラフから次のように 2-step nilpotent Lie 代数を定義する.

定義 3.1 (Dani-Mainkar, [DM]) 単純有向グラフ $\Gamma = (V, E)$ に対して,

$$\mathfrak{n}_\Gamma := \text{span}(V \cup E),$$

$$[x, y] = \begin{cases} e & (x, y \in V, e = (x, y)), \\ -e & (x, y \in V, e = (y, x)), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

とすると, 2-step nilpotent Lie 代数 $\mathfrak{n}_\Gamma$ を得る.

3.2 グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数との比較

quiver から得られる nilpotent Lie 代数が 2-step の場合に注目し, グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数と比較する.

補題 3.2 任意の長さ 2 の quiver Q から得られる 2-step nilpotent Lie 代数 $\mathfrak{n}_Q$ は, 次の (m, n) -type quiver ($m \geq 1, n \geq 0$) から得られる nilpotent Lie 代数の直和である.

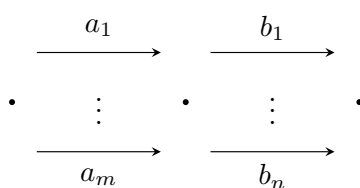


図 3 (m, n) -type quiver

補題 3.3 (m, n) -type quiver Q と (m, n) 完全二部グラフ Γ に対して, それぞれから得られる nilpotent Lie 代数 $\mathfrak{n}_Q$ と $\mathfrak{n}_\Gamma$ は同型である.

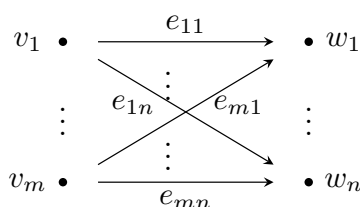


図 4 (m, n) 完全 2 部グラフ

補題 3.2, 補題 3.3 より, 次が示される.

命題 3.4 任意の長さ 2 の quiver Q に対して, ある単純有向グラフ Γ が存在し, それぞれから得られる 2-step nilpotent Lie 代数 $\mathfrak{n}_Q$ と $\mathfrak{n}_\Gamma$ は同型である.

グラフから得られる nilpotent Lie 代数は 2-step に限られるため, 3-step 以上の quiver から得られる nilpotent Lie 代数はグラフから得られない.

4 結果

以下では, グラフから得られる 2-step nilpotent Lie 代数との関係を用いて, quiver から得られる nilpotent Lie 代数が 2-step の場合に Ricci-flat 擬 Riemann 計量や symplectic 構造を許容するかどうかにについて述べる.

4.1 Ricci-flat 擬 Riemann 計量

定義 4.1 不定値内積つき Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ に対して, $\text{Ric} = 0$ を満たすとき, $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ が Ricci-flat であるという.

Riemann 計量とは異なり, 擬 Riemann 計量においては nilpotent Lie 代数がいつ Ricci-flat 計量を許容するか解明されていない. そのため, グラフから得られている nilpotent Lie 代数上においても研究がなされており, 次の定理が知られている.

定理 4.2 (Conti-del Barco-Rossi, [CBR]) グラフから得られる nilpotent Lie 代数はすべて Ricci-flat 擬 Riemann 計量を許容する.

命題 3.4 より, 2-step の場合は quiver から得られる nilpotent Lie 代数はグラフから得られるので, 次が示される.

定理 4.3 長さ 2 の quiver Q に対して, Q から得られる 2-step nilpotent Lie 代数 $\mathfrak{n}_Q$ は Ricci-flat 擬 Riemann 計量を許容する.

注意 4.4 (m, n) -type quiver から得られる 2-step nilpotent Lie 代数において, 定理 4.3 によって得られた Ricci-flat 擬 Riemann 計量の符号数 (p, q) は次を満たす:

$$p, q \geq m + n - 1$$

問題 4.5 quiver から得られる nilpotent Lie 代数において, 以下の問題が考えられる.

- 2-step のとき, 任意の符号数の Ricci-flat 擬 Riemann 計量を許容するか.
- 3-step 以上のとき, いつ与えられた符号数の Ricci-flat 擬 Riemann 計量を許容するか.

4.2 symplectic 構造

定義 4.6 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して, 2-form ω が symplectic 構造 であるとは, $d\omega = 0$ かつ $\omega^n \neq 0$ を満たすことである.

定理 4.7 (Pouseele-Tirao, [PT]) 単純有向グラフ $\Gamma = (V, E)$ に対して, Γ から得られる nilpotent Lie 代数 $\mathfrak{n}_\Gamma$ が symplectic 構造を許容する必要十分条件は, $\mathfrak{n}_\Gamma$ の偶数次元であり, $\#E \leq \#V$ を満たすことで

ある.

命題 3.4 より, 2-step の場合は quiver から得られる nilpotent Lie 代数はグラフから得られるので, 定理 4.7 の条件を翻訳することによって, 次が示される.

定理 4.8 長さ 2 の quiver Q に対して, Q から得られる 2-step nilpotent Lie 代数が symplectic 構造を許容する必要十分条件は, 以下である:

- (i) n_Q は偶数次元,
- (ii) Q の連結成分は以下のような $(2, 2)$, $(1, n)$, $(n, 1)$, $(1, 0)$ -type quiver のいずれか.

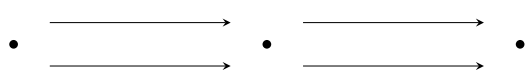


図 5 $(2, 2)$ -type

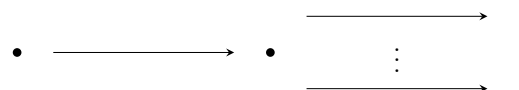


図 6 $(1, n)$ -type

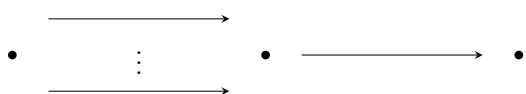


図 7 $(n, 1)$ -type



図 8 $(1, 0)$ -type

問題 4.9 quiver から得られる nilpotent Lie 代数が 3-step 以上のとき, いつ symplectic 構造を許容するか.

参考文献

- [ASS] Assem, I., Simson, D. and Skowroński, A., “Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory”, London Math. Soc. Stud. Texts, 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006. x+458 pp.
- [CBR] Conti, D., del Barco, V. and Rossi, F. A., “Diagram involutions and homogeneous Ricci-flat metrics”, Manuscripta Math. **165** (2021), no. 3-4, 381–413.
- [DM] Dani, S. G. and Mainkar, M., “Anosov automorphisms on compact nilmanifolds associated with graphs”, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), no. 6, 2235–2251.
- [MT] Mizoguchi, F. and Tamaru, H., “Nilpotent Lie algebras obtained by quivers and Ricci solitons”, arXiv:2405.11184.
- [M] Mizoguchi, F., “Two-step nilpotent Lie algebras obtained by quivers and geometric structures”, In: Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, to appear.
- [PT] Pouseele, H. and Tirao, P., “Compact symplectic nilmanifolds associated with graphs”, J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), no. 9, 1788–1794.

各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みとラプラシアンについて

成田 知将 *

米子工業高等専門学校

1 導入

M を (境界のない) n 次元 (連結) コンパクト多様体とする. M 上のリーマン計量 g に対して, (M, g) の体積 $\text{Vol}(M, g)$ と (正值) ラプラシアン Δ_g が定まる. ラプラシアン Δ_g の最小正固有値を $\lambda_1(g)$ とする. $\lambda_1(g)\text{Vol}(M, g)^{2/n}$ は g の定数倍に関して不変である. 1973 年, Berger [B] は次の問題を提起した. すなわち,

$$\Lambda_1(M) := \sup_g \lambda_1(g)\text{Vol}(M, g)^{2/n}$$

は有限か, という問題である. ここで, 上限 $\sup$ は M 上のリーマン計量全体にわたってとる. この問題は既に答えが知られている:

1980 年に Yang と Yau [YY] は, 向きづけ可能閉曲面 M に対して, $\Lambda_1(M)$ が M の種数のみに依存する定数で上から抑えられることを示した. また, 向きづけ可能でない閉曲面についても, 同様の結果が Karpukhin [K] によって得られている.

1979 年, 浦川肇氏 [U] は 3 次元球面 $S^3 \cong SU(2)$ 上の, 標準計量の標準的変分と呼ばれる, あるリーマン計量の 1 パラメータ族 $(g_t)_{t>0}$ について $\lambda_1(g_t)$ を具体的に計算することで, $\lambda_1(g_t)\text{Vol}(S^3, g_t)^{2/3} \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) が成り立つことを示した. これは上述の Berger の問題への最初の否定的解答であった. その直後, 丹野修吉氏 [T] は Hopf ファイブレーション $S^1 \rightarrow S^{2m+1} \rightarrow \mathbf{C}P^m$ を考えることで, 浦川氏の結果を一般の奇数次元球面 S^{2m+1} ($m \geq 1$) に一般化した. その後, Colbois と Dodziuk [CD] は, 3 次元以上の任意のコンパクト多様体 M に対し, M 上に $\lambda_1(h_t)\text{Vol}(M, h_t)^{2/n} \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) となるリーマン計量の 1 パラメータ族 $(h_t)_{t>0}$ を構成した. このことから, とくに $\Lambda_1(M)$ は有限でない.

上述の Hopf ファイブレーションは各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みの典型例である. 本研究では, 各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込み $(M, g) \rightarrow (B, j)$ が与えられたとき, 標準的変分と呼ばれる, あるリーマン計量の 1 パラメータ族 $(g_t)_{t>0}$ につい

* narita@yonago-k.ac.jp

て考え、リッチ曲率に関するある仮定の下で $\lambda_1(g_t)$ の評価を与える。特に、この評価から $t \rightarrow \infty$ のとき $\lambda_1(g_t)\text{Vol}(M, g_t)^{2/\dim M}$ が発散することがわかる。これは浦川氏、丹野氏の結果の一般化とみなせる。

2 リーマン沈め込みと標準的変分

この節では主結果を述べるための準備として、リーマン沈め込みと標準的変分について説明する。

$(M, g), (B, j)$ をコンパクトリーマン多様体とし、それぞれの次元を n, p とする。沈め込み $\pi : M \rightarrow B$ を考える。各 $b \in B$ に対し、 $F_b := \pi^{-1}(b)$ を b のファイバーという。各ファイバーは M の $(n - p)$ 次元部分多様体である。各 $m \in M$ に対し、 $V_m M := \text{Ker}(d\pi_m : T_m M \rightarrow T_{\pi(m)} B)$ を m における垂直空間といい、その g_m に関する直交補空間 $H_m M := (V_m M)^\perp$ を m における水平空間という。各 $m \in M$ に対し、 $d\pi_m \upharpoonright_{H_m M} : (H_m M, g_m \upharpoonright_{H_m M}) \rightarrow (T_{\pi(m)} B, j_{\pi(m)})$ が線形等長写像のとき、沈め込み $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ をリーマン沈め込みという。各ファイバー F_b は M の部分多様体なので、 g からリーマン計量が誘導される。誘導計量に関するレビ・チビタ接続を ∇^{F_b} と書く。 F_b 上の任意の接ベクトル場 X, Y に対し、 $\nabla_X^M Y - \nabla_X^{F_b} Y = 0$ が成り立つとき、 F_b は全測地的であるという。^{*1} Hermann [H] による次の古典的な結果が知られている：

定理 2.1 ([H]). $(M, g), (B, j)$ をコンパクトリーマン多様体とし、 $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ はリーマン沈め込みであるとする。このとき、各ファイバーが全測地的ならば、ファイバーたちは互いに等長的である。

次に、リーマン沈め込みに付随した、計量の標準的変分を定義する：

定義 2.2. $(M, g), (B, j)$ をコンパクトリーマン多様体とし、 $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ はリーマン沈め込みであるとする。各 $t > 0$ に対し、リーマン計量 g_t を次をすべてみたす（一意的な）計量として定める：任意の $m \in M$ に対し、

1. $g_t \upharpoonright_{V_m M \times H_m M} = 0$.
2. $g_t \upharpoonright_{H_m M \times H_m M} = g \upharpoonright_{H_m M \times H_m M}$.
3. $g_t \upharpoonright_{V_m M \times V_m M} = t^2 g \upharpoonright_{V_m M \times V_m M}$.

M 上のリーマン計量の 1 パラメータ族 $(g_t)_{t>0}$ をリーマン沈め込み $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ に付随した g の標準的変分という。また、

$$\Lambda_1(M, t) := \lambda_1(g_t)\text{Vol}(M, g_t)^{2/n}$$

^{*1} 式の左辺 $\nabla_X^M Y - \nabla_X^{F_b} Y$ は第二基本形式と呼ばれる。全測地的という概念は、一般の部分多様体に対して定義される概念だが、本稿で考える部分多様体はファイバーだけである。

とする.

定義より, とくに $g_1 = g$ が成り立つ. また, 定義より $\pi : (M, g_t) \rightarrow (B, j)$ もリーマン沈め込みである. さらに,

$$\text{Vol}(M, g_t) = t^{n-p} \text{Vol}(M, g) \quad (2.1)$$

が成り立つ. リーマン沈め込み $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ の各ファイバーが全測地的であるならば, リーマン沈め込み $\pi : (M, g_t) \rightarrow (B, j)$ の各ファイバーも全測地的であることがわかる.

例 2.3. S^{2m+1} を $\mathbf{C}^{m+1}$ 内の半径 1 の球面とみなす. $S^{2m+1} \rightarrow \mathbf{C}P^m$, $z \mapsto [z]$ は各ファイバーが大円 (したがって測地線) となるリーマン沈め込みである. このリーマン沈め込みを Hopf ファイブレーションという. 丹野修吉氏 [T] は

$$\lambda_1(S^{2m+1}, g_t) = \min\{4m + 4, 2m + t^{-2}\}$$

であることを示した. (ただし, $m = 1$ の場合にこれを最初に示したのは, 浦川肇氏 [U] である.) このことと, $\text{Vol}(S^{2m+1}, g_t) = t \text{Vol}(S^{2m+1}, g)$ よりとくに

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Lambda_1(S^{2m+1}, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_1(S^{2m+1}, t) = \infty$$

が成り立つ. 右の式は「1. 導入」で述べた Berger の問題への反例になっている.

比較のために別の例を見る:

例 2.4. 標準的な平坦トーラス $T^n = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$ を考える. $T^n \rightarrow T^{n-1}$, $(x^1, \dots, x^{n-1}, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^{n-1})$ は各ファイバーが測地線 $S^1 = T^1 = \mathbf{R} / \mathbf{Z}$ となるリーマン沈め込みである. フーリエ級数展開によって

$$\lambda_1(T^n, g_t) = \begin{cases} 4\pi^2 & (0 < t \leq 1) \\ 4\pi^2 t^{-2} & (1 \leq t) \end{cases}$$

であることが容易にわかる. $\text{Vol}(T^n, g_t)^{2/n} = t^{2/n}$ であるから,

$$\Lambda_1(T^n, t) = \begin{cases} 4\pi^2 t^{2/n} & (0 < t \leq 1) \\ 4\pi^2 t^{(2-2n)/n} & (1 \leq t) \end{cases}$$

を得る. このことからとくに

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Lambda_1(T^n, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_1(T^n, t) = 0$$

が従う.

上の 2 つの例において $\lim_{t \rightarrow 0} \Lambda_1(\cdot, t) = 0$ が成り立つが, このことは任意の, 各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みに対して成り立つことが知られている:

命題 2.5. ([B-BB]) リーマン沈め込み $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ の各ファイバーが全測地的ならば, $\lim_{t \rightarrow 0} \Lambda_1(M, t) = 0$ が成り立つ.

一方で上の2つの例において、 $t \rightarrow \infty$ のときの $\Lambda_1(\cdot, t)$ の振る舞いは異なる。標準球面の曲率は正で、平坦トーラスの曲率は0であるから、次の問が生じる:

問題 1: 各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込み $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ に関して、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_1(M, t) = \infty$ となるための曲率に関する十分条件を求めよ。

3 $\lambda_1(g_t)$ の評価に関する先行研究

$\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ は各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みであるとする。Bérard-Bergery と Bourguignon [B-BB] は垂直ラプラシアン Δ_v と水平ラプラシアン Δ_h を次のように定めた: M 上のなめらかな関数 f に対して、 $\Delta_v f$ と $\Delta_h f$ を

$$(\Delta_v f)(m) := \Delta^{F_{\pi(m)}}(f|_{F_{\pi(m)}})(m) \quad (m \in M),$$

$$\Delta_h f := \Delta^{M_g} f - \Delta_v f$$

により定義する。ここで、 $\Delta^{F_{\pi(m)}}$ は誘導計量を備えたリーマン多様体 $F_{\pi(m)}$ 上のラプラシアンである。 Δ_v, Δ_h は $L^2(M, g)$ 上の非負な形式的自己随伴作用素である。しかし、Bérard-Bergery と Bourguignon が指摘したように、 Δ_v, Δ_h は楕円型ではない。とくに、 Δ_v のスペクトラムは離散的だが、 Δ_h のスペクトラムは離散的とは限らない。Bérard-Bergery と Bourguignon [B-BB] は次を示した:

命題 3.1 ([B-BB]). $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ は各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みであるとする。このとき、 $\Delta_g^M, \Delta_v, \Delta_h$ は互いに可換である。また、

$$\Delta_{g_t}^M = \Delta_h + t^{-2} \Delta_v$$

が成り立つ。

また、直接的な言及はないものの、Bérard-Bergery と Bourguignon の論文では次のことが暗に用いられている:

補題 3.2. $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ は各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みであるとする。 (B, j) 上のラプラシアン Δ_j^B の最小正固有値を β_1 とする。このとき、任意の $t > 0$ に対して、 $\lambda_1(g_t) \leq \beta_1$ が成り立つ。

とくに、この補題と (2.1) およびはさみうちの原理から、命題 2.5 が成り立つ。一方、 $\lambda_1(g_t)$ の下からの評価に関しては、命題 3.1 を用いて Grana と Lima [GL] が次を示した:

命題 3.3 ([GL]). $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ は各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みであるとする。このとき、任意の $0 < t \leq 1$ に対して、 $\lambda_1(g) \leq \lambda_1(g_t)$ が成り立つ。

問題 2: $\pi : (M, g) \rightarrow (B, j)$ は各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みであるとする。

このとき, 任意の $t \geq 1$ に対して, $\lambda_1(g_t)$ の下からの評価を与えよ^{*2}

4 主定理

本研究の主結果は次であり, 上の問題 1, 2 に解答を与えるものである:

定理 4.1 ([N]). $(M, g), (B, j)$ はコンパクトリーマン多様体で, それぞれの次元は n, p であるとする. $\pi: (M, g) \rightarrow (B, j)$ を各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みとする.

$$\text{Ric}^M \geq \tilde{c}g$$

となる $\tilde{c} > 0$ が存在すると仮定する. さらに, $n - p \geq 2$ の場合は

$$\text{Ric}^{F_b} = c(\iota^*g) \quad (b \in B)$$

となる $0 \leq c < \tilde{c}$ が存在すると仮定する. ここで, $\iota: F_b \hookrightarrow M$ は包含写像, したがって ι^*g は誘導計量である.

このとき, $n - p \geq 2$ の場合は任意の $t \geq 1$ に対し,

$$\lambda_1(g_t) \geq \frac{\tilde{c} - c}{n + 1} + t^{-2} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \tilde{c} + \frac{c}{n + 1} \right)$$

が成り立つ. $n - p = 1$ の場合は, 上の不等式に $c = 0$ を代入した不等式が成り立つ. また, いずれの場合にも等号成立のための必要十分条件は, $t = 1$ かつ (M, g) が奇数次元球面 $S^{2m+1}(\sqrt{2m/\tilde{c}})$ に等長的なことである.

定理 2.1 より, 上の主定理における $b \in B$ は「任意の b 」としても「ある b 」としても同じことである. 主定理の系として, 主定理と補題 3.2 および (2.1) から, $\Lambda_1(M, t) = O(t^{2(n-p)/n})$ が成り立つ.

問題 1 について: リッチ曲率に関する上の定理の仮定のもとで, $\Lambda_1(M, t) = O(t^{2(n-p)/n})$ が成り立つ. とくに, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_1(M, t) = \infty$ が成り立つ. とくに例 2.3 のようにファイバーが 1 次元の場合, (M, g) のリッチ曲率が正であるという仮定だけから $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_1(M, t) = \infty$ が従う.

問題 2 について: 上の定理の仮定のもとで, $\lambda_1(g_t)$ の下からの評価を与えることができた. 例 2.4 はファイバーが 1 次元であったから, (M, g) のリッチ曲率が正であるという仮定は除けないことがわかる.

今後の課題: 最後に今後の課題を述べ, 本稿の結びとする.

(1) リーマン沈め込み $\pi: (M, g) \rightarrow (B, j)$ がサブリーマン構造を誘導するならば, 水平ラプラシアンは準楕円型になり, とくにスペクトラムは離散的で, 0 はスペクトラムの孤立点になる [B-BB]. リーマン沈め込みがサブリーマン構造を誘導するための十分条件は何か?

^{*2} (M, g) が 3-佐々木で, (B, j) が四元数ケーラーであるときには, 最近 Nagy と Semmelmann [NS] がシャープな評価を与えている.

(2) 上述の主定理は四元数ケーラー多様体のツイスターファイブレーションにも適用できる ([N, Example 5.12]) が, シャープではない. ツイスターファイブレーションに関する $\lambda_1(g_t)$ のシャープな評価を与えよ^{*3}.

参考文献

- [B-BB] L. Bérard-Bergery and J. -P. Bourguignon, *Laplacians and Riemannian submersions with totally geodesic fibers*, Illinois J. Math. **26**(1982), no.2, 181–200.
- [B] M. Berger, *Sur les premières valeurs propres des variétés Riemanniennes*, Compositio. Math. **26**(1973), 129–149.
- [BLP] R. G. Bettiol, E. A. Lauret and P. Piccione, *The First Eigenvalue of a Homogeneous CROSS*, J. Geom. Anal. **32**(2022), Article No. 76, 63pp.
- [CD] B. Colbois and J. Dodziuk, *Riemannian metrics with large λ_1* , Proc. Amer. Math. Soc. **122**(1994), 905–906.
- [GL] L. Grama and K. N. S. Lima, *Bifurcation and local rigidity of homogeneous solutions to the Yamabe problem on Aloff–Wallach spaces*, preprint, arXiv:2405.20345v1.
- [H] R. Hermann, *A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fibre bundle*, Proc. Amer. Math. Soc. **11**(1960), 236–242.
- [K] M. Karpukhin, *On the Yang–Yau inequality for the first Laplace eigenvalue*, Geom. Funct. Anal. **29**(2019), 1864–1885.
- [NS] P.-A. Nagy and U. Semmelmann, *Eigenvalue estimates for 3-Sasaki structures*, J. Reine Angew. Math. **803**(2023), 35–60.
- [N] K. Narita, *Remark on Laplacians and Riemannian submersions with totally geodesic fibers*, preprint, arXiv:2411.17078 v5.
- [T] S. Tanno, *The first eigenvalue of the Laplacian on spheres*, Tôhoku Math J. **31**(1979), 179–185.
- [U] H. Urakawa, *On the least positive eigenvalue of the Laplacian for compact group manifolds*, J. Math. Soc. Japan **31**(1979), 209–226.
- [YY] P. Yang and S. T. Yau, *Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **7**(1980), no.4, 55–63.

^{*3} ツイスターファイブレーションの最も基本的な例である $\mathbf{CP}^1 \rightarrow \mathbf{CP}^{2m+1} \rightarrow \mathbf{HP}^m$ については, Bettiol–Lauret–Piccione [BLP] が $\lambda_1(g_t) = \min\{8m + 8, 8m + 8t^{-2}\}$ と求めている.

Variants of the Yau–Tian–Donaldson correspondence: coupled Kähler–Einstein metrics, extremal metrics, and nilsolitons

橋本義規（大阪公立大学 大学院理学研究科数学専攻）*

本講演の内容の一部は、大阪大学の藤田健人氏との共同研究に基づく。

1 導入：Kähler–Einstein 計量についての Yau–Tian–Donaldson 対応

コンパクトな Kähler 多様体 X ($\dim_{\mathbb{C}} X = n$) がいつ Kähler–Einstein 計量を持つかは重要な問題である。ここで、Kähler 計量 ω が **Kähler–Einstein 計量** であるとは、ある定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega$$

が成り立つことである。Yau の定理と Aubin–Yau の定理によって $\lambda \leq 0$ の場合は常に Kähler–Einstein 計量が存在することが知られている。 $\lambda > 0$ となるのは X が Fano 多様体の場合、つまり $-K_X$ が豊富である場合である。この場合は、松島の障害や二木の障害と呼ばれる古典的な結果によって、Fano 多様体は必ずしも Kähler–Einstein 計量を持たないことが知られていた。どのような Fano 多様体が Kähler–Einstein 計量を持つか、という問題に関する近年の研究で中心的役割を果たしたのが Yau–Tian–Donaldson 予想である。この予想では、Fano 多様体 X が Kähler–Einstein 計量を許容することと、 $(X, -K_X)$ が代数幾何学的な安定性条件（ K -安定や Ding 安定）を満たすことが同値であると主張される。この予想は、Chen–Donaldson–Sun [8–10] や Tian [30] をはじめとする多くの人々によって肯定的に解決された。上記のように、標準的な計量の存在と代数幾何学的安定性条件の同値性を主張する結果を、本講演では便宜上 **Yau–Tian–Donaldson 対応** と呼ぶことにする。本講演の基礎となる結果は、以下のものである。

定理 1.1. (Berman–Boucksom–Jonsson [2]) Fano 多様体 X の自己同型群が離散であると仮定する。この時、 X が Kähler–Einstein 計量を許容することと、 $(X, -K_X)$ が一様 Ding 安定であることは同値である。

以下、一様 Ding 安定性を定義する。まず、Fano 多様体 $(X, -K_X)$ に対するテスト配位とは、以下の条件を満たす $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ である（一般の偏極射影多様体 (X, L) に対しても同様に定義できる）。

- $\mathcal{X}$ は $\mathbb{C}^*$ -作用を持つ正規代数多様体であり、 $\mathbb{C}^*$ -同変な平坦射影射 $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$ が与えられている。
- $\mathcal{L}$ は $\mathcal{X}$ 上の semiample な $\mathbb{Q}$ -Cartier 因子であり、作用 $\mathbb{C}^* \curvearrowright \mathcal{X}$ の線形化が与えられている。
- 任意の $t \neq 0$ に対して $(\pi^{-1}(t), \mathcal{L}|_{\pi^{-1}(t)}) \cong (X, -K_X)$ である。

さらに、 $\mathcal{X}_0 := \pi^{-1}(0)$ を中心ファイバーと呼ぶ。以後、テスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ は $\mathbb{P}^1$ 上、無限遠での $\mathbb{C}^*$ -作用が自明となるような標準的方法で、 $\pi: (\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{L}}) \rightarrow \mathbb{P}^1$ とコンパクト化されていると仮定する。

* Email: yhashimoto@omu.ac.jp

本研究の一部は JSPS 科研費 JP19K14524, JP23K03120, JP24K00524 の助成を受けた。また、本研究の一部は 2024 年に Montréal にて Thematic Program in Geometric Analysis が開催されている期間中に行われており、期間中講演者は CRM-Simons scholar として Centre de Recherches Mathématiques と Simons Foundation から助成を受けた。

テスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に対して, その **Ding** 不変量を

$$\text{Ding}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) := -\frac{\bar{\mathcal{L}}^{n+1}}{(n+1) \int_X c_1(-K_X)^n} - 1 + \text{lct}(\mathcal{X}, D; \mathcal{X}_0)$$

と定義する. ただし, D は $\text{supp} D \subset \mathcal{X}_0$ かつ $-(K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1} + D) \sim_{\mathbb{Q}} \bar{\mathcal{L}}$ を満たす唯一の $\mathbb{Q}$ -因子である. また, $\text{lct}(\mathcal{X}, D; \mathcal{X}_0)$ は log canonical threshold と呼ばれる双有理幾何学で重要な不変量であり, $\sup_{c \in \mathbb{R}} \{(\mathcal{X}, D + c\mathcal{X}_0) \text{ は sublc}\}$ と定義される. Fano 多様体 $(X, -K_X)$ が一様 **Ding** 安定であるとは, ある $\epsilon > 0$ が存在して

$$\text{Ding}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq \epsilon \|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|$$

が任意のテスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に対して成り立つことである. ただし, 上記において, $\|(\mathcal{X}, \mathcal{L})\|$ は $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ のノルムとみなせる非負実数であるが, 詳しい説明は割愛する.

定理 1.1 の証明において, 以下紹介する変分法が重要な役割を果たす. 固定したレファレンス Kähler 計量 $\omega_0 \in c_1(-K_X)$ に対して, Kähler ポテンシャル全体の集合を

$$\mathcal{H} := \{\phi \in C^\infty(X, \mathbb{R}) \mid \omega_\phi := \omega_0 + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \phi > 0\}$$

と定義する. Kähler 計量 ω_ϕ から自然に定まる $-K_X$ 上のエルミート計量から, X 上の体積形式 $d\mu_\phi$ が得られる. ω_ϕ が $\lambda = 1$ の Kähler–Einstein 計量であることは, $\phi \in \mathcal{H}$ が **Ding** 汎関数と呼ばれる汎関数

$$\mathbf{D}(\phi) := \mathbf{L}(\phi) - \mathbf{E}(\phi)$$

の臨界点となることと同値である. ただし

$$\mathbf{L}(\phi) := -\log \int_X d\mu_\phi, \quad \mathbf{E}(\phi) := \frac{1}{(n+1) \int_X \omega_0^n} \sum_{j=0}^n \int_X \phi \omega_0^{n-j} \wedge \omega_\phi^j \quad (1)$$

と定めた. この汎関数の著しい特徴は, $\mathcal{H}$ における測地線に沿って凸であるということである [3]. $\mathcal{H}$ は測地的に完備ではないが, $\mathcal{E}^1$ と呼ばれる完備化が存在する. これは, エネルギー $\mathbf{E}(\phi)$ が有限となるような特異 Kähler 計量 ϕ 全体からなるのだが, 詳細は割愛する. この空間についての重要事項を以下列挙する.

定理 1.2. $\mathcal{E}^1$ には d_1 と呼ばれる距離が存在し, $(\mathcal{E}^1, d_1)$ は以下の性質を満たす完備な測地的距離空間となる.

1. $\mathbf{D}$ は $(\mathcal{E}^1, d_1)$ 上に連続的に拡張できる.
2. $\mathbf{D}$ は $(\mathcal{E}^1, d_1)$ 内の測地線 (有限エネルギー測地線) に沿って凸である.
3. $\mathbf{D}$ が $\mathcal{H}$ 上臨界点を持つこと, つまり $(X, -K_X)$ が滑らかな Kähler–Einstein 計量を持つことと, $\mathbf{D}$ が $(\mathcal{E}^1, d_1)$ 上強制的 (**coercive**) と呼ばれる以下の条件を満たすことは同値である: ある $\epsilon > 0$ が存在し,

$$\mathbf{D}(\phi) \geq \epsilon d_1(\phi, 0) - \epsilon^{-1}$$

が任意の $\phi \in \mathcal{E}^1$ について成り立つ.

4. $\mathbf{D}$ が $(\mathcal{E}^1, d_1)$ 上強制的であることと, $\mathbf{D}$ が $(\mathcal{E}^1, d_1)$ 内の任意の (適切な意味で非自明な) 有限エネルギー測地線に沿って真に正の傾き (漸近スロープ) を持つことは同値である.

上で紹介した結果は全て非自明な定理であり, 多くの数学者による重要な貢献からなるものであるが, 紙面の都合により詳細は割愛する. Darvas のモノグラフ [11] を参照されたい. 上記最後の項目の, 測地線に沿った傾きについて, 幾何学的描像を説明する. 有限次元完備 Riemann 多様体 M 上の測地的 (狭義) 凸関数 $\mathbf{F}: M \rightarrow \mathbb{R}$ を考えた時, $\mathbf{F}$ の臨界点 (最小値) の存在は, 測地線に沿った無限遠での傾きによって判定することができる. つまり, $\mathbf{F}$ が最小値を達成することは M 内の全ての測地線 (geodesic ray) $\{\gamma_t\}_{t \geq 0}$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{F}(\gamma_t)}{t} > 0$$

が成り立つことと同値である（図 1 参照）．これは古典的な結果であるはずだが，証明が過去の文献に見当たらなかったので [17] に書いた．証明には原則として Hopf–Rinow の定理のみを用いるため，実はこの同値性は局所コンパクトな完備測地的距離空間まで拡張することができる． $(\mathcal{E}^1, d_1)$ は無限次元であり，さらに局所コンパクトではないと考えられているため，上記結果を直ちに $\mathbf{D}$ に応用することはできないのだが， $(\mathcal{E}^1, d_1)$ における解析学の深い結果を動員すると，上記にあるような幾何学的描像が $\mathbf{D}$ についても成立すると主張するのが定理 1.2 である．

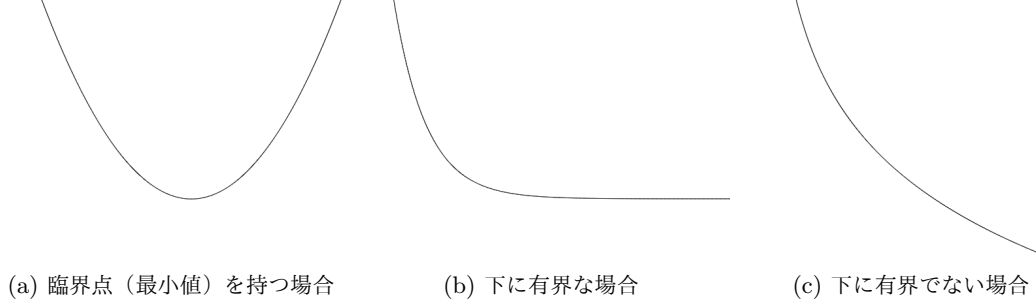


図 1: 凸関数の漸近挙動の分類

実は，汎関数の測地線に沿った無限遠での傾きは代数幾何学的不変量に対応し，これらの不変量が正になることと代数幾何学的安定性に対応する．実際，テスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に対して，「代数的」な（劣）測地線 $\{\phi_{\mathcal{X}, \mathcal{L}}^t\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{H}$ を対応させることができる [2, 4, 27]．Berman–Boucksom–Jonsson [2] や Boucksom–久本–Jonsson [4] らにより，以下のスロープ公式が示された：

$$\text{Ding}(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}(\phi_{\mathcal{X}, \mathcal{L}}^t)}{t}.$$

定理 1.2 より，Kähler–Einstein 計量の存在から $\mathbf{D}$ の漸近スロープが正であることが従うから，Kähler–Einstein 計量を持つ Fano 多様体は一樣 Ding 安定であることが従う．

逆に，一樣 Ding 安定性から Kähler–Einstein 計量の存在を示すことは難しいが，Berman–Boucksom–Jonsson [2] はテスト配位を X の Berkovich 解析化上の非アルキメデス計量とみなす理論を整備することにより，このことを示した．話を簡単にするため，このセクションでは，以後 X の自己同型群は離散的であると仮定するが，一般の場合でも Chi Li [24] により同様の議論が成り立つことが示されている．

以後， $(X, -K_X)$ 上のテスト配位全体の集合に pullback による同値類を入れた集合を $\mathcal{H}^{\text{NA}}$ とおく．Ding 不変量は pullback により不変なので，pullback による同値類を考えて一般性を失わない． $\mathcal{H}^{\text{NA}}$ の元を $-K_X$ 上の非アルキメデス計量と呼ぶ．Boucksom–Jonsson [5] は，以下のように要約できる結果を示した： X の Berkovich 解析化 X^{an} の positive piecewise linear plurisubharmonic (psh) 関数全体の集合と $\mathcal{H}^{\text{NA}}$ の間には一対一対応が存在する．ここで， X^{an} は X の $\mathbb{C}$ 上の trivial absolute value についての Berkovich 解析化である．この空間の厳密な定義を与えることは非常に難しいが，集合としては $X^{\text{an}} = \coprod_{Y \subset X} Y^{\text{val}}$ と書ける．ただし，直和は X 内の全ての irreducible subvariety Y について取られており， Y^{val} は Y 上の valuation 全体がなす集合である．この集合には非常に複雑な位相が与えられているが，定義は割愛する．いずれにせよ，テスト配位の同値類を， X^{an} 上の psh 関数と解釈することで，テスト配位の完備化を定義することができる． $\mathcal{H}^{\text{NA}}$ の完備化は $\mathcal{E}^{1, \text{NA}}$ と書かれ， $\mathcal{H}^{\text{NA}}$ 内の減少列の極限で有限エネルギーを持つものからなる．定義は割愛するが，この完備化は $\mathcal{E}^1$ と同様の発想によりなされる [5]．重要なポイントは，テスト配位を位相空間 X^{an} の関数とみなすことで，その減少列の極限として完備化を定義できる点である．Berman–Boucksom–Jonsson

[2] は, $\mathcal{E}^1$ 内の極大測地線全体の集合と $\mathcal{E}^{1, \text{NA}}$ との間には一対一対応が存在し, スロープ公式

$$\text{Ding}(\phi^{\text{NA}}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}(\gamma(t))}{t}$$

が任意の $\phi^{\text{NA}} \in \mathcal{E}^{1, \text{NA}}$ および対応する極大測地線 $\{\gamma(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{E}^1$ に対して成立することを示した. さらに, $\mathbf{D}$ が $\mathcal{E}^1$ 上に連続的に延長することの類似として, Ding が $\mathcal{E}^{1, \text{NA}}$ 上に連続的に延長することを示すことができる [2]. これを用いて, Berman–Boucksom–Jonsson [2] は Yau–Tian–Donaldson 対応を以下のように証明した. $(X, -K_X)$ が一様 Ding 安定であるならば, Ding の連続性により, ある $\epsilon > 0$ が存在して

$$\text{Ding}(\phi^{\text{NA}}) \geq \epsilon \|\phi^{\text{NA}}\| \quad \text{for all } \phi^{\text{NA}} \in \mathcal{E}^{1, \text{NA}}$$

が成り立つ. 従って, 任意の $\mathcal{E}^1$ 内の極大測地線 $\{\gamma_t\}_{t \geq 0}$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{D}(\gamma(t))}{t} \geq \epsilon > 0$$

が成り立つ. 極大測地線に対して漸近スロープが正になることから, $\mathcal{E}^1$ のコンパクト性定理を用いて

$$\mathbf{D}(\phi) \geq \epsilon d_1(\phi, 0) - \epsilon^{-1} \quad \text{for all } \phi \in \mathcal{E}^1$$

が従うことが示される. 定理 1.2 から, Kähler–Einstein 計量の存在が従う.

このように, エネルギー汎関数の凸性とスロープ公式を用いて, Yau–Tian–Donaldson 対応を示すことができる. これは, 有限次元モーメント写像の零点と幾何学的不変式論に関する Kempf–Ness 定理を Kempf–Ness エネルギーというエネルギー汎関数を用いて証明する方法と同様であるので, このような証明方針を以後 **Kempf–Ness 原理** と便宜上呼ぶことにする.

2 Coupled Kähler–Einstein 計量についての Yau–Tian–Donaldson 対応

全ての Fano 多様体が Kähler–Einstein 計量を持つわけではないが, その変種ならば許容することはありうる. Kähler–Ricci ソリトンや満洲ソリトンなど色々な候補を考えることはできるが, 今回は Hultgren と Witt Nyström [20] により導入された以下の計量を考える. まず, 豊富な $\mathbb{Q}$ -線束 $L_1, \dots, L_k$ で

$$-K_X = L_1 + \dots + L_k$$

が成り立つものを固定する. Kähler 計量の k 個の組み $(\omega_1, \dots, \omega_k) \in c_1(L_1) \times \dots \times c_1(L_k)$ が方程式

$$\text{Ric}(\omega_1) = \dots = \text{Ric}(\omega_k) = \sum_{i=1}^k \omega_i$$

を満たす時, **coupled Kähler–Einstein 計量** と呼ばれる. $k = 1$ の時は通常の Kähler–Einstein 計量であるから, 以後 $k > 1$ と仮定する. 上と同様に, L_i 上にエルミート計量 h_i を固定し, 対応する Kähler 計量を $\theta_i \in c_1(L_i)$ とおく ($i = 1, \dots, k$). さらに, $c_1(L_i)$ 内の Kähler ポテンシャル全体の集合を $\mathcal{H}_i := \{\phi \in C^\infty(X, \mathbb{R}) \mid \theta_i + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \phi > 0\}$ とし, $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \times \dots \times \mathcal{H}_k$ と定める. また, Kähler 類 $c_1(X)$ にある Kähler 計量全体の集合を $\mathcal{H}(-K_X)$ と書くことにする. これらの空間は, $\mathcal{E}^1 := \mathcal{E}_1^1 \times \dots \times \mathcal{E}_k^1$ 及び $\mathcal{E}^1(-K_X)$ に完備化することができる.

定義 2.1. 以下のように定められる写像 $\mathbf{D}^{\text{cpd}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbf{D}^{\text{cpd}}(\phi_1, \dots, \phi_k) := \mathbf{L}^{\text{cpd}}(\phi_1, \dots, \phi_k) - \sum_{i=1}^k \mathbf{E}_i(\phi_i)$$

を **coupled Ding** 汎関数と呼ぶ [20]. ただし, E_i は汎関数 E を $\mathcal{H}_i$ 上定義したものであり,

$$\mathbf{L}^{\text{cpd}}(\phi_1, \dots, \phi_k) := -\log \int_X d\mu_{\phi_1, \dots, \phi_k}$$

である. ここで, $d\mu_{\phi_1, \dots, \phi_k}$ は $\phi_1, \dots, \phi_k$ が $L_1, \dots, L_k$ 上定めるエルミート計量をテンソル積することで得られる $-K_X$ 上のエルミート計量から定まる体積形式である.

この汎関数に対しても, 定理 1.2 と同様の性質が成り立つことが [20] で示された. $\mathbf{D}^{\text{cpd}}$ は $\mathcal{E}^1$ 上に連続的に拡張し, $\mathcal{E}^1$ 内の測地線に沿って凸であり, 滑らかな coupled Kähler–Einstein 計量が存在することは

$$\mathbf{D}^{\text{cpd}}(\phi) \geq \epsilon \sum_{i=1}^k d_1(\phi_i, 0) - \epsilon^{-1}$$

が任意の $\phi \in \mathcal{E}^1$ に対して成り立つような $\epsilon > 0$ が存在すること (coercivity) と同値である. さらに, coercivity は $\mathcal{E}^1$ 内の測地線に沿った $\mathbf{D}^{\text{cpd}}$ の傾きが正であることも同値である.

Hultgren と Witt Nyström [20] は, coupled Kähler–Einstein 計量についても Yau–Tian–Donaldson 対応が成り立つことを予想した. その際に Ding 安定性の coupled 版を定義したが, ここではまず藤田氏と講演者による定義 [13] を先に述べることにする. 上記において複数の Kähler ポテンシャル $\phi_1, \dots, \phi_k$ を考える必要があったことと同様に, 安定性を考える際にも, $(X, L_1), \dots, (X, L_k)$ それぞれに対してテスト配位 $(\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1), \dots, (\mathcal{X}_k, \mathcal{L}_k)$ を考える必要がある.

定義 2.2. テスト配位 $(\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1), \dots, (\mathcal{X}_k, \mathcal{L}_k)$ が与えられた時, $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k$ の $\mathbb{C}^*$ -同変な common resolution

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{X} & & & \\ \sigma_1 \swarrow & \downarrow \sigma_2 & \dots & \searrow \sigma_k & \\ \mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_2 & \dots & \mathcal{X}_k & \end{array}$$

をとる. テスト配位 $(\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1), \dots, (\mathcal{X}_k, \mathcal{L}_k)$ の和は, $(\mathcal{X}, \sigma_1^* \mathcal{L}_1 + \dots + \sigma_k^* \mathcal{L}_k)$ と定義されるテスト配位である.

上記の $\mathcal{X}$ は resolution の取り方に依存するが, 異なる resolution をとっても pullback によるテスト配位の同値類は不変であるから, 対応する $\mathcal{H}^{\text{NA}}(-K_X)$ の元は well-defined である. この和の定義は, 講演者が以前定義した, 射影埋め込みを用いる方法 [16] と同一になることを示すことができる. さらに, この和は強位相に関して連続な写像 $\mathcal{E}_1^{1, \text{NA}} \times \dots \times \mathcal{E}_k^{1, \text{NA}} \rightarrow \mathcal{E}^{1, \text{NA}}(-K_X)$ に拡張できる.

定義 2.3. テスト配位の k 個の組み $\{\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i\}_{i=1}^k$ が与えられた時, **coupled Ding** 不変量は

$$\text{Ding}(\{\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i\}_{i=1}^k) := -\sum_{i=1}^k \frac{\bar{\mathcal{L}}_i^{n+1}}{(n+1) \int_X c_1(L_i)^n} - 1 + \text{lct}(\mathcal{X}, D_{\mathcal{X}}; \mathcal{X}_0)$$

と定義される. ただし, $(\mathcal{X}, \sigma_1^* \mathcal{L}_1 + \dots + \sigma_k^* \mathcal{L}_k)$ は $\{\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i\}_{i=1}^k$ の和であり, $D_{\mathcal{X}}$ は $\text{supp } D_{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}_0$ かつ $-(K_{\mathcal{X}/\mathbb{P}^1} + D_{\mathcal{X}}) \sim_{\mathbb{Q}} \sigma_1^* \mathcal{L}_1 + \dots + \sigma_k^* \mathcal{L}_k$ を満たす唯一の $\mathbb{Q}$ -因子である.

Kähler–Einstein の場合と同様に, coupled Ding 安定性は coupled Ding 不変量を用いて定義することができる. Hultgren–Witt Nyström [20] による coupled Ding 安定性のオリジナルの定義では, テスト配位の k 個の組み $\{\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i\}_{i=1}^k$ に対して, $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k$ が全て同型であることが仮定されていた. この制約を外して, 安定性の条件を強化したことがこの研究における重要なポイントである. さらに, やはり Kähler–Einstein の場合と同様に, テスト配位の組み $(\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1), \dots, (\mathcal{X}_k, \mathcal{L}_k)$ に対応する代数的な劣測地線 $\phi^t = (\phi_{\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1}^t, \dots, \phi_{\mathcal{X}_k, \mathcal{L}_k}^t) \subset \mathcal{H}$ に対して, スローブ公式

$$\text{Ding}(\{\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i\}_{i=1}^k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}^{\text{cpd}}(\phi^t)}{t}$$

が成り立つことを示すことができる [13, 16]. このセクションの主結果は、以下の coupled Kähler–Einstein 計量についての Yau–Tian–Donaldson 対応である.

定理 2.4 (藤田–H. [13]). Fano 多様体 X の自己同型群が離散であると仮定する. この時, $(X; L_1, \dots, L_k)$ が coupled Kähler–Einstein 計量を持つことと, $(X; L_1, \dots, L_k)$ が一様 Ding 安定であることは同値である.

ただし, 一様 Ding 安定性は, ある $\epsilon > 0$ が存在して任意のテスト配位の k -個の組み $\{\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i\}_{i=1}^k$ に対して

$$\text{Ding}(\{\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i\}_{i=1}^k) \geq \epsilon \sum_{i=1}^k \|(\mathcal{X}_i, \mathcal{L}_i)\|$$

が成立することだと定められる. また, 上記条件は $\delta^{\text{cpd}} > 1$ という条件とも同値であるが, 詳細は割愛する.

証明は Kähler–Einstein の場合 [2] と同様, Kempf–Ness 原理を用いる. $(X; L_1, \dots, L_k)$ が一様 coupled Ding 安定であるならば, テスト配位の和をとる写像が $\mathcal{E}^{1, \text{NA}}$ まで連続的に拡張すること [13] と, coupled Ding 不変量の連続性より,

$$\text{Ding}(\{\phi_i^{\text{NA}}\}_{i=1}^k) \geq \epsilon \sum_{i=1}^k \|\phi_i^{\text{NA}}\| \quad \text{for all } \phi^{\text{NA}} \in \mathcal{E}^{1, \text{NA}}$$

がある $\epsilon > 0$ に対して一様に成り立つことが従う. このことから, $\mathcal{E}^1$ 内の任意の極大測地線 γ に対して

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{D}^{\text{cpd}}(\gamma(t))}{t} \geq \epsilon > 0$$

が成り立つ. 上記にあるような, 測地線に沿ったスロープの正値性から, coercivity

$$\mathbf{D}^{\text{cpd}}(\phi) \geq \epsilon \sum_{i=1}^k d_1(\phi_i, 0) - \epsilon^{-1} \quad \text{for all } \phi \in \mathcal{E}^1$$

が従うが, 証明は [2] と同様ではなく, Darvas–Zhang [12] によるコンパクト性定理が必要である. 上記から, coupled Kähler–Einstein 計量の存在が従う. 定理 2.4 は, X の自己同型群が離散的ではない場合でも, 適切に修正すれば同様に成り立つ. X の自己同型群が離散的である場合は, [32] により, $\delta^{\text{cpd}} > 1$ から coupled Kähler–Einstein 計量の存在を直接証明できることも知られている.

3 定スカラー曲率 Kähler 計量や extremal 計量についての最近の進展

Kähler–Einstein 計量や coupled Kähler–Einstein 計量を許容する多様体は K_X が定値の符号を持たなければならないため, 一般の偏極 Kähler 多様体 (X, L) 上の標準計量を考える際には標準計量の定義を拡張しなければならない. よく用いられるものは, スカラー曲率 $S(\omega)$ が定数となるようなものであり, 定スカラー曲率 Kähler (constant scalar curvature Kähler, cscK) 計量と呼ばれる. このさらなる一般化として, 方程式

$$\bar{\partial} \text{grad}_{\omega}^{1,0} S(\omega) = 0$$

の解として定まる **extremal 計量**というものがある. これはスカラー曲率の L^2 ノルム (Calabi 汎関数) を極小化する自然な計量である.

これらの計量についても, Kähler–Einstein 計量の場合と同様, 変分法的アプローチが有効である. 以後, $V := \int_X c_1(L)^n$ と置き直し, スカラー曲率の平均を $\bar{S} := -n \int_X c_1(K_X) c_1(L)^{n-1} / V$ と書く. レファレンス Kähler 計量 $\omega_0 \in c_1(L)$ に対する Kähler ポテンシャル $\phi \in \mathcal{H}$ に対して, (1) で定めた $\mathbf{E}$ と, 汎関数

$$\mathbf{E}_{\text{Ric}(\omega)}(\phi) := \frac{1}{V} \sum_{j=0}^{n-1} \int_X \phi \omega_{\phi}^j \wedge \omega^{n-j-1} \wedge \text{Ric}(\omega), \quad \mathbf{H}(\phi) := \frac{1}{V} \int_X \log \left(\frac{\omega_{\phi}^n}{\omega^n} \right) \omega_{\phi}^n$$

を用いて、満測汎関数（もしくは K -エネルギー） $\mathbf{M} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\mathbf{M}(\phi) := \frac{\bar{S}}{n+1} \mathbf{E}(\phi) - \mathbf{E}_{\text{Ric}(\omega)}(\phi) + \mathbf{H}(\phi)$$

と定義する．この汎関数の臨界点は cscK 計量であり，部分的には定理 1.2 と類似した性質が成り立つ．しかし，Ding 汎関数とは異なり， $(\mathcal{E}^1, d_1)$ への拡張は連続的ではなく，また $\mathcal{E}^1$ 上では $+\infty$ も値として許容しなければならない．他にも様々な技術的困難があるが，滑らかな cscK 計量の存在と coercivity，また（適切な意味で非自明な）有限エネルギー測地線に沿って真に正の傾きを持つことが全て同値であることが Chen–Cheng [6, 7] によって証明された．同様の変分法的アプローチは extremal 計量に対しても存在する．まず， X の自己同型で L までリフトするもの全体がなす群 $\text{Aut}_0(X, L)$ の極大コンパクト部分群 $\mathbb{K}$ を固定する． $\mathbb{G} = \mathbb{K}^{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{K}$ の複素化とし， $\mathbb{T}$ を $\mathbb{G}$ の中心の単位元成分とする． $\mathcal{H}$ の元で $\mathbb{K}$ -不変なもの全体を $(\mathcal{H})^{\mathbb{K}}$ と書く，今，汎関数 $\mathbf{J}_{\text{ext}} : (\mathcal{H})^{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\mathbf{J}_{\text{ext}}(\phi) := \frac{1}{V} \int_0^1 \int_X \dot{\phi}_t \theta(\phi_t) \frac{\omega_{\phi_t}^n}{n!} dt$$

と定義する．ただし， $\{\phi_t\}_{0 \leq t \leq 1} \subset (\mathcal{H})^{\mathbb{K}}$ は $\phi_0 = 0$ と $\phi_1 = \phi$ を結ぶ任意の滑らかな路であり， $\theta(\phi_t)$ は ω_{ϕ_t} についての extremal ベクトル場の holomorphy potential である．上記定義が路に依存しないことは非自明な結果である [1]．これを用いると，extremal 計量を臨界点にもつ修正満測汎関数 $\mathbf{M}_{\text{ext}} : (\mathcal{H})^{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$\mathbf{M}_{\text{ext}}(\phi) := \mathbf{M}(\phi) + \mathbf{J}_{\text{ext}}(\phi)$$

と定義される．通常の満測汎関数と同様に，修正満測汎関数も $\mathbb{K}$ -不変な部分空間 $(\mathcal{E}^1)^{\mathbb{K}}$ 上に拡張するが，拡張は連続ではなく，値として $+\infty$ も取りうる．滑らかな extremal 計量の存在と $\mathbb{G}$ -coerivity が同値であることは He [19] によって証明された．

以上紹介した cscK 計量についても，計量の存在と代数幾何学的安定性の同値性を主張する予想が知られており，やはり Yau–Tian–Donaldson 予想と呼ばれている．この場合の安定性は，

$$\mathbf{M}^{\text{NA}}(\phi^{\text{NA}}) := K_{\bar{\mathcal{X}}/\mathbb{P}^1}^{\log} \cdot \bar{\mathcal{L}}^n + \frac{\bar{S}}{(n+1)V} \bar{\mathcal{L}}^{n+1}$$

と定められる非アルキメデス満測汎関数によって定められる．ただし， $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ は $\phi^{\text{NA}} \in \mathcal{H}^{\text{NA}}$ を代表する任意のテスト配位であり， $K_{\bar{\mathcal{X}}/\mathbb{P}^1}^{\log}$ は $K_{\bar{\mathcal{X}}/\mathbb{P}^1}^{\log} := K_{\bar{\mathcal{X}}} - \pi^* K_{\mathbb{P}^1} + \mathcal{X}_{0, \text{red}} - \mathcal{X}_0$ と定められる $\bar{\mathcal{X}}$ 内の因子である．同様の予想は extremal 計量についても提案されている．この場合，安定性を定める不変量は非アルキメデス修正満測汎関数であり， $\mathbf{M}^{\text{NA}}(\phi^{\text{NA}}) + \mathbf{J}_{\text{ext}}^{\text{NA}}(\phi^{\text{NA}})$ と定義される．これは相対的 K -安定性と呼ばれる Székelyhidi [28] によって導入された概念に基づくものである．ただし，Yao [31] に倣って

$$\mathbf{J}_{\text{ext}}^{\text{NA}}(\phi^{\text{NA}}) := \frac{1}{V/n!} \frac{\bar{\mathcal{L}}_{\beta}^{n+2}}{(n+2)!} - \frac{1}{(V/n!)^2} \left(\frac{\bar{\mathcal{L}}^{n+1}}{(n+1)!} \right)^2$$

と定めた．詳細な定義は割愛するが，上の $(\mathcal{X}_{\beta}, \mathcal{L}_{\beta})$ はテスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ の積テスト配位であり $n+2$ 次元の空間である．このように定めた不変量を用いると， $\mathbf{M}_{\text{ext}}$ に対してスロープ公式が成立する [4, 31]．

これらの汎関数についても Kempf–Ness 原理が成立することを期待することは非常に自然だが，様々な技術的困難がある． $\mathbf{M}^{\text{NA}}$ を $\mathcal{E}^{1, \text{NA}}$ 上に拡張することはできるが，やはり拡張は強位相に関して連続ではないため，その扱いは非常に難しい．しかし，Chi Li [25] はモデルと呼ばれるテスト配位の一般化（定義は純代数的）を定義し，モデルから誘導されるフィルトレーションに対して一様 K -安定性が成り立つことから cscK 計量の存在が従うことを示した（正確な定義は技術的なので割愛するが， $\text{PSH}^{\mathfrak{M}, \text{NA}}$ をモデルから誘導されるフィルトレーションから定まる非アルキメデス計量全体の集合とすると， $\mathcal{H}^{\text{NA}} \subset \text{PSH}^{\mathfrak{M}, \text{NA}} \subset \mathcal{E}^{1, \text{NA}}$ である）．

定理 3.1 (Li [25]). ある $\epsilon > 0$ が存在して $\mathbf{M}^{\text{NA}}(\phi^{\text{NA}}) \geq \epsilon \|\phi^{\text{NA}}\|_{\mathbb{T}}$ が任意の $\mathbb{G}$ -同変なモデルフィルトレーション $\phi^{\text{NA}} \in \text{PSH}^{\mathfrak{M}, \text{NA}}$ に対して成り立つならば, (X, L) は $\mathbb{K}$ -不変な cscK 計量を持つ.

ここで, $\|\phi^{\text{NA}}\|_{\mathbb{T}}$ は ϕ^{NA} の群同変なノルムである. 講演者は, この結果を extremal 計量に拡張した.

定理 3.2 (H. [18]). ある $\epsilon > 0$ が存在して $\mathbf{M}^{\text{NA}}(\phi^{\text{NA}}) + \mathbf{J}_{\text{ext}}^{\text{NA}}(\phi^{\text{NA}}) \geq \epsilon \|\phi^{\text{NA}}\|_{\mathbb{T}}$ が任意の $\mathbb{G}$ -同変なモデルフィルトレーション $\phi^{\text{NA}} \in \text{PSH}^{\mathfrak{M}, \text{NA}}$ に対して成り立つならば, (X, L) は $\mathbb{K}$ -不変な extremal 計量を持つ.

上記結果 [18] が arXiv で発表されたのは 2025 年 6 月だが, この分野には 2025 年 5 月ごろから極めて急速な発展があった. まず, Boucksom–Jonsson [23] が weighted cscK 計量に対して定理 3.1, 3.2 の類似及びその逆を証明したと発表した. 逆が成り立つことは極めて重要な進展であり, これによって weighted cscK 計量という extremal 計量を含む非常に広いクラスの標準計量に対して Yau–Tian–Donaldson 予想 (安定性条件をモデルまで強めたバージョン) が解けたことになる. また, [18] が発表された約 3 週間後に, Han–Liu [14] が定理 3.1, 3.2 を weighted cscK 計量まで拡張したと発表した. これらの仕事は全て独立である.

4 Nilsoliton の存在と Yau–Tian–Donaldson 対応の類似

これまで見たように, Yau–Tian–Donaldson 対応や Kempf–Ness 原理は Kähler 多様体上の様々な標準計量の存在問題について非常に有効である. この原理を, Kähler 多様体以外の標準計量に関する問題に応用することを考える.

冪零 Lie 群 N が推移的かつ等長的に作用する連結 Riemann 多様体を等質冪零多様体と呼ぶ. 以後, N は実次元 n で, 連結かつ単連結であると仮定する. 実は, 等質冪零多様体は N に左不変 Riemann 計量が入ったものと同型であり, また N は左不変 Einstein 計量を持たないことが知られている. N 上に左不変 Einstein 計量は存在し得ないので, その変種である左不変 Ricci soliton を考える. ここで, Ricci soliton とは, ある定数 λ とベクトル場 v に対して

$$\text{Ric}(g) = \lambda g + \mathcal{L}_v g$$

を満たす Riemann 計量 g のことであった. ただし, $\mathcal{L}_v$ は Lie 微分である. 等質冪零多様体上の左不変計量を考える限りにおいては, Ricci soliton の方程式は N の Lie 環 $\mathfrak{n}$ から定まる有限次元空間の行列の問題に還元される. 等質冪零多様体上の左不変 Ricci soliton を **nilsoliton** と呼ぶ.

冪零 Lie 環 $\mathfrak{n}$ の Lie ブラケットを μ , $\mathfrak{n}$ 上の内積を $\langle, \rangle$ と書く. 今, 内積 $\langle, \rangle$ に関して自己共役であるような線形写像 $\lambda \in \text{End}(\mathfrak{n})$ に対して, **Hilbert–Mumford weight** $\nu(\lambda; \mu)$ を

$$\nu(\lambda; \mu) := - \min_{1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq n} \{ \lambda_i + \lambda_j - \lambda_k \mid \mu_{ij}^k \neq 0 \}$$

により定義する. ただし, 上では $\langle, \rangle$ の正規直交基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$ を選んで λ を $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ と対角化し, その基底に関して $\mu(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n \mu_{ij}^k e_k$ と書いた. この不変量を, 1 次元部分空間

$$\mathcal{S} := \mathbb{R}(I_{\mathfrak{n}} - \phi_{\mu}) \subset \text{End}(\mathfrak{n})$$

と交換し直交する元に対して計算する. ただし, $\phi_{\mu} \in \text{Der}(\mu)$ は Lie 環 $(\mathfrak{n}, \mu)$ から canonical に定まる derivation であり, **pre-Einstein derivation** と呼ばれている [26]. Kempf–Ness 原理を等質冪零多様体の場合に適切に設定することにより, nilsoliton に対する Yau–Tian–Donaldson 対応の類似が得られる.

定理 4.1 (H. [15]). N を等質冪零多様体とし, $(\mathfrak{n}, \mu)$ を対応する Lie 環とする. $(\mathfrak{n}, \mu)$ 上の内積 $\langle, \rangle$ を, pre-Einstein derivation ϕ_{μ} が自己共役になるように選ぶ. この時, N が nilsoliton を持つことと, 自己共役線形写像 $\lambda \in \text{End}(\mathfrak{n})$ で $[\lambda, \mathcal{S}] = \langle \lambda, \mathcal{S} \rangle = 0$ を満たすものの全てに対して $\nu(\lambda; \mu) \geq 0$ が成り立つことは同値である (ただし等号成立は $\lambda \in \text{Der}(\mu)$ と同値).

N は実多様体なので、代数幾何学的な安定性はアブリアリには意味をなさない。しかし、上で紹介した変分原理や漸近スロープを用いた Kempf–Ness 原理は等質冪零多様体の場合にも同様に意味をなす。上記定理の安定性条件は extremal 計量の場合に現れた相対的安定性だと解釈することができ、 $\mathcal{S}$ は extremal ベクトル場が生成するトーラスと同様の役割を果たす [15]。

定理 4.1 は, nilsoliton の存在に関する必要十分条件を与える最初の定理ではない。まず, Nikolayevsky [26] により, nilsoliton が存在することの必要十分条件は μ の軌道 $\tilde{G} \cdot \mu$ が閉じていることだと示された。ただし, $\tilde{G}$ は $SL(\mathfrak{n})$ の部分群で, その Lie 環が $\mathcal{S}$ と交換し $\mathcal{S}$ と直交するものである。しかし, Lie 群の軌道が閉じているかどうかを判定することは一般には難しいので, 定理 4.1 にあるような数値的判定法を与えることが重要である。Jablonski [21] は上記定理と類似した数値的判定法を過去に与えたが, その内容は定理 4.1 と同値ではない。定理 4.1 では, Jablonski [21] とは異なり, $\tilde{\mathfrak{g}} \cap \text{Der}(\mathfrak{n}, \mu)$ が reductive かどうかを判定する必要がなく, テストすべき $\lambda \in \text{End}(\mathfrak{n})$ の範囲も異なる。証明も, Jablonski の証明 [21] は Nikolayevsky の軌道を用いた判定法 [26] に帰着しているので, Kempf–Ness 原理を用いた証明 [15] とは大きく異なる。

定理 4.1 の新規性を見るには, 技術的詳細の比較ではなく, その応用として与えられる新結果を見る方が良いと思われる。まず, 上記定理に用いられた Kempf–Ness 原理の応用として, nilsoliton の非存在に関する十分条件を与える武富–田丸予想 [29] の修正版が以下のように成り立つ。

定理 4.2 (H. [15]). N を等質冪零多様体とし, $(\mathfrak{n}, \mu, \langle, \rangle)$ を定理 4.1 と同様に設定する。さらに, $\text{End}(\mathfrak{n})$ の元で $\mathcal{S}$ と交換し, $\mathcal{S}$ と直交するもの全体がなす Lie 環に対応する Lie 群を G , その部分群で $\langle, \rangle$ を固定するものを K とする。これらの Lie 環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ とし, $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解を $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ と書く。今,

1. $\text{Aut}(\mu) \cap G$ の左剰余空間 G/K への作用は推移的ではない,
2. 全ての $\text{Aut}(\mu) \cap G$ -軌道は G について共役である,
3. 任意の $g \in G \setminus \text{Aut}(\mu)$ に対して, $\mathfrak{p} \cap (\text{Der}(\mu) \setminus \text{Der}(\rho(g) \cdot \mu))$ が 0 以外の元を持つ,

と仮定する。この時, N は nilsoliton を持ち得ない。

オリジナルの武富–田丸予想との最大の違いは $\text{Der}(\mu) \setminus \text{Der}(\rho(g) \cdot \mu)$ に関する条件 3 であるが, この条件を外すことはできない [22]。また, G や K などの Lie 群の設定も微妙に異なる。最後に, 定理 4.1 のさらなる応用として, 凸集合を用いた nilsoliton の存在に関する必要十分条件を述べる。

定理 4.3 (H. [15]). N を等質冪零多様体とし, $(\mathfrak{n}, \mu, \langle, \rangle)$ を定理 4.1 と同様に設定する。今, $\mathfrak{n}$ の各 $\langle, \rangle$ -正規直交基底 $\mathcal{B}$ で ϕ_μ を対角化するもの $\mathcal{B} := \{e_i\}_{i=1}^n$ に対して, 有限集合 $\mathcal{F}_\mathcal{B} \subset \mathfrak{n}$ を

$$\mathcal{F}_\mathcal{B} := \{e_i + e_j - e_k \mid 1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k \leq n, \text{ s.t. } \mu_{ij}^k \neq 0\}$$

と定義する。ただし, $\mu(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n \mu_{ij}^k e_k$ と書いた。さらに, $\text{Aff}(\mathcal{F}_\mathcal{B})$ を $\mathcal{F}_\mathcal{B}$ のアフィン包とし, $O_\mathcal{B}$ を $\mathfrak{n}$ の原点の $\text{Aff}(\mathcal{F}_\mathcal{B})$ への射影とする。また, $\text{Conv}(\mathcal{F}_\mathcal{B}) \subset \text{Aff}(\mathcal{F}_\mathcal{B})$ を $\mathcal{F}_\mathcal{B}$ の凸包とする。この時, N が nilsoliton を持つことと, 任意の $\mathcal{B}$ に対して $O_\mathcal{B}$ が $\text{Conv}(\mathcal{F}_\mathcal{B})$ の内部にあることは同値である。

この定理は, $\mathfrak{n}$ が nice basis と呼ばれる特殊な基底を持つときには Nikolayevsky [26] によって (少し強いバージョンが) 証明された。上記定理は, この結果を一般の等質冪零多様体に対して拡張するものである。

参考文献

- [1] R. J. Berman and B. Berndtsson, *Convexity of the K-energy on the space of Kähler metrics and uniqueness of extremal metrics*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), no. 4, 1165–1196. MR3671939
- [2] R. J. Berman, S. Boucksom, and M. Jonsson, *A variational approach to the Yau–Tian–Donaldson conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **34** (2021), no. 3, 605–652. MR4334189

- [3] B. Berndtsson, *A Brunn-Minkowski type inequality for Fano manifolds and some uniqueness theorems in Kähler geometry*, Invent. Math. **200** (2015), no. 1, 149–200. MR3323577
- [4] S. Boucksom, T. Hisamoto, and M. Jonsson, *Uniform K-stability and asymptotics of energy functionals in Kähler geometry*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **21** (2019), no. 9, 2905–2944. MR3985614
- [5] S. Boucksom and M. Jonsson, *Global pluripotential theory over a trivially valued field*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **31** (2022), no. 3, 647–836. MR4452253
- [6] X. Chen and J. Cheng, *On the constant scalar curvature Kähler metrics (I)—A priori estimates*, J. Amer. Math. Soc. **34** (2021), no. 4, 909–936. MR4301557
- [7] ———, *On the constant scalar curvature Kähler metrics (II)—Existence results*, J. Amer. Math. Soc. **34** (2021), no. 4, 937–1009. MR4301558
- [8] X. Chen, S. Donaldson, and S. Sun, *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I: Approximation of metrics with cone singularities*, J. Amer. Math. Soc. **28** (2015), no. 1, 183–197. MR3264766
- [9] ———, *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. II: Limits with cone angle less than 2π* , J. Amer. Math. Soc. **28** (2015), no. 1, 199–234. MR3264767
- [10] ———, *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. III: Limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof*, J. Amer. Math. Soc. **28** (2015), no. 1, 235–278. MR3264768
- [11] T. Darvas, *Geometric pluripotential theory on Kähler manifolds*, Advances in complex geometry, 2019, pp. 1–104. MR3996485
- [12] T. Darvas and K. Zhang, *Twisted Kähler-Einstein metrics in big classes*, Comm. Pure Appl. Math. **77** (2024), no. 12, 4289–4327. MR4814920
- [13] K. Fujita and Y. Hashimoto, *On the coupled Ding stability and the Yau–Tian–Donaldson correspondence for Fano manifolds*, arXiv preprint arXiv:2412.04028 (2024).
- [14] J. Han and Y. Liu, *G-uniform weighted K-stability for models on klt varieties*, arXiv preprint arXiv:2506.18039 (2025).
- [15] Y. Hashimoto, *A Hilbert–Mumford criterion for nilsolitons*, arXiv preprint arXiv:2311.12469 (2023).
- [16] ———, *Anticanonically balanced metrics and the Hilbert–Mumford criterion for the δ_m -invariant of Fujita–Odaka*, Ann. Global Anal. Geom. **64** (2023), no. 2, Paper No. 8, 40. MR4617093
- [17] ———, *Balanced metrics for extremal Kähler metrics and Fano manifolds*, The Bergman kernel and related topics, [2024] ©2024, pp. 169–188. MR4731752
- [18] ———, *Relative uniform K-stability over models implies existence of extremal metrics*, arXiv preprint arXiv:2506.02360 (2025).
- [19] W. He, *On Calabi’s extremal metric and properness*, Trans. Amer. Math. Soc. **372** (2019), no. 8, 5595–5619. MR4014289
- [20] J. Hultgren and D. W. Nyström, *Coupled Kähler-Einstein metrics*, Int. Math. Res. Not. IMRN **21** (2019), 6765–6796. MR4027565
- [21] M. Jablonski, *Concerning the existence of Einstein and Ricci soliton metrics on solvable Lie groups*, Geom. Topol. **15** (2011), no. 2, 735–764. MR2800365
- [22] ———, *Concerning a conjecture of Taketomi–Tamaru*, arXiv preprint arXiv:1810.08173v2 (2025).
- [23] M. Jonsson, *On the YTD conjecture for general polarizations*. https://simonsmoduli.com/wp-content/uploads/2025/05/jonsson_slides.pdf.
- [24] C. Li, *G-uniform stability and Kähler-Einstein metrics on Fano varieties*, Invent. Math. **227** (2022), no. 2, 661–744. MR4372222
- [25] ———, *Geodesic rays and stability in the cscK problem*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **55** (2022), no. 6, 1529–1574. MR4517682
- [26] Y. Nikolayevsky, *Einstein solvmanifolds and the pre-Einstein derivation*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no. 8, 3935–3958. MR2792974
- [27] D. H. Phong and J. Sturm, *Test configurations for K-stability and geodesic rays*, J. Symplectic Geom. **5** (2007), no. 2, 221–247. MR2377252
- [28] G. Székelyhidi, *Extremal metrics and K-stability*, Bull. Lond. Math. Soc. **39** (2007), no. 1, 76–84. MR2303522
- [29] Y. Taketomi and H. Tamaru, *On the nonexistence of left-invariant Ricci solitons—a conjecture and examples*, Transform. Groups **23** (2018), no. 1, 257–270. MR3763948
- [30] G. Tian, *K-stability and Kähler-Einstein metrics*, Comm. Pure Appl. Math. **68** (2015), no. 7, 1085–1156. MR3352459
- [31] Y. Yao, *Relative Ding stability and an obstruction to the existence of Mabuchi solitons*, J. Geom. Anal. **32** (2022), no. 4, Paper No. 105, 51. MR4372898
- [32] K. Zhang, *A quantization proof of the uniform Yau–Tian–Donaldson conjecture*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **26** (2024), no. 12, 4763–4778. MR4780493

巨大コホモロジー類における小林ヒッチン対応

陣内智史 (大阪大学大学院理学研究科)

1 導入

小林ヒッチン対応とは, コンパクトな複素多様体 X 上の反射的接続層が slope 安定なこととエルミート・アインシュタイン計量を持つことの同値性のことである. 従来は X 上にケーラー類を与えるごとに小林ヒッチン対応が定式化され証明されてきた (c.f. [7], [12], [1], [5]).

Birkar-Cascini-Hacon-Mckernan [2] によって射影多様体 X の標準因子 K_X が巨大な場合には極小モデル理論が証明され豊富モデルが存在する. これによって K_X が巨大な多様体の研究は, 豊富モデルの研究に帰着されることとなる. ところが一般の巨大類は豊富モデルを持たないことが知られている (e.g. [11] [10]). 従って極小モデル理論を仮定せずに巨大類を調べる方法が求められる.

本講演では, まず巨大類における slope 安定性を新しく定義する. 次に, この slope 安定性の定義がある種の双有理不変性を導くことを紹介する. そして主結果である, 豊富モデルが存在する場合の巨大類での小林ヒッチン対応を紹介する. 本講演で定義する slope 安定性は極小モデル理論を仮定していないので, 任意の巨大類に対して定義できる. 本主結果は, この slope 安定性の定義が極小モデル理論と整合的であることを示している.

2 可動交点積

2.1 巨大類と可動交点積

本節では巨大類とその可動交点積の定義を述べる. 基本的な参考文献は Boucksom-Eyssidieux-Guedji-Zeriahi [4], Boucksom-Demailly-Păun-Peternell [3], Kollár-Mori [9] である.

X をコンパクト複素多様体とする. (p, p) 型カレントとは, 滑らかな $(n-p, n-p)$ 型微分形式のなすベクトル空間上の連続線形汎関数のことであり, 汎関数として正定値かつ超関数微分の意味で d -閉なものがケーラーカレントである.

Definition 2.1. 巨大類とは X 上のコホモロジー類 $\alpha \in H_{\partial\bar{\partial}}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ であって, ケーラーカレント T で代表されるものである.

次の例からわかるように、巨大類とはケーラー類の双有理幾何的な拡張である。

Example 2.2. $f : X \dashrightarrow X_+$ をアティヤのフロップとする [9, Example 2.7]. X と X_+ は滑らかな 3 次元射影多様体である. H_+ を X_+ の豊富因子とし $H := f_*^{-1}H_+$ を H_+ の強変形とする. このとき $c_1(H)$ は巨大類であり非ケーラーである. 実際, f の不確定点の解消 $\pi : Y \rightarrow X$, $\pi_+ : Y \rightarrow X_+$ が存在して $\pi^*H = \pi_+^*H_+ + aD$ (D は π_+ -例外因子, $a > 0$) となる. このとき $\pi_+^*H_+ = \pi^*H - aD$ はネフであり, さらに π^*H のザリスキ分解をあたえる.

一般の巨大類 α は有限回のブローアップ $\pi : Y \rightarrow X$ で $\pi^*\alpha = \omega + D$ (ω はネフかつ巨大, D は有効例外因子) と分解できない (c.f. [11, Theorem 2.10]). しかし極限操作を許せば類似の量を取り出すことができる. それが可動交点積である.

Proposition-Definition 2.3 ([3]). α をコンパクトケーラー多様体 X 上の巨大類とする. このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ブローアップの列 $\pi_\varepsilon : X_\varepsilon \rightarrow X$, X_ε 上のケーラー類 ω_ε , X_ε 上の有効例外因子 D_ε が存在して次の条件を満たす.

- $\pi_\varepsilon^*\alpha = \omega_\varepsilon + D_\varepsilon$,
- X 上の任意の semipositive $(n-p, n-p)$ 類 η に対して数列

$$\int_{X_\varepsilon} \pi_\varepsilon^*\eta \wedge \omega_\varepsilon^p$$

は単調増加で $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限値が存在する.

従って Poincaré 双対性により, あるコホモロジー類 $\langle \alpha^p \rangle \in H^{p,p}(X, \mathbb{R})$ が存在して $\pi_{\varepsilon*}(\omega_\varepsilon^p) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \alpha^p \rangle$ となる. コホモロジー類 $\langle \alpha^p \rangle$ を α の可動交点積 (movable intersection product) と呼ぶ.

非ケーラー多様体上では可動交点積を次のように定義する.

Definition 2.4. X をコンパクト複素多様体とし α を X 上の巨大類とする. $\pi : Y \rightarrow X$ をブローアップの列で Y がケーラー多様体となるものとする. このとき α の可動交点積 $\langle \alpha^p \rangle$ を $\pi_*\langle (\pi^*\alpha)^p \rangle \in H^{p,p}(X, \mathbb{R})$ と定義する.

Example 2.5. Example 2.2 の状況とする. $\pi^*H = \pi_+^*H_+ + aD$ ($a > 0$) であった. このとき $\langle c_1(\pi^*H)^p \rangle = c_1(\pi_+^*H_+)^p$ であり, $\langle c_1(H)^p \rangle = \pi_*(c_1(\pi_+^*H_+)^p)$ となる. この例は次節で一般化される (Example 2.8, Proposition 2.9 を参照).

2.2 ケーラーモデルと可動交点積

本節では巨大類のケーラーモデル (豊富モデルの超越版) を定義して, 可動交点積との関係を述べる.

Definition 2.6 ([6]). (X, α) と (Y, β) をコンパクト複素解析空間とその上の巨大類の組とする. 双有理型収縮写像 $f: Y \dashrightarrow X$ が次の3条件を満たすとき, f を β -negative であるという.

- $f_*\beta = \alpha$,
- f の不確定点の解消 $p: Z \rightarrow X, q: Z \rightarrow Y$ であって $q^*\beta - p^*\alpha = D$ が有効 p -例外因子となる. さらに
- $\text{Supp}(q_*D)$ は f -例外因子の台と一致する.

Definition 2.7. X をコンパクト正規複素解析空間とし α を X 上の巨大類とする. 組 (X, α) のケーラーモデルとは, コンパクト正規複素解析空間 Y とその上のケーラー類 $\{\omega\}$ の組 $(Y, \{\omega\})$ であって, α -negative な双有理型写像 $f: X \dashrightarrow Y$ が存在するもののことである.

Example 2.8. (1) Example 2.2 において, (X_+, H_+) は (X, H) のケーラーモデルである.

(2) X を滑らかな射影多様体とし, その標準因子 K_X は巨大とする. このとき (X, K_X) はケーラーモデル (Y, K_Y) をもつ [2]. K_X -negative な双有理写像 $f: X \dashrightarrow Y$ は極小モデル理論により与えられる. 特にこの設定ではケーラーモデルとは標準モデルのことである.

次の命題が示すように, ケーラーモデルをもつ巨大類の可動交点積とはケーラーモデルの交点積のことである.

Proposition 2.9 ([8]). X をコンパクト複素多様体とし α を X 上の巨大類とする. 組 (X, α) はケーラーモデル (Y, ω) を持つと仮定し, $f: X \dashrightarrow Y$ を α -negative な双有理型写像とする. $p: Z \rightarrow X$ と $q: Z \rightarrow Y$ を f の不確定点の解消で $p^*\alpha - q^*\omega = D$ が有効 q -例外因子となるものとする. このとき次が成立する.

$$\langle (p^*\alpha)^k \rangle = \langle (q^*\omega)^k \rangle.$$

3 主定義, 主結果

本節では巨大類における接続層の slope 安定性の定義を与え, 主定理である小林ヒッチン対応を述べる.

Definition 3.1 ([8]). X を n 次元コンパクト複素多様体とし α を巨大類とする. X 上の反射的接続層 $\mathcal{E}$ が $\langle \alpha^{n-1} \rangle$ -slope 安定であるとは, $\mathcal{E}$ の任意の部分層 $0 \neq \mathcal{F}$ に対して $\langle \alpha^{n-1} \rangle$ -slope の不等式 $\mu_\alpha(\mathcal{F}) < \mu_\alpha(\mathcal{E})$ が成立することである. ここで $\mu_\alpha(\mathcal{F})$ は次のように定義される.

$$\mu_\alpha(\mathcal{F}) = \frac{1}{\text{rk} \mathcal{F}} \int_X c_1(\det \mathcal{F}) \wedge \frac{\langle \alpha^{n-1} \rangle}{(n-1)!}.$$

Remark 3.2. 巨大類 α がネフでもあるとき, 可動交点積は通常の交点数と一致する: $\langle \alpha^k \rangle = \alpha^k$. したがって特に α がケーラー類の場合は従来の slope 安定性の定義と一致する.

上記の $\langle \alpha^{n-1} \rangle$ -slope 安定性の定義は次の双有理不変性を導く. この定理は $\langle \alpha^{n-1} \rangle$ -slope 安定性が極小モデル理論と整合的であることを示している. Theorem 3.3 のより一般的な主張については Jinnouchi [8] を参照してほしい.

Theorem 3.3 ([8]). X をコンパクト複素多様体とし α を巨大類とする. 組 (X, α) はケーラーモデル (Y, ω) をもつと仮定し $f: X \dashrightarrow Y$ を α -negative な双有理型写像とする. このとき X 上の反射的连接層 $\mathcal{E}$ が $\langle \alpha^{n-1} \rangle$ -slope 安定であることと, Y 上の反射的连接層 $f_{[*]}\mathcal{E} := (f_*\mathcal{E})^{\vee\vee}$ が ω^{n-1} -slope 安定であることは同値である.

Xuemiao Chen 氏によってコンパクト正規ケーラー空間上で小林ヒッチン対応が証明された.

Theorem 3.4 ([5]). X をコンパクト正規ケーラー空間とし $\{\omega\}$ をケーラー類とする. X 上の反射的连接層 $\mathcal{E}$ に対して次は同値:

- $\mathcal{E}$ は $\{\omega\}^{n-1}$ -slope 安定.
- $\mathcal{E}$ は *admissible* ω -エルミート・アインシュタイン計量をもつ.

Jinnouchi による Theorem 3.3 と Xuemiao Chen 氏による Theorem 3.3 によって, 次の形の小林ヒッチン対応が成立する.

Theorem 3.5 ([8]). X をコンパクト複素多様体とし α を巨大類とする. 組 (X, α) はケーラーモデル (Y, ω) をもつと仮定し $f: X \dashrightarrow Y$ を α -negative な双有理型写像とする. このとき X 上の反射的连接層 $\mathcal{E}$ に対して次の 2 条件は同値となる:

- $\mathcal{E}$ は $\langle \alpha^{n-1} \rangle$ -slope 安定.
- $f_{[*]}\mathcal{E}$ は *admissible* ω -エルミート・アインシュタイン計量をもつ.

Example 3.6. (1) Example 2.2 の状況で (X_+, H_+) は (X, H) のケーラーモデルでありアティヤのフロップ $f: X \dashrightarrow X_+$ は H -negative である. さらに f は余次元 1 で同型であるので X 上の反射的连接層と X_+ 上の反射的连接層は一対一対応する. ゆえに Theorem 3.3 によって X 上の $\langle c_1(H)^2 \rangle$ -slope 安定な反射的连接層と, X_+ 上の $c_1(H_+)^2$ -slope 安定な反射的连接層は一対一対応する.

(2) X を滑らかな射影多様体で K_X は巨大であるとする. このとき (X, K_X) はケーラーモデル (Y, K_Y) をもつ. Y の接層 T_Y は $c_1(K_Y)^{n-1}$ -slope 安定であることが知られている. 従って X の接ベクトル束 T_X は $\langle c_1(K_X)^{n-1} \rangle$ -slope 安定である.

本講演で定義した巨大類に関する slope 安定性は任意の巨大類に対して定義できる. 従って豊富モデルを持つとは限らない巨大類に対する slope 安定性の研究が今後期待される.

References

- [1] S. Bando and Y.-T. Siu, *Stable sheaves and Einstein-Hermitian metrics*, Geometry and analysis on complex manifolds, 1994, pp. 39–50. MR1463962
- [2] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, and J. McKernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 2, 405–468. MR2601039
- [3] S. Boucksom, J.-P. Demailly, M. Păun, and T. Peternell, *The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension*, J. Algebraic Geom. **22** (2013), no. 2, 201–248. MR3019449
- [4] S. Boucksom, P. Eyssidieux, V. Guedj, and A. Zeriahi, *Monge-Ampère equations in big cohomology classes*, Acta Math. **205** (2010), no. 2, 199–262. MR2746347
- [5] X. Chen, *Admissible hermitian-yang-mills connections over normal varieties*, Mathematische Annalen (2025), 1–37.
- [6] O. Das, C. Hacon, and J. I. Yáñez, *Mmp for generalized pairs on kähler 3-folds*, arXiv preprint arXiv:2305.00524 (2023).
- [7] S. K. Donaldson, *Infinite determinants, stable bundles and curvature*, Duke Math. J. **54** (1987), no. 1, 231–247. MR885784
- [8] S. Jinnouchi, *Slope stable sheaves and hermitian-einstein metrics on normal varieties with big cohomology classes*, arXiv preprint arXiv:2501.04910 (2025).
- [9] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original. MR1658959
- [10] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry. I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting: line bundles and linear series. MR2095471
- [11] N. Nakayama, *Zariski-decomposition and abundance*, MSJ Memoirs, vol. 14, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004. MR2104208
- [12] K. Uhlenbeck and S.-T. Yau, *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles*, 1986, pp. S257–S293. Frontiers of the mathematical sciences: 1985 (New York, 1985). MR861491

Pohlmeyer-Lund-Regge 方程式に付随する曲線の時間発展 と Riemann-Theta 関数

古郷 優平
北海道大学*

1 はじめに

1978 年に Lund と Regge は sine-Gordon 方程式のある種の一般化を発見し、空間曲線の時間発展で次の非線形偏微分方程式を満たすものとして定式化した [LundRegge78](Lund-Regge 条件)

$$\dot{\gamma}' = \gamma' \times \dot{\gamma},$$

ここで、空間曲線を γ とし、 γ のパラメータ方向 s の微分を $\prime$ 、時間発展方向 t の微分を $\cdot$ で表した。この方程式は、Pohlmeyer[Pohlmeyer76] により独立に、可積分系の理論より導出され、Pohlmeyer-Lund-Regge (PLR) 方程式として知られている。1982 年に伊達悦朗 [Date82] は、Krichever の方法の拡張を適用して PLR 方程式の多ソリトン解および準周期解を構成し、Cramer の方法を通じて特別な線型方程式を解くことで N ソリトン解を構成する方法を導入した。この構成法は、「伊達の直接法」と呼ばれている。

本講演では、Lund-Regge 条件を適用した空間曲線の時間発展を考え、 2×2 行列値 Frenet 枠 ($\mathbb{R}^3$ と $\mathfrak{su}(2)$ を同一視して、 $SU(2)$ に値を持つとする) の時間発展を与える方程式と、それに伴う曲率 κ 、捩率 τ の満たす連立偏微分方程式を導出する。また、橋本変換の類似として複素関数 $q = \kappa \exp(i \int^s (\tau - 1) ds)$ を定義し、適切なゲージ変換を用いることで、Frenet 枠の時間発展が、PLR 方程式の Lax pair と一致することを示す。この対応により、複素関数 q が以下の非線形偏微分方程式を満たすことがわかる：

$$\dot{q}' + \frac{1}{2}q \int^s (|q|^2) \cdot ds = 0.$$

これは、非線形 Schrödinger 方程式に類似した方程式である。さらに Lax pair の解の対数微分を調べること (Sym の公式として知られる) により、Lund-Regge 条件を満たす空間曲線の時間発展を構築することが可能である。さらに、伊達の直接法により得られた PLR 方程式の N ソリトン解、Riemann-Theta 関数で表される準周期解に対応する曲線の表現公式、および曲線や曲線を

* 本研究は JSPS 科研費 22K03304, 23K03125, JST SPRING JPMJSP2119 の助成を受けたものです。

動かしてできる曲面が明示的に構成できる．今回は特に準周期解について紹介する．Section 2, 4 は, [KKM25] により, 小林真平氏 (北海道大学), 松浦望氏 (福岡大学) との共同研究の結果である．

2 空間曲線の時間発展と Lund-Regge evolution

定義 2.1 (Lund-Regge evolution). 3次元ユークリッド空間内の空間曲線 γ の時間発展が次の方程式：

$$\dot{\gamma}' = \gamma' \times \dot{\gamma} \quad (1)$$

を満たすとき, *Lund-Regge evolution* と呼ぶ．

定理 2.2 (Theorem 3.1. of KKM25). 3次元ユークリッド空間内の空間曲線 γ の時間発展を次で定める．

$$\dot{\gamma} = -\frac{1}{2} \int^s (\kappa^2)' ds T - \dot{\kappa} N - \kappa \int^s \dot{\tau} ds B.$$

ここで κ, τ はそれぞれ γ の曲率, 捩率を表し, T は単位接ベクトル, N は単位法線ベクトル, B は単位陪法線ベクトルである．*Frenet* 枠 $\mathcal{F}^{*1}$ は, 連立線型微分方程式系 $\mathcal{F}' = \mathcal{F}\mathcal{L}$, $\dot{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\mathcal{M}$ を満たし, 係数行列は次で与えられる：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\tau & -\kappa \\ \kappa & -i\tau \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \left(-\frac{\dot{\kappa}'}{\kappa} + \tau \int^s \dot{\tau} ds \right) & -\kappa \int^s \dot{\tau} ds + i\dot{\kappa} \\ \kappa \int^s \dot{\tau} ds + i\dot{\kappa} & -i \left(-\frac{\dot{\kappa}'}{\kappa} + \tau \int^s \dot{\tau} ds \right) \end{pmatrix}.$$

この時, 可積分条件は

$$\frac{\dot{\kappa}'}{\kappa} - (\tau - 1) \int^s \dot{\tau} ds + \int^s \kappa \dot{\kappa} ds = 0, \quad \left(\kappa \int^s \dot{\tau} ds \right)' + \dot{\kappa}(\tau - 1) = 0,$$

であり, 曲線の時間発展 γ は *Lund-Regge evolution* である．逆に, *Lund-Regge evolution* γ の *Frenet* 枠は, 上の連立線型微分方程式系を満たし, 曲率 κ , 捩率 τ は, 可積分条件を満たす．

系 2.3 (Corollary 3.1. of KKM25). 対角行列ゲージ $\mathcal{D}$ と, 複素関数 q を次のように定める：

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \text{diag} \left(i \exp \left(-\frac{i}{2} \int^s (\tau - 1) ds \right), -i \exp \left(\frac{i}{2} \int^s (\tau - 1) ds \right) \right), \\ q &= \kappa \exp \left(i \int^s (\tau - 1) ds \right). \end{aligned} \quad (2)$$

ゲージされた *Frenet* 枠 $F = \mathcal{F}\mathcal{D}$ と定理 2.2 における $\mathcal{L}$ と $\mathcal{M}$ は次のように書き換えられる：

$$\begin{cases} F' = FL \\ \dot{F} = FM \end{cases}, \quad \text{ここで} \quad L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & q \\ -\bar{q} & -i \end{pmatrix}, \quad M = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\text{Re}(\dot{q}'/q) & -\dot{q} \\ -\dot{\bar{q}} & \text{Re}(\dot{q}'/q) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

この時, この連立線型方程式系の可積分条件は $\{\text{Re}(\dot{q}'/q)\}' = -\frac{1}{2}(|q|^2)'$, $\text{Im}(\dot{q}'/q) = 0$ であり, これは次の非線形偏微分方程式と同値である：

$$\dot{q}' + \frac{1}{2}q \int^s (|q|^2)' ds = 0. \quad (4)$$

*1 一般に *Frenet* 枠 (T, N, B) は, $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ 値写像だが, 同一視により $\mathcal{F}$ は $\text{SU}(2)$ 値写像としている．

3 Pohlmeyer-Lund-Regge 方程式

以下では、文献 [LundRegge78, Pohlmeyer76] の定式化に従い、さらに [Date82] の記述に基づいて Pohlmeyer-Lund-Regge 方程式を紹介する。\$2 \times 2\$ 行列値写像 \$\Psi\$ を、いわゆる *Lax pair* と呼ばれる次の偏微分方程式系を満たすものとする：

$$\Psi^{-1}\Psi' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\lambda & a \\ -\bar{a} & -i\lambda \end{pmatrix}, \quad \Psi^{-1}\dot{\Psi} = \frac{i}{2\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -e^{i\omega} \sin u \\ -e^{-i\omega} \sin u & -\cos u \end{pmatrix}, \quad (5)$$

ここで、\$\lambda \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}\$ はスペクトルパラメータ、\$u\$ は二変数の実数値関数 (\$0 < u < \pi/2\$ を仮定) である。^{*2} また、複素数値関数 \$a\$ と実数値関数 \$\omega\$ は、\$u\$ と別の実数値関数 \$v\$ を用いて次のように与えられる：

$$a = -\frac{(e^{i\omega} \sin u)'}{\cos u}, \quad \omega' = \frac{v' \cos u}{2 \cos^2(u/2)}, \quad \dot{\omega} = \frac{\dot{v}}{\cos^2(u/2)}, \quad (6)$$

ここで \$\omega\$ は (6) の偏微分方程式系の解として定義される。

この Lax pair の可積分条件を求めると、いわゆる *Pohlmeyer-Lund-Regge* 方程式 が得られる：

$$\dot{u}' - \frac{v' \dot{v} \sin(u/2)}{2 \cos^3(u/2)} + \sin u = 0, \quad \dot{v}' + \frac{u' \dot{v} + \dot{u} v'}{\sin u} = 0. \quad (7)$$

特に、関数 \$v\$ が定数の場合には、(7) は、sine-Gordon 方程式

$$\dot{u}' + \sin u = 0, \quad (8)$$

に帰着する。式 (5) における行列値関数 \$\Psi\$ を、以下“波動関数” (wave function) と呼ぶ。

4 Lax pair と Sym 公式

系 4.1 (Corollary 3.2. of KKM25). 式 (2) における複素数値関数 \$q\$ は式 (6) における複素数値関数 \$a\$ と同一視できる。すなわち \$q\$ は *PLR* 方程式の解を与える。したがって、式 (3) における *Frenet* 枠 \$F\$ は、ある定数行列 \$F_0 \in \text{SU}(2)\$ を用いて、式 (5) における \$\lambda = 1\$ の場合の波動関数 \$\Psi\$ と一致し、

$$F_0 F = \Psi,$$

が成り立つ。また、\$\lambda > 0\$ の族 \$\{F^\lambda\}_{\lambda>0}\$ が存在し、そのとき

$$F^\lambda \Big|_{\lambda=1} = F_0 F,$$

^{*2} Lax pair は [Date82] のものを転置している。さらに \$a\$ の定義に \$i/2\$ の係数が掛けられている点に注意。

が成り立つとともに、各 F^λ は次の偏微分方程式系を満たす：

$$\begin{aligned} (F^\lambda)' &= F^\lambda L^\lambda, \quad L^\lambda = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\lambda & q \\ -\bar{q} & -i\lambda \end{pmatrix}, \\ (F^\lambda)^\cdot &= F^\lambda M^\lambda, \quad M^\lambda = \frac{i}{2\lambda} \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(\dot{q}'/q) & -\dot{q} \\ -\bar{\dot{q}} & \operatorname{Re}(\dot{q}'/q) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

定理 4.2 (Theorem 3.2. of KKM25). 複素関数 q を式 (4) の解, $F(= F^\lambda)$ を式 (9) の *Lax pair* の解とする. 次に, $\mathfrak{su}(2)$ 値写像

$$\gamma = \lambda \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right) F^{-1} \Big|_{\lambda=1}, \quad (10)$$

を定義する. 同一視 $\mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{su}(2)$ の下で, γ は式 (1) かつ $|\gamma'| = 1$ を満たす空間曲線を与える. 逆に, 式 (1) を満たす空間曲線はこの方法で得られる.

以上のことから, Lund-Regge evolution を具体的に構成するには, Lax pair (9) (複素数値関数 a, q の同一視の下で Lax pair (5)) の解, つまり波動関数を構成することが必要であることがわかる. この波動関数の構成法は様々なものが知られているが特に伊達 [Date82] により得られた, Riemann-Theta 関数による準周期解を用いた構成を次に紹介する.

5 Riemann-Theta 関数による準周期解と曲線の表示

Riemann-Theta 関数による Lax pair (5) の準周期解を紹介する. その前に記号の準備を行う. 次の超楕円曲線

$$\mu^2 = \prod_{j=1}^g (\lambda - \lambda_j)(\lambda - \bar{\lambda}_j), \quad \lambda_j \neq \lambda_k (j \neq k), \quad \lambda_j \neq \bar{\lambda}_k, \quad \lambda_j \neq 0.$$

で定まる種数 g の Riemann 面を $\mathcal{R}$ と表す. Riemann 面 $\mathcal{R}$ 上の点 $P_\infty^\pm(P_0^\pm)$ を, それぞれ λ による Riemann 球面への射影が $\infty(0)$ である点とする. 局所座標はそれぞれ $z = \lambda^{-1}(\lambda)$ とする. 第 1 種正規化 Abel 微分 ω_j ($j = 1, \dots, g$) を $\int_{a_k} \omega_j = 2\pi i \delta_{jk}$, ($j, k = 1, \dots, g$) を満たすように定める. 周期行列 $\tau = \int_{b_k} \omega_j$, ($j, k = 1, \dots, g$) としたとき, Riemann-Theta 関数を次のように定める：

$$\theta(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} \exp\left(\frac{1}{2} \mathbf{n} \tau^t \mathbf{n} + \mathbf{n}^t \mathbf{u}\right), \quad (\mathbf{u} \in \mathbb{C}^g).$$

Abel-Jacobi 写像は $\mathcal{A}_+(P) = (\int_{P_\infty^+}^P \omega_1, \dots, \int_{P_\infty^+}^P \omega_g)$ とする. 正規化された第 2,3 種 Abel 微分 $d\Omega_j$, Abel 積分 Ω_j ($j = 1, 2, 3$) をそれぞれ次のように定める：

$$\begin{aligned} \Omega_1(P) &= \int_{\bar{\lambda}_{g+1}}^P d\Omega_1 \sim \pm \left(\frac{1}{z} - \frac{E}{2} \right) \quad P \rightarrow P_\infty^\pm, \quad \Omega_2(P) = \int_{\bar{\lambda}_{g+1}}^P d\Omega_2 \sim \pm \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{F}{2} \right) \quad P \rightarrow P_0^\pm, \\ \Omega_3(P) &= \int_{\bar{\lambda}_{g+1}}^P d\Omega_3 \sim \pm \left(\log z - \frac{\pi i}{2} + \log \beta \right) \quad P \rightarrow P_\infty^\pm, \end{aligned}$$

ここで, $E, F \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ の定数. そして $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^g$ は b 周期のベクトルとする:

$$U_k = \int_{b_k} d\Omega_1, \quad V_k = \int_{b_k} d\Omega_2, \quad k = 1, \dots, g.$$

定理 5.1. 次の *Riemann* 面 $\mathcal{R}$ 上の関数

$$\begin{aligned} \psi_1(s, t, P) &= \exp \left(\frac{is}{2} (\Omega_1(P) + \frac{E}{2}) + \frac{it}{2} (\Omega_2(P) - \frac{H}{2}) \right) \frac{\theta(\mathcal{A}_+(P) + \frac{is}{2} \mathbf{U} + \frac{it}{2} \mathbf{V} - D)}{\theta(-\frac{is}{2} \mathbf{U} - \frac{it}{2} \mathbf{V} + D)}, \\ \psi_2(s, t, P) &= A \exp \left(\frac{is}{2} (\Omega_1(P) - \frac{E}{2}) + \frac{it}{2} (\Omega_2(P) + \frac{H}{2}) + \Omega_3(P) \right) \frac{\theta(\mathcal{A}_+(P) + \frac{is}{2} \mathbf{U} + \frac{it}{2} \mathbf{V} - D + r)}{\theta(-\frac{is}{2} \mathbf{U} - \frac{it}{2} \mathbf{V} + D)}, \end{aligned}$$

により定まる波動関数 Ψ は, 式 (5) を満たす. ここで, $\frac{H}{2} = \int_{\lambda_{g+1}}^{P_\infty^+} d\Omega_2$, $r = \mathcal{A}_-(P_\infty^+)$, $A = \frac{\sqrt{\beta}}{i\alpha} \frac{\theta(D-r)}{\theta(D)}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ であり, D は因子と *Riemann* 定数から定まる定ベクトル. さらに *PLR* 方程式の実数値解 u, v は次のようにあらわされる:

$$\begin{aligned} u &= \arccos \left(\frac{w+1}{w-1} \right), \quad \text{ここで } w = \exp(\Omega_3(P_0^-) - \Omega_3(P_0^+)) \frac{\theta(\mathcal{A}_+(P_0^+) - \varphi) \theta(\mathcal{A}_+(P_0^-) - \varphi + r)}{\theta(\mathcal{A}_+(P_0^+) - \varphi + r) \theta(\mathcal{A}_+(P_0^-) - \varphi)}, \\ v &= -\frac{s}{2} (\Omega_1(P_0^-) - \Omega_1(P_0^+) + E) - \frac{t}{2} (F - H) \\ &\quad + i \left(\log A - \Omega_3(P_0^+) \right) + i \log \left(\frac{\theta(\mathcal{A}_+(P_0^-) - \varphi)}{\theta(\mathcal{A}_+(P_0^+) - \varphi + r)} \right) + v_0. \end{aligned}$$

ここで $\varphi = -\frac{is}{2} \mathbf{U} - \frac{it}{2} \mathbf{V} + D$ かつ, $v_0 \in \mathbb{C}$ の適切な定数.

[Date82] では, $P_\infty^\pm, P_0^\pm$ において指定した形式の真性特異性を持ち, それ以外の $\mathcal{R}$ 上の点では有理型関数として振る舞う関数 (Baker-Akhiezer 関数) で, 式 (5) を満たすものを構成し, $\mathcal{R}$ 上の特別な有理型関数を用いることで *PLR* 方程式の実数値解を構成している. ここでは, 式 (5) の解である波動関数は (s, t) に依存しない関数をかけても解であることを利用して少し変形している.

この波動関数 Ψ を, 定理 4.2 に適用すると次がわかる.

定理 5.2. *PLR* 方程式の準周期解に付随する空間曲線の時間発展は

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{|\psi_1^2| + |\psi_2^2|}} \begin{pmatrix} \psi_1 & -\bar{\psi}_2 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_1 \end{pmatrix},$$

を用いて次のように書ける.

$$\gamma = \Psi^{-1} \frac{d}{d\lambda} \Psi \Big|_{\lambda=1},$$

各成分は

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{i}{2} \left(\frac{d}{d\lambda} \Omega_1(P) s + \frac{d}{d\lambda} \Omega_2(P) t \right) + \frac{1}{2(|\psi_1^2| + |\psi_2^2|)} \\ &\quad \times \left[|\psi_1^2| \nabla \log \left(\frac{\theta(\mathcal{A}_+(P) - \varphi)}{\theta(\mathcal{A}_+(P) + \varphi)} \right) + |\psi_2^2| \nabla \log \left(\frac{\theta(\mathcal{A}_+(P) - \varphi + r)}{\theta(\mathcal{A}_+(P) + \varphi + r)} \right) \right] \cdot \frac{d\mathcal{A}_+(P)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1}, \\ \gamma_{21} &= \frac{\psi_1 \psi_2}{|\psi_1^2| + |\psi_2^2|} \left(\nabla \log \left(\frac{\theta(\mathcal{A}_+(P) - \varphi + r)}{\theta(\mathcal{A}_+(P) - \varphi)} \right) \cdot \frac{d\mathcal{A}_+(P)}{d\lambda} + \frac{d}{d\lambda} \Omega_3(P) \right) \Big|_{\lambda=1}. \end{aligned}$$

参考文献

- [Date82] E. Date. Multi-soliton solutions and quasi-periodic solutions of nonlinear equations of sine-Gordon type. *Osaka J. Math.* **19** (1982), 125–158.
- [LundRegge78] F. Lund, T. Regge. Unified approach to strings and vortices with soliton solutions. *Phys. Rev. D* **14**, no. 6 (1978), 1524–1535.
- [Pohlmeyer76] K. Pohlmeyer. Integrable Hamiltonian systems and interactions through quadratic constraints. *Comm. Math. Phys.* **46** (1976), 207–221.
- [KKM25] S-P. Kobayashi, Y. Kogo, N. Matsuura. The evolution of a curve induced by the Pohlmeyer-Lund-Regge equation. *J. Nonlinear Sci.* **35**, 85 (2025).

K3 曲面の退化族上の第二チャーン形式の漸近挙動

田副 一樹（京都大学理学研究科）

1. ケーラー多様体の収束

（コンパクト）距離空間の列 $\{(X_i, d_i)\}$ および距離空間 (X_∞, d_∞) について、“任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 ε -近似写像 $\phi_i : X_\infty \rightarrow X_i$ が十分大きいすべての i に対して存在する”が満たされるとき、列 $\{(X_i, d_i)\}$ は (X_∞, d_∞) にグロモフ・ハウスドルフ収束するという。ただし、ここで（一般に連続とは限らない）写像 $\phi : X \rightarrow Y$ が ε -近似写像であるとは次の条件を満たすこととする：

- $B(\phi(X); \varepsilon) = Y$,
- $d_Y(\phi(x), \phi(y)) \leq d_X(x, y) + \varepsilon, \forall x, y \in X$.

また、（コンパクトとは限らない）基点付き距離空間の列 $\{(X_i, d_i, x_i)\}$ が基点付き距離空間 $(X_\infty, d_\infty, x_\infty)$ に点付きグロモフ・ハウスドルフ収束することを、任意の $R > 0$ に対して $\{(B(x_i; R), d_i, x_i)\}$ が $(B(x_\infty; R), d_\infty, x_\infty)$ に（基点もろとも）グロモフ・ハウスドルフ収束することとして定める。

特に、距離空間の列としてリーマン多様体の列が与えられた場合に、収束先 (X_∞, d_∞) がどのような空間となっているかということに関しては現在でも盛んに研究されている微分幾何における中心的なテーマの一つである。一般論としてチーガー・コールディング理論や RCD 空間の理論などと呼ばれている様々なものがあるが、実 4 次元アインシュタイン多様体に関しては先駆的かつ決定的な次の結果が Anderson, Nakajima, Bando-Kasue-Nakajima などにより得られている [1][2][3][10]:

定理 1 (Anderson, Nakajima, Bando, Bando-Kasue-Nakajima, etc.) (1) 実 4 次元アインシュタイン多様体の列 $\{(X_i, g_i)\}$ が半径とエネルギーの一樣な有界性を持つとする。つまり、次をみたす正数 $D, E > 0$ が取れるとする：

$$\text{diam}(X_i, g_i) < D, \quad \int_{X_i} \|\text{Rm}(g_i)\|^2 \text{Vol}_{g_i} < E. \quad (1)$$

このとき、適当な部分列を選ぶと $\{(X_i, g_i)\}$ はあるアインシュタイン軌道体 (X_∞, g_∞) にグロモフハウスドルフ収束する。さらに、 $\{(X_i, g_i)\}$ がケーラー（ハイパーケーラー）であるなら (X_∞, g_∞) も（軌道体の意味で）ケーラー（resp. ハイパーケーラー）となる。

(2) 上の状況で、基点 $x_i \in X_i$ をとる。このとき、適当な正の実数列 $\{r_i\}$ が存在して、列 $\{(X_i, r_i g_i, x_i)\}$ は（必要であれば再び部分列を取り直し）ある完備リーマン軌道体 (Y, h, o) に収束する。この場合も、 $\{(X_i, g_i)\}$ が（ハイパー）ケーラーであれば (Y, h, o) も（ハイパー）ケーラーである。

(3) エネルギー $\int_{X_i} \|\text{Rm}(g_i)\|^2 \text{Vol}_{g_i}$ は次を満たす。

$$\lim \int_{X_i} \|\text{Rm}(g_i)\|^2 \text{Vol}_{g_i} \geq \int_{X_\infty} \|\text{Rm}(g_\infty)\|^2 \text{Vol}_{g_\infty} + \sum_{x \in X_\infty^{\text{sing}}} h_x, \quad (2)$$

ただし、 h_x は特異点 $x \in X_\infty$ に対して次のように定める：

$\{(Y, h, o)\} (= \mathcal{B}_x)$ を (2) で存在が保証されている完備軌道体のうち、非コンパクトかつ非平坦なもの（以降、これらを x でのバブルとよぶ）の同型類全体の集合とする。このとき、 h_x を $\mathcal{B}_x$ の元のエネルギーの総和で定める。

(2) で存在が主張されている完備軌道体はエネルギーが有限であり、ALE 重力インスタントンと呼ばれている。

Remark 1 上の定理で主張されている収束はもちろんグロモフ・ハウスドルフの意味での収束であるが、さらに次の意味での収束でもある：

任意のコンパクト集合 $K \subset X_\infty^{\text{reg}}$ に対して、 K の開近傍 $U_i \subset X_i^{\text{reg}}$ 上で定義された開埋め込み $\phi_i : U_i \hookrightarrow X_i$ であって、

$$\phi_i^* g_i \rightarrow g_\infty \quad (\text{in } C^\infty(K) \text{ topology}) \quad (3)$$

を満たすものが存在する。（ハイパー）ケーラー多様体については複素構造も同様の意味（つまり、適切な開埋め込みによる滑らかな広義一様の意味）での収束が成立する。この意味での収束を（一般的な用語より少し拡張された使い方にはなるが）チーガー・グロモフの意味での収束ということにする。

2. クロンハイマーによるハイパーケーラー ALE 重力インスタントンの分類

極限を考える多様体のクラスとして、 $K3$ 曲面を考える。ただし、 $K3$ 曲面とはここではコンパクト二次元ケーラー多様体であって、標準類が自明であり、さらに単連結なものとする。特に $K3$ 曲面は二次元のカラビ・ヤウ多様体である。 $K3$ 曲面は定義より実 4 次元ケーラー多様体であるが、ハイパーケーラーでもあることが知られている。ヤウによるケーラー・アインシュタイン計量の存在定理により、 $K3$ 曲面の任意のケーラー類にはケーラー・アインシュタイン計量が一意に存在している。以降、 $K3$ 曲面の上にケーラー類を取り、その中のケーラー・アインシュタイン計量との組を考え、リッチ平坦 $K3$ 曲面と呼ぶ。

前節の定理から、リッチ平坦 $K3$ 曲面の列があるコンパクト軌道体に収束するとき、これも再びハイパーケーラー軌道体となることがわかるが、この収束先の軌道体には自然に複素解析空間の構造が入り、極小特異点解消は再び $K3$ 曲面になることが知られている ([8][9]) (以降、このような解析空間のことを ADE 特異点を許した $K3$ 曲面、あるいは一般化 $K3$ 曲面と呼ぶことにする)。特に (2) の主張から、特異点でのバブルはハイパーケーラー ALE 重力インスタントンとなるが、ハイパーケーラー ALE 重力インスタントンにはクロンハイマーによる以下の分類定理が得られている：

定理 2 (Kronheimer [6][7]) $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ を有限群とする。アファイン代数多様体 $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の極小特異点解消 $\widetilde{\mathbb{C}^2/\Gamma}$ と微分同相な多様体 Y および、格子の同型 $H^2(Y; \mathbb{Z}) \cong \mathfrak{h}$ を一つ固定する。ここで $\mathfrak{h}$ は Γ と同じディンキン図形に対応するカルタン部分代数である。三つ組み $\omega = (\omega_I, \omega_J, \omega_K) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathfrak{h}$ であって、次の条件を満たすもの考える：

任意のルート $\theta \in \mathfrak{h}$ に対して、 ω の少なくとも一つの成分は θ の定める超平面に含まれない。

このとき、 ω をハイパーケーラートリプルに持つ Y 上のハイパーケーラー ALE 重力インスタントンの構造がワイル群の作用（および定数倍）を除いて一意に存在する。逆に、 Y 上のハイパーケーラー ALE 重力インスタントンの構造はすべて上の主張によって得られる。

特に、ハイパーケーラー多様体の構造が誘導する複素構造（例えば I ）を一つ選べば、リッチ平坦な完備ケーラー曲面が得られるが、これはクライント特異点 $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の半普遍変形空間（の適当な被覆空間）を与えていることが証明できる。ここで重要な点は周期領域上での収束がそのままグロモフ・ハウスドルフおよびチーガー・グロモフの意味での収束となっていることである（ただし、これらの主張は元論文でははっきりとは述べられておらず、もっと弱い形で命題が書かれている。しかし、証明を読むと実質はここまで込みで証明ができているとわかる）。

本節の最後に、クロンハイマーによる ALE 重力インスタントンの周期理論の重要な性質をいくつか挙げる：

- $\alpha \in \mathbb{C}^*$ に対して、正則写像 $H_\alpha : Y_\zeta \rightarrow Y_{\alpha^2 \zeta}$ が存在し、 $H_\alpha^* g_{\alpha^2 \zeta} = |\alpha|^2 g_\zeta$ を満たしている、
- 各複素構造および計量は次の漸近的な評価を満たす：

$$\begin{aligned} g_\zeta &= g_0 + \sum_{j=2}^k \zeta^{(j)} r^{-2j} + O(r^{-2(k+1)}), \\ I_\zeta &= I_0 + \sum_{j=2}^k \zeta^{(j)} r^{-2j} + O(r^{-2(k+1)}), \text{ for any } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4}$$

ただし、 $\zeta^{(i)}$ は ζ に関する適当な斉次 i 次多項式である

- 正則写像 $\zeta : \mathbb{C} \setminus \Delta \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ に対して、アファイン曲面の平坦族 $\mathcal{Y}_\zeta \rightarrow \Delta$ が存在し、各ファイバー $Y_{\zeta(t)}$ は $(0, \zeta(t)) \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{R}^3 \otimes \mathfrak{h}$ に対応する ALE ハイパーケーラー重力インスタントンである

3. 近似計量の構成

この説で主結果の概要を説明する。まず、単位円盤 $\Delta \subset \mathbb{C}$ 上の $K3$ 曲面の族 $X \rightarrow \Delta$ であって、

- 中心ファイバー X_0 は ADE 特異点を許した $K3$ 曲面
- 中心ファイバー以外のファイバー X_t はすべて非特異な $K3$ 曲面

- 豊富な直線束 $\mathcal{L}$ を持つ

を満たすものを考える。豊富な直線束 $\mathcal{L}$ を一つ固定し、 $L_t := \mathcal{L}|_{X_t}$ とおき、 $c_1(L_t)$ に含まれるケーラー・アインシュタイン計量を g_t とする。このとき、第二チャーン形式 $c_2(g_t)$ は各ファイバー X_t 上の $(2, 2)$ 形式であるので、(符号付き) 測度を定める。本講演で取り扱う問題はこの測度の $t \rightarrow 0$ での振る舞いである。中心ファイバーへの収束がチーガー・グロモフの意味での収束であることを思い出すと、特異点から離れている領域では g_t が g_0 へ滑らかに収束していくので、 $c_2(g_t)$ も (微分形式として) 滑らかに $c_2(g_0)$ に収束していくことになる。したがって、非自明なのは特異点へ潰れていく領域上での振る舞いということになる。問題は局所的なものであるため、簡単のために中心ファイバーの特異点はただ一つ ($x_0 \in X_0 \cong 0 \in \mathbb{C}^2/\Gamma$ とおくことにする) のみであると仮定する。まず、偏極付き $K3$ 曲面の族 $(X, \mathcal{L}) \rightarrow \Delta$ に対して、適当な被覆写像 $\Delta \rightarrow \Delta: t \mapsto t^d$ で底の変換を施すと、極小同時特異点 $\tilde{X} \rightarrow \Delta$ が取れる。また、次の条件を満たすような開部分多様体 $\mathcal{U} \subset X$ が取れることがわかる：

- $\mathcal{U} \rightarrow \Delta$ は $B(0; 1)/\Gamma := U_0$ の変形である
- $U_t (= \mathcal{U}$ の t 上でのファイバー) 上で、 g_t は dd^c 完全である
- $\zeta: \Delta \rightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ を $\zeta(t) = [\Omega_t]$ (ただし、 Ω_t は X_t 上の正則 2 形式であって、 $\omega_t^2 = \Omega_t \wedge \overline{\Omega_t}$ を満たすもの) で定めたとき、開埋め込み $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}_{\zeta}$ が存在する。

ここで、一つ技術的な仮定を族 X に対しておく：

仮定： $\zeta(t) = t^p \zeta + O(t^{p+1})$ を原点でのテイラー展開とするとき (ただし、 $\zeta \neq 0$)、 ζ はどのルートとも直交しない。

上の仮定の下では、 $x_0 \in X_0$ でのバブルの集合が二点集合となり、特にバブルは非特異なもの (さらに具体的に Y_{ζ} が出てくることまでわかる) か接錐のみになる。非自明なバブルが非特異になるという部分が技術的に重要になる。

主定理は次のものである：

定理 3 上の状況で、 X 上の滑らかな関数 f を任意にとる。次の Δ 上の関数を考える：

$$F(t) = \int_{X_t} f|_{X_t} c_2(g_t) \quad (5)$$

このとき、 $t \rightarrow 0$ で F は次の漸近展開を満たす：

$$F(t) = \int_{X_0} f|_{X_0} c_2(g_0) + f(x_0)e_{\text{orb}}(Y_{\zeta}) + O(|t|^{1/d}). \quad (6)$$

特に、原点においてヘルダー連続で、そのヘルダー指数は少なくとも $\frac{1}{d}$ 以上である (ここで、 d は同時特異点解消を与えるための底の変換 $t \mapsto t^d$ の位数である)。

上のように領域 $\mathcal{U}$ をとったとき、 $\mathcal{U}$ 上で ALE ハイパーケーラー計量 $g_{\zeta(t)}$ とリッチ平坦計量 g_t がうまくポテンシャルのレベルで張り合わせることができる。こうして構成した近似計量を $\tilde{g}_t$ とおく。ポテンシャルのレベルでの張り合わせであるので、 $\tilde{g}_t$ は g_t とコホモロガスであり、さらに特異点の近傍に収束していく領域上では $g_{\zeta(t)}$ と、 $\mathcal{U}_t$ の外側では g_t と一致している計量となる。特に、 dd^c 補題によりある C^∞ 関数 u_t を用いて $g_t = \tilde{g}_t + dd^c u_t$ と書ける。したがって特に、ボット・チャーンの公式 ([4]) から

$$c_2(g_t) = c_2(\tilde{g}_t) + dd^c \tau \quad (7)$$

を満たす $(1, 1)$ 形式 τ が存在する。上の等式より問題は $c_2(\tilde{g}_t)$ および τ の挙動ということになる。

証明のあらまし： 上述のように問題は $c_2(\tilde{g}_t)$ に関する議論と、 τ に関する議論に切り分けられる。(ここでは詳細を述べていないが) 具体的な $\tilde{g}_t$ の構成により $\int_{X_t} f c_2(\tilde{g}_t)$ が定理に述べた漸近展開を持つことが計算により示される。技術的には前節で述べたクロンハイマーによる ALE ハイパーケーラー重力インスタントンの性質をフルに使う。また、 τ の評価については、モンジュ・アンペール方程式および連続の方法のアプリオリ評価により、 $\int_{X_t} f dd^c \tau = \int_{X_t} dd^c f \wedge \tau = O(|t|^{p/d})$ を示すことができるので、所望の等式が得られることになる。

4. 今後の課題

より一般の退化に対して：上の議論では退化の仕方に条件を付けていたが、一般の退化では何が起きるかというのは当然興味の対象になる（実際、Bando[2]での極限公式は一般の場合も込みでの式である）。そもそも、与えられた偏極付き $K3$ 曲面の族に対して対応する周期領域上の曲線と、バブルの関係の時点ですでに非自明で大変な問題である。その上で、一般の場合には、バブルが複数回の段階を経て非特異な多様体になると予想されるが、中間のバブルにおいては特異点形成に起因する曲率の爆発によってアプリオリ評価（特に C^2 評価）が破綻する。今回と同じように近似計量 $\tilde{g}_t$ を作り、もともとの計量との差をモンジュ・アンペール方程式を利用して評価するという方法では、あまり良い評価は得られないように見える。一つの方向として、Ozuch による実四次元アインシュタイン多様体の極限に対する近似計量の結果 [11] があるが、これを真似て、さらにケーラーであることも併せて精緻化した理論により近似計量ともともとの計量との誤差を測るというのが考えられる（現在論文準備中）。

高次元への一般化：二次元で得られた成果を三次元以上の場合に拡張するということもまた自然な問題であるが、今回の定理を一般化するにあたってはまずもってどのような量を考察するべきかという段階ですでに明らかではない。もちろん $c_n(g)$ を考えればよいのではないかというのは自然な発想であるが、4次元に特有な色々な事情（例えば、エネルギーと $c_2(g)$ が等しくなるなど）が高次元では一般には成り立たないといった事情がどのように影響してくるかは全く読めない。また、曲面の場合では特異点の芽 $\cong$ 接錐の頂点が成り立っていたが、これは高次元においてはもはや一般には成り立たないことが観察されている。したがって特に張り合わせるべき計量や、バブルを用いた計算もすべてそのままアナロジーを適用するというわけにもいかない。この辺りはそもそも計算例がまだまだ足りていない状況なので、当面はある程度具体的な族に対して色々と計算していく必要がある（cf.[5]）。

REFERENCES

- [1] M. Anderson, The L^2 structure of moduli spaces of Einstein metrics on 4-manifolds, *Geom. Funct. Anal.* 2 (1992), no. 1, 29–89.
- [2] S. Bando, Bubbling out of Einstein manifolds, *Tohoku Math. J.* 42 (1990), 205–216.
- [3] S. Bando, A. Kasue, H. Nakajima, On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth, *Invent. Math.* 97 (1989), no. 2, 313–349.
- [4] R. Bott, S.S. Chern, Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections. *Acta Math.* 114, 71–112 (1965)
- [5] M. De Borbon, C. Spotti, Calabi–Yau metrics with conical singularities along line arrangements. *J. Diff. Geom.* 123 (2) 195 - 239, (2023)
- [6] P.B. Kronheimer, The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients, *J. of Diff. Geom.* 29 (1989), 665–683.
- [7] P.B. Kronheimer, A Torelli-type theorem for gravitational instantons, *J. of Diff. Geom.* 29 (1989), 685–697.
- [8] R. Kobayashi, Moduli of Einstein metrics on a $K3$ surface and Degeneration of type I, In *Kähler Metrics and Moduli Spaces*, 257–311, *Adv. Stud. Pure Math.*, 18-II, T. Ochiai. ed. Academic Press, (1990).
- [9] R. Kobayashi, A. Todorov, Polarized period map for generalized $K3$ surfaces and the moduli of Einstein metrics, *Tohoku Math. J.* (2) 39 (1987), no. 3, 341–363.
- [10] H. Nakajima, Hausdorff convergence of Einstein 4-manifolds, *J. Fac.Sci. Univ. Tokyo* 35 (1988), 411–424.
- [11] T. Ozuch, Noncollapsed degeneration of Einstein 4-manifolds I, *Geom. Topol.* 26 (2022) 1483-1528
- [12] P. Slodwy, Four lectures on simple groups and singularities, *Comm. of Math. Inst.*, Vol. 11, Rijksuniversiteit, Utrecht, (1980).
- [13] A.Todorov, Applications of Kähler-Einstein-Calabi-Yau metric to moduli of $K3$ surfaces, *Inventiones math.* 61 (1980), 251-265.
- [14] S.T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, *Comm. Pure Appl. Math.* 31, (1978) 339-411.

田副 一樹

京都大学大学院理学研究科

京都市左京区北白川追分町

e-mail:tazoe.itsuki.52n@st.kyoto-u.ac.jp

Self-similar energy forms and energy measures on the Sierpiński carpet

清水 良輔 (京都大学)*

自己相似フラクタル集合 (例は図 1) 上の 1 階 Sobolev 空間と Dirichlet p -エネルギー汎関数 (この組を p -エネルギー形式と呼んでいる) や p -エネルギー測度に関する最近の進展について, 主に [21] に基づいて, 背景にある“擬等角幾何学からの動機”も交えながら紹介する. また, 講演では“滑らかな空間上の解析”とは全く異なる様相を呈するフラクタル上の特異性現象に関する結果 [1, 15] も (時間が許す限り) 簡単に触れる予定である.

1 イントロダクション: フラクタル上の解析学

主題となる p -エネルギー形式 $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p)$, p -エネルギー測度 $\Gamma_p\langle \cdot \rangle$ は Euclid 空間の場合には $\mathcal{F}_p := W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}_p(u) := \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx$, $\Gamma_p\langle u \rangle := |\nabla u|^p dx$ と与えられるような解析学的対象物であり, weak formulation (部分積分) を通して p -Laplacian が対応するようなエネルギー形式である. (ただし本稿では $p \in (1, \infty)$ の場合のみを考える.) 図 1 にある自己相似フラクタルのように, 可微分構造を持たない ($|\nabla u|$ が自然に定義できない) 空間では $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p, \Gamma_p\langle \cdot \rangle)$ の定式化そのものが全く自明ではない問題である.

非常に良い確率論的対応があることから $p = 2$ の場合は特別である. 実際, $(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2)$ は正則 Dirichlet 形式の典型例で, 福島正俊氏による Dirichlet 形式の理論 (例えば [8] を参照) により, Dirichlet 2-エネルギーと $W^{1,2}$ -Sobolev 空間に相当する $(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2)$ をフラクタル上で構成することは, そのフラクタル上に“Brown 運動”を構成することと同義であると言える. フラクタル上の Brown 運動の構成とその解析は 1980 年代後半から急速に発展し, 本講演で主として扱う Sierpiński carpet (図 1 左) 上では [2, 3, 19] でその構成がなされた. (フラクタル上の Brown 運動の詳細については, 例えば [11, 17] を参照.)

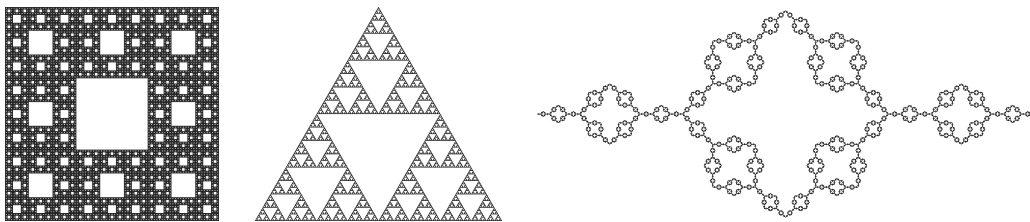


図 1 左から Sierpiński carpet, Sierpiński gasket, Laakso Diamond space

* 〒606-8501 京都府京都市左京区吉田本町 京都大学 大学院情報学研究科

e-mail: r.shimizu@acs.i.kyoto-u.ac.jp

web: <https://rshimizu-math.github.io/>

本研究は科研費 (課題番号:23KJ2011) の助成を受けたものである。

2020 Mathematics Subject Classification: 28A80, 46E36, 31E05, 31C45

キーワード: フラクタル, Sobolev 空間, エネルギー形式, エネルギー測度, Ahlfors 正則等角次元, 特異性

一般の p の場合は近年の「距離空間上の擬等角幾何学」の研究により **Ahlfors 正則等角次元** (詳細は 3 節) との深い繋がりが予想されていたが, 自然な L^p -拡張に相当する $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p, \Gamma_p\langle \cdot \rangle)$ の構成は, 調和関数の確率論的表示の欠落や $p \neq 2$ の場合の非線形性などが障害となり, [10] による Sierpiński gasket (図 1 中央) 型の自己相似集合上での結果以外は本質的にないという状態が約 20 年続いていた. 特に Sierpiński carpet に適用できる理論が皆無であったが, [18, 22] で p が Ahlfors 正則等角次元より真に大きい場合の構成が (十分満足のいく形で) なされた. Mathav Murugan 氏 (The University of British Columbia) との共同研究 [21] では, (考える自己相似フラクタルは Sierpiński carpet の場合に限るが) p が Ahlfors 正則等角次元の値以下の場合を含む範囲で $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p, \Gamma_p\langle \cdot \rangle)$ の構成を行った. それに加え, Sierpiński carpet の Ahlfors 正則等角次元の**達成可能性問題**に関して, 解析的アプローチの有用性を示唆する結果も与えた. 本稿はこれらの主結果 (定理 2.4, 2.7, 2.8, 3.4) についての説明を目的とする.

- 注意 1.1.** (1) (有限分岐性と無限分岐性) Sierpiński gasket は有限個の点を除くと非連結になるという**有限分岐性**を持つ. 一方で, Sierpiński carpet ではそのようなことはなく, **無限分岐性**を有する自己相似集合の典型例の一つとなっている. この有限/無限分岐性の性質の差異は「フラクタル上の解析学」において非常に大きなもので, 一般に無限分岐的なフラクタル上での $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p, \Gamma_p\langle \cdot \rangle)$ の構成, 及びその解析は遥かに難しくなる. ($p = 2$ の場合の説明として, 例えば [11, 第 3 節] を参照.)
- (2) (距離空間上の解析学との関係) 1990 年代後半に “ $|\nabla u|$ を定式化” することによる距離空間上の $(1, p)$ -Sobolev 空間の定義が P. Hajlasz, J. Cheeger, N. Shanmugalingam などらにより提唱され, 現在では「距離空間上の解析学」として非常に活発に研究されている分野である. (ここでは正確な歴史には触れない. 詳細は例えば [9] を参照.) 残念ながら, フラクタルの場合に (自己相似構造の観点から自然な距離と測度が備わった測度距離空間として) この理論を適用して得られる Sobolev 空間は, 典型的には L^p -空間そのものとなってしまい何も捉えられない.
- (3) (エネルギー測度の構成) 上述の (2) の注意より, フラクタル上では “ $|\nabla u|$ を定式化” することが困難であると示唆され, “ $|\nabla u|^p dx$ ” の役割を果たす p -エネルギー測度の構成も非自明であることに注意されたい. (実際に, $|\nabla u|$ を定式化することが良いアプローチではないことを示唆する特異性現象について第 4 節で簡単に述べる.) $p = 2$ の場合は Dirichlet 形式の理論による自然な定義 ([8, (3.2.14)]) が存在するが, この定義は L^2 上の表現定理に依るところが大きく, 自然な L^p -拡張は全く明らかではない.

2 Sierpiński carpet 上の p -エネルギー形式と p -エネルギー測度

本節では $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p, \Gamma_p\langle \cdot \rangle)$ の構成に関する結果を説明する. 考えるフラクタルは常に Sierpiński carpet (図 1 左) のみであることと, $p \in (1, \infty)$ の場合を扱うことに注意する.

2.1 Sierpiński carpet とグラフ近似を通した Sobolev 空間の定義

Sierpiński carpet 上の $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p, \Gamma_p \langle \cdot \rangle)$ の構成は $p = 2$ の場合の Kusuoka-Zhou [19] によるものを踏襲し, Sierpiński carpet のグラフ近似とその上の離散 p -エネルギー形式を考え, 近似レベルを細かくする極限に関する詳細な挙動を捉えることでなされる. 実際に考えるグラフ近似を導入するために, まず Sierpiński carpet の定義を思い出す.

定義 2.1 (Sierpiński carpet). $S := \{1, \dots, 8\}$ とおき, $\{q_i\}_{i \in S} \subset \mathbb{C}$ を $q_1 := -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{2}$, $q_2 := -\frac{\sqrt{-1}}{2}$, $q_3 := \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{2}$, $q_4 := \frac{1}{2}$, $q_5 := \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2}$, $q_6 := \frac{\sqrt{-1}}{2}$, $q_7 := -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2}$, $q_8 := -\frac{1}{2}$ と定め, 各 $i \in S$ に対して相似写像 $F_i: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ を $F_i(z) := \frac{1}{3}(z - q_i) + q_i$ で定める. (q_i は F_i の不動点となる.) このとき, $\mathbb{C}$ の空でないコンパクト集合 K で

$$K = \bigcup_{i \in S} F_i(K) \quad (2.1)$$

F_7	F_6	F_5
F_8		F_4
F_1	F_2	F_3

図 2 相似写像の族 $\{F_i\}_{i \in S}$

を満たすものが唯一つ存在し, K を Sierpiński carpet という. d を Euclid 距離 (の K への制限) とし, m を K 上の $\frac{\log 8}{\log 3}$ -次元 Hausdorff 測度で $m(K) = 1$ と正規化されたものとする. ($\frac{\log 8}{\log 3}$ は (K, d) の Hausdorff 次元である.)

集合としての等式 (2.1) が自己相似性を表すものであるが, 更に次のことが成り立つ: 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $W_n := S^n$ とし, $w = w_1 w_2 \dots w_n \in W_n$ に対して $F_w := F_{w_1} \circ F_{w_2} \circ \dots \circ F_{w_n}$ と定める. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$K = \bigcup_{w \in W_n} F_w(K) \quad (2.2)$$

となることが (2.1) より容易に分かる. この等式 (2.2) は各 $F_w(K) =: K_w$ (n -cell と呼ばれる) を 3^n -倍拡大すると元の図形 K と等しくなるということを意味している.

次に各 n -cell を頂点集合として持つような K のグラフ近似列 $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を導入する. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, 無向連結単純グラフ $G_n = (V_n, E_n)$ を以下のように定める (図 3 参照):

$$V_n := W_n, \quad E_n := \{\{v, w\} \mid v, w \in W_n, v \neq w, K_v \cap K_w \neq \emptyset\}.$$

グラフ G_n 上では自然な p -エネルギー形式 $\mathcal{E}_p^{G_n}: \mathbb{R}^{V_n} \rightarrow [0, \infty)$ が次で定義される:

$$\mathcal{E}_p^{G_n}(u) := \sum_{\{x, y\} \in E_n} |u(x) - u(y)|^p, \quad u \in \mathbb{R}^{V_n}.$$

Kusuoka-Zhou [19] の基本的なアイデアと同様に, 適切なスケーリング定数 $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, \infty)$ を見つけ出し, $\{r_n \mathcal{E}_p^{G_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ の $n \rightarrow \infty$ での“(部分列) 極限”として K 上の p -エネルギー形式を構成するのが方針である. 天下りではあるが, 適切なスケーリング定数は次の離散 p -容量を見ることで捕まえることができる:

$$\mathcal{C}_p^{(n)} := \inf \left\{ \mathcal{E}_p^{G_n}(u) \mid \begin{array}{l} u \in \mathbb{R}^{V_n}, u(w) = 1 \text{ if } K_w \cap \{\operatorname{Re}(z) = -1/2\} \neq \emptyset, \\ u(w) = 0 \text{ if } K_w \cap \{\operatorname{Re}(z) = 1/2\} \neq \emptyset \end{array} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

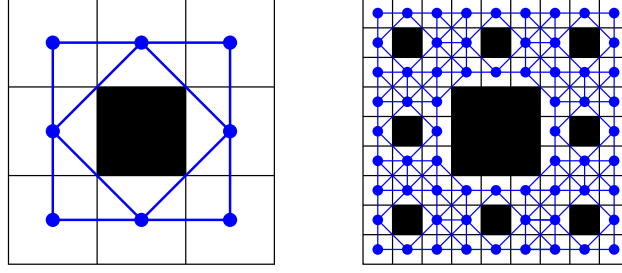


図3 グラフ近似 G_1 と G_2 .

この $\{\mathcal{C}_p^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ は multiplicative inequality を満たす ([5, Lemma 4.4]): ある定数 $C \in [1, \infty)$ が存在して任意の $k, l \in \mathbb{N}$ に対し,

$$C^{-1} \mathcal{C}_p^{(k)} \mathcal{C}_p^{(l)} \leq \mathcal{C}_p^{(k+l)} \leq C \mathcal{C}_p^{(k)} \mathcal{C}_p^{(l)}. \quad (2.3)$$

この評価 (2.3) より, 極限

$$\rho_p := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathcal{C}_p^{(n)} \right)^{-1/n} \in (0, \infty) \quad (2.4)$$

が存在して $C^{-1} \rho_p^{-n} \leq \mathcal{C}_p^{(n)} \leq C \rho_p^{-n}$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つことが従う.

結論としては $r_n = \rho_p^n$ が所望のスケーリング定数となるが, 実際に K 上の p -エネルギー形式を “極限” として定めるためには, $L^p(K, m)$ -関数の V_n 上への離散化を行う必要がある. 今回は各 n -cell 上の積分平均の値を割り当てるという離散化を行い, スケーリングされた離散 p -エネルギー形式 $\tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}: L^p(K, m) \rightarrow [0, \infty)$ を次で定める:

$$\tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}(f) := \rho_p^n \sum_{\{v, w\} \in E_n} \left| \frac{1}{m(K_v)} \int_{K_v} f \, dm - \frac{1}{m(K_w)} \int_{K_w} f \, dm \right|^p, \quad f \in L^p(K, m).$$

次の弱単調性と呼ばれる性質が Sobolev 空間の定義や性質を調べる際に鍵となる.

定理 2.2 ([21, Theorem 6.13]) ある定数 $C \in [1, \infty)$ が存在し, 任意の $k, l \in \mathbb{N}$ と $u \in L^p(K, m)$ に対し

$$\tilde{\mathcal{E}}_p^{(k)}(u) \leq C \tilde{\mathcal{E}}_p^{(k+l)}(u). \quad (2.5)$$

特に, 任意の $u \in L^p(K, m)$ に対して $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}(u) \leq C \liminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}(u)$ が成り立つ.

定理 2.2 より $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}$ が $\{\tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ の極限挙動を捉えていると分かるので, 次の $(1, p)$ -Sobolev 空間 $\mathcal{F}_p$ の定義が自然であると示唆される. 実際に, Sobolev 空間として満たすべきであろう性質 (閉性, 正則性) も確認できる.

定義 2.3 ([21, Definition 6.16]). $\mathcal{F}_p := \{u \in L^p(K, m) \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}(u) < \infty\}$. また, $\mathcal{F}_p$ をノルム $\left(\|\cdot\|_{L^p(K, m)}^p + \sup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)} \right)^{1/p}$ が備わったノルム空間とみなす.

定理 2.4 ([21, Theorem 1.1]) (a) (閉性) $\mathcal{F}_p$ は反射的可分な Banach 空間である.

(b) (正則性) $\mathcal{F}_p \cap C(K)$ は $C(K)$ において (一様ノルムに関して) 稠密であり, $\mathcal{F}_p$ においても稠密である.

我々の Sobolev 空間 $\mathcal{F}_p$ は離散近似を通して定義されているので実体が掴みにくいように思われるが, 次の Korevaar–Schoen 型の表現 (2.6) を持つことも分かる. (個人的な感覚としては, 正直なところ (2.6) をもってしても $\mathcal{F}_p$ の “実体を掴んだ” 気にはなれない.)

定理 2.5 ([21, Theorem 1.4], [22, Theorem 2.27]) $\beta_p := \frac{\log(8\rho_p)}{\log 3}$ とすると, $\beta_p > p$ が成り立ち, さらに

$$\mathcal{F}_p = \left\{ u \in L^p(K, m) \mid \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \int_K \int_{B(x, \varepsilon)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{\varepsilon^{\beta_p} m(B(x, \varepsilon))} m(dy) m(dx) < \infty \right\}. \quad (2.6)$$

注意 2.6. (1) (Lipschitz 関数の扱い) (2.6) と $\beta_p > p$ より, 座標関数 $\mathbb{C} \ni z \mapsto \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ (の K への制限) が $\mathcal{F}_p$ に属さない事が分かり $\operatorname{Lip}(K, d) \not\subseteq \mathcal{F}_p$ となる. これは「距離空間上の解析学」で考えられている Sobolev 空間との非常に大きな差異である. なお, $\operatorname{Lip}(K, d) \cap \mathcal{F}_p$ がどんな集合であるかは全く分かっておらず, Sierpiński gasket の標準的な Dirichlet 形式の定義域 $\mathcal{F}_2$ の場合ですら未解決な問題である.

(2) (正則性) 定理 2.4(b) が [21] の主な貢献の一つである. 正則性の確保の困難は, 上記の (1) で述べた事情で, 距離関数など典型的な Lipschitz 関数を用いて cutoff 関数を作るという常套手段がフラクタル上では適用できるとは限らない点にある. 先行研究 [18, 22] で p の範囲に制限があった事情もこの正則性に起因している. Ahlfors 正則等角次元は $\mathcal{F}_p$ が $C(K)$ に連続的に埋め込み事ができるかどうかの臨界値となることが [6] により知られており, [18, 22] で考えられている p が Ahlfors 正則等角次元より真に大きいという phase は非常に正則性が良い状況で, 実際にこの phase では Morrey 型の Hölder 連続性評価が $\mathcal{F}_p$ の任意の関数に対して成り立つ. (Ahlfors 正則等角次元がこのような臨界値として現れる背景には, [7, 16] による「 $\rho_p > 1 \Leftrightarrow p > \text{Ahlfors 正則等角次元}$ 」という特徴付けの結果がある.)

2.2 自己相似 p -エネルギー形式と p -エネルギー測度

$\mathcal{F}_p$ の定義は $\{\tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ の極限挙動を捉えることでなされたが, K の幾何構造 (特に自己相似性) を反映するような p -エネルギー汎関数を構成するには $\{\tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ の “極限” (部分列各点極限や Γ -収束部分列極限) を考えるだけで十分かどうかは定かではない. 技術的な部分ではあるが, $\{\tilde{\mathcal{E}}_p^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ の $L^p(K, m)$ 上の Γ -収束に関する部分列極限に対し「フラクタル上の解析学」の常套手段を適用することで所望の性質を有する p -エネルギー形式 $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p)$ を得ることができ, 次の定理を得る.

定理 2.7 ([21, Theorem 1.1]) 以下の条件を満たす $\mathcal{E}_p: \mathcal{F}_p \rightarrow [0, \infty)$ が存在する.

- (a) $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_p} := (\|\cdot\|_{L^p(K, m)}^p + \mathcal{E}_p)^{1/p}$ は $\mathcal{F}_p$ の比較可能で一様凸なノルムを定める.
- (b) (縮小性) 任意の $u \in \mathcal{F}_p$ と 1-Lipschitz 関数 $\varphi \in C(\mathbb{R})$ に対し, $\varphi \circ u \in \mathcal{F}_p$ かつ

$$\mathcal{E}_p(\varphi \circ u) \leq \mathcal{E}_p(u).$$

(c) (対称性) 任意の $u \in \mathcal{F}_p$ と $T \in D_4$ に対し, $u \circ T \in \mathcal{F}_p$ かつ $\mathcal{E}_p(u \circ T) = \mathcal{E}_p(u)$.

(d) (自己相似性) $\mathcal{F}_p \cap C(K) = \{u \in C(K) \mid \text{すべての } i \in S \text{ に対し } u \circ F_i \in \mathcal{F}_p\}$;

$$\mathcal{E}_p(u) = \rho_p^n \sum_{w \in W_n} \mathcal{E}_p(u \circ F_w) \quad \text{for any } n \in \mathbb{N} \text{ and } u \in \mathcal{F}_p. \quad (2.7)$$

(任意の $u \in \mathcal{F}_p$ と $w \in W_n$ に対し, $u \circ F_w \in \mathcal{F}_p$ となることは容易に分かる.)

注意 1.1-(3) で述べたように p -エネルギー測度 $\Gamma_p\langle u \rangle$ の構成も非自明な問題であったが, (2.7) の分解公式はエネルギーがどのように分布しているかを表しており, 直感的には n -cell K_w は $\rho_p^n \mathcal{E}_p(u \circ F_w)$ の mass を持つべきであることが示唆される. n -cell 同士が共通部分を持つため, この観察そのものを定義とすることは (技術的には) できないが, 最終的には次の定理の性質を満たす p -エネルギー測度が構成できる.

定理 2.8 ([21, Theorem 1.2]) 任意の $u \in \mathcal{F}_p$ に対し, $\Gamma_p\langle u \rangle(K_w) = \rho_p^n \mathcal{E}_p(u \circ F_w)$, $n \in \mathbb{N}$, $w \in W_n$ となるような K 上の有限 Borel 測度 $\Gamma_p\langle u \rangle$ が一意に存在する. また, 任意の $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ と $v \in \mathcal{F}_p \cap C(K)$ に対して $\Phi \circ v \in \mathcal{F}_p \cap C(K)$ となり, さらに次の連鎖率が成り立つ:

$$d\Gamma_p\langle \Phi \circ u \rangle(dx) = |\Phi'(v(x))|^p d\Gamma_p\langle u \rangle(dx). \quad (2.8)$$

注意 2.9. (1) (一般化 p -縮小性) 定理 2.7-(b) の縮小性よりさらに強く, $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p)$ が [14] で導入された一般化 p -縮小性という性質を満たすことまで分かる. さらに [14] ではその帰結 (より正確には Clarkson の不等式の帰結) として $\mathcal{E}_p$ の微分可能性が従い, Euclid 空間の場合における $(u, v) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^n} dx$ に相当する

$$\mathcal{E}_p(u; v) := \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_p(u + tv) \Big|_{t=0}, \quad u, v \in \mathcal{F}_p, \quad (2.9)$$

が定義できることを明らかにした. この結果は $\mathcal{E}_p$ に基づく非線形ポテンシャル論を展開する際に基礎となるものである.

(2) (エネルギー測度の表現) 本稿では省略したが $\Gamma_p\langle \cdot \rangle$ も縮小性, 対称性, 自己相似性を有する. 特に, (2.9) と同様に微分をすることで K 上の符号付き測度 $\Gamma_p\langle u; v \rangle$ が定義でき, (2.8) のような連鎖率がこの二変数版のエネルギー測度に対しても成り立つ [14, Theorem 5.12]. この事実より, $u \in \mathcal{F}_p \cap C(K)$ に対して, $\Gamma_p\langle u \rangle$ は次の性質を満たす一意的な測度としても特徴付けることができる:

$$\int_K \varphi d\Gamma_p\langle u \rangle = \mathcal{E}_p(u; u\varphi) - \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1} \mathcal{E}_p(|u|^{\frac{p}{p-1}}; \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}_p \cap C(K). \quad (2.10)$$

Euclid 空間の場合の $(u, v) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^n} dx$ に対して連鎖律, Leibniz 則を用いて (2.10) の右辺を計算すると $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi |\nabla u|^p dx$ となることを鑑みると (2.10)

を p -エネルギー測度の定義として採用したくなるが、残念ながら現状では (2.10) に基づく定義から始めて p -エネルギー測度の種々の性質をどう導けばよいか分かっていない。なお、 $p = 2$ の場合は、まさに (2.10) の表現公式が正則 Dirichlet 形式に対応するエネルギー測度の定義 [8, (3.2.14)] である。(注意 1.1-(3) も参照.)

3 Ahlfors 正則等角次元を実現する測度の候補

これまでの記述に何度か現れている Ahlfors 正則等角次元であるが、これは以下で定義する擬対称と呼ばれるクラスの距離空間の変形 (距離の取り替え) に関する不変量である。正確な定義は以下で与えられる。(擬対称変形や等角次元に関しては例えば [20] を参照.)

定義 3.1 (擬対称 (Quasisymmetry)). (X, ρ) を距離空間とし、 θ も X 上の距離とする。ある同相写像 $\eta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が存在して

$$\frac{\theta(x, a)}{\theta(x, b)} \leq \eta \left(\frac{\rho(x, a)}{\rho(x, b)} \right), \quad \forall x, a, b \in X \text{ with } x \neq b \quad (3.1)$$

となるとき、 θ は ρ に関して擬対称であるといい、 $\theta \underset{\text{QS}}{\sim} \rho$ と書く。

$\underset{\text{QS}}{\sim}$ が距離全体の上の同値関係となることは基本的な事実であり、 $\underset{\text{QS}}{\sim}$ が同相であることを導くことも容易に分かる。典型例は $\rho \underset{\text{QS}}{\sim} \rho^\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, 1]$ であり snowflake transformation と呼ばれている。ここで重要な観察は、 $\dim_H$ で Hausdorff 次元を表すことにすると $\dim_H(X, \rho^\varepsilon) = \varepsilon^{-1} \dim_H(X, \rho)$ となり、($\dim_H(X, \rho) \neq 0$ であれば) 擬対称変形により Hausdorff 次元を任意に大きくすることができるということである。等角次元という概念はこの逆を問う：すなわち擬対称変形 (プラスその他の制約条件) による Hausdorff 次元の下限として定まる次元である。Ahlfors 正則等角次元は Ahlfors 正則性という (Hausdorff 測度に関する) 追加の制約条件を課したもので、以下のように定義される。

定義 3.2 (Ahlfors 正則等角次元). 距離空間 (X, ρ) に対し、その Ahlfors 正則等角次元 $d_{\text{ARC}}(X, \rho)$ を次式で定義する：

$$d_{\text{ARC}}(X, \rho) := \inf \left\{ p \left| \begin{array}{l} \theta \underset{\text{QS}}{\sim} \rho, \exists C \in [1, \infty) \text{ s.t. } \forall (x, r) \in X \times (0, \text{diam}(X, \rho)) \\ C^{-1}r^p \leq \mathcal{H}_\theta^p(B_\theta(x, r)) \leq Cr^p \end{array} \right. \right\}.$$

ここで、 $B_\theta(x, r) := \{y \in X \mid \theta(x, y) < r\}$ であり、 $\mathcal{H}_\theta^p$ は X 上の距離 θ に関する p -次元 Hausdorff 測度である。 $(C^{-1}r^p \leq \mathcal{H}_\theta^p(B_\theta(x, r)) \leq Cr^p)$ という Hausdorff 測度の距離球の mass の一様な制御が Ahlfors 正則性と呼ばれる条件であり、この条件は直ちに $p = \dim_H(X, \theta)$ であることを導く.)

Ahlfors 正則等角次元に関連する問題で最も重要であると認識されているのは、定義の $\inf$ が達成可能であるかどうかを問う達成可能性問題である。その背景には幾何学的群論における Cannon の予想がある。

Cannon の予想. G を Gromov 双曲群で, その Gromov 境界 $\partial_\infty G$ が $\mathbb{S}^2$ と同相であるものとする. (Gromov 境界には visual metrics と呼ばれる距離の族から自然な距離構造が備わることがよく知られている.) このとき G は Klein 群 (と等長) である.

Gromov 双曲群に関するある種の剛性に関する予想であるが, [4] によって $d_{\text{ARC}}(\partial_\infty G)$ の達成可能性問題に書き換えられることが示された.

定理 3.3 ([4, Theorem 1.1]) Cannon の予想は次と同値: G を Gromov 双曲群で, その Gromov 境界 $\partial_\infty G$ が $\mathbb{S}^2$ と同相であるならば, $d_{\text{ARC}}(\partial_\infty G)$ は達成可能である.

この定理により Ahlfors 正則等角次元の達成可能性を調べる問題の重要性が認識されたが, 一般に Gromov 双曲群の無限遠境界は非常に “ワイルド” な対象であるので, 包括的に取り扱うのは困難が伴う. そこで良い状況にまずは制限して考えるという方向で研究が進み (例えば Coxeter 群に関する [5] など), 自己相似フラクタルも d_{ARC} の達成可能性問題を取り扱いやすい設定だと考えられた. しかしながら, Sierpiński gasket のような有限分岐性を有するフラクタルは (典型的には) $d_{\text{ARC}} = 1$ という退化したケースになり, この問題を扱うには適切ではないクラスである (d_{ARC} が達成しないことが知られている). 達成可能性問題が non-trivial である例としては無限分岐的なものを考える必要があり, 最もシンプルであるだろう例として Sierpiński carpet が挙げられ, 実際に [4, Problem 6.2] でも problem としても述べられているが, これは 20 年来の重要未解決問題の一つである. なお, Sierpiński carpet の d_{ARC} の明示的な値を求めるというのはよりハードな問題で, 未解決である. しかし次の評価は知られている: (K, d) を Sierpiński carpet とすると,

$$1 + \frac{\log 2}{\log 3} \leq d_{\text{ARC}}(K, d) < \frac{\log 8}{\log 3}. \quad (3.2)$$

本稿で取り扱う [21] の最後の主結果は, Sierpiński carpet の d_{ARC} が達成されると仮定したもとの d_{ARC} を達成する距離/測度が満たすべき条件を $(\mathcal{E}_p, \mathcal{F}_p, \Gamma_p \langle \cdot \rangle)$ の言葉で記述するものである. (距離から Hausdorff 測度が対応するように, その逆も David–Semmes deformation と呼ばれる自然な対応がこの設定ではあるので, 距離/測度のいずれかのみ注目すれば十分である.)

定理 3.4 ([21, Theorem 1.7]) (K, d) を Sierpiński carpet, $p = d_{\text{ARC}}(K, d)$ とする. $d_{\text{ARC}}(K, d)$ が達成されることを仮定し, θ を $d_{\text{ARC}}(K, d)$ を達成する K 上の距離とする. このとき, ある関数 $u \in \mathcal{F}_p \cap C(K)$ と定数 $C \in [1, \infty)$ が存在して,

$$C^{-1} \mathcal{H}_\theta^p(A) \leq \Gamma_p \langle u \rangle(A) \leq C \mathcal{H}_\theta^p(A), \quad \forall A: K \text{ の Borel 集合.}$$

注意 3.5. 定理 3.4 は [12, Problem 7.7 とその後の段落] にインスパイアされたものであるが, 定理 3.4 の関数 $u \in \mathcal{F}_p$ が $\mathcal{E}_p$ に関する (適切な境界条件のもとでの) p -調和関数として取れるというのが [12] で述べられている予想である. p -調和関数の非線形性が本質的な障害となり, この予想の解決には残念ながら至っていない.

4 異なる指数 $p \neq q$ の比較

Korevaar–Schoen 型の表現 (2.6) から示唆されるように, $(1, p)$ -Sobolev 空間を捉えるために見るべきである “一階微分を捉える” 空間スケール指数 β_p/p に起因し, 「距離空間上の解析学」とは劇的に異なる現象が起こると予想される. では異なる $p \neq q \in (1, \infty)$ を比較した場合にどうなるであろうか? この方向性に関して, 2 つの (Sierpiński carpet 上での) 未解決問題と (他のフラクタル上での) 最近の進展を述べて本稿を終えたいと思う.

空間スケール指数 β_p/p が一般に p に依存することから, $\mathcal{F}_p$ を捉えるために見るべき “一階微分の構造” も p に依存することが予想される. 次の問題は p -エネルギー測度と q -エネルギー測度の関係を問うものである.

問題 4.1. $p \neq q \in (1, \infty)$ とし, $u_s \in \mathcal{F}_s$, $s \in \{p, q\}$ とする. このとき $\Gamma_p\langle u_p \rangle$ と $\Gamma_q\langle u_q \rangle$ は互いに特異か?

Sierpiński carpet の場合は問題 4.1 は未解決であるが, strongly symmetric p.-c.f. self-similar set というクラスの中では, 自己相似集合の境界の相異なる二点間を結ぶ単純曲線が一意的でないかどうかという幾何学的条件が $\Gamma_p\langle u_p \rangle \perp \Gamma_q\langle u_q \rangle$ という特異性が起こるかどうかの必要十分条件であることを [15] で示した. (例えば, Sierpiński gasket では $\Gamma_p\langle u_p \rangle \perp \Gamma_q\langle u_q \rangle$ という特異性が起こる. この特異性に関して Sierpiński gasket の場合に焦点を当てた概説 [13] も参照.) [1] では Laakso-type 自己相似集合に対しても, 特異性の必要十分条件が基礎となるレベル 1 グラフのみで記述された条件として得られている.

次の Sobolev 空間の比較は問題 4.1 よりもハードな問題であると予想している.

問題 4.2. $p \neq q \in (1, \infty)$ とする. このとき $\mathcal{F}_p \cap \mathcal{F}_q$ は定数関数以外の関数を含むか?

実際, 問題 4.2 は Sierpiński carpet の場合に未解決であるだけでなく, Sierpiński gasket の場合でさえも本質的な進展を得られていないのが現状である. その一方で, [1] では Laakso diamond space(図 1 右) という自己相似集合に, 自己相似構造の観点から自然な距離と測度 (各 n -cell に一様に重み付けをするような距離と測度で, Hausdorff 次元は $\frac{\log 6}{\log 4}$ となる) が備わった場合を考えると, $\mathcal{F}_p \cap \mathcal{F}_q = \{\text{constant functions}\}$ になるという Sobolev 空間の特異性を明らかにした.

参考文献

- [1] R. Anttila, S. Eriksson-Bique and R. Shimizu, Construction of self-similar energy forms and singularity of Sobolev spaces on Laakso-type fractal spaces, preprint, 2025. [arXiv:2503.13258](https://arxiv.org/abs/2503.13258)
- [2] M. T. Barlow and R. F. Bass, The construction of Brownian motion on the Sierpiński carpet, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **25** (1989), no. 3, 225–257.
- [3] M. T. Barlow and R. F. Bass, Brownian motion and harmonic analysis on Sierpinski carpets, *Canad. J. Math.* **51** (1999), no. 4, 673–744.

- [4] M. Bonk and B. Kleiner, Conformal dimension and Gromov hyperbolic groups with 2-sphere boundary, *Geom. Topol.* Volume 9, Number 1 (2005), 219–246.
- [5] M. Bourdon, B. Kleiner, Combinatorial modulus, the combinatorial Loewner property, and Coxeter groups, *Groups Geom. Dyn.* **7** (2013), 39 – 107.
- [6] S. Cao, Z-Q. Chen and T. Kumagai, On Kigami’s conjecture of the embedding $\mathcal{W}^p \subset C(K)$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **152** (2024), no. 8, 3393–3402.
- [7] M. Carrasco Piaggio, On the conformal gauge of a compact metric space, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **46** (2013), no. 3, 495–548.
- [8] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, De Gruyter Stud. Math., 19, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011.
- [9] J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam and J. T. Tyson, *Sobolev spaces on metric measure spaces. An approach based on upper gradients*, New Math. Monogr., 27, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [10] P. E. Herman, R. Peirone and R. S. Strichartz, p -energy and p -harmonic functions on Sierpinski gasket type fractals, *Potential Anal.* **20** (2004), no. 2, 125–148.
- [11] 梶野 直孝, フラクタル上のラプラシアン・熱方程式入門, 令和 4 年度 (第 43 回) 数学入門公開講座テキスト, 2022. <https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ja/special-01.back.html>
- [12] N. Kajino and M. Murugan, On the conformal walk dimension: quasisymmetric uniformization for symmetric diffusions, *Invent. Math.* **231** (2023), no. 1, 263–405.
- [13] N. Kajino and R. Shimizu, p -Energy forms on fractals: recent progress, From Classical Analysis to Analysis on Fractals: A Tribute to Robert Strichartz, Volume 2, Applied and Numerical Harmonic Analysis, *Birkhäuser, Cham* (to appear).
- [14] N. Kajino and R. Shimizu, Contraction properties and differentiability of p -energy forms with applications to nonlinear potential theory on self-similar sets, preprint, 2024. [arXiv:2404.13668v2](https://arxiv.org/abs/2404.13668v2)
- [15] N. Kajino and R. Shimizu, On singularity of p -energy measures among distinct values of p for strongly symmetric p.-c.f. self-similar sets, in preparation.
- [16] S. Keith and B. Kleiner, unpublished work.
- [17] J. Kigami, *Analysis on fractals*, Cambridge Tracts in Math., 143 Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [18] J. Kigami, Conductive homogeneity of compact metric spaces and construction of p -energy, *Mem. Eur. Math. Soc.* Vol. 5 (2023).
- [19] S. Kusuoka and X. Y. Zhou, Dirichlet forms on fractals: Poincaré constant and resistance, *Probab. Theory Related Fields* **93** (1992), no. 2, 169–196.
- [20] J. M. Mackay and J. T. Tyson, *Conformal dimension. Theory and application*, Univ. Lecture Ser., 54, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [21] M. Murugan and R. Shimizu, First-order Sobolev spaces, self-similar energies and energy measures on the Sierpiński carpet, *Comm. Pure Appl. Math.* (to appear)
- [22] R. Shimizu, Construction of p -energy and associated energy measures on Sierpiński carpets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **377** (2024), no. 2, 951–1032.

第72回幾何学シンポジウム

2025

筑波大学