ON EXOTIC DIFFEOMORPHISMS OF 4-MANIFOLDS

今野 北斗（東京大学大学院数理科学研究科）

1. エキゾチックな微分同相写像

滑らかな多様体 X とその自己微分同相写像 $f : X \to X$ が与えられたとする．もし f が位相的には恒等写像にアイソトピックだが滑らかにはそうでないとき，すなわち f は $\mathrm{Homeo}(X)$ の単位元成分には属するが $\mathrm{Diff}(X)$ の単位元成分には属さないとき，f は**エキゾチックな微分同相写像**であるという．このようなものは，同相群と微分同相群のトポロジーの差の最も基本的なものと言えるだろう．

3 次元以下では自然な写像 $\mathrm{Diff}(X) \hookrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$ は弱ホモトピー同値なので，4 次元がこのような現象が現れる最小の次元である．一方高次元トポロジーにおいては，エキゾチック微分同相は非常に基本的な現れ方をする．例えば，$n \geq 5$ に対し，エキゾチック $(n+1)$ 次元球面 $\tilde{S}^{n+1}$ が存在することは，n 次元球面 S^n がエキゾチック微分同相を許容することと同値である．実際，h-同境定理の系として，エキゾチック球面 $\tilde{S}^{n+1}$ は D^{n+1} ふたつのコピーを境界のある微分同相 $f : S^n \to S^n$ によって貼り合わせることで得られることが分かる．$\tilde{S}^{n+1}$ がエキゾチックであることから f がエキゾチック微分同相であることが従う．

2. 4 次元多様体上のエキゾチック微分同相：初めての例

4 次元ではどうか．4 次元多様体の上のエキゾチック微分同相の初めての例は Ruberman [29] により 1998 年に構成された：

定理 1 (Ruberman (1998))**.** エキゾチック微分同相を許容する滑らかな 4 次元多様体が存在する．

Ruberman のエキゾチック微分同相を持つ 4 次元多様体の例の最もシンプルなものは

$$K3\#\mathbb{CP}^2\#2\overline{\mathbb{CP}}^2 \cong 4\mathbb{CP}^2\#21\overline{\mathbb{CP}}^2$$

である．

これは族に対するゲージ理論の初めてのトポロジカルな応用でもあり，最近の族のゲージ理論研究の多くの結果の証明の雛形となる重要なものである．そこでまずはこの構成とエキゾチカ（エキゾチックであること）の検出の仕方を述べたい．

正確には，Ruberman [29] の例そのものを説明する代わりに，それと極めて似た変種の方を説明する．具体的には，Ruberman の証明は 1-パラメータの Donaldson 理論に基づいていたが，その代わりに，Baraglia と筆者による Seiberg–Witten 理論側での対応物 [2] を説明する．この方が例が簡単に述べられるからである．Ruberman のアイデアを一言で言えば，4 次元多様体のエキゾチカを引き継いだような微分同相を（別の 4 次元多様体上に）上手く作り，その微分同相のエキゾチカを 1-パラメータのゲージ理論的不変量で検出する，というものである．

まず，単連結な 4 次元多様体のエキゾチック対 (X_1, X_2) を用意する．すなわち X_1, X_2 は同相だが微分同相でないような滑らかな単連結 4 次元閉多様体である．ただし，単にエキゾチックというだけではなく，以下の条件が満たされているとする．

(i) (mod 2) Seiberg–Witten 不変量によってエキゾチカが検出できる．すなわち，X_1 と X_2 の (mod 2) Seiberg–Witten 不変量は相異なる．
(ii) エキゾチカは $S^2 \times S^2$ の連結和（安定化と呼ばれる）を一回行うと消滅する．すなわち，$X_1\#S^2\times S^2$ と $X_2\#S^2 \times S^2$ は微分同相である．

本研究は JSPS 科研費 25K00908 の助成を受けたものである．

このようなエキゾチック対 (X_1, X_2) は大量に存在する．例えば X_1 を $K3$，X_2 を $K3$ の適当な対数変換（小平の用いた複素幾何的な手術の操作で，$K3$ とは異なる楕円曲面となる）とするとひとつの例となる．あるいは $X_1 = K3\#\overline{\mathbb{CP}}^2$, $X_2 = 3\mathbb{CP}^2\#20\overline{\mathbb{CP}}^2$ も例となる．条件 (ii) で存在が保証される微分同相をひとつ取り

$$\psi : X_1\#S^2 \times S^2 \to X_2\#S^2 \times S^2$$

と置く.（正確には後で都合の良くなるよう取り直す.）

一方，$S^2 \times S^2$ の上で，その交叉形式の正定値部分に -1 倍で作用するような向きを保つ微分同相

$$f_0 : S^2 \times S^2 \to S^2 \times S^2$$

をひとつ取る．例えば S^2 の赤道に沿った鏡映 $r : S^2 \to S^2$ の積 $f_0 = r \times r$ が例である．ただし，アイソトピーで変形し，$S^2 \times S^2$ 内に埋め込まれたある D^4 の各点を固定するようにしておく．f_0 をこの D^4 に沿って $X_i\#S^2 \times S^2$ に恒等写像で拡張した $\mathrm{id}_{X_i}\#f_0$ を考えよう．Ruberman 型のエキゾチック微分同相は，

$$f := \psi^{-1} \circ (\mathrm{id}_{X_2}\#f_0^{-1}) \circ \psi \circ (\mathrm{id}_{X_1}\#f_0) : X_1\#S^2 \times S^2 \to X_1\#S^2 \times S^2 \tag{1}$$

で定義される $X_1\#S^2 \times S^2$ の自己微分同相である．ただし，ψ を取り直すことで，f がホモロジーには自明に作用するようにしておく.（これができるのは古典的な Wall の定理 [31] から従う.）この f が恒等写像に滑らかにアイソトピックでない微分同相の候補と思える心理的な理由は，微分同相 ψ は X_1 と $S^2 \times S^2$ を本質的に「かき混ぜる」ことで $X_2\#S^2 \times S^2$ への同一視を作るものであり，f_0 は $S^2 \times S^2$ に本質的に作用しているから，といったところである．

f がホモロジーに自明に作用するように調整したことから，次の一般的な定理により f が位相的には恒等写像にアイソトピックであることが従う：

定理 2 (Freedman (1982) [7], Quinn (1986) [28])**.** X を向きづけられた単連結閉 4 次元位相多様体とすると，自然な準同型 $\pi_0(\mathrm{Homeo}^+(X)) \to \mathrm{Aut}(Q_X)$ は同型である．

ここで $\mathrm{Homeo}^+(X)$ は向きを保つ同相群，$\mathrm{Aut}(Q_X)$ は X の交叉形式の自己同型群を表す．全射性は [7], 単射性が [28] による．我々に必要なのは単射性の方である[1]．

(1) の f が滑らかには恒等写像にアイソトピックでないことはどのように示されるのだろうか．これを検出するのに族のゲージ理論を用いる．上で述べたように，ここでは族の Seiberg–Witten 理論を用いることにしよう．Seiberg–Witten 方程式を書くためには，4 次元多様体上に spin^c 構造と呼ばれるものを取ることが必要である．spin^c 構造を取るごとに，その spin^c 構造に対する Seiberg–Witten モジュライ空間の形式的次元という整数が定まる．これは，Seiberg–Witten 方程式の解のモジュライ空間が（横断性が満たされて）実際に多様体になっているときは，モジュライ空間の次元を与えるものである．形式的次元が負のときは，モジュライ空間は generic には空であるのだが，以下に見る通り族のゲージ理論ではそのような状況を積極的に使う．

一般に，滑らかな向きづけられた閉 4 次元多様体 Z であって，$b^+(Z) \geq 3$ という位相的条件を満たすものが与えられたとする．Z 上の spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ であって，Seiberg–Witten 方程式の解のモジュライ空間の形式的次元が -1 のものが与えられるごとに，準同型写像

$$\mathrm{FSW}(-, \mathfrak{s}) : \pi_0(\mathrm{Diff}(Z, \mathfrak{s})) \to \mathbb{Z}/2 \tag{2}$$

を定義することができる．これを（1-パラメータの）族の Seiberg–Witten 不変量という．ここで $\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s})$ は $\mathfrak{s}$（の同型類）を保つ微分同相群を表す．これを (1) の f の検出に用いる．なお，$\mathrm{Diff}(Z, \mathfrak{s})$ より少し小さい群（ホモロジー的向きを保つ $\mathrm{Diff}(Z, \mathfrak{s})$ の部分群）に制限すると，不変量を $\mathbb{Z}$-値の準同型に持ち上げることができる．この $\mathbb{Z}$-値の不変量を使うと f の任意の非自明な冪もエキゾチック微分同相であることが分かる．

この写像 (2) は次のように定義される．ひとつ微分同相 $g \in \mathrm{Diff}(Z, \mathfrak{s})$ が与えられると，Z の g による写像トーラス $Z_g \to S^1$ は，Z をファイバーとする S^1 上のファイバー束を与える．g が $\mathfrak{s}$（の同型

[1]単射性 [28] には比較的最近ギャップが発見され，[9] で修正された．

類）を保つことから，Z 上の spin^c 構造 Z をこの族 Z_g に拡張することができる．さらにファイバーごとに計量をとると，Z_g の各ファイバー上で Seiberg–Witten 方程式を書くことができる．いま $\mathfrak{s}$ の形式的次元が -1 と仮定したが，これを 1 次元の底空間 S^1 上で考えると，解のモジュライ空間を S^1 上で束ねたパラメトライズドモジュライ空間は 0 次元となる．S^1 のコンパクト性と Seiberg–Witten モジュライ空間のコンパクト性（の証明）を合わせると，パラメトライズドモジュライ空間もコンパクトと分かる．適当に摂動するとパラメトライズドモジュライ空間は多様体となる．このようにして得られるコンパクト 0 次元多様体，すなわち有限個の点を mod 2 で数えて定義されるのが (2) である．これが g のアイソトピー類のみに依ることや，恒等写像に対して値が自明であることは容易に分かる．

議論の本質的な部分は，実際に (1) の微分同相 f を族の Seiberg–Witten 不変量で evaluate した値が非自明であることである．この証明のあらましは以下の通りである．

- 族の Seiberg–Witten 不変量が微分同相の合成に関して加法的であることを示す（容易）．
- X_1 の Seiberg–Witten 不変量 $\mathrm{SW}(X_1)$ を用いて

(3)
$$\mathrm{FSW}(\mathrm{id}_{X_1}\#f_0)=\mathrm{SW}(X_1)$$

と族の不変量を表す（ただし，正確には適当に選んだ spin^c 構造に対する等式である）．これを示すには貼り合わせと wall-crossing を合わせた議論を行う．f_0 を $H^+(S^2\times S^2)$ の向きを裏返すように取ったことから，f_0 の写像トーラスに対するパラメトライズドモジュライ空間はひとつ可約解を持つ (wall-crossing)．X_1 の上の既約解ごとに，それを $S^2\times S^2$ 上の可約解と貼り合わせると，$\mathrm{id}_{X_1}\#f_0$ の写像トーラスに対するパラメトライズドモジュライ空間に既約解が得られると分かる．

同様の議論を $\mathrm{id}_{X_2}\#f_0^{-1}$ に対しても行うことで，

(4)
$$\mathrm{FSW}(\mathrm{id}_{X_2}\#f_0^{-1})=\mathrm{SW}(X_2)$$

が分かる．$\mathrm{SW}(X_1)$ と $\mathrm{SW}(X_2)$ が異なるように X_1,X_2 を取ったから，(3), (4) から $\mathrm{FSW}(\mathrm{id}_{X_1}\#f_0)$ と $\mathrm{FSW}(\mathrm{id}_{X_2}\#f_0^{-1})$ が異なり，したがって $\mathrm{id}_{X_1}\#f_0$ と（ψ で共役を取った）$\mathrm{id}_{X_2}\#f_0^{-1}$ とを合成した f に対する不変量の非自明性

$$\mathrm{FSW}(f)\neq 0$$

が FSW の加法性から分かる．

3. エキゾチックな Dehn ツイスト

Ruberman の 1998 年の仕事以降（上で述べた Baraglia と筆者の Seiberg–Witten 対応物を除いて）新しい 4 次元多様体上のエキゾチック微分同相の例は長らく見つかっていなかった．既に述べたように，Ruberman の基本的なアイデアは，4 次元多様体のエキゾチカから誘導されるエキゾチック微分同相を見つけるというものであった．それとは本質的に異なる例はあるのだろうか．

また，Ruberman 型のエキゾチック微分同相は，ゲージ理論的不変量が非自明な 4 次元多様体（例えば $K3$）と $S^2\times S^2$ を混ぜるような微分同相が構成中に噛んでいた．これは典型的には Kirby 計算で作られる微分同相で,（ゲージ理論が専門の筆者などにとっては）手に取るように分かるとは言い難い微分同相である．エキゾチック 4 次元多様体の自然な例は沢山知られていることを考えると，もう少し幾何学的に自然に現れるエキゾチック微分同相の例があって欲しいと考えるのも当然だろう．

この数年は，そのような要求に応える例として，Dehn ツイストの 4 次元類似が盛んに研究されている．これが Ruberman とは趣を異にする新しいクラスのエキゾチック微分同相を与えるのである．

定義は以下に述べるように簡単である．Y を多様体とし，恒等写像を基点とするループ $\phi: S^1\to \mathrm{Diff}(Y)$ が与えられたとする．このとき，アニュラス $Y\times[0,1]$ の境界を各点ごとに固定する微分同相写像が

(5)
$$Y\times[0,1]\to Y\times[0,1]\quad;\quad (y,t)\mapsto(\phi(t)\cdot y,t)$$

で定義される．$Y = S^1$ として，ϕ を S^1 の自身への自然な作用から得られるループとすれば，これは 2 次元トポロジーで基本的な $S^1 \times [0,1]$ 上の Dehn ツイストに他ならない．

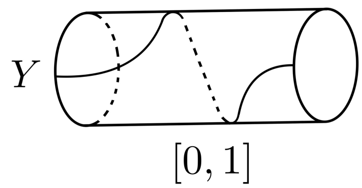

FIGURE 1. アニュラス上の Dehn ツイスト

この微分同相を Y が 3 次元多様体の場合に考えよう．Y が 4 次元多様体 X に埋め込まれているとき，Y の管状近傍に上のアニュラス上の Dehn ツイスト (5) を移植すれば，X 上の微分同相が得られる．これを **X 上の Y に沿った Dehn ツイスト**と呼ぼう．特に X が Y を境界に持つとき，$Y = \partial X$ の管状近傍に移植した Dehn ツイストは $\mathrm{Diff}_\partial(X)$ の元となる．これを X の**境界 Dehn ツイスト**と呼ぶことにする．

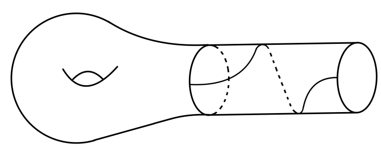

FIGURE 2. 境界 Dehn ツイスト

境界付き多様体の場合，我々は以下のようなエキゾチック微分同相の変種を考える．境界付き多様体 W に対して，$\mathrm{Diff}_\partial(W)$ の元であって，$\mathrm{Homeo}_\partial(W)$ を通して恒等写像にアイソトッピックだが $\mathrm{Diff}_\partial(W)$ を通してそうではないものを**相対的にエキゾチックな微分同相写像**と呼ぶ．別の言い方をすれば，自然な写像

$$\pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(W)) \to \pi_0(\mathrm{Homeo}_\partial(W))$$

の核の非自明元を与えるような微分同相写像のことである．

3.1. **S^3 に沿った Dehn ツイスト．** 一番簡単なのは $Y = S^3$ の場合である．この場合，$\pi_1(\mathrm{Diff}(S^3)) \cong \pi_1(\mathrm{SO}(4)) \cong \mathbb{Z}/2$ の生成元に対応するループを用いた Dehn ツイストを考えることができる．2020 年に，Kronheimer–Mrowka [20] は次を示した：

定理 3 (Kronheimer–Mrowka (2020) [20])**．** *$K3\#K3$ の連結和の首に沿った Dehn ツイストはエキゾチック微分同相である．*

証明は（非同変な）族の Bauer–Furuta 不変量が Dehn ツイストに対して非自明であることを示すことでなされる．Dehn ツイストという一見単純に見える微分同相がエキゾチックになるという Kronheimer–Mrowka の結果は，専門家に驚きを与えた．Kronheimer–Mrowka の結果のすぐ後に，Lin [22] は次を示した：

定理 4 (Lin (2020) [22])**．** *$K3\#K3$ の連結和の首に沿った Dehn ツイストを $K3\#K3\#S^2 \times S^2$ 上に拡張したものもエキゾチック微分同相である．*

Lin は，Dehn ツイストに対する Pin(2)-同変な族の Bauer–Furuta 不変量を計算することでこの結果を証明した．単連結 4 次元多様体上のエキゾチック微分同相の写像類は，有限回の安定化 ($S^2 \times S^2$ の連結和) で自明になることが知られている．しかし，それまでに知られていた例（Ruberman [29]

と Baraglia–筆者 [2] の例）は一回の安定化で自明になっていた．Lin の結果は，単連結 4 次元多様体に関するエキゾチックな現象であって，安定化一回で生き残る初めての例を与えたものであり，これも専門家には驚きを持って迎えられた．

S^3 に沿った Dehn ツイストはその後も研究が続いている．例えば [4, 27] を参照．

3.2. **Seifert ファイバー空間に沿った Dehn ツイスト．** より広い例を考えるために自然な 3 次元多様体のクラスは Seifert ファイバー空間である．定義からそこには S^1-作用があり，この作用を用いた Dehn ツイストを考えることができる．S^3 は Seifert ファイバー空間としては特殊であり，S^3 の Seifert S^1-作用が定める $\mathrm{Diff}(S^3)$ の中のループは $\pi_1(\mathrm{Diff}(S^3))$ で自明となってしまい，非自明な Dehn ツイストを定め得ない．しかし S^3 以外の Seifert ファイバー空間 Y の場合には Seifert S^1-作用は $\pi_1(\mathrm{Diff}(Y))$ の中で非自明な元を定め ([26, Proposition 8.8])，潜在的に非自明な Dehn ツイストを与える可能性がある．

2023 年に，Mallick–谷口–筆者 [17] は，Seifert ファイバー空間に沿った Dehn ツイストがエキゾチック微分同相となる例を初めて与えた．その後 1 年あまりのいくつかの研究で，[17] の結果の一部は大きく一般化された：Kang–Park–谷口 [14], Lin–Mukherjee–Muñoz-Echániz–筆者 [15, 16], 宮澤 [24]．ここでは [14–16] の結果の一部を紹介する．

n 次元の境界付き可微分多様体 W に対し，n 次元円板の滑らかな埋め込み $D^n \hookrightarrow \mathrm{Int}(W)$ を固定すると，微分同相を恒等写像で拡張することで写像 $i : \mathrm{Diff}_\partial(D^n) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_\partial(W)$ が得られる．高次元では，W が可縮であれば，実はその微分同相群は i を通して円板の微分同相群とホモトピー的に差がないことが知られている（6 次元以上は [11], 5 次元は [18] による）：

定理 5 (Galatius–Randal-Williams (2023) [11], Krannich–Kupers (2024) [18])**.** *W を可縮なコンパクト可微分多様体とし，$n := \dim W \geq 5$ と仮定する．このとき，任意の滑らかな埋め込み $D^n \hookrightarrow \mathrm{Int}(W)$ に対し，$i : \mathrm{Diff}_\partial(D^n) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_\partial(W)$ は弱ホモトピー同値写像である．*

下の結果は，この高次元での結果と興味深い対比をなす：

定理 6 (K.–Lin–Mukherjee–Muñoz-Echániz (2024) [16])**.** *Seifert ファイバー空間を境界に持つある可縮なコンパクト可微分 4 次元多様体 W で次の性質を満たすものが存在する：W の境界 Dehn ツイスト $\tau \in \mathrm{Diff}_\partial(W)$ の任意の冪 τ^n $(n \neq 0)$ は相対的にエキゾチックな微分同相であり，さらに D^4 に局所化しない．*

定理 6 の W は，具体的な Mazur 多様体として与えることができる．ここで微分同相 $f \in \mathrm{Diff}_\partial(W)$ が D^4 に局所化するとは，ある埋め込み $D^4 \hookrightarrow \mathrm{Int}(W)$ に対して f の写像類が $i_* : \pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(D^4)) \to \pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(W))$ の像に属するときを言う．定理 6 は，境界 Dehn ツイストは D^4 から来ないという意味で複雑さを持つ微分同相であることを主張している．

D^4 への非局所化性から特に，$i : \mathrm{Diff}_\partial(D^4) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_\partial(W)$ は弱ホモトピー同値ではない．したがって定理 6 は，高次元での結果（定理 5）の 4 次元類似が成立しないことを，具体的な 4 次元多様体と微分同相で示すものである．なお定理 5 の 4 次元類似が成立しないことは，[16] とは異なる手法により，Krushkal–Mukherjee–Powell–Warren [21] によっても（明示的な 4 次元多様体と微分同相に対してではないが）[16] の直前に示されている．

非局所性の定理（定理 6）の証明は，Dehn ツイストに対する族の Seiberg–Witten 不変量の非自明性を示すことによる．この計算は，Seifert S^1-作用が Seiberg–Witten 方程式の解のモジュライ空間に実際にどのように作用しているかを解析することでなされる．D^4 に局所化したどんな微分同相に対しても，族の Seiberg–Witten 不変量は自明になることが分かることから，非局所化性が従う．ゲージ理論的不変量が微分同相の 4 次元特有の微妙な複雑さを上手く捉えていることが覗えるだろう．

なお，可縮な 4 次元多様体の上のエキゾチック Dehn ツイストの検出は Mallick–谷口–筆者 [17] によってはじめて行われたが，これは以下のように一般化された：

定理 7 (Kang–Park–谷口 (2024) [14])**.** *W を可縮で滑らかなコンパクト 4 次元多様体とし，その境界が S^3 でない Brieskorn ホモロジー球面とする．このとき，W の境界 Dehn ツイスト τ_W は $\pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(W))$ で無限位数で，τ_W の任意の冪 τ_W^n $(n \neq 0)$ は相対的にエキゾチックな微分同相となる．*

以上はトポロジカルな趣の定理であるが，次にシンプレクティック構造を利用することを考える．以下の定理から，Seifert ファイバー空間に沿った Dehn ツイストが，相対的にエキゾチックな微分同相の例を系統的に与えることが分かる：

定理 8 (K.–Lin–Mukherjee–Muñoz-Echániz (2024) [15])**.** *Y を $b_1(Y) = 0$ な Seifert ファイバー空間とする．W を Y の標準的なコンタクト構造に対するコンパクトなシンプレクティック充填とする．もし W の交叉形式が負定値でないならば，W の境界 Dehn ツイスト τ_W は $\pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(W))$ で無限位数となる．さらに W が単連結ならば，τ_W の任意の冪 τ_W^n $(n \neq 0)$ は相対的にエキゾチックな微分同相となる．*

W の交叉形式に関する仮定を落とすと容易に反例が作れる．例えば，Poincaré ホモロジー球面 $\Sigma(2,3,5)$ は標準的なやり方で負定値な $-E_8$ が交叉形式であるような 4 次元多様体 W の境界として現れる（W は後に見る Milnor ファイバーの一例である）．この W は S^1-同変な plumbing で得られることが知られており，その帰結として，$\Sigma(2,3,5)$ 上の標準的な S^1-作用は W に拡張する．この S^1-作用を用いれば，W の境界 Dehn ツイストが $\pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(W))$ で自明なことはただちに分かる．

定理 8 の証明は族の相対 Bauer–Furuta 不変量を用いた背理法である．仮に τ_W^n が恒等写像に（境界に対して相対的かつ）滑らかにアイソトピックであるとする．Kang–Park–谷口 [14] の議論を用いると，この仮定から，ある有限巡回群の分類空間の上の W をファイバーとする滑らかな族を構成することができる．これに対する族の相対 Bauer–Furuta 不変量を観察することで矛盾を導くのである．この矛盾は一言で言えば，Taubes によるシンプレクティック 4 次元多様体に対する Seiberg–Witten 不変量の非消滅定理 [30] と，Baraglia–Hekmati [1] による Floer ホモロジーの消滅定理から来る．後者は，Seifert ファイバー空間を十分位数の高い巡回群の標準的な作用で割って得られる 3 次元多様体の Floer ホモロジーの消滅であり，Némethi [25] による Floer ホモロジーの計算に基づくものである．これらの非消滅定理・消滅定理を繋いで矛盾させるためには，ゲージ理論とコンタクト構造に関わる比較的最近の進展である飯田 [12], 飯田–谷口 [13] の仕事も使われる．

3.3. **Milnor ファイブレーションのモノドロミー．** 上のシンプレクティック充填に関する結果（定理 8）の系として，Milnor ファイブレーションのモノドロミーについての興味深い帰結を得ることができる．3 変数の複素多項式 $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ が与えられ，$f(0) = 0$ かつ原点を孤立特異点として持つとしよう．f を制限した

$$f : f^{-1}(B_\delta(\mathbb{C}) \setminus \{0\}) \cap B_\epsilon(\mathbb{C}^3) \to B_\delta(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \quad (1 \gg \epsilon \gg \delta > 0)$$

がファイバー束になるというのが古典的な Milnor のファイブレーション定理であった．このファイバー束を f の **Milnor ファイブレーション**と呼ぶ．そのファイバー (**Milnor ファイバー**) を M_f とおくと，ファイバー束のモノドロミー $\mu \in \pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(M_f))$ が Milnor ファイブレーションの最も重要な不変量である．μ のホモロジー $H_*(M_f)$ への作用は古典的に研究されてきたが，写像類自体を研究するのも自然であろう．

μ の写像類を調べるために多項式のクラスを少々限定する．f が weighted homogeneous とは，ある整数 $w_1, w_2, w_3, d > 0$ が存在し，

$$f(t^{w_1} z_1, t^{w_2} z_2, t^{w_3} z_3) = t^d f(z_1, z_2, z_3)$$

が任意の $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$, $t \in \mathbb{C}$ に対して成り立つときを言う．weighted homogeneous な多項式は，Brieskorn 型の特異点や ADE 特異点（を与える多項式）のような興味深いクラスを含んでいる．Brieskorn 型とは，$f(z_1, z_2, z_3) = z_1^{p_1} + z_2^{p_2} + z_3^{p_3}$ $(p_i \geq 2)$ の形の多項式で与えられる特異点であり，その Milnor ファイバーの境界に現れる Brieskorn 3 次元多様体は基本的なクラスの 3 次元多様体である．ADE 型特異点，あるいは有理二重点や du Val 特異点とも呼ばれるこのクラスは，$SL(2,\mathbb{C})$ のある有限部分群 Γ を用いて $\mathbb{C}^2/\Gamma$ と表される特異点であった．

ADE 特異点の場合には，Milnor ファイブレーションのモノドロミー μ は $\pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(M_f))$ の中で有限位数であることが分かる．これは Brieskorn [5] による古典的な同時特異点解消定理の帰結である．実は，逆にモノドロミーが有限位数となるのは，ADE 特異点のみであることが示せる：

定理 9 (K.–Lin–Mukherjee–Muñoz-Echániz (2024) [15])**.** $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ を *weighted homogeneous* な多項式とし，$f(0) = 0$ かつ原点を孤立特異点として持つと仮定する．f が *ADE* 特異点を与えるときまたそのときに限り，f の *Milnor* ファイブレーションのモノドロミー μ は $\pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(M_f))$ の中で有限位数である．

証明は，weighted homogeneous の場合，モノドロミーの適当な冪が境界 Dehn ツイストになることに注意し，定理 8 に帰着させることで得られる．多項式が ADE 型であるというのは，定理 8 における W の交叉形式が負定値なことに対応する．

定理 9 の位相的カテゴリーでの類似や高次元類似（すなわち多項式の変数を増やして得られる高次元の Milnor ファイブレーションに対する類似）を考えると，これらは共に成立しないことが分かる．(位相的カテゴリー類似については Orson–Powell [26], 高次元については Krannich–Randal-Williams [19] の結果の帰結である．）したがって定理 9 は，Milnor ファイブレーションのモノドロミーのような古典的な微分同相も，4 次元特有現象や位相的カテゴリーと可微分カテゴリーの差異を与えていることを示している．

4. 既約な 4 次元多様体の上のエキゾチック微分同相

上では，Milnor ファイバーのような自然な境界付き 4 次元多様体上のエキゾチック微分同相を扱った．一方，エキゾチック微分同相が検出できる閉 4 次元多様体は，証明の都合上，連結和で作るものが多かった．例えば既に見た $4\mathbb{CP}\#21\overline{\mathbb{CP}}^2$ といった形のものである [2, 29]．これらは，複素構造，シンプレクティック構造を持たず，エキゾチック構造を持つかも分からないものである．

一方，4 次元トポロジーで重要な 4 次元多様体の例の多くは複素曲面である．blow-down すると，そういったものは**既約な 4 次元多様体**，すなわち非自明な連結和分解を持たないものとなる[2]．これが 4 次元トポロジーの building block であり，その上ではしばしば，エキゾチック構造，複素構造，シンプレクティック構造など，豊かな構造を考えられる．

既約な 4 次元多様体がエキゾチック微分同相を持ち得るかは 4 次元多様体の微分同相群に関する基本的な問いと見なされてきたが，最近そのような例が存在することが分かった：

定理 10 (Baraglia–K. (2024) [4])**.** 既約な閉 4 次元多様体であってエキゾチック微分同相を許容するものが存在する．

具体的には，minimal な単連結複素曲面（様々な楕円曲面や完全交叉）として例が与えられる．例えば，対数変換で得られる楕円曲面 $E(4n)_{p,q}$ ($n, p, q \geq 1$, ただし有限個の (p, q) を除く) や，$\mathbb{CP}^4$ を二本の方程式で切った完全交叉たちのおおよそ 1/4 が例となる．

証明は，Baraglia と筆者が族の Bauer–Furuta 不変量から導出した滑らかな 4 次元多様体への制約 [3] と族の指数定理を用いる．微分同相の構成を含め，これを概説する．

抽象的な方針としては，次の持ち上げ問題を否定的に解くことである．（このアイデアは最初，Mallick–谷口–筆者 [17] で用いた．しかし最終的に使う族のゲージ理論由来の制約が定理 10 の証明で用いるものとは異なる．）X を向きづけられた単連結閉 4 次元多様体とする．G をひとつの関係式を持つ有限表示群とし，

$$G = \langle a_1, \ldots, a_n \mid r \rangle$$

をある表示とする．G から X の交叉形式の自己同型群 $\mathrm{Aut}(Q_X)$ への準同型 $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(Q_X)$ が与えられたとする．ただし，この像 $\varphi(G)$ が，自然な写像 $\pi_0(\mathrm{Diff}^+(X)) \to \mathrm{Aut}(Q_X)$ の像に含まれてい

[2]正確には，閉 4 次元多様体 X が既約とは，$X = X_1 \# X_2$ と書けるならば X_i の少なくとも一方はホモトピー S^4 であるというときを言う．

ると仮定する．φ に対する持ち上げ問題

$$\begin{tikzcd} & \pi_0(\mathrm{Diff}^+(X)) \arrow[d] \\ G \arrow[ur, dashed, "\tilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{Aut}(Q_X) \end{tikzcd}$$

が解けない，すなわちこの図式を可換にする準同型 $\tilde{\varphi} : G \to \pi_0(\mathrm{Diff}^+(X))$ が存在しないとしよう．すると以下のようにして X のエキゾチック微分同相を得ることができる．まず，φ の像に関する仮定から，各 $\varphi(a_i)$ はある微分同相で実現できる．すなわち，$f_i \in \mathrm{Diff}^+(X)$ が存在して $(f_i)_* = \varphi(a_i)$ となる．$r = r(a_1, \dots, a_n)$ を r の a_i たちによる word 表示とする．このとき，$f := r(f_1, \dots, f_n) \in \mathrm{Diff}^+(X)$ は $\pi_0(\mathrm{Diff}^+(X))$ で非自明となる．実際，もし f の写像類 $[f]$ が自明であれば，$\tilde{\varphi}(a_i) := [f_i]$ とおくことで準同型 $\tilde{\varphi} : G \to \pi_0(\mathrm{Diff}^+(X))$ が well-defined に定まり，上の持ち上げ問題が解けないという仮定に反するからである．一方 φ の準同型性から $f_* = \varphi(r) = 1 \in \mathrm{Aut}(Q_X)$ である．したがって定理 2 から，f は位相的には恒等写像にアイソトピックとなり，これは f が X のエキゾチックな微分同相であることを意味する．

このような持ち上げ問題を否定的に解くために，族のゲージ由来の 4 次元多様体の滑らかな族に対する制約を用いる．まず，G は有限表示群なので，その presentation complex と呼ばれる 2 次元 CW 複体 B が得られる．これは 1-cell たちが生成元 a_i，2-cell が関係式 r に対応するようなものである．もし上の持ち上げ問題が肯定的に解けると，B の上の X をファイバーとする滑らかな族 $E \to X$ であって，そのモノドロミーが交叉形式に φ を通して作用するようなものが得られる．ここに族のゲージ理論由来の制約を使う．族のゲージ理論はしばしば，4 次元多様体の滑らかな族のモノドロミーの交叉形式への作用への制約を与える．E がこの制約を破っていることを確認できれば矛盾が得られ，持ち上げ問題が否定的に解けるのである．

既約な 4 次元多様体のエキゾチック微分同相の検出（定理 10）の証明では，このアイデアを $G = \mathbb{Z}^2 = \langle a_1, a_2 \mid [a_1, a_2] \rangle$ に対して用いる（一方，Mallick–谷口–筆者 [17] では $G = \mathbb{Z}/2$ を Dehn ツイストを検出するのに用いた）．まず，X が楕円曲面や完全交叉のとき，交叉形式の自己同型 $\mathrm{Aut}(Q_X)$ の多くが微分同相で実現できることが知られており，簡単な十分条件がある [6,23][3]．実現可能な $\mathrm{Aut}(Q_X)$ の元 ψ_1, ψ_2 であって，$[\psi_1, \psi_2] = 1$ かつホモロジーに興味深く作用するものを取る．具体的には，ある $H^+(X)$（$H_2(X;\mathbb{R})$ の部分空間で，交叉形式が正定値かつ最大次元のもの）を集合として保ち，さらに $w_2(H^+(X) \times_{\mathbb{Z}^2} \mathbb{R}^2) \neq 0$ となるように取る．（ここで $\mathbb{Z}^2$ は $H^+(X)$ に ψ_1, ψ_2 により作用しており，$\mathbb{R}^2$ には平行移動で作用している．）このような ψ_1, ψ_2 が取れることは容易に分かる．ψ_1, ψ_2 を実現する $\mathrm{Diff}^+(X)$ の元 f_1, f_2 を取っておく．我々が示したいことは，$f = [f_1, f_2]$ がエキゾチック微分同相であるということである．

上のアイデアをここで使う．もし f が恒等写像に滑らかにアイソトピックであれば，X をファイバーとする滑らかなファイバー束 $E \to T^2$ であって，モノドロミーの $H_2(X)$ への作用が ψ_1, ψ_2 で与えられるものが得られる．X として楕円曲面，完全交叉の内ある程度の条件を課しておくと，$w_2(H^+(X) \times_{\mathbb{Z}^2} \mathbb{R}^2) = 0$ とならなければならないことになり矛盾するのである．この w_2 の消滅は，次の族のゲージ理論由来の制約から来る：

定理 11 (Baraglia–K. (2022) [3])**.** *X を滑らかな閉 4 次元多様体で $b^+(X) \equiv 3$ mod 4, $b_1(X) = 0$ と仮定する．$\mathfrak{s}$ を X 上の spin^c 構造で，Seiberg–Witten 不変量 $\mathrm{SW}(X, \mathfrak{s})$ が mod 2 で非自明であるとする．$(X, \mathfrak{s})$ をファイバーとする spin^c 4 次元多様体の滑らかなファイバー束 $E \to B$ がコンパクトな底空間 B の上で与えられたとする．このとき，*

$$c_1(\not{D}_E) = w_2(H^+(E)) \quad (mod\ 2)$$

[3]具体的には，$\mathrm{Aut}(Q_X)$ の元が X の標準束の第 1 Chern 類を保ち，さらに $H^+(X)$ の向きを保つなら，それは $\mathrm{Diff}^+(X)$ の元で実現できる．

が成り立つ．ここで $\not{D}_E$ は E 上の *spin*^{c} *Dirac* 作用素の族の指数で，$H^+(E)$ は E に伴う $H^+(X)$ の族である．

定理 10 の X に課される条件は，mod 2 Seiberg–Witten 不変量が消えていないような spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ で，$c_1(\mathfrak{s})$ が高い divisibility を持つようなものが存在し，さらに符合数 $\sigma(X)$ もある程度の divisibility を持つというものである.（これらの条件を満たす X は，先に述べたように楕円曲面・完全交叉の中に豊富に存在する.）そしてそのようなとき，族の指数定理から，$c_1(\not{D}_E) = 0 \bmod 2$ と分かり，したがって定理 11 から $w_2(H^+(X) \times_{\mathbb{Z}^2} \mathbb{R}^2) = 0$ が従う．

定理 11 は族の Bauer–Furuta 不変量の考察から得られる．族の Bauer–Furuta 不変量は，

$$F : \mathrm{Th}(\not{D}_E) \to \mathrm{Th}(H^+(E))$$

という形の写像を安定化したものである.（ここで Th は Thom 空間を意味する.）これは B 上の fiberwise な写像が Thom 空間に誘導する写像であり，ファイバーに F を制限して写像度を取ると Seiberg–Witten 不変量となる．このようにして定理の主張中の Seiberg–Witten 不変量，$\not{D}_E$, $H^+(E)$ が結びつくのである．

5. S^4 上のエキゾチック微分同相

最後に，ごく最近アナウンスされた S^4 上のエキゾチック微分同相について述べる．

定理 12 (Gabai–Gay–Hartman (2025, announced in [8]))**.** $\pi_0(\mathrm{Diff}^+(S^4)) \neq 1$.

すなわち,（位相的写像類群についての結果（定理 2）と合わせると）S^4 がエキゾチック微分同相を持つというのが彼らの主張である．証明の詳細は続きの論文で書かれるということで，detect する方法は族のゲージ理論とは全く異なる，pseudo-isotopy theory に基づくものであると [8] では述べられている．S^4 はゲージ理論的な手法を使うことが一般に極めて難しい対象であり，S^4 の微分構造や微分同相にゲージ理論でアプローチして得られた結果は現状皆無である．このような対象に手が届くというのは驚くべきことである．

彼らが非自明と主張している微分同相自体は，同じ著者らを含むグループによる二年ほど前の論文 [10] で既に，潜在的に非自明になり得る微分同相として注意されていたものである．これは渡邉忠之による 4 次元 Smale 予想の否定的解決 [32] で用いられていたテクニックと類似の方法で構成される微分同相である．なお，渡邉の結果では $\pi_1(\mathrm{Diff}(S^4)) \otimes \mathbb{Q}$ の非自明性をはじめ，$\mathrm{Diff}(S^4)$ の多くの高次ホモトピー群が非自明と示していたが，そこで用いられた不変量は $\pi_0(\mathrm{Diff}(S^4))$ に対しては定義されないものだった．また不変量は $\mathbb{Q}$ 上で定義されていた．対照的に，今回 Gabai–Gay–Hartman がアナウンスしたところでは，彼らは $\mathbb{Z}/2$ に値を取る準同型

$$\pi_0(\mathrm{Diff}^+(S^4)) \to \mathbb{Z}/2$$

を構成し，これを用いて興味深い微分同相を検出するようである．またこの微分同相は $\pi_0(\mathrm{Diff}^+(S^4))$ 内で位数 2 であることも分かるようである．したがって彼らの新しい不変量は，$\mathbb{Z}$ に持ち上がらない真に torsion 的な不変量ということになる．

なお，この微分同相は $S^2 \times S^2$ に移植するとその写像類が自明になるものと知られており，この微分同相から自動的に他の 4 次元多様体上のエキゾチック微分同相を作ることができるわけではない．他の重要な 4 次元多様体としては，$S^2 \times S^2, \mathbb{CP}^2, K3$ などがエキゾチック微分同相を許容するかは基本的な問題である．

References

[1] David Baraglia and Pedram Hekmati, *Brieskorn spheres, cyclic group actions and the Milnor conjecture*, J. Topol. **17** (2024), no. 2, Paper No. e12339, 40. MR4821357

[2] David Baraglia and Hokuto Konno, *A gluing formula for families Seiberg-Witten invariants*, Geom. Topol. **24** (2020), no. 3, 1381–1456. MR4157556

[3] ———, *On the Bauer-Furuta and Seiberg-Witten invariants of families of 4-manifolds*, J. Topol. **15** (2022), no. 2, 505–586. MR4441598

[4] ———, *Irreducible 4-manifolds can admit exotic diffeomorphisms*, arXiv:2412.14398 (2024). to appear in Duke Math. J.
[5] E. Brieskorn, *Singular elements of semi-simple algebraic groups*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2, 1971, pp. 279–284. MR437798
[6] Wolfgang Ebeling and Christian Okonek, *On the diffeomorphism groups of certain algebraic surfaces*, Enseign. Math. (2) **37** (1991), no. 3-4, 249–262. MR1151750
[7] Michael Hartley Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, Journal of Differential Geometry **17** (1982), no. 3, 357–453.
[8] David Gabai, David T. Gay, and Daniel Hartman, *Pseudo-isotopy and diffeomorphisms of the 4-sphere i: Loops of spheres*, arXiv:2505.12088 (2025).
[9] David Gabai, David T. Gay, Daniel Hartman, Vyacheslav Krushkal, and Mark Powell, *Pseudo-isotopies of simply connected 4-manifolds*, arXiv:2311.11196 (2023).
[10] ———, *Pseudo-isotopies of simply connected 4-manifolds*, arXiv:2311.11196 (2023).
[11] Søren Galatius and Oscar Randal-Williams, *The Alexander trick for homology spheres*, Int. Math. Res. Not. IMRN **24** (2024), 14689–14703. MR4843757
[12] Nobuo Iida, *A Bauer-Furuta-type refinement of Kronheimer and Mrowka's invariant for 4-manifolds with contact boundary*, Algebr. Geom. Topol. **21** (2021), no. 7, 3303–3333. MR4357606
[13] Nobuo Iida and Masaki Taniguchi, *Seiberg-Witten Floer homotopy contact invariant*, Studia Sci. Math. Hungar. **58** (2021), no. 4, 505–558. MR4592494
[14] Sungkyung Kang, JungHwan Park, and Masaki Taniguchi, *Exotic Dehn twists and homotopy coherent group actions*, arXiv:2409.11806 (2024).
[15] Hokuto Konno, Jianfeng Lin, Anubhav Mukherjee, and Juan Muñoz-Echániz, *The monodromy diffeomorphism of weighted singularities and Seiberg–Witten theory*, arXiv:2411.12202 (2024).
[16] ———, *On four-dimensional Dehn twists and Milnor fibrations*, arXiv:2409.11961 (2024).
[17] Hokuto Konno, Abhishek Mallick, and Masaki Taniguchi, *Exotic Dehn twists on 4-manifolds*, arXiv:2306.08607 (2023).
[18] Manuel Krannich and Alexander Kupers, *∞-operadic foundations for embedding calculus*, arXiv:2409.10991 (2024).
[19] Manuel Krannich and Oscar Randal-Williams, *Diffeomorphisms of discs and the second weiss derivative of btop(-)*, arXiv:2109.03500 (2021).
[20] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *The Dehn twist on a sum of two $K3$ surfaces*, Math. Res. Lett. **27** (2020), no. 6, 1767–1783. MR4216604
[21] Vyacheslav Krushkal, Anubhav Mukherjee, Mark Powell, and Terrin Warren, *Corks for exotic diffeomorphisms*, arXiv:2407.04696 (2024).
[22] Jianfeng Lin, *Isotopy of the Dehn twist on $K3 \# K3$ after a single stabilization*, Geom. Topol. **27** (2023), no. 5, 1987–2012. MR4621924
[23] Michael Lönne, *On the diffeomorphism groups of elliptic surfaces*, Math. Ann. **310** (1998), no. 1, 103–117. MR1600035
[24] Jin Miyazawa, *Boundary Dehn twists on Milnor fibers and Family Bauer–Furuta invariants*, arXiv:2410.21742 (2024).
[25] András Némethi, *On the Ozsváth-Szabó invariant of negative definite plumbed 3-manifolds*, Geom. Topol. **9** (2005), 991–1042. MR2140997
[26] Patrick Orson and Mark Powell, *Mapping class groups of simply connected 4-manifolds with boundary*, arXiv:2207.05986 (2022).
[27] Haochen Qiu, *The Dehn twist on a connected sum of two homology tori*, arXiv:2410.02461 (2024).
[28] Frank Quinn, *Isotopy of 4-manifolds*, J. Differential Geom. **24** (1986), no. 3, 343–372. MR868975
[29] Daniel Ruberman, *An obstruction to smooth isotopy in dimension 4*, Math. Res. Lett. **5** (1998), no. 6, 743–758. MR1671187
[30] Clifford Henry Taubes, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 809–822. MR1306023
[31] C. T. C. Wall, *Diffeomorphisms of 4-manifolds*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 131–140. MR163323
[32] Tadayuki Watanabe, *Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of* $\mathrm{Diff}(S^4)$, arXiv:1812.02448 (2018).