

CAT(0) 空間への等長埋め込み可能性について

豊田 哲 (工学院大学)

概 要

興味深い性質を持つさまざまな距離空間上の有限個の点の間の距離たちは、三角不等式だけでなく、空間の性質に応じたさまざまな不等式を満たす。CAT(0) 空間と呼ばれる、非正曲率性を持つ距離空間に対しても、その上で常に成立する不等式が数多く発見されている。では、逆に、CAT(0) 空間上で常に成立する不等式 (の族) を適切に指定して、CAT(0) 空間の部分集合を特徴づけることができるだろうか？ すなわち、距離空間上の任意の有限個の点の間の距離たちが指定された不等式を全て満たすなら、その距離空間は必ず何らかの CAT(0) 空間の部分集合と距離空間として同型になることが証明できるだろうか？ この問題に関わる研究のここ十年間くらいの進展について述べる。

1 CAT(0) 空間

定義 1. 距離空間 (X, d_X) が **CAT(0) 空間**であるとは、任意の $x, y \in X$ と任意の $t \in [0, 1]$ に対して、 $z_{x,y,t} \in X$ が存在して、任意の $w \in X$ に対して

$$d_X(z_{x,y,t}, w)^2 \leq (1-t)d_X(x, w)^2 + td_X(y, w)^2 - t(1-t)d_X(x, y)^2 \quad (1)$$

が成り立つことである。

いわゆる距離の公理のうち、三角不等式を除くものを全て満たす空間を半距離空間と呼ぶことにすると、半距離空間 (X, d_X) において、 $x, y, w \in X$ が三角不等式

$$d_X(x, y) \leq d_X(x, w) + d_X(y, w)$$

を満たすことは、任意の $t \in [0, 1]$ に対して

$$t(1-t)d_X(x, y)^2 \leq (1-t)d_X(x, w)^2 + td_X(y, w)^2 \quad (2)$$

が成り立つことと同値である。(2) は明らかに (1) から従うから、仮に、定義 1 において「距離空間」を「半距離空間」に置き換えたとしても、定義の条件を満たす空間のクラスに影響はない。定義 1 において、任意の $w \in X$ に対して (1) を満たすような $z_{x,y,t} \in X$ は、存在するなら x, y, t に対して一意的である。そこで、 X が CAT(0) 空間のとき、任意の $x, y \in X$ に対して、写像 $\gamma: [0, d_X(x, y)] \rightarrow X$ を $\gamma(td_X(x, y)) = z_{x,y,t}$, $t \in [0, 1]$ によって定めると、 γ は x と y を結ぶ測地線^{*1}となる。したがって、任意の CAT(0) 空間は測地的距離空間^{*2}である。CAT(0) 空間についてのより詳しい説明は [2], [4], [5], [17]などを参照されたい。

本研究は科研費 (課題番号:21K03254) の助成を受けたものである。

^{*1} $\mathbb{R}$ の区間 $[a, b]$ から距離空間 X への距離を保つ写像 $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ を $\gamma(a)$ と $\gamma(b)$ を結ぶ測地線と呼ぶ。

^{*2} 任意の $x, y \in X$ に対して、 x と y を結ぶ測地線が存在するとき、距離空間 X は測地的であるという。

2 CAT(0) 空間の 4 点間の距離が満たす不等式

Gromov [8] と Sturm [17] は、独立に、全ての CAT(0) 空間において次の不等式族が成り立つことを証明した。

定義 2. 距離空間 (X, d_X) が **⊠ 不等式** を満たすとは、任意の $s, t \in [0, 1]$, $x, y, z, w \in X$ に対し、次の不等式が成り立つことである：

$$\begin{aligned} & s(1-s)d_X(x, z)^2 + t(1-t)d_X(y, w)^2 \\ & \leq (1-s)(1-t)d_X(x, y)^2 + s(1-t)d_X(y, z)^2 + std_X(z, w)^2 + (1-s)td_X(w, x)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

不等式 (3) において、例えば $s = 1$ とすると (文字の役割は異なるが) 不等式 (2) が得られる。したがって、定義 1 について言及したのと同様に、⊠ 不等式を満たすという条件を半距離空間に対する条件として定義したとしても、条件を満たす空間のクラスに影響はない。「⊠ 不等式」という言葉は、Gromov の記号の使い方に基づく。Sturm は不等式 (3) を「weighted quadruple inequality」と呼んでいる。Gromov [8] と Sturm [17] は、任意の CAT(0) 空間が ⊠ 不等式を満たすという事実だけでなく、次の事実も証明している。

定理 3 (Gromov [8], Sturm [17]) 任意の測地的距離空間 X に対して、 X が ⊠ 不等式を満たすことは、 X が CAT(0) 空間であることと同値である。

不等式 (3) において、 $s = t = 1/2$ とすると、次の有名な不等式が得られる。

$$d_X(x, z)^2 + d_X(y, w)^2 \leq d_X(x, y)^2 + d_X(y, z)^2 + d_X(z, w)^2 + d_X(w, x)^2 \quad (4)$$

Berg と Nikolaev [7] は、測地的距離空間が CAT(0) 空間であるためには、実は、(4) さえ満たせば十分であることを証明した。また、佐藤 [16] はこの事実の別証明を与えている。

定理 4 (Berg-Nikolaev [7]) 任意の測地的距離空間 X に対して、任意の $x, y, z, w \in X$ に対して (4) が成り立つことは、 X が CAT(0) 空間であることと同値である。

(半) 距離空間 (X, d_X) から (半) 距離空間 (Y, d_Y) への写像 $f: X \rightarrow Y$ は、任意の $x, y \in X$ に対して $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$ を満たすとき、**等長埋め込み**と呼ばれる。また、(半) 距離空間 X に対して、CAT(0) 空間 Y と等長埋め込み $f: X \rightarrow Y$ が存在するとき、 X は **CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能**であるという。次節で改めて述べるが、CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な距離空間を特徴づけることは、Gromov が提示した有名な未解決問題である。しかし、CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な距離空間を特徴づけるためには、(まわりの) 空間が測地的であるという内在的でない条件は仮定するわけにはいかない。次の例は、空間が測地的であるという条件を排除すると、不等式 (4) の成立は CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であるための十分条件にはならないことを示している。

例 5 ([9, Proposition 3.3]). $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ とし, 半距離 $d_X: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ を

$$\begin{aligned} d_X(x_1, x_2) &= d_X(x_2, x_3) = d_X(x_3, x_4) = 1, \\ d_X(x_4, x_1) &= d_X(x_1, x_3) = d_X(x_2, x_4) = \sqrt{3} \end{aligned}$$

で定めると, (X, d_X) は距離空間であり, 任意の $x, y, z, w \in X$ は不等式 (4) を満たす. しかし, (X, d_X) は, $s = t = 1/(1 + \sqrt{3})$ に対する $\square$ 不等式は満たさないから, 如何なる CAT(0) 空間へも等長に埋め込むことはできない.

不等式 (4) の成立が CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であるための十分条件にはならないという事実を受けて, 次が自然な問いとなる.

質問 6 $\square$ 不等式を満たす距離空間は CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能か?

実は, 後に述べるように, 現在では質問 6 の答えは No であることが知られている. しかし, 次節で述べるように $\square$ 不等式の成立は CAT(0) 空間の部分集合の持つ性質を非常によく捉えているように見えるため, 十年ほど前にこの問題に取り組み始めた頃の筆者は, 正直なところ, どちらかといえば答えは Yes かもしれないと想像していた.

3 Gromov が導入したいろいろなもの

Gromov [8] は, 「It is unclear if there is a simple $\exists$ -free description of (non-geodesic!) subspaces in CAT(κ)-spaces.」 ([8, §15, Remarks.(b)]) と述べた. Gromov は同じ趣旨の問題提起を他の文献の中でも行っており, ここで提起されている問題は, しばしば, 次の形の「Gromov の問題」として取り上げられる.

問題 7 (Gromov) κ を実数とすると, CAT(κ) 空間へ等長埋め込み可能な距離空間を特徴づけよ.

本講演で主な興味の対象となるのは $\kappa = 0$ の場合だが, いくつかの主張を正確に述べるため, 本節では必要に応じて一般の実数 κ に対して記述を行う. $\kappa \neq 0$ に対する CAT(κ) 空間の定義については, [2], [4], [5]などを参照されたい.

Gromov [8] は, 問題 7 を念頭に, CAT(κ) 空間や CAT(0) 空間の部分集合のさまざまな内在的な性質を見出して名前を授けた. 本節では, それらのうち, 重要な二種類の性質について述べる. 実数 κ に対して, M_κ^2 を一定のガウス曲率 κ を持つ完備かつ単連結な 2 次元リーマン多様体, d_κ を M_κ^2 のリーマン計量が定める距離関数, D_κ を M_κ^2 の直径とする. すなわち,

$$D_\kappa = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} & \text{if } \kappa > 0, \\ \infty & \text{if } \kappa \leq 0 \end{cases}$$

である. Gromov [8] は, CAT(κ) 空間の部分集合の内在的な性質として, 次のような概念を定義した.

定義 8 (Gromov [8]). κ を実数, n を 4 以上の整数とする. また, $C_n = (V, E)$ を V を頂点集合, E を辺集合とする n 頂点のサイクルグラフとする. 距離空間 (X, d_X) が **Cycl_n(κ) 空間**であるとは, $\sum_{\{u,v\} \in E} d_X(f(u), f(v)) < 2D_\kappa$ を満たすような任意の写像 $f: V \rightarrow X$ に対して, 写像 $g: V \rightarrow M_\kappa^2$ で, 任意の $u, v \in V$ に対して次を満たすものが存在することである:

$$\begin{cases} d_\kappa(g(u), g(v)) \leq d_X(f(u), f(v)), & \text{if } \{u, v\} \in E, \\ d_\kappa(g(u), g(v)) \geq d_X(f(u), f(v)), & \text{if } \{u, v\} \notin E. \end{cases}$$

Reshetnyak's majorization theorem [15] により, $\text{CAT}(\kappa)$ 空間へ等長埋め込み可能な距離空間は, 任意の整数 $n \geq 4$ に対して $\text{Cycl}_n(\kappa)$ である. さらに, Gromov は次の二つの事実を示した.

定理 9 (Gromov [8]) κ を実数とするとき, 任意の測地的距離空間 X に対して, X が $\text{Cycl}_4(\kappa)$ 空間であることと X が $\text{CAT}(\kappa)$ 空間であることは同値である.

定理 10 (Gromov [8]) 任意の距離空間 X に対して, X が $\text{Cycl}_4(0)$ 空間であることと X が $\square$ 不等式を満たすことは同値である.

前節の定理 3 は, 定理 9 と定理 10 から直ちに従う. また, 定理 10 より, 前節の質問 6 は, 次のように言い換えることができる.

質問 11 $\text{Cycl}_4(0)$ 空間は $\text{CAT}(0)$ 空間へ等長埋め込み可能か?

さらに, Gromov [8] は, $\text{CAT}(0)$ 空間の部分集合の内在的な性質として, 次のような不等式族を満たすという性質を定義した.

定義 12 (Gromov [8]). n を 4 以上の整数とする. 半距離空間 (X, d_X) が **Wir_n 空間**であるとは, 任意の写像 $f: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow X$ が, 任意の $j \in \{2, 3, \dots, n-2\}$ に対して

$$\sin^2 \frac{\pi}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} d_X(f(i), f(i+j))^2 \leq \sin^2 \frac{j\pi}{n} \sum_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} d_X(f(i), f(i+1))^2 \quad (5)$$

を満たすことである.

不等式 (5) は, S^1 上の関数に対する古典的な Wirtinger 不等式の離散的かつ非線形の類似物とみなすことができる. 不等式 (5) において, j を $n-j$ に置き換えて得られる不等式は明らかに (5) と同じものであるから, $n/2$ を越えない最大の整数を $\lfloor n/2 \rfloor$ と表せば, Wir_n 不等式は $(\lfloor n/2 \rfloor - 1)$ 個の異なる不等式からなる. また, $\iota_n: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\iota_n(k) = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}k}{n}\right) \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

で定まる $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ のユークリッド平面 $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ への標準的な埋め込みとすると, 任意の $j \in \{2, 3, \dots, n-2\}$ に対して, (5) は $X = \mathbb{R}^2$, $f = \iota_n$ のとき等号で成立する.

任意の整数 $n \geq 4$ に対して, ユークリッド空間が Wir_n 不等式を満たすことは, Gromov が Wir_n 不等式を導入するより前に Pech [14] が証明していた. この事実と $\text{Cycl}_n(0)$ 空間の定義により, 任意の $\text{Cycl}_n(0)$ 空間は Wir_n である. すなわち, 任意の整数 $n \geq 4$ に対して, 次の関係が成り立つ:

$$\text{CAT}(0) \text{ 空間へ等長埋め込み可能} \implies \text{Cycl}_n(0) \implies \text{Wir}_n. \quad (6)$$

質問 11 および質問 6 では, $\text{Cycl}_4(0)$ 空間が, (6) の一番左にある条件「CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能」を満たすかが問われている. この問題に取り組むにあたって, まず, $\text{Cycl}_4(0)$ 空間が, (6) に並ぶ, より弱い二つの条件である $\text{Cycl}_n(0)$ や Wir_n を満たすかを問うことは自然であろう. ただし, 定理 9 より, 「測地的な $\text{Cycl}_4(0)$ 空間」は CAT(0) 空間そのものであり, 明らかに (6) に並ぶ全ての条件を満たすので, 問題となるのは $\text{Cycl}_4(0)$ 空間が測地的でない場合である.

Gromov も [8] において, 既にこの課題を取り上げている. まず, 「 $\text{Cycl}_4(0)$ 空間は Wir_n か?」という問いについては「Does the Cycl_4 -inequality imply all Wir_k , $k = 5, 6, \dots$, without assuming the space in question is geodesic?」([8, §25, Question]) という明示的な問いとして提示した. この問いは, 近藤, 筆者, 上原 [9] により肯定的に解決された.

定理 13 (Kondo-T.-Uehara [9]) 任意の $\text{Cycl}_4(0)$ 空間は, 任意の整数 $n \geq 4$ に対して Wir_n 空間である.

一方, より強い「 $\text{Cycl}_4(0)$ 空間は $\text{Cycl}_n(0)$ か?」という問いについては, Gromov は次のような否定的な見通しを示した. 「We shall see later on that $\text{Cycl}_4 \Rightarrow \text{Cycl}_k$ for all $k \geq 5$ in the geodesic case but this is apparently not so in general.」([8, §15, Remarks.(b)]). しかし, 空間が測地的であることを仮定しなくても「 $\text{Cycl}_4 \Rightarrow \text{Cycl}_k$ for all $k \geq 5$ 」が成立することが筆者 [19] により証明された.

定理 14 (T. [19]) κ を任意の実数とする. 任意の $\text{Cycl}_4(\kappa)$ 空間は, 任意の整数 $n \geq 4$ に対して $\text{Cycl}_n(\kappa)$ 空間である.

定理 13 および定理 14 は, $\text{Cycl}_4(0)$ 条件を満たすこと, すなわち, $\boxtimes$ 不等式の成立は CAT(0) 空間の部分集合の持つ性質をよく捉えていることを示唆しているように見える.

4 Lebedeva の 6 点空間

前節で述べたように, $\text{Cycl}_4(0)$ 条件, すなわち, $\boxtimes$ 不等式を満たすという条件は, CAT(0) 空間の部分集合の持つ性質をよく捉えているように見える. さらに, Gromov は [8, §7] において, 次の事実が成り立つことも言及している.

定理 15 (Gromov [8, §7]) $|X| \leq 4$ であるような任意の距離空間 X に対して, X が $\text{Cycl}_4(0)$ であることと, X が CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であることは同値である.

しかし, 2017 年に, 既に出版されていた Alexander-Kapovitch-Petrinin [1] の arXiv 版が更新され, 「 $\boxtimes$ 不等式を満たすにも関わらず, 如何なる CAT(0) 空間へも等長埋め込み不可能な 6 点距離空間が Nina Lebedeva により構成された」という事実が追記された. $\mathbb{R}^3$ 上の 2 点 p, q を結ぶ線分 $\{(1-t)p + tq \mid t \in [0, 1]\}$ を $[p, q]$, 集合 $[p, q] \setminus \{p, q\}$ を (p, q) と表す. また, $\mathbb{R}^3$ の部分集合 S の凸包を $\text{conv}(S)$ と表す. どの 2 点も互いに異なる 6 点 $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{z}_0, \tilde{z}_1 \in \mathbb{R}^3$ を,

$$\mathcal{I} = [\tilde{x}_0, \tilde{x}_1] \cup [\tilde{y}_0, \tilde{y}_1] \cup [\tilde{x}_0, \tilde{y}_0] \cup [\tilde{y}_0, \tilde{x}_1] \cup [\tilde{x}_1, \tilde{y}_1] \cup [\tilde{y}_1, \tilde{x}_0]$$

とおくとき, 次を満たすようにとる (図 1 参照):

$$|(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1) \cap (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1)| = 1, \quad |(\tilde{z}_0, \tilde{z}_1) \cap (\text{conv}(\{\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{x}_1, \tilde{y}_1\}) \setminus \mathcal{I})| = 1. \quad (7)$$

このとき, $L = \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{z}_0, \tilde{z}_1\}$ とし, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $d_\varepsilon: L \times L \rightarrow [0, \infty)$ を

$$d_\varepsilon(p, q) = \begin{cases} \|p - q\| + \varepsilon, & \text{if } \{p, q\} = \{\tilde{z}_0, \tilde{z}_1\}, \\ \|p - q\|, & \text{if } \{p, q\} \neq \{\tilde{z}_0, \tilde{z}_1\} \end{cases} \quad (8)$$

で定める. Lebedeva が証明したのは次の事実である.

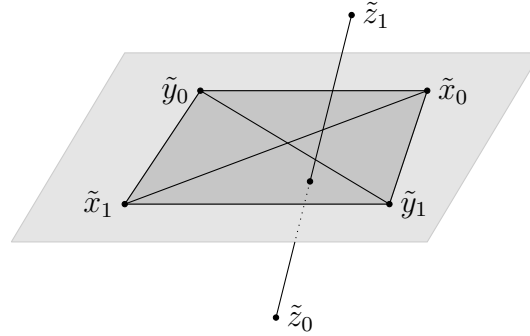


図 1 $\mathbb{R}^3$ 中の「Lebedeva の 6 点」

定理 16 (Lebedeva, cf. the arXiv version of [1, Section 7.2]) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 半距離空間 (L, d_ε) は如何なる CAT(0) 空間へも等長埋め込み不可能である. また, ある $C_L > 0$ が存在して, 任意の $\varepsilon \in (0, C_L]$ に対して, (L, d_ε) は $\boxtimes$ 不等式を満たす.

以下では, どの 2 点も互いに異なる 6 点 $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{z}_0, \tilde{z}_1 \in \mathbb{R}^3$ で (7) を満たすものがなす集合 $L = \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{z}_0, \tilde{z}_1\}$ に対して, (8) が定める半距離空間の族 $\{(L, d_\varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ を **Lebedeva の 6 点空間族** と呼ぶ.

定理 16 より, 質問 6 と質問 11 の答えはいずれも No となる. 質問 6 の否定的解決は CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な距離空間を特徴づけるためには $\boxtimes$ 不等式だけでは条件が足りないことを意味する. そのため, 全ての CAT(0) 空間上で成立する不等式で, その成立が $\boxtimes$ 不等式成立のための必要条件とならない新たな不等式を探さなければなら

ない. 定理 16 によれば, 次の問題の答えが得られれば, そのような不等式の最初の例も得られることになる.

問題 17 $\{(L, d_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ を任意の Lebedeva の 6 点空間族とすると, 如何なる $\varepsilon > 0$ に対しても (L, d_ε) が満たさない不等式で, 全ての CAT(0) 空間が満たすようなものを探せ.

CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な距離空間を特徴づけるためには, 問題 17 のように新たな不等式を探すことも重要だが, むしろ, 見つけてきた不等式の成立が CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であるための十分条件となることを証明することがより困難な課題となり得る. 定理 15 により, CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な距離空間の特徴づけに向けては, 何はともあれ, 次が最初の課題である.

問題 18 CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な, 含まれる点の個数が 5 の距離空間を特徴づけよ.

現在では, 問題 17 の答えとなる不等式が発見されており, 問題 18 も解決されている. 後に続く二つの節では, これらの問題の解決について述べる.

5 二次距離不等式

距離空間 (X, d_X) に対する条件が, 対角成分が全て 0 の n 次実対称行列 (a_{ij}) により, 「任意の $x_1, \dots, x_n \in X$ に対して

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} d_X(x_i, x_j)^2 \quad (9)$$

が成り立つ」という形で表すことができるとき, Andoni-Naor-Neiman [3, Section 1.4.1] にならって, この条件を (n 点に関する) **二次距離不等式**と呼ぶ. また, 任意の CAT(0) 空間が満たす二次距離不等式を **CAT(0) 二次距離不等式**と呼ぶことにする. 例えば, $\boxtimes$ 不等式, Wir _{n} 不等式, 1 節で述べた不等式 (2) などは CAT(0) 二次距離不等式である.

3 節で述べたように, Gromov [8] は CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であるためのさまざまな必要条件を導入した. しかし, 必要条件をどれだけ多く集めてきたとしても, 一般には, それは依然として必要条件である. Andoni, Naor, Neiman [3] による次の定理はその意味で重要である.

定理 19 (Andoni-Naor-Neiman [3, Proposition 3]) n を正の整数とする. $|X| = n$ である任意の距離空間 X に対して, X が CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であることは, X が n 点に関する全ての CAT(0) 二次距離不等式を満たすことと同値である.

定理 19 では, 距離空間が CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であるための十分条件が与えられてはいるものの, 「全ての」CAT(0) 二次距離不等式というものがどのようなものかほとんどわからないことが課題である. 定理 19 は, CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能

な距離空間を特徴づけるためには、次の問題を解決すればよいことを主張している (cf. Andoni-Naor-Neiman [3, Section 5]).

問題 20 CAT(0) 二次距離不等式を特徴づけよ.

筆者 [18] は次の事実を証明した.

定理 21 (T. [18]) 任意の距離空間 X に対して, X が $\boxtimes$ 不等式を満たすならば, X は 5 点に関する全ての CAT(0) 二次距離不等式を満たす.

この事実と定理 19 より次が従い, 前節で述べた問題 18 が解決する.

系 22 (T.[18]) $|X| = 5$ の任意の距離空間 X に対して, X が CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であることと X が $\boxtimes$ 不等式を満たすことは同値である.

Lebedeva-Petrinin [10] は定理 19 を経由しない系 22 の別証明を与えている. 系 22 は, CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な 5 点距離空間を特徴づけるには, $\boxtimes$ 不等式の他にも何ら新しい不等式を必要としないことを主張している. しかし, 定理 16 より, より多くの点を含む距離空間に対して CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能なものを特徴づけるには, 問題 17 が問うているような新たな不等式を探さなくてはならない.

Andoni, Naor, Neiman [3, Section 5.1] は, 問題 20 を念頭に, 既に知られている CAT(0) 二次距離不等式の確立方法を一般化し, 次のような大量の CAT(0) 二次距離不等式のリストを書き下した.

定理 23 (Andoni-Naor-Neiman [3]) n, m を正の整数とし, $c_1, \dots, c_m$ を正の実数とする. 各 $k \in [m]$ に対して, $p_1^k, \dots, p_n^k, q_1^k, \dots, q_n^k$ を, $\sum_{i=1}^n p_i^k = \sum_{j=1}^n q_j^k = 1$ を満たす正の実数とする. 各 $k \in [m]$ に対して, $(a_{ij}^k), (b_{ij}^k)$ を非負の実数を成分とする $n \times n$ 行列で, 任意の $i, j \in [n]$ に対して, $\sum_{s=1}^n a_{is}^k + \sum_{s=1}^n b_{sj}^k = p_i^k + q_j^k$ を満たすものとする. このとき, 任意の CAT(0) 空間 (X, d_X) と任意の $x_1, \dots, x_n \in X$ に対して次が成り立つ:

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i,j \in [n]: a_{ij}^k + b_{ij}^k > 0} \frac{c_k a_{ij}^k b_{ij}^k}{a_{ij}^k + b_{ij}^k} d_X(x_i, x_j)^2 \leq \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_k p_i^k q_j^k d_X(x_i, x_j)^2. \quad (10)$$

ここで, 正の整数 n に対して, $[n]$ は集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ を表す.

Andoni, Naor, Neiman が [3, Section 5.1] で述べているように, (当時は未発見の, 次節で述べる (11) を除く) これまでに使用されてきた全ての CAT(0) 二次距離不等式は悉く (10) の形で表されるように思われる. そのため, これらの不等式が CAT(0) 二次距離不等式の全貌を捉えているか, すなわち, (10) の形で表される全ての不等式を満たすことが CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能であるための必要十分条件となるかということが自然な質問となる (cf. [3, Question 31]). 筆者 [21] は次を証明し, (10) の形で表される全ての不等式を満たすことは, 6 点距離空間に限ったとしても, CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能

であるための十分条件にはならないことを示した。

定理 24 (T. [21]) 任意の Lebedeva の 6 点空間族 $\{(L, d_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ に対して, ある $\tilde{C}_L > 0$ が存在して, 任意の $\varepsilon \in (0, \tilde{C}_L]$ に対して (L, d_ε) は (10) の形で表される不等式を全て満たす。

6 CAT(0) 空間の 6 点間の距離が満たす不等式

前節の定理 24 より, 問題 17 の答えとなる不等式は, (10) の形の不等式の中には見出せない。筆者 [20] は, 問題 17 の答えとなる次のような不等式の族を発見した。

定理 25 (T. [20]) (X, d_X) を CAT(0) 空間とする。このとき, $a \leq s$ であるような任意の $a, b, c, s, t \in [0, 1]$ に対して, 任意の $x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1 \in X$ は次の不等式を満たす:

$$\begin{aligned} & sta((1-t)(1-a) + (1-s)tb) d_X(x_0, x_1)^2 \\ & + s(1-t)t(1-b)b d_X(y_0, y_1)^2 + ab(1-c)c d_X(z_0, z_1)^2 \\ & \leq (1-s)tab(1-c) d_X(x_0, z_0)^2 + stab(1-c) d_X(x_1, z_0)^2 + (1-t)ab(1-c) d_X(y_1, z_0)^2 \\ & + (1-s)tabc d_X(x_0, z_1)^2 + stabc d_X(x_1, z_1)^2 + (1-t)abc d_X(y_1, z_1)^2 \\ & + s(1-t)t(1-a)(1-b) d_X(x_0, y_0)^2 + s(1-t)ta(1-b) d_X(x_1, y_0)^2 \\ & + (1-t)t(s-a)b d_X(x_0, y_1)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

また, 任意の Lebedeva の 6 点空間族 $\{(L, d_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ に対して, L のみに依存する定数 $a, b, c, s, t \in (0, 1)$ で $a < s$ となるものが存在して, 如何なる $\varepsilon > 0$ に対しても (L, d_ε) はその定数 a, b, c, s, t に関して不等式 (11) を満たさない。逆に, $a < s$ を満たす任意の $a, b, c, s, t \in (0, 1)$ に対して, Lebedeva の 6 点空間族 $\{(L, d_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ で, 如何なる $\varepsilon > 0$ に対しても (L, d_ε) がその a, b, c, s, t に関して不等式 (11) を満たさないものが存在する。

定理 25 は問題 17 の答えとなる不等式を与えている。また, これらの不等式は, その成立が 図 不等式の成立のための必要条件にならないことが証明された最初の CAT(0) 二次距離不等式でもある。しかし, (11) の形で表される不等式の族が CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な 6 点距離空間を特徴づけるか否かは現時点では分かっていない。

7 最後に

CAT(0) 空間へ等長埋め込み可能な距離空間を特徴づける問題についての比較的最近の進展について述べてきたが, 述べてきたことをごく雑に総括すれば, しばらく動きがなかった問題にここ七, 八年くらいの間に少しだけ動きがあったということに過ぎず, 問題解決への道はまだ見えていない。また, 本稿で述べたのは等長埋め込みに関する問題だが, CAT(0) 空間へ bi-Lipschitz embedding や coarse embedding が可能な空間を特徴づけることも重要な問題であり, 多くのことが未解決である ([3], [6]などを参照)。さらに, CAT(0) 空間の他にも, 例えば, 曲率が下に有界な Alexandrov 空間など, 他の距離空間の

クラスに対しても同種の問題が考えられ、やはり多くのことが未解決である ([13]などを参照)。最後に、本稿の中で述べるべきであったが、述べることができなかった興味深い内容として、graph comparison に関する Lebedeva と Petrunin による結果がある。この結果については、[11] および [12] を参照されたい。

参考文献

- [1] S. B. Alexander, V. Kapovitch and A. Petrunin, Alexandrov meets Kirszbraun, in *Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference 2010*, 88–109, Int. Press, Somerville, MA, 2011; updated version: arXiv:1012.5636v2, 2017.
- [2] S. B. Alexander, V. Kapovitch and A. Petrunin, *Alexandrov geometry—foundations*, Graduate Studies in Mathematics, 236, Amer. Math. Soc., Providence, RI, [2024] ©2024.
- [3] A. Andoni, A. Naor and O. Neiman, Snowflake universality of Wasserstein spaces, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **51** (2018), no. 3, 657–700.
- [4] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 319, Springer, Berlin, 1999.
- [5] D. Y. Burago, Y. D. Burago and S. V. Ivanov, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [6] A. Eskenazis, M. Mendel and A. Naor, Nonpositive curvature is not coarsely universal, *Invent. Math.* **217** (2019), no. 3, 833–886.
- [7] I. D. Berg and I. G. Nikolaev, Quasilinearization and curvature of Aleksandrov spaces, *Geom. Dedicata* **133** (2008), 195–218.
- [8] M. Gromov, *J. Math. Sci. (N.Y.)* **119** (2004), no. 2, 178–200; translated from *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* **280** (2001), 100–140, 299–300.
- [9] T. Kondo, T. Toyoda and T. Uehara, On a question of Gromov about the Wirtinger inequalities, *Geom. Dedicata* **195** (2018), 203–214.
- [10] N. D. Lebedeva and A. Petrunin, 5-point CAT(0) spaces after Tetsu Toyoda, *Anal. Geom. Metr. Spaces* **9** (2021), no. 1, 160–166.
- [11] N. D. Lebedeva and A. Petrunin, Trees meet octahedron comparison, *J. Topol. Anal.*, online ready, <https://doi.org/10.1142/S1793525323500231>, 2023.
- [12] N. D. Lebedeva and A. Petrunin, Graph comparison meets Alexandrov, *Sib. Math. J.* **64** (2023), no. 3, 624–628.
- [13] N. D. Lebedeva and A. Petrunin, Five-point Toponogov theorem, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2024**, no. 5, 3601–3624.
- [14] P. Pech, Inequality between sides and diagonals of a space n -gon and its integral analog, *Časopis Pěst. Mat.* **115** (1990), no. 4, 343–350.
- [15] Y. G. Reshetnyak, Non-expansive maps in a space of curvature no greater than K , *Sibirsk. Mat. Ž.* **9** (1968), 918–927.
- [16] T. Sato, An alternative proof of Berg and Nikolaev’s characterization of CAT(0)-spaces via quadrilateral inequality, *Arch. Math. (Basel)* **93** (2009), no. 5, 487–490.
- [17] K.-T. Sturm, Probability measures on metric spaces of nonpositive curvature, in *Heat kernels and analysis on manifolds, graphs, and metric spaces (Paris, 2002)*, 357–390, *Contemp. Math.*, 338, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [18] T. Toyoda, An intrinsic characterization of five points in a CAT(0) space, *Anal. Geom. Metr. Spaces* **8** (2020), no. 1, 114–165.
- [19] T. Toyoda, A non-geodesic analogue of Reshetnyak’s majorization theorem, *Anal. Geom. Metr. Spaces* **11** (2023), no. 1, Paper No. 20220151, 22 pp..
- [20] T. Toyoda, Inequalities on six points in a CAT(0) space, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2025**, no. 6, Paper No. rna060, 10 pp..
- [21] T. Toyoda, The Andoni-Naor-Neiman inequalities and isometric embeddability into a CAT(0) space, arXiv:2404.13871, 2024.