

非コンパクト多様体の Morse 不等式

岸本大祐（九大数理）

1 背景

本講演では加藤毅さん（京都大）と蔦谷充伸さん（九州大）との共同研究で得られた、閉多様体上の Galois 被覆の全空間であるような非コンパクト多様体に対する Morse 不等式の解説をする。先行研究 [6] ではこのような多様体上の有界なベクトル場に対して Poincaré-Hopf の定理が成り立つことを証明しており、この研究はその続きである。これらの研究は有限伝搬ユニタリ作用素のホモトピー論 [3, 4, 5] から派生したのだが、ここではこのホモトピー論には言及しない。

まず古典的な Morse 不等式を思い出そう。 M を n 次元閉多様体とし、 b_i をその i 次 Betti 数とする。 Morse 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して c_i を f の指数 i の臨界点の個数とする。 このとき、不等式

$$c_k - c_{k-1} + \cdots + (-1)^k c_0 \geq b_k - b_{k-1} + \cdots + (-1)^k b_0$$

($k = 0, 1, \dots, n$) と等式

$$c_n - c_{n-1} + \cdots + (-1)^n c_0 = (-1)^n \chi(M)$$

が成り立つ。ただし、 $\chi(M)$ は M の Euler 標数である。これが古典的な Morse 不等式であり、その重要さや様々な応用に関しては述べるまでもないだろう。本講演では Morse 不等式を非コンパクト多様体に拡張することを考える。誰もが考えるようなこの問題に関する結果が、Morse 関数の臨界点の数が有限である場合など、本質的にコンパクトな場合から抜け出せないものが少しあるだけなのは驚きである。（非コンパクトな複素多様体に対する結果で Morse 不等式と題されるものはあるが、ここで考える素朴なものとは異なるので除外する。）一方、Roe は非コンパクト多様体の指数定理に関する論文 [10] に

I hope to show elsewhere that the numbers β' also satisfy “Morse inequalities” with respect to a suitably well-behaved Morse function.

と記しているが、残念ながら彼は Morse 不等式に関する結果を出版しなかった。ここで、 β' は彼が考えた Betti 数の亜種である。我々が考える非コンパクト多様体は Roe が論文 [10, 11] で考えたものの最も重要な例のひとつなので、我々の Morse 不等式は Roe の希望を少しは叶えているかもしれない。

2 設定

我々が考える非コンパクト多様体と Morse 関数を設定する.

2.1 多様体

Morse 不等式を非コンパクト多様体に拡張するとき, 次の素朴な問題がもちあがる.

問題 2.1. 1. Morse 関数の臨界点が無限個あるとき, どう数えるのか?

2. ホモロジーが無限次元のとき, Betti 数をどう定義するのか?

我々は非コンパクト多様体の Poincaré-Hopf の定理に関する先行研究 [6] のアイデアを応用してひとつめの問題を解決する. そのために, 以下, M は次の多様体とする.

- Galois 被覆 $G \rightarrow M \rightarrow M/G$ があり, M/G は向きづけられた n 次元連結閉多様体である.
- M/G の計量をもちあげて M の計量を与える.

M が非コンパクトであることと G が無限群であることが同値なことに注意する. 上記の通り, 群 G が従順なとき多様体 M は Roe [10, 11] が考えた非コンパクト多様体の最も重要な例の一つである. ([10, (6.6) Proposition] 参照)

多様体 M に対して, L^2 -**Betti** 数と呼ばれる Betti 数の亜種を考えることができ, 我々は問題 2.1 のふたつめをこの L^2 -Betti 数を採用することで解決する. L^2 -Betti 数の定義を述べる代わりに Lück によって証明された次の性質を紹介する. $b_k^{(2)}$ を M の k 次 L^2 -Betti 数とする.

定理 2.2. 正規部分群の列 $G = G_1 \triangleright G_2 \triangleright G_3 \triangleright \cdots$ が存在し, すべての k で指数 $|G_k : G_{k+1}|$ が有限のとき,

$$b_k^{(2)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k(M/G_k)}{|G : G_k|}$$

が成り立つ.

2.2 Morse 関数

Hirsch [2] は任意の連結な非コンパクト多様体は臨界点のない関数をもつことを証明した. よって, 非コンパクト多様体上には臨界点をもたない Morse 関数を常に存在するので, Morse 関数に制約がなければ Morse 不等式を考える意味がない. そこで, ここでは非コンパクト多様体の研究においてよくある有界性という制約 (cf. [6, 14]) を考える. 以下, 接続は Levi-Civita とする.

定義 2.3. n 次元 Riemann 多様体 X 上の関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が有界とは、 $0 \leq i \leq \max\{3, \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ に対して $\nabla^i f$ が有界であることをいう。

注意 2.4. この有界性には不満がある。本質的に重要なのは ∇f の有界性であり、それ以外は技術的な条件である。特に、関数 f 自身の有界性は仮定したくないが、いまのところどうやって仮定を外せばよいのかわからない。

Morse 関数の臨界点が集積点をもつと解析的に扱いづらくなるので、少なくとも私の手には負えなくなる。そこで、Morse 関数に次の制約も与える。

定義 2.5. Riemann 多様体 X 上の Morse 関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が一様とは、ある $\epsilon > 0$ が存在し、 f のどのふたつの臨界点も 2ϵ は離れていることをいう。

さらに臨界点に技術的な制約を加えた Morse 関数も考える。部分集合 $A \subset M$ の ϵ 近傍を $N(A; \epsilon)$ で表す。以下、 M/G の三角形分割を固定し、そのもちあげである M の G 不変な三角形分割を考える。

定義 2.6. 多様体 M 上の Morse 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ が強一様とは、 $\epsilon > 0$ に関して一様であり、さらに次の条件をみたすことをいう。

1. すべての $p \in \text{Crit}(f)$ に対して M のある開 n 単体 σ が存在し、 $N(p; \epsilon) \subset \sigma$ となる。
2. ある $\delta > 0$ に対して

$$|\nabla f| \geq \delta$$

が $M - N(\text{Crit}(f); \epsilon)$ で成り立ち、すべての $p \in \text{Crit}(f)$ に対して $\nabla^2 f(p)$ のすべての固有値 λ が

$$|\lambda| \geq \delta$$

をみたす。

注意 2.7. 強一様性の定義で不満なのはのひとつめの条件である。なぜなら、これだけが群 G の M への作用と微妙に関係するからである。この条件は外すことができると思っているが、どうすればよいのかわからない。強一様性のふたつめの条件は臨界点が「衰退」する様な場合を除くものであり、解析的な困難を避けるためのものである。

3 結果

主結果とその応用を紹介する。

3.1 基本領域

多様体 M の基本領域を導入する。 M/G の各開 n 単体の M へのもちあげをひとつずつ選ぶ。そして、 M/G の各開 k 単体 ($k < n$) の M へのもちあげを、す

でに選んだある開 n 単体の M へのもちあげの閉包に含まれるようひとつ選ぶ．
このようにして選んだ開単体のもちあげの和集合を K と書き， M の基本領域と呼ぶ．

例 3.1. $\mathbb{R}^2$ への $\mathbb{Z}^2$ の平行移動による作用を考える．このとき， $\mathbb{R}^2$ の単位正方形から平行な辺の一方をそれぞれ除いたものは $\mathbb{R}^2$ の基本領域である．この基本領域はトーラス $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ を切り開いたものであり，一般の M に対しても基本領域は M/G を切り開いたものだと考えられる．

定義より

$$M = \coprod_{g \in G} gK \quad (3.1)$$

が成り立つ．一様な Morse 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して関数

$$c_k: G \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \mapsto |\text{Crit}_k(f) \cap gK|$$

を定義する．ここで， $\text{Crit}_k(f)$ は f の指数 k の臨界点の集合である．Morse 関数の一様性の定義と K の閉包のコンパクト性より，関数 c_k は well-defined な有界関数である． c_k は $\text{Crit}_k(f)$ のタイル張り (3.1) に関する「雑な配置」を表すと考えられる．したがって，この関数 c_k は指数 k の臨界点を「数える」とみなせ，問題 2.1 のひとつめの解決だということにする．

3.2 主結果

主定理を述べるために記号を用意する． $\ell^\infty(G)$ を G 上の有界関数のなす Banach 空間とする．今， G は $\ell^\infty(G)$ に

$$(g \cdot \phi)(x) = \phi(xg)$$

により作用する．ただし， $x, g \in G, \phi \in \ell^\infty(G)$ である． $\ell^\infty(G)$ の部分空間で $g \cdot \phi - \phi$ により生成されるものを $\mathcal{I}$ とする．ただし， $g \in G, \phi \in \ell^\infty(G)$ である． $\bar{\mathcal{I}}$ を $\mathcal{I}$ の弱位相による閉包とする．関数 c_k は基本領域の選び方に依存しているが， $c_k \bmod \mathcal{I}$ が基本領域の選び方によらないことが次のようにわかる．分解 (3.1) を用いて [6] で有界微分形式の $\ell^\infty(G)/\mathcal{I}$ に値をもつ「積分」が定義された．この「積分」が基本領域の選び方によらないことが [6] で予想されており，Milizia [8] によりこの予想は肯定的に解決された．今，関数 c_k はある有界微分形式の「積分」の極限となるので $c_k \bmod \mathcal{I}$ は基本領域の選び方によらない．詳しくは [7] を参照せよ．

今， $\ell^\infty(G)$ は関数を各点で評価することにより順序 $\leq$ が与えられる． $\phi_1, \phi_2 \in \ell^\infty(G)$ に対して

$$\phi_1 \leq \phi_2 \bmod \bar{\mathcal{I}}$$

を，ある $\phi \in \ell^\infty(G)$ に対して $\phi_1 + \phi \leq \phi_2$ をみたすことと定義する．これは $\ell^\infty(G)$ の順序が誘導する $\ell^\infty(G)/\bar{\mathcal{I}}$ の前順序に他ならない．さらに，

$$\phi_1 \approx \phi_2 \bmod \bar{\mathcal{I}}$$

を $\phi_1 \leq \phi_2 \pmod{\bar{J}}$ かつ $\phi_2 \leq \phi_1 \pmod{\bar{J}}$ であることと定める． $\mathbb{1} \in \ell^\infty(G)$ を値が 1 である定数関数とする．

主定理は以下の通りである．

定理 3.2. $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ を有界な強一様 Morse 関数とするととき、

$$c_k - c_{k-1} + \cdots + (-1)^k c_0 \geq (b_k^{(2)} - b_{k-1}^{(2)} + \cdots + (-1)^k b_0^{(2)}) \mathbb{1} \pmod{\bar{J}}$$

($k = 0, 1, \dots, n$) と

$$c_n - c_{n-1} + \cdots + (-1)^n c_0 \approx (-1)^n \chi(M/G) \mathbb{1} \pmod{\bar{J}}$$

が成り立つ．

群 G が従順とは、 G 不変平均と呼ばれる正值線型写像 $\mu: \ell^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$ で $\mu(\mathbb{1}) = 1$ をみたすものが存在することをいう．定理 3.2 は群 G が従順なときしか意味をなさないことに注意する．実際、次の条件が同値であることが知られている．

1. 群 G は従順である．
2. $\ell^\infty(G) \neq \bar{J}$ が成り立つ．
3. $\mathbb{1} \not\equiv 0 \pmod{\bar{J}}$ が成り立つ．

G 不変平均は余不変量加群と呼ばれる $\ell^\infty(G)/\bar{J}$ を経由するので、 $\bar{J}$ による商はある種の繰り込み、もしくは、平均（これは Roe [10] が自分の指数定理や Atiyah の Γ 指数定理の説明として用いた文言である）の前段階だとみなせる．一方、Block-Weinberger [1] は距離空間のラージスケールな性質を調べるために一様有限ホモロジーを導入し、それが擬等長不変量であることを示した．今、余不変量加群 $\ell^\infty(G)/\bar{J}$ は G の 0 次元の一様有限ホモロジーと自然に同型である．したがって、包含写像 $G \rightarrow M$ は擬等長なので $\ell^\infty(G)/\bar{J}$ は M の擬等長不変量である．しかし、 $\ell^\infty(G)/\bar{J}$ が M の擬等長不変量かはわからない．

G 不変平均は $\ell^\infty(G)/\bar{J}$ を経由することから次の平均 Morse 不等式が得られる．

系 3.3. $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ を有界な強一様 Morse 関数とし、群 G が G 不変平均 μ をもつ従順群とする．このとき、

$$\mu(c_k) - \mu(c_{k-1}) + \cdots + (-1)^k \mu(c_0) \geq b_k^{(2)} - b_{k-1}^{(2)} + \cdots + (-1)^k b_0^{(2)}$$

($k = 0, 1, \dots, n$) と

$$\mu(c_n) - \mu(c_{n-1}) + \cdots + (-1)^n \mu(c_0) = (-1)^n \chi(M/G)$$

が成り立つ．

L^2 -Betti 数の新しい性質を平均 Morse 不等式から導く．次の補題は [7] で証明されている．

補題 3.4. 群 G が無限群で $\phi \in \ell^\infty(G)$ が有限個の $x \in G$ を除いて $\phi(x) = 0$ をみたすなら $\phi \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}}$ となる.

今, 系 3.3 より弱平均 Morse 不等式

$$\mu(c_k) \geq b_k^{(2)}$$

が得られる. よって, 次で与えられる L^2 -Betti 数の新しい性質が補題 3.4 から示せる. 群 G の作用と本質的に無関係な M のトポロジカルな性質を L^2 -Betti 数が導くという点でこの結果は興味深い.

系 3.5. 群 G が無限従順群なら $b_k^{(2)} \neq 0$ のとき M 上の任意の有界な強一様 Morse 関数は指数 k の臨界点を無限個もつ.

これ以外の応用として, Novikov と Shubin による π_1 作用を組み込んだ Morse 不等式 [9] が G が従順のときに再現できるというのもあげられる.

4 証明

以下, 定理 3.2 の証明の流れを解説する. 大まかな流れは, 基本的に Roe の本 [13] にある Witten 変形を用いた閉多様体に対する Morse 不等式の証明と同じだが, 用いる道具はいちから組み立てる.

4.1 区分的トレース

ベクトル束 $F \rightarrow X$ に対して $L^2(F)$ を L^2 切断のなす Hilbert 空間とする. G 不変な (計量が与えられた) ベクトル束 $E \rightarrow M$ に対して, $\{e_i\}_{i \in I}$ を $L^2(E|_K)$ の正規直交基底とする. 今, 同型写像

$$g^{-1}: E|_{gK} \rightarrow E|_K, \quad x \mapsto g^{-1}x$$

の導く同型写像 $(g^{-1})^*: L^2(E|_K) \rightarrow L^2(E|_{gK})$ を用いて $e_i^g = (g^{-1})^*(e_i)$ とすると, $\{e_i^g\}_{i \in I}$ は $L^2(E|_{gK})$ の正規直交基底である.

定義 4.1. 有界作用素 $A: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ が区分的 Hilbert-Schmidt とは

$$\rho_2(A): G \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \mapsto \left(\sum_{i \in I} \|Ae_i^g\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

が well-defined な有界関数であることをいう.

$\rho_2(A)$ は $\ell^\infty(G)$ に値をもつ「ノルム」と考えられる. 有界作用素 A と区分的 Hilbert-Schmidt 作用素 B に対して $\rho_2(AB) \leq \|A\| \rho_2(B)$ という基本的な不等式が成り立つ. しかし, 一般に

$$\rho_2(BA) \not\leq \rho_2(B)\|A\|, \quad \rho_2(A^*) \neq \rho_2(A)$$

となるので, 区分的 Hilbert-Schmidt 作用素は通常の Hilbert-Schmidt 作用素と全く同じようには扱えない.

補題 4.2. 区分的 Hilbert-Schmidt 作用素 $A, B: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ に対して関数

$$\rho_2(A, B): G \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \mapsto \sum_{i \in I} \langle Ae_i^g, Be_i^g \rangle$$

は well-defined な有界関数である.

補題 4.2 により, 次の定義は意味をなす.

定義 4.3. 作用素 $A: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ が区分的トレースクラスとは区分的 Hilbert-Schmidt 作用素 B, C により $A = B^*C$ となることをいう. このとき, 区分的トレースを

$$\mathrm{Tr}(A) = \rho_2(B, C)$$

により定める.

Roe [10] はある種の非コンパクト多様体上の作用素に対してトレースを定義した. 特に, G が従順なとき区分的トレースクラス作用素 $A: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ に対して, Roe のトレース $\tau(A)$ はが定義できる. 今, ある G 不変平均 $\mu: G \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$\tau(A) = \frac{\mu(\mathrm{Tr}(A))}{\mathrm{vol}(M/G)}$$

が成り立つことがわかる. よって, 区分的トレースは Roe のトレースの (3.1) に関する分解であると考えられる. 定義より次がすぐにわかる.

命題 4.4. 正值区分的トレースクラス作用素 $A: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ に対して次が成り立つ.

$$\mathrm{Tr}(A) \geq 0$$

ここで扱いやすい区分的 Hilbert-Schmidt 作用素を導入する.

定義 4.5. なめらかな作用素 $A: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ がガウス伝搬をもつとは, ある $C_1, C_2 > 0$ に対して A の核関数 $k_A(x, y)$ が[‡]

$$|k_A(x, y)| \leq C_1 e^{-C_2 d(x, y)^2}$$

をみたすことをいう.

補題 4.6. ガウス伝搬をもつなめらかな作用素 $A: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ に対して A と A^* は区分的 Hilbert-Schmidt である. 特に, ガウス伝搬をもつなめらかな作用素 $A, B: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ に対してその積 $AB: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ は区分的トレースクラスである.

擬等長写像である包含写像 $G \rightarrow M$ を正確に評価することにより, ガウス伝搬をもつ作用素に対して区分的トレースの交換性が証明できる.

命題 4.7. なめらかな作用素 $A, B: L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ がガウス伝搬をもつなら

$$\mathrm{Tr}(AB) \equiv \mathrm{Tr}(BA) \pmod{\bar{J}}$$

が成り立つ.

4.2 Witten 変形

ある種の有界性をみたす関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して作用素

$$d_t = e^{-tf} de^{tf}: L^2(\Lambda TM) \rightarrow L^2(\Lambda TM)$$

を関数 f による微分 d の **Witten 変形** という。ここで、 ΛTM は TM の外積束である。

$$D_t = d_t + d_t^*$$

とする。このとき、 D_t は本質的に自己共役であり、一次作用素 A に対して $D_t^2 = \nabla \nabla^* + A$ となるので、[12, Chapter 5] の意味で一般 Dirac 作用素である。一般 Dirac 作用素の汎関数計算を行うために次の関数のクラスを導入する。

定義 4.8. Schwartz 関数 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ である $C_1, C_2 > 0$ に対して

$$|\widehat{\phi}^{(i)}(x)| \leq C_1 e^{-C_2 x^2}$$

($i = 0, 1, \dots, 2\lceil \frac{n}{2} \rceil$) をみたすものの全体を $\mathcal{G}$ で表す。ただし、関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $\widehat{f}$ は Fourier 変換、 $f^{(i)}$ は i 階微分を意味する。

一般 Dirac 作用素の有限伝搬性 [13, Proposition 7.20] を用いて次が証明される。

命題 4.9. 任意の一般 Dirac 作用素 $\tilde{D}$ と $\phi \in \mathcal{G}$ に対して $\phi(\tilde{D})$ は Gauss 伝搬をもつ。特に、 $\phi(\tilde{D})$ は区分的 Hilbert-Schmidt である。

区分的トレースの正值性 (命題 4.4) とトレース性質 (命題 4.7) を用いて次が証明される。

命題 4.10. 関数 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が $\phi(x^2) \in \mathcal{G}$ をみたすとする。有界関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 、関数 $\psi(x) = x\phi(x)^2$ と $t > 0$ に対して

$$\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \text{Tr}(\psi(D_t^2|_{\Lambda^i TM})) \geq 0 \pmod{\bar{J}}$$

($k = 0, 1, \dots, n-1$) と

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \text{Tr}(\psi(D_t^2|_{\Lambda^i TM})) \equiv 0 \pmod{\bar{J}}$$

が成り立つ。

系 4.11. 関数 ψ, f を命題 4.10 の通りとする。 $\psi(x) \geq e^{-x^2}$ をみたすとき、 $t > 0$ と $s > 2$ に対して

$$\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \text{Tr}(\psi(D_t^2|_{\Lambda^i TM})) \geq \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \text{Tr}(e^{-sD_t^2}|_{\Lambda^i TM}) \pmod{\bar{J}}$$

($k = 0, 1, \dots, n-1$) と

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \text{Tr}(\psi(D_t^2|_{\Lambda^i TM})) \equiv \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \text{Tr}(e^{-sD_t^2}|_{\Lambda^i TM}) \pmod{\bar{J}}$$

が成り立つ。

強一様 Morse 関数に対して次が比較的簡単に証明される.

補題 4.12. 関数 ψ を命題 4.10 の通りとする. 有界な強一様 Morse 関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $t \rightarrow \infty$ のとき $\text{Tr}(\psi(D_t^2|_{\Lambda^i TM}))$ は c_i に一様収束する.

$\text{Tr}(e^{-sD_t^2}|_{\Lambda^i TM})$ と L^2 -Betti 数を結びつけるために次の作用素を考える.

定義 4.13. 作用素 $\tilde{d}: C_c^\infty(\Lambda TM) \rightarrow C_c^\infty(\Lambda TM)$ が抽象微分とは, 次の条件をみたすことをいう.

1. $\tilde{d}^2 = 0$
2. $\tilde{D} = D + A$ が本質的に自己共役な作用素 A で $\nabla^i A$ ($i = 0, 1, \dots, \lceil \frac{n}{2} \rceil$) が有界なものに対して成り立つ. ここで, $\tilde{D} = \tilde{d} + \tilde{d}^*$ である.

有界な関数による Witten 変形は抽象微分を与えることに注意する. $\mathcal{C}$ をコンパクトな台をもつ関数 $\phi: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ で $\phi(x^2)$ はなめらか, $0 \leq \phi \leq 1$ と $\phi(0) = 1$ をみたすもののなす集合とする. Roe によって導入された正規化された Betti 数 [12] の区分版を導入する.

定義 4.14. 抽象微分 $\tilde{d}$ の区分的に正規化された k 次 Betti 数 $b_k(\tilde{d})$ を

$$b_k(\tilde{d}): G \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \mapsto \inf_{\phi \in \mathcal{C}} \text{Tr}(\phi(\tilde{D}^2|_{\Lambda^k TM}))(g)$$

により定める.

区分的に正規化された Betti 数は有界関数である. 一般にコンパクトな台をもつ関数 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ にたいして $\phi(\tilde{D}^2)$ は区分的トレースクラスとは限らないが, ここでは区分的トレースを拡張することで上の定理を実現している. 通常の微分 d に対して

$$b_k(d) = b_k^{(2)} \mathbb{1}$$

となることに注意する. また, 次も証明できる.

命題 4.15. 任意の抽象微分 $\tilde{d}$ に対して $\text{Tr}(e^{-s\tilde{D}^2}|_{\Lambda^i TM})$ は $s \rightarrow \infty$ のとき $b_i(\tilde{d})$ に弱収束する.

Roe によって証明された正規化された Betti 数の不変性 [12, (2.6) Theorem] と同様の不変性が区分的に正規化された Betti 数に対して証明できる.

命題 4.16. 有界で自己共役な同型写像 $F: \Lambda TM \rightarrow \Lambda TM$ に対して抽象微分 $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2$ が $F\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2 F$ をみたすなら,

$$b_i(\tilde{d}_1) \approx b_i(\tilde{d}_2) \pmod{\bar{J}}$$

($i = 0, 1, \dots, n$) が成り立つ.

定理 3.2 の証明. 関数 e^{-tf} をかけるという写像 $\Lambda TM \rightarrow \Lambda TM$ は有界で自己共役な同型写像なので, 命題 4.16 より

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{Tr}(e^{-sD_t^2}|_{\Lambda^i TM}) = \lim_{s \rightarrow \infty} \text{Tr}(e^{-sD^2}|_{\Lambda^i TM}) = b_k^{(2)} \mathbb{1}$$

となる. よって, 系 4.11 と命題 4.12 より定理 3.2 は証明される. $\square$

参考文献

- [1] J. Block and S. Weinberger, Aperiodic tilings, positive scalar curvature, and amenability of spaces, *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), no. 4, 907-918.
- [2] M.W. Hirsch, On imbedding differentiable manifolds in euclidean space, *Ann. of Math. (2)* **73** (1961), 566-571.
- [3] T. Kato, D. Kishimoto, and M. Tsutaya, Homotopy type of the unitary group of the uniform Roe algebra on $\mathbb{Z}^n$, *J. Topol. Anal.* **15** (2023), no. 2, 495-512.
- [4] T. Kato, D. Kishimoto, and M. Tsutaya, Homotopy type of the space of finite propagation unitary operators on $\mathbb{Z}$, *Homology Homotopy Appl.* **25** (2023), no. 1, 375-400.
- [5] T. Kato, D. Kishimoto, and M. Tsutaya, Hilbert bundles with ends, *J. Topol. Anal.* **16** (2024), no. 2, 291-322.
- [6] T. Kato, D. Kishimoto, and M. Tsutaya, Vector fields on non-compact manifolds, *Algebr. Geom. Topol.* **24** (2024), no. 7, 3985-3996.
- [7] T. Kato, D. Kishimoto, and M. Tsutaya, Morse inequalities for noncompact manifolds, [arXiv:2411.04463](#).
- [8] F. Milizia, Bounded differential forms and coinvariants of bounded functions, [arXiv:2311.07731](#).
- [9] S.P. Novikov and M.A. Shubin, Morse inequalities and von Neumann II_1 -factors, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **289** (1986), no. 2, 289-292.
- [10] J. Roe, An index theorem on open manifolds. I, *J. Diff. Geom.* **27** (1988), no. 1, 87-113.
- [11] J. Roe, An index theorem on open manifolds. II, *J. Diff. Geom.* **27** (1988), no. 1, 115-136.
- [12] J. Roe, *Elliptic operators, Topology and Asymptotic Methods*, Pitman Res. Notes Math. Ser. **179**, Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.
- [13] J. Roe, On the quasi-isometry invariance of L^2 Betti numbers, *Duke Math. J.* **59** (1989), no. 3, 765-783.
- [14] S. Weinberger, Fixed-point theories on noncompact manifolds, *J. Fixed Point Theory Appl.* **6** (2009), 15-25.