

例外型コンパクト対称空間の極大対蹠集合 II

宇都宮大学 共同教育学部 佐々木優

Maximal antipodal sets of some compact symmetric spaces of exceptional type II

Yuuki Sasaki

Cooperative Faculty of Education,
Utsunomiya University

本講演の内容は、2022 年に東京理科大学で行われた第 69 回幾何学シンポジウムでの拙講演「例外型コンパクト対称空間の極大対蹠集合」の続きの内容である。

1 概要

リーマン多様体 M の各点 p に対して、 p を孤立固定点とするような対合的等長変換 s_p が対応しているとき、 M を対称空間といい s_p を p における点対称と呼ぶ。本講演では、 M は連結であるとする。 M の 2 点 $p, q \in M$ が対蹠的であるとは、 $s_p(q) = q (\Leftrightarrow s_q(p) = p)$ をみたすことをいう。部分集合 $S \subset M$ の任意の 2 点が対蹠的であるとき、 S を対蹠集合と呼ぶ [4]。対蹠集合間の包含関係で極大なものを極大対蹠集合といい、最大の濃度を持つ対蹠集合を大対蹠集合と呼ぶ。また、大対蹠集合の濃度を 2-number と呼び $\#_2 M$ と記す。定義から、大対蹠集合は極大対蹠集合である。以下、対称空間 M はコンパクトであると仮定する。

対蹠集合は、対称空間上の様々な数理と関連を持つことが指摘されている。例えばトポロジーとの関連として、 $\chi(M)$ を M のオイラー数とすれば

$$\chi(M) \leq \#_2 M$$

が成り立つ [4]。さらに、 $H_*(M; \mathbb{Z}_2)$ を M の $\mathbb{Z}_2$ -係数ホモロジーとすれば

$$\#_2 M \leq \dim H_*(M; \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つことも知られており [2]、特に対称 R 空間と呼ばれる特別なコンパクト対称空間では等号が成立する [10] (対称 R 空間でないコンパクト対称空間であっても等号が成り立つ例は存在する (例えば $G_2, G_2/SO(4), F_4$ など))。トポロジー以外にも、Tanaka-Tasaki によりコンパクトエルミート対称空間の 2 つの実形が横断的に交わるとき、その交叉は対蹠集合になることが示され [12]、この事実は Floer ホモロジーの計算へと応用されている [5]。また、Kurihara-Okuda は対蹠集合とデザインとの関係についても調べている [6]。

こうした背景から、対蹠集合について様々な研究が進められており、その一般化についても調べられている。例えば、Sugimoto はリーマン対称空間とは限らない擬リーマン対称空間において対蹠集合を決定する研究を行っている [9]。Ohno-Sakai は対蹠集合を対称空間だけではなく、より広く拡張されたクラスである Γ -対称空間において調べている。さらに、Tamaru は対称空間をカ

ンドルの特別なものと考えることで、対蹠集合をはじめとした点対称によって定まる構造を様々なカンドルにおいて調べている [11]. このように、対蹠集合に関する様々な研究が進められている一方で、全てのコンパクト対称空間について、その極大対蹠集合の分類・構成が完成しているわけではない. ここで、極大対蹠集合の分類とは極大対蹠集合の合同類の分類のことである. 例えば、古典型コンパクト対称空間においては、多くの対称空間で極大対蹠集合の分類・構成が完成しているが、有向実グラスマン多様体やスピノ群 $Spin(n), Ss(n)$ などにおいては極大対蹠集合の分類・構成は完成していない.

本講演では、単連結例外型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類・構成を紹介する. 単連結例外型コンパクト対称空間とは、

$$\begin{aligned} & \text{例外型コンパクト単純リー群 } G_2, F_4, E_6, E_7, E_8, \\ & G, FI, FII, EI, EII, EIII, EIV, EV, EVI, EVII, EVIII, EIX \text{ 型} \end{aligned}$$

の 17 種類のコンパクト対称空間のことである. これまでの先行研究により、

$$G_2, F_4, E_6, E_8, G \text{ 型}, FI \text{ 型}, FII \text{ 型}, EI \text{ 型}, \dots, EIV \text{ 型}, EVII \text{ 型}$$

については極大対蹠集合の分類・構成が完成している [1, 7, 8, 13, 15]. そこで本講演では、

$$E_7, EV \text{ 型}, EVI \text{ 型}, EVIII \text{ 型}, EIX \text{ 型}$$

についての極大対蹠集合の分類・構成を紹介する.

2 極地と極大対蹠集合

集合 X と全単射 $f: X \rightarrow X$ について $F(f, X) := \{x \in X; f(x) = x\}$ とする. コンパクト対称空間 M と $o \in M$ について、 $F(s_o, M)$ の連結成分を M における o の極地という [3]. 1 点集合となる極地を極とよぶ. $\{o\}$ は o の極となるので、自明な極という. o の極地を M_i^+ ($0 \leq i \leq k$) とし、 M_0^+ を自明な極とすれば、 $F(s_o, M) = \sqcup_{i=0}^k M_i^+$. 極地は M の全測地的部分多様体であるので、極地自身もコンパクト対称空間になる. G を M の合同変換群とし、 K_o を G の o におけるイソトロピー群とすれば K_o はそれぞれの極地に推移的に作用することが知られている.

2.1 M の極大対蹠集合から極地の極大対蹠集合

M_i^+ を極ではない極地とし、 $A(M_i^+)$ を M_i^+ の極大対蹠集合とする. このとき、 $\{o\} \cup A(M_i^+)$ は M の対蹠集合であるので、これを含む M の極大対蹠集合 $A(M)$ が存在する. $A(M) \cap M_i^+$ は M_i^+ の対蹠集合であり、 $A(M_i^+) \subset A(M) \cap M_i^+$ であるので、 $A(M_i^+)$ の極大性から $A(M_i^+) = A(M) \cap M_i^+$ となる. したがって、 M_i^+ の極大対蹠集合を調べるためには、 M の極大対蹠集合が分かればよい. さらに、 o を含む M の極大対蹠集合の K_o -作用の同値類の個数が l 個であるとする. それらの代表元を $A_a(M)$ ($1 \leq a \leq l$) と記す. このとき、 M_i^+ の任意の極大対蹠集合は $A_a(M) \cap M_i^+$ ($1 \leq a \leq l$) のいずれかと合同となり、 M_i^+ の極大対蹠集合の合同類を決定するためには $A_a(M) \cap M_i^+$ ($1 \leq a \leq l$) の中で M_i^+ の極大対蹠集合になるものを調べればよい.

2.2 極地の極大対蹠集合から M の極大対蹠集合

また, M における o の極地が $M_0^+, \dots, M_3^+$ であるとし, M_3^+ が極であり $M_3^+ = \{p\}$ であるとする. さらに, M_1^+, M_2^+ はそれぞれ極でないとする. このとき, M 上には各点をそれぞれの非自明な極へと移す被覆変換 τ が存在する. 被覆変換 τ は $\tau^2 = \text{id}_M$ を満たし, M 上の任意の合同変換と可換になることが知られている. さらに, $\tau(M_1^+) = M_2^+$ が成り立つ. そこで, $A(M_1^+)$ を M_1^+ の極大対蹠集合とすれば

$$A^\tau(M_1^+) := \{o\} \cup A(M_1^+) \cup \tau(A(M_1^+)) \cup \{p\}$$

は M 上の極大対蹠集合となる. 逆に, $A(M)$ を M の o を含む極大対蹠集合とすれば, $\tau(A(M)) \subset A(M)$ であることから $A(M) \cap M_1^+$ は M_1^+ の極大対蹠集合となる. したがって, M の極大対蹠集合を調べるためには M_1^+ の極大対蹠集合が分かればよい. さらに, M_1^+ の極大対蹠集合の合同類の個数が m 個であるとする. それらの代表元を $A_b(M_1^+)$ ($1 \leq b \leq m$) と記す. このとき, $A_b^\tau(M_1^+)$ ($1 \leq a \leq m$) は M の極大対蹠集合の合同類の代表元の候補となり, これらが互いに M の合同変換で移り合うか否かを調べることで M の極大対蹠集合の合同類を分類できる.

3 主結果

まず, 先行研究の結果から E_8 の極大対蹠集合について次の結果が得られている.

定理 3.1. [1] 例外型単純コンパクトリー群 E_8 について, 極大対蹠集合の合同類の数は 2 であり, 各合同類に含まれる極大対蹠集合の濃度はそれぞれ 256, 512 である. とくに, $\#_2 E_8 = 512$ である.

E_8 の 2 種類の極大対蹠集合のうち, 濃度が 256 であるものは $Spin(8)$ の極大対蹠集合から構成されるものであり, 濃度が 512 であるものは極大トーラスの極大対蹠集合から構成できるものである. E_8 の極大対蹠集合の 2 種類の合同類から, それぞれ単位元を含む代表元を選び, それらを $A_i(E_8)$ ($i = 1, 2$) と記す. ただし, $\#A_1(E_8) = 256, \#A_2(E_8) = 512$ であるとする. E_8 の極地は $EVIII, EIX$ 型コンパクト対称空間であることが知られている. そこで, $EVIII, EIX$ 型をそれぞれ単位元の極地であると考え. このとき各 $i = 1, 2$ について, $A_i(E_8) \cap EVIII$ は $EVIII$ の極大対蹠集合になることが確かめられ次の主張を得る.

定理 3.2. $EVIII$ 型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の合同類の数は 2 であり, 各合同類に含まれる極大対蹠集合の濃度はそれぞれ 199, 391 である. とくに, $\#_2 EVIII = 391$ である.

$EVIII$ 型の 2 種類の極大対蹠集合のうち, 濃度が 199 であるものは $Spin(8)$ の極大対蹠集合から得られるもので, 濃度が 391 であるものは極大トーラスから得られるものである. とくに, ワイル群の軌道は濃度が 391 の極大対蹠集合の部分集合となる. 次に EIX 型に関して, 各 $i = 1, 2$ について $A_i(E_8) \cap EIX$ は EIX 型の極大対蹠集合になることが確かめられ, 次の主張を得る.

定理 3.3. EIX 型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の合同類の数は 2 であり, 各合同類に含まれる極大対蹠集合の濃度はそれぞれ 56, 120 である. とくに, $\#_2 EIX = 120$ である.

EIX 型の 2 種類の極大対蹠集合のうち, 濃度が 56 であるものは $Spin(8)$ の極大対蹠集合から得られるもので, 濃度が 120 であるものは E_8 のワイル群の軌道である. EIX 型の 1 点 p を固定する. EIX 型の極大対蹠集合の 2 種類の合同類から, それぞれ p を含む代表元を選び, それらを $A_i(EIX)$ ($i = 1, 2$) と記す. ただし, $\#A_1(EIX) = 256, \#A_2(EIX) = 512$ であるとする. EIX 型の極地は $S^2 \cdot EVII$ と EVI 型コンパクト対称空間であることが知られている. そこで, これらの対称空間を EIX 型における p の極地であると考え. このとき各 $i = 1, 2$ について, $A_i(EIX) \cap EVI$ は EVI 型の極大対蹠集合になることが確かめられ, 次の主張を得る.

定理 3.4. EVI 型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の合同類の数は 2 であり, 各合同類に含まれる極大対蹠集合の濃度はそれぞれ 31, 63 である. とくに, $\#_2 EVI = 63$ である.

EVI 型の 2 種類の極大対蹠集合のうち, 濃度が 31 であるものは $Spin(8)$ の極大対蹠集合から得られるもので, 濃度が 63 であるものは E_7 のワイル群の軌道である.

次に E_7 の極大対蹠集合について考える. E_7 の極地は, 極が 1 つと EVI 型が 2 つであることが知られている. とくに, E_7 においては前節の議論を適用することができて, 次の主張が得られる.

定理 3.5. 例外型単純コンパクトリー群 E_7 について, 極大対蹠集合の合同類の数は 2 であり, 各合同類に含まれる極大対蹠集合の濃度はそれぞれ 64, 128 である. とくに, $\#_2 E_7 = 128$ である.

E_7 の 2 種類の極大対蹠集合のうち, 濃度が 64 であるものは $Spin(8)$ の極大対蹠集合から構成されるものであり, 濃度が 128 であるものは極大トーラスの極大対蹠集合である. 最後に EV 型の極大対蹠集合を考える. EV 型の極地は極が 1 つと, $G_4^*(\mathbb{C}^8)$ が 2 であることが知られている. ここで, $G_4(\mathbb{C}^8)$ は $\mathbb{C}^8$ の 4 次元部分空間からなるグラスマン多様体であり, $G_4^*(\mathbb{C}^8)$ は $G_4(\mathbb{C}^8)$ の bottom space である. $G_4^*(\mathbb{C}^8)$ の極大対蹠集合は Tanaka-Tasaki により分類されており, 極大対蹠集合の合同類の数は 3 であり, それぞれの合同類の代表元の濃度は 27, 35, 63 である [14]. この結果を使うことで次の主張を得る.

定理 3.6. EV 型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の合同類の数は 3 であり, 各合同類に含まれる極大対蹠集合の濃度はそれぞれ 56, 72, 128 である. とくに, $\#_2 EV = 128$ である.

EV 型の 3 種類の極大対蹠集合のうち, 濃度が 56 であるものは $Spin(8)$ の極大対蹠集合から得られるもので, 濃度が 72 であるものは E_7 のワイル群の軌道, 濃度が 128 であるものは極大トーラスの極大対蹠集合である.

以上から単連結例外型コンパクト対称空間について, 極大対蹠集合の分類・構成が完成した. その結果を次の表にまとめる.

M	合同類 の数	濃度	$\#_2 M$		M	合同類 の数	濃度	$\#_2 M$
G_2	1	8	8		G 型	1	7	7
F_4	1	32	32		FI 型	1	28	28
					FII 型	1	3	3
E_6	2	32, 64	64		EI 型	2	28, 64	64
					EII 型	2	28, 36	36
					$EIII$ 型	1	27	27
					EIV 型	2	31, 63	63
E_7	2	64, 128	128		EV 型	3	56, 72, 128	128
					EVI 型	2	31, 63	63
					$EVII$ 型	1	56	56
E_8	2	256, 512	512		$EVIII$ 型	2	199, 391	391
					EIX 型	2	56, 120	120

参考文献

- [1] J. F. Adams, *2-tori in E_8* , Math. Ann., **278**(1987), 2939
- [2] M. Amann, *Maximal Antipodal Sets and the Topology of Generalised Symmetric Spaces*, arXiv:2101.01587
- [3] B.Y.Chen, T.Nagano, *Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces II*, Duke. Math. J., **44**(1977), 745-755
- [4] B.Y.Chen, T.Nagano, *A Riemmanian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. J., **308**(1988), 273-297
- [5] H. Iriyeh, T. Sakai, H. Tasaki, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan **65** no.4 (2013), 1135-1151
- [6] H.Kurihara, T.Okuda, *Great antipodal sets on complex Grassmannian manifolds as designs with the smallest cardinalities*, J. Algebra, **559**(2020), 432-466
- [7] Y.Sasaki, *Maximal antipodal sets of F_4 and FI* , Journal of Lie Theory, **32**, No.1(2022), 281-300
- [8] Y.Sasaki, *Maximal antipodal sets of E_6 and some compact symmetric spaces*, Differential Geometry and its Applications, **85**(2022), 101934
- [9] K. Sugimoto, *Antipodal sets of pseudo-Riemannian symmetric R -spaces*, Differential Geometry and its Applications **93**(2024), 102104
- [10] M.Takeuchi, *Two-number of symmetric R -spaces*, Nagoya Math. J., **115**(1989),43-46
- [11] 田丸博士 「離散的な対称空間と quandle」 数学/日本数学会 編 77.2 (2025), 172-185.
- [12] M.S.Tanaka, H.Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan, **64** No.4 (2012), 1297-1332
- [13] M. S. Tanaka, H. Tasaki, *Antipodal sets of symmetric R -spaces*, Osaka J. Math. **50** No.1 (2013), 161-169
- [14] M. S. Tanaka, H. Tasaki, *Maximal antipodal sets of compact classical symmetric spaces and their cardinalities I*, Differential Geometry and its Applications **73** (2020) 101682
- [15] M.S.Tanaka, H.Tasaki, O.Yasukura, *Maximal antipodal sets related to G_2* , Proc. Amer. Math. Soc. vol.**150** No.10 (2022), 4533-4542