概 Hermitian 多様体上の偏微分方程式について

川村　昌也 (椙山女学園大学)*

1　概要

近年, 非 Käher 幾何学の研究が盛んに行われている. この背景には, 物理学における非 Kähler 性の要請, 例えば弦理論における Strominger システムの非 Kähler 幾何学における研究が挙げられる. Kähler 性の概複素の場合の代替として, いくつかの特別な計量が知られており, それらの計量の特徴を調べることで非 Kähler の場合の偏微分方程式の解の性質が調べられている. 例えば, balanced 計量 ($d(\omega^{n-1}) = 0$ を満たす) や SKT(Strong Kähler with torsion) 計量 ($\partial\bar{\partial}\omega = 0$ を満たす) は弦理論との関わりが知られており活発に研究が進められている. 本稿では, 概複素構造が可積分でない場合に話を一般化して問題を考察する. 多くの先行研究では, 複素構造が入っている場合を調べており, Hermitian 多様体における研究がほとんどである. その理由として, 概複素構造が可積分でない場合, つまり Nijenhuis テンソルが消えない場合は計算が非常に煩雑になり, 例えば偏微分方程式の滑らかな解の存在性を示す際に不可欠であるアプリオリ評価を得ることが難しくなることが挙げられる. まず初めに, 概複素幾何におけるふたつの困難を紹介する.

2　概複素の場合の困難

概複素多様体 (M, J) 上の概微分作用素 d は次のように分解される:

$$d : \Lambda^{p,q}M \to \Lambda^{p+2,q-1}M \oplus \Lambda^{p+1,q}M \oplus \Lambda^{p,q+1}M \oplus \Lambda^{p-1,q+2}M,$$
$$d = A + \partial + \bar{\partial} + \bar{A}.$$

ここで,

$$\partial : \Lambda^{p,q}M \to \Lambda^{p+1,q}M, \quad \bar{\partial} : \Lambda^{p,q}M \to \Lambda^{p,q+1}M,$$
$$A : \Lambda^{p,q}M \to \Lambda^{p+2,q-1}M, \quad \bar{A} : \Lambda^{p,q}M \to \Lambda^{p-1,q+2}M.$$

この作用素 A が消えることと, 概複素構造 J が可積分であることは同値である. 概複素の場合の困難の一つとして次が挙げられる.

困難 1. (i) $\partial^2 = 0$ が成り立たない. ($\partial^2 = -A\bar{\partial} - \bar{\partial}A$)

(ii) $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$ が成り立たない. ($\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial - A\bar{A} - \bar{A}A$)

困難 1. から, Hermitian の場合に一般に知られている滑らかな解のグラディエント評価を得る方法を適用することが難しくなる. 更にもう一つ以下の困難が挙げられる.

困難 2. 滑らかな実数値関数 u に対して $\nabla_{\bar{q}}\nabla_q\nabla_{\bar{p}}\nabla_p u$ と $\nabla_{\bar{p}}\nabla_p\nabla_{\bar{q}}\nabla_q u$ の差を計算するとき, $T^r_{\bar{p}\bar{q}} = N^r_{\bar{p}\bar{q}}$ を含む項が残り, $e_q\{T^r_{\bar{p}\bar{q}} e_r e_p(u)\}$ をどのように処理するかが問題になる. ここで, ∇ は Chern 接続, T はトーション, N は Nijenhuis テンソル, $\{e_i\}$ は局所 $(1,0)$ フレーム.

困難 2. における計算は, 滑らかな解の 2 階微分のアプリオリ評価をする際に必要であり, このままでは 3 階の微分が残るため求める評価が得られない. これら 2 つの困難を乗り越えるための方法を次に紹介する.

本研究は科研費（課題番号: JP21K13798) の助成を受けたものである.
2020 Mathematics Subject Classification. 32Q60 (primary); 53C15, 53C55 (secondary)
キーワード: 概 Hermitian 多様体, 偏微分方程式
*〒 464-8662 愛知県名古屋市千種区星が丘元町 17-3　e-mail: kawamura-m@sugiyama-u.ac.jp

3　概複素幾何学のための新しい方法

次の特別な局所ユニタリー $(1,0)$ フレームの存在が計算に必要になる.

補題 3.1. (cf. [8, Lemma 2.4]) (M,J,α) を概 Hermitain 多様体, ∇ を概 Hermitian 計量 α に関する Chern 接続とする. 任意の点 $p_0 \in M$ のまわりで, 局所ユニタリー $(1,0)$ 枠 $\{e_r\}_r$ で

$$\alpha_{i\bar{j}}(p_0) = \delta_{ij}, \quad \nabla e_r(p_0) = 0$$

を満たすように取れる.

概 Hermitain 多様体 (M,J,α) における一般の局所 $(1,0)$ 枠 $\{e_p\}_p$ に対して $T^k_{ij} = T^k(e_i, e_j)$, $T^k_{\bar{i}\bar{j}} = T^k(e_{\bar{i}}, e_{\bar{j}})$ を α に関するトーション $T = T' + T''$ ($T' \in \Gamma(\Lambda^{2,0}M \otimes T^{1,0}M)$, $T'' \in \Gamma(\Lambda^{0,2}M \otimes T^{1,0}M)$) の成分, Lie ブラケット積の構造係数 B^s_{kj}, $B^{\bar{k}}_{ij}$ は $[e_i, e_j] =: B^k_{ij}e_k + B^{\bar{k}}_{ij}e_{\bar{k}}$ で定義される. Γ^k_{ij} は Christoffel の記号で, $\Gamma^k_{ij} = \alpha^{k\bar{l}}e_i(\alpha_{j\bar{l}}) - \alpha^{k\bar{l}}\alpha_{j\bar{s}}B^{\bar{s}}_{i\bar{l}}$ で与えられる. ここで, $T^k_{\bar{i}\bar{j}} = N^k_{\bar{i}\bar{j}} = -B^k_{\bar{i}\bar{j}}$, N は Nijenhuis テンソル. また M 上の滑らかな関数 φ に対して,

$$\partial_p\partial_{\bar{q}}\varphi = (e_p e_{\bar{q}} - [e_p, e_{\bar{q}}]^{(0,1)})(\varphi), \quad e_i e_{\bar{j}}(\varphi) = \nabla_i \nabla_{\bar{j}}\varphi + B^{\bar{k}}_{i\bar{j}}e_{\bar{k}}(\varphi).$$

補題 3.1 より, p_0 のまわりで特別な局所 $(1,0)$ 枠 $\{e_r\}_r$ を取れば, この $(1,0)$ 枠 $\{e_r\}_r$ に対して $\Gamma^k_{ij}(p_0) = 0$, $T^k_{ij}(p_0) = -B^k_{ij}(p_0)$, $B^k_{i\bar{j}}(p_0) = B^{\bar{k}}_{i\bar{j}}(p_0) = 0$ が得られることに注意する.

補題 3.1 の局所ユニタリー $(1,0)$ 枠 $\{e_r\}_r$ を用いることで以下の 2 つの補題が得られる.

補題 3.2. (cf. [5, Lemma 3.1, 3.3]) M 上の滑らかな実数値関数 φ に対して次が得られる:

$$\partial^2\varphi(e_k, e_j) = T^{\bar{s}}_{jk}\bar{\partial}\varphi(e_{\bar{s}}),$$

$$\partial^2\bar{\partial}\varphi(e_k, e_j, e_{\bar{i}}) = \bar{\partial}(T^{\bar{s}}_{jk})(e_{\bar{i}})\bar{\partial}\varphi(e_{\bar{s}}), \quad \bar{\partial}\partial\bar{\partial}\varphi(e_{\bar{k}}, e_j, e_{\bar{i}}) = \partial(T^s_{\bar{i}\bar{k}})(e_j)\partial\varphi(e_s).$$

補題 3.3. (cf. [5, Lemma 3.2]) M 上の滑らかな実数値関数 φ に対して

$$T^s_{\bar{j}\bar{k}}e_i e_s(\varphi) = \mathcal{H}_{\bar{k}\bar{j}i}{}^s e_s(\varphi) + T^r_{\bar{k}\bar{j}}T^{\bar{s}}_{ir}e_{\bar{s}}(\varphi).$$

ここで, $\mathcal{H}$ は Chern 曲率の成分で, $\mathcal{H} \in \Gamma(\Lambda^{2,0}M \otimes \mathrm{End}(T^{1,0}M))$.

補題 3.2 と補題 3.3 により, 2 階及び 3 階の微分を 1 階の微分に落とすことができるため, 困難 1. と困難 2. を乗り越えるための方法になる.

4　放物型 Monge-Ampère 型方程式への応用

本稿では, コンパクト概 Hermitian 多様体上の放物型 Monge-Ampère 型方程式に関する結果を紹介する. 以下 (M^{2n}, J, α) を実 $2n$ 次元 $(n \geq 3)$ のコンパクト概 Hermitian 多様体とし, α_0 をもうひとつの M 上の概 Hermitian 計量とする. 次の放物型 Monge-Ampère 型方程式を任意の $\psi \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ に対して考察する. 以下, $*$ は Hodge のスター作用素とする.

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u = \log \dfrac{\left(\varpi + \frac{1}{n-1}[(\Delta u)\alpha - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u] + Z(\partial u)\right)^n}{\alpha^n} - \psi, \quad u(0) = u_0 \in C^\infty(M,\mathbb{R}) \\ \varpi + \frac{1}{n-1}[(\Delta u)\alpha - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u] + Z(\partial u) > 0 \quad \text{on } M, \end{cases}$$

$\varpi := \frac{1}{(n-1)!} * \alpha_0^{n-1}$, $\Delta u = \alpha^{\bar{j}i}\partial_i\partial_{\bar{j}}u$, $Z(\partial u) := \frac{1}{(n-1)!} * [\mathrm{Re}(\sqrt{-1}\partial u \wedge \bar{\partial}(\alpha^{n-2}))]$ とする. Zheng は [9] において, コンパクト Hermitian 多様体上で Gauduchon 性 $(\partial\bar{\partial}(\omega^{n-1}) = 0)$ を保存す

る放物型方程式 (1) の解の収束を示すことで Gauduchon 予想 (cf. [9, Conjecture 1.2]) の別証明を与えている. 論文 [5] では Zheng の議論を概 Hermitian に一般化して以下の結果を示している. ここで, 方程式 (1) の線形化作用素は 2 階の楕円型作用素なので放物型理論によって (1) の滑らかな解の短時間存在が分かることに注意する (短時間解の存在定理).

定理 4.1. (cf. [5, Theorem 1.1]) $M \times [0, \infty)$ 上で方程式 (1) の滑らかな一意解が存在する. ここで, u の正規化を $\mathrm{Vol}_\alpha(M) := \int_M \alpha^n$ に対して,

$$\tilde{u}(x,t) := u(x,t) - \frac{1}{\mathrm{Vol}_\alpha(M)} \int_M u(y,t)\alpha^n(y) \tag{2}$$

と定義すると, $\tilde{u}$ は $t \to \infty$ のとき, 滑らかな関数 $\tilde{u}_\infty$ に収束し, $\tilde{u}_\infty$ は次の楕円型方程式の一意解になる:

$$\log \frac{(\varpi + \frac{1}{n-1}[(\Delta\tilde{u}_\infty)\alpha - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\tilde{u}_\infty] + Z(\partial\tilde{u}_\infty))^n}{\alpha^n} = \psi + \tilde{b},$$

$$\tilde{b} := \frac{1}{\mathrm{Vol}_\alpha(M)} \int_M \Big(\log \frac{(\varpi + \frac{1}{n-1}[(\Delta\tilde{u}_\infty)\alpha - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\tilde{u}_\infty] + Z(\partial\tilde{u}_\infty))^n}{\alpha^n} - \psi \Big)\alpha^n.$$

定理 4.1 より, 与えられた滑らかな関数 $F \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ に対して, $\psi = (n-1)F$ と選び実定数 $\tilde{b} \in \mathbb{R}$ を加えると, 滑らかな関数 $\tilde{u}_\infty$ はコンパクト概 Hermitain 多様体 (M, J, α) 上で概 Hermitain 計量 α_0 に対して次の方程式の一意解になる:

$$\log \frac{\Big(\varpi + \frac{1}{n-1}[(\Delta_\alpha u)\alpha - \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u] + Z(\partial u)\Big)^n}{\alpha^n} = (n-1)(F+b). \tag{3}$$

この方程式は

$$\omega^{n-1} = \alpha_0^{n-1} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u \wedge \alpha^{n-2} + \mathrm{Re}\Big(\sqrt{-1}\partial u \wedge \bar{\partial}(\alpha^{n-2})\Big) > 0. \tag{4}$$

で与えられる概 Hermitian 計量 ω に対して次の方程式に同値:

$$\omega^n = e^{F+b}\alpha^n. \tag{5}$$

この議論から, [4, Theorem 1.2] の結果と同様に次の系が得られる.

系 4.1. (M^{2n}, J, α) を実 $2n$ 次元 $(n \geq 3)$ のコンパクト概 Hermitian 多様体とし, α_0 をもう一つの概 Hermitian 計量とする. 任意に与えられた $F \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ に対して, 組 $(u, b) \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ で, (4) で与えられる ω が方程式 (5) を満たすものが一意に存在する.

注意 4.1. 系 4.1 の証明は, Huang と Zhang による 2023 年の論文 [4, Theorem 1.2] の放物型方程式を用いた別証明である.

5 定理の証明の概要

実 $2n$ 次元 $(n \geq 3)$ のコンパクト概 Hermitian 多様体 (M^{2n}, J, α) 上で, 補題 3.1 より任意の点 $p_0 \in M$ のまわりで, 概 Hermitian 計量 α に関する局所ユニタリー $(1,0)$ フレーム $\{e_r\}$ で $\alpha_{i\bar{j}}(p_0) = \delta_{ij}$ かつ $\nabla e(p_0) = 0$ を満たすように取れる. この局所 $(1,0)$ フレーム $\{e_r\}$ を用いることで方程式 (1) の滑らかな解 u に対して補題 3.2 と補題 3.3 から次の関係式を得る.

$$T^s_{\bar{j}\bar{k}} e_i e_s(u) = \mathcal{H}_{\bar{k}\bar{j}i}{}^s e_s(u) + T^r_{\bar{k}\bar{j}} T^{\bar{s}}_{ir} e_{\bar{s}}(u), \tag{6}$$

$$
\partial^2 u(e_k, e_j) = T^{\bar{s}}_{jk}\bar{\partial}u(e_{\bar{s}}), \tag{7}
$$

$$
\partial^2\bar{\partial}u(e_k, e_j, e_{\bar{i}}) = \bar{\partial}(T^{\bar{s}}_{jk})(e_{\bar{i}})\bar{\partial}u(e_{\bar{s}}), \quad \bar{\partial}\partial\bar{\partial}u(e_{\bar{k}}, e_i, e_{\bar{j}}) = \partial(T^{s}_{\bar{i}\bar{k}})(e_j)\partial u(e_s). \tag{8}
$$

点 p_0 は任意に取られていたので, 上式 (6),(7),(8) は M 全体で成り立つ. 以下, $T \in (0,\infty]$ は方程式 (1) の最大存在時間とする.

命題 5.1. (cf. [5, Proposition 4.1]) u を $M\times[0,T)$ 上の方程式 (1) の滑らかな解とするとき, 正の定数 C が存在して $\sup_{M\times[0,T)}|\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u|_\alpha \leq CK$ を満たす. ここで C は (M^{2n},J,α), α_0, $\sup_M|\psi|$ に依存する定数で, $K := 1+\sup_{M\times[0,T)}|\nabla u|^2_\alpha$ とする.

証明の概要. 関係式 (6) によって, $e_q\{T^r_{\bar{p}\bar{q}}e_p e_r(u)\}$ は $e_q\{\mathcal{H}_{\bar{q}\bar{p}p}{}^s e_s(u) + T^r_{\bar{q}\bar{p}}T^{\bar{s}}_{pr}e_{\bar{s}}(u)\}$ で表され, 微分の階数をひとつ落とすことができる. □

関係式 (7),(8) と 2 階のアプリオリ評価を用いることで, 次のアプリオリなグラディエント評価が得られる.

命題 5.2. (cf. [5, Proposition 5.1]) u を $M\times[0,T)$ 上の方程式 (1) の滑らかな解とする. 任意に有限時間 $0<T'<T\leq\infty$ を選ぶ. このとき, (M^{2n},J,α), α_0, u_0, $\sup_M|\psi|$, $\|v\|_{C^2(M)}$ に依存する正の定数 C が存在して $\sup_{M\times[0,T')}|\nabla u|^2_\alpha \leq C$ を満たす.

証明の概要.
- (i) (7) によって $\partial^2 u$ はトーションの $T = T' + T''$ の成分 $\bar{T}''$ と $\bar{\partial}u$ で表せて, (8) によって, $\partial^2\bar{\partial}u$ (resp. $\bar{\partial}\partial\bar{\partial}u$) は $\bar{\partial}\bar{T}''$ (resp. $\partial T''$) と $\bar{\partial}u$ (resp. ∂u) で表せる.
- (ii) Guo-Phong-Tong のグラディエント評価を得る方法 (cf. [3]) と, 解析学でよく知られた方法である Sobolev 不等式や Moser の反復法などを援用する.

□

命題 5.1, 命題 5.2 の 1 階と 2 階のアプリオリ評価より方程式 (1) は一様放物型であり Schauder 評価によって, 高階のアプリオリ評価を得るためには $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u$ の Hölder 評価が得られれば十分である (cf. [2, Lemma 6.1]). この Hölder 評価は [1, Theorem 5.3] から得られる. 方程式 (1) を微分してブートストラッピング法を適用することで高階のアプリオリ評価が得られる.

命題 5.3. (cf. [5, Lemma 6.1]) u を $M\times[0,T)$ 上の方程式 (1) の滑らかな解とする. 任意に有限時間 $0<T'(<T\leq\infty)$ を選ぶ. このとき, 任意の $\varepsilon\in(0,T')$ と正の整数 k に対して, k, ε, (M^{2n},J,α), α_0, u_0 に依存する正の定数 C_k が存在して $\sup_{M\times[\varepsilon,T')}|\nabla^k u(x,t)|\leq C_k$ を満たす.

解の一意性は一般的な放物型方程式の理論から得られる. 長時間解については, 高階のアプリオリ評価 (命題 5.3) と短時間解の存在性定理から, $T<\infty$ とすると解を延長できることが分かり T が最大存在時間であることに反するため $T=\infty$ が得られる. Zheng により [9] で証明されている Harnack 不等式は, 概 Hermitian 幾何でも Hermitian の場合と同様に証明可能であり (cf. [2, Lemma 7.2]), この Harnack 不等式と (2) で定義した u の正規化 $\tilde{u}$ の C^0 評価 (cf. [9, Proposition 3.2]) により $\tilde{u}$ の定理 4.1 の収束の結果を得る.

6 その他の応用例

実 $2n$ 次元コンパクト概 Hermitian 多様体 (M^{2n},J,ω) 上でのその他の応用例を紹介する.

(i) Fu-Yau 方程式 (cf. [6])：Strominger システムを一般化した完全非線形 (fully non-linear) 方程式

$$\sqrt{-1}\partial\bar\partial(e^u\omega-\alpha e^{-u}\rho)\wedge\omega^{n-2}+n\alpha\sqrt{-1}\partial\bar\partial u\wedge\sqrt{-1}\partial\bar\partial u\wedge\omega^{n-2}+\mu\frac{\omega^n}{n!}=0 \tag{9}$$

ここで $\alpha(\neq 0)$ はスロープパラメータと呼ばれる定数で, ρ は滑らかな実 $(1,1)$ 形式, μ は滑らかな実数値関数とする.

(ii) Calabi フロー (cf. [7])：満渕エネルギーのグラディエントフローである 4 階の準線形 (quasilinear) 放物型方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=R_u,\quad u(0)=0 \tag{10}$$

ここで $R_u:=\mathrm{tr}_{\omega_u}\mathrm{Ric}^{(1,1)}(\omega_u)$ は $\omega_u=\omega+\sqrt{-1}\partial\bar\partial u$ の Chern スカラー曲率である.

(i), (ii) において, (M^{2n},J,ω) は擬 (quasi-)Kähler とすると $\bar\partial\omega=0$ は, ω に関するトーションについて $i,j,k=1,2,\ldots,n$ に対して $T^k_{ij}=0$ (i.e., $T'(\omega)=0$) であることと同値なので補題 3.2 と $\bar\partial(T^{\bar s}_{jk})(e_{\bar i})=T^{\bar l}_{kj}T^{\bar s}_{\bar l\bar i}$ より次の補題が得られる. 計算は任意の点 $p_0\in M$ のまわりで補題 3.1 の局所ユニタリー $(1,0)$ フレーム $\{e_r\}$ で行う.

補題 6.1. M 上の滑らかな実数値関数 φ に対して次が成り立つ:

$$\partial^2\bar\partial\varphi(e_k,e_j,e_{\bar i})=0,\quad \bar\partial\partial\bar\partial\varphi(e_{\bar k},e_i,e_{\bar j})=0. \tag{11}$$

関係式 (11) において点 p_0 は任意で取られているので, $\partial^2\bar\partial\varphi=0$, $\bar\partial\partial\bar\partial\varphi=0$ が M 上全体で成り立つ. この関係式は, (9) の場合には C^0 評価を得るのに不可欠であり, (10) の場合には擬 Kähler 性が Calabi フローに沿って保存されることを示すことに用いられる.

References

[1] Chu, J. *$C^{2,\alpha}$ regularities and estimates for nonlinear elliptic and parabolic equations in geometry*, Calc. Var. **55**, 8 (2016).

[2] Chu, J. *The Monge-Ampère equation on compact almost Hermitian manifolds*, J. Reine Angew. Math. **761** (2020), 1-24.

[3] Guo, B., Phong, D.H. and Tong, F. *A new gradient estimate for the complex Monge-Ampère equation*, Math. Ann. **388** (2024), 1045-1051.

[4] Huang L., Zhang, J. *Fully non-linear elliptic equations with gradient terms on compact almost Hermitian manifolds*, Math. Z. **303**, Article number 36 (2023).

[5] Kawamura, M. *On a parabolic Monge-Ampère type equation on compact almost Hermitian manifolds*, Mathematische Nachrichten **297** (11) (2024), 4232-4272.

[6] Kawamura, M. *The limit of the Fu-Yau equations on a product of two compact quasi-Kähler manifolds*, preprint

[7] Kawamura, M. *A Calabi flow on quasi-Kähler manifolds*, preprint

[8] Yu, C.-J. *Nonpositively curved almost Hermitian metrics on products of compact almost complex manifolds*, Acta Mathematica Sinica **31** (2015), 61-70.

[9] Zheng, T. *A parabolic Monge-Ampère type equation of Gauduchon metrics*, IMRN, **2019**, Issue 17 (2019), 5497-5538.