

対合付き 4 次元正則シンプレクティック多様体の解析的振率

今池 大 (ウエスタンデジタル合同会社)

1 導入

解析的振率は、コンパクト Kähler 多様体の Laplacian のスペクトルに対して定まる実数であり、Ray と Singer によって導入された。吉川は、K3 曲面と反シンプレクティック対合の組に対して、解析的振率の同変版である同変解析的振率を用いた不変量を構成した。この不変量は、各変形族のモジュライ空間上の関数として或る方程式を満たしている。さらにこの不変量は、Borcherds 積と Siegel モジュラー形式のテンソル積として得られる保型形式の Petersson ノルムで表されることも示されている。

単連結なコンパクト Kähler 多様体 X であって、至る所非退化な正則 2-形式 η が存在して $H^0(X, \Omega_X^2)$ が η で生成される時、 X を正則シンプレクティック多様体という。 X は複素偶数次元であり、2 次元正則シンプレクティック多様体は K3 曲面である。また、K3 曲面の n 点の Hilbert スキームもまた正則シンプレクティック多様体である。このような多様体と変形同値な正則シンプレクティック多様体を $K3^{[n]}$ 型多様体という。正則シンプレクティック多様体 X の正則対合 $\iota: X \rightarrow X$ であって、 $H^0(X, \Omega_X^2)$ に -1 倍で作用するものを反シンプレクティック対合と呼ぶ。

本講演では、 $K3^{[2]}$ 型多様体とその反シンプレクティック対合の組について考察する。この同変解析的振率を用いて不変量を構成し、周期領域から定まる直交型モジュラー多様体上の関数としてある方程式を満たすことを示す。またその応用として吉川の不変量や、ある種の 4 次元 Calabi-Yau 多様体の BCOV 不変量との比較に関する結果を紹介する。

2 不変量の構成

不変量を構成するために、まず同変解析的振率を定義する。 V をコンパクト Kähler 多様体、 $\theta: V \rightarrow V$ を正則対合とする。 θ が生成する位数 2 の群を μ_2 と表し、 θ により誘導される V の μ_2 -作用を考える。 $\overline{E} = (E, h_E)$ を μ_2 -同変正則ベクトル束とその μ_2 -不変 Hermite 計量の組とする。 $g \in \mu_2$ に対して、 $\overline{E}$ の同変解析的振率を、

$$\tau_g(\overline{E}) = \exp\left\{-\sum_{q \geq 0} (-1)^q q \zeta'_{0,q,g}(0)\right\}$$

と定義する．ここで、 $\zeta_{0,q,g}(s)$ は、 V 上の E に値をとる滑らかな $(0,q)$ -形式に作用するラプ
ラシアンのゼータ関数である． $g = 1$ の場合には、 $\tau_1(\bar{E})$ の代わりに $\tau(\bar{E})$ と表す．

(X, ι) を反シンプレクティック対合付き $K3^{[2]}$ 型多様体とする． h_X を X の ι 不変 Kähler
計量とし、対応する Kähler 形式を ω_X とする．簡単のため h_X は Ricci 平坦であると仮定す
る． h_X が誘導する正則余接束 Ω_X^1 の Hermite 計量も h_X で表す． $\bar{\Omega}_X^1 = (\Omega_X^1, h_X)$ の同変
解析的振率を $\tau_\iota(\bar{\Omega}_X^1)$ と表す．

対合 $\iota : X \rightarrow X$ の固定点集合を X^ι とする． X^ι は連結とは限らない滑らかな複素曲面で
ある．自明直線束 $\mathcal{O}_{X^\iota}$ とその自明な計量の組を $\bar{\mathcal{O}}_{X^\iota}$ で表す． $\bar{\mathcal{O}}_{X^\iota}$ の解析的振率を $\tau(\bar{\mathcal{O}}_{X^\iota})$
と表す．

$t = \text{Tr}(\iota^*|_{H^{1,1}(X)})$ とする． (X, ω_X) の体積を $\text{Vol}(X, \omega_X)$ で表す． $\omega_{X^\iota} = \omega_X|_{X^\iota}$ とし、
 $(X^\iota, \omega_{X^\iota})$ の体積を $\text{Vol}(X^\iota, \omega_{X^\iota})$ で表す． $\text{Vol}_{L^2}(H^1(X^\iota, \mathbb{Z}), \omega_{X^\iota})$ を $H^1(X^\iota, \mathbb{R})$ の格子
 $\text{Im}(H^1(X^\iota, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X^\iota, \mathbb{R}))$ の、 ω_{X^ι} が誘導する L^2 -計量に関する余体積とする．

定義 1. 実数 $\tau(X, \iota)$ を次のように定める．

$$\tau(X, \iota) = \tau_\iota(\bar{\Omega}_X^1) \text{Vol}(X, \omega_X)^{\frac{(t-1)(t-7)}{16}} \tau(\bar{\mathcal{O}}_{X^\iota})^{-2} \text{Vol}(X^\iota, \omega_{X^\iota})^{-2} \text{Vol}_{L^2}(H^1(X^\iota, \mathbb{Z}), \omega_{X^\iota}).$$

定理 2 ([6]). $\tau(X, \iota)$ は ι 不変な Ricci 平坦 Kähler 計量の取り方に依らず、 (X, ι) の不変量
を与える．

格子 L_2 を $L_2 = L_{K3} \oplus \mathbb{Z}e$ と定める．ここで、 L_{K3} は $K3$ 格子、 e は $e^2 = -2$ と
 $(e, L_{K3}) = 0$ を満たす元である．Boissière-Camere-Sarti [1] は、対合付き $K3^{[2]}$ 型多様体
 (X, ι) の不変部分空間 $H^2(X, \mathbb{Z})^\iota$ として得られる L_2 の双曲型部分格子を分類した．このよ
うな格子を許容的部分格子と呼ぶ．許容的部分格子 M に対し、 $K3^{[2]}$ 型多様体の MBM 類か
ら M の正錐に部屋構造が定まり、各部屋は Kähler 的部屋と呼ばれる．対合付き $K3^{[2]}$ 型多
様体の変形同値類は許容的部分格子 M と Kähler 的部屋 $\mathcal{K}$ の組によって定まる．

反シンプレクティック対合付き $K3^{[2]}$ 型多様体 (X, ι) は、 $(M, \mathcal{K})$ に対応する変形同値類に
属する時、 $(M, \mathcal{K})$ 型対合付き $K3^{[2]}$ 型多様体であるという． $(M, \mathcal{K})$ 型対合付き $K3^{[2]}$ 型多様
体の同型類全体の集合を $\tilde{\mathcal{M}}_{M, \mathcal{K}}$ と表す．Joumaah[7] は $(M, \mathcal{K})$ 型対合付き $K3^{[2]}$ 型多様体
の周期の空間として直交型モジュラー多様体 $\mathcal{M}_{M, \mathcal{K}}$ と、周期写像 $P_{M, \mathcal{K}} : \tilde{\mathcal{M}}_{M, \mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{M, \mathcal{K}}$
を構成し、 $P_{M, \mathcal{K}}$ の像が Zariski 開部分集合 $\mathcal{M}_{M, \mathcal{K}}^\circ := \mathcal{M}_{M, \mathcal{K}} \setminus \bar{\mathcal{Q}}_{M^\perp}$ であることを示した．
ここで $\bar{\mathcal{Q}}_{M^\perp}$ は $\mathcal{M}_{M, \mathcal{K}}$ の或る因子である．さらに周期写像 $P_{M, \mathcal{K}} : \tilde{\mathcal{M}}_{M, \mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{M}_{M, \mathcal{K}}^\circ$ は或る
因子を除いて単射であることを示した．

定理 2 と Joumaah の定理により、不変量 τ を各 $\mathcal{M}_{M, \mathcal{K}}^\circ$ 上の関数の見なすことができる．
このようにして τ から得られる $\mathcal{M}_{M, \mathcal{K}}^\circ$ 上の関数を $\tau_{M, \mathcal{K}}$ で表す．

3 曲率公式

$\tau_{M,\mathcal{K}}$ の曲率公式を説明する． $\omega_{\mathcal{M}_{M,\mathcal{K}}}$ を, Bergman 計量が誘導する $\mathcal{M}_{M,\mathcal{K}}$ の軌道体としての Kähler 形式とする． $\mathcal{M}_{M,\mathcal{K}}^\circ$ 上の $(1,1)$ -形式 $\sigma_{M,\mathcal{K}}$ を次で定める． 任意の $(X, \iota) \in \tilde{\mathcal{M}}_{M,\mathcal{K}}$ に対して,

$$\mathcal{P}_{M,\mathcal{K}}^* \sigma_{M,\mathcal{K}} = c_1(\pi_* \Omega_{\mathcal{X}^\iota / \text{Def}(X, \iota)}^1, h_{L^2}) - c_1(R^1 \pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\iota}, h_{L^2}) - 2c_1(\pi_* K_{\mathcal{X}^\iota / \text{Def}(X, \iota)}, h_{L^2}).$$

ここで, $\mathcal{P}_{M,\mathcal{K}} : \text{Def}(X, \iota) \rightarrow \mathcal{M}_{M,\mathcal{K}}$ は (X, ι) の倉西族 $\pi : (\mathcal{X}, \iota) \rightarrow \text{Def}(X, \iota)$ の周期写像である．

定理 3 ([6]). 関数 $\tau_{M,\mathcal{K}}$ は, $\mathcal{M}_{M,\mathcal{K}}^\circ$ 上で以下の方程式を満たす．

$$-dd^c \log \tau_{M,\mathcal{K}} = \frac{(t+1)(t+7)}{8} \omega_{\mathcal{M}_{M,\mathcal{K}}} + \sigma_{M,\mathcal{K}}.$$

定理 3 の応用として, $\tau_{M,\mathcal{K}}$ と 2-初等 K3 曲面の不変量との比較公式が得られる． そのために 2-初等 K3 曲面について説明する． M_0 を L_{K3} の原始的 2-初等双曲型部分格子とする． K3 曲面とその正則対合の組 (Y, σ) が M_0 型 2-初等 K3 曲面であるとは, $\alpha(H^2(X, \mathbb{Z})^\sigma) = M_0$ となる同型 $\alpha : H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow L_{K3}$ が存在することである． M_0 型 2-初等 K3 曲面のモジュライ空間は $M_0^\perp$ に付随する直交型モジュラー多様体 $\mathcal{M}_{M_0}$ の或る Zariski 開集合 $\mathcal{M}_{M_0}^\circ$ である ([9]). 吉川 [9] は, 同変解析的振率を用いて M_0 型 2-初等 K3 曲面 (Y, σ) の不変量 $\tau_{M_0}(Y, \sigma)$ を構成し, τ_{M_0} は Borcherds 積と Siegel モジュラー形式のテンソル積として得られる $\mathcal{M}_{M_0}$ 上の保形形式の Petersson ノルムで表されることを示した． M_0 型 2-初等 K3 曲面 (Y, σ) に対して, 2 点の Hilbert スキーム $Y^{[2]}$ の反シンプレクティック対合 $\sigma^{[2]} : Y^{[2]} \rightarrow Y^{[2]}$ が自然に誘導される．

定理 4 ([4]). 格子 M_0 の階数が 17 以下であることと, $\mathcal{M}_{M_0}$ の判別因子の既約性を仮定する． このとき, M_0 のみに依存する正定数 C_{M_0} が存在し, 任意の M_0 型 2-初等 K3 曲面 (Y, σ) に対して, 次が成り立つ．

$$\tau(Y^{[2]}, \sigma^{[2]}) = C_{M_0} \tau_{M_0}(Y, \sigma)^{-2(\text{rk}(M_0)-9)}.$$

M_0 型 2-初等 K3 曲面 (Y, σ) から上の構成で得られる対合付き K3^[2] 型多様体 $(Y^{[2]}, \sigma^{[2]})$ を (X_Y, ι_Y) と表す． Camere-Garbagnati-Mongardi [3] は, 商 X_Y / ι_Y の自然なクレパント特異点解消として 4 次元 Calabi-Yau 多様体 Z_Y を構成した． $\tau_{BCOV}(Z_Y)$ を Z_Y の BCOV 不変量とする

定理 5 ([5]). M_0 は定理 4 と同様であるとする． このとき, M_0 のみに依存する正定数 C'_{M_0} が存在し, 任意の M_0 型 2-初等 K3 曲面 (Y, σ) に対して, 次が成り立つ．

$$\tau_{BCOV}(Z_Y) = C'_{M_0} \tau(X_Y, \iota_Y).$$

具体例を述べるために、以下 $M_0 = U(2) \oplus E_8(2)$ を仮定する． M_0 型 2-初等 K3 曲面 (Y, σ) に対して、商 Y/σ は Enriques 曲面であり、この対応により $\mathcal{M}_{M_0}^\circ$ は Enriques 曲面の粗モジュライ空間である． $\mathcal{M}_{M_0}^\circ$ 上に零点を持たない重さ 4 の保型形式 Φ が Borchers [2] により構成されており、Borchers Φ 関数と呼ばれる．一方、Oguiso-Schröer [8] と Camere-Garbagnati-Mongardi [3] によると、 Z_Y は Enriques 曲面 Y/σ の 2 点の Hilbert スキームの普遍被覆である．

定理 6 ([5]). 正定数 C が存在し、任意の Enriques 曲面 S に対して、

$$\tau_{BCOV}(\widetilde{S^{[2]}}) = C \|\Phi([S])\|$$

が成り立つ．ここで、 $\widetilde{S^{[2]}}$ は S の 2 点の Hilbert スキームの普遍被覆であり、 $\|\Phi([S])\|$ は Borchers Φ 関数の Enriques 曲面 S の周期における Petersson ノルムの値である．

参考文献

- [1] S. Boissière, C. Camere, and A. Sarti, *Classification of automorphisms on a deformation family of hyper-Kähler four-folds by p -elementary lattices*, Kyoto J. Math. **56** (2016), no. 3, 465–499.
- [2] R. E. Borcherds, *The moduli space of Enriques surfaces and the fake Monster Lie superalgebra*, Topology **35** (1996), no. 3, 699–710.
- [3] C. Camere, A. Garbagnati, and G. Mongardi, *Calabi-Yau quotients of hyperkähler four-folds*, Canad. J. Math. **71** (2019), no. 1, 45–92.
- [4] D. Imai, *Analytic torsion for irreducible holomorphic symplectic fourfolds with involution, II: the singularity of the invariant*, preprint arXiv:2411.13911 (2024), with an appendix by Ken-Ichi Yoshikawa.
- [5] ———, *Analytic torsion for irreducible holomorphic symplectic fourfolds with involution, III: relation with the BCOV invariant*, preprint arXiv:2412.00041 (2024).
- [6] ———, *Analytic torsion for irreducible holomorphic symplectic fourfolds with involution, I: Construction of an invariant*, International Journal of Mathematics **36** (2025), no. 07.
- [7] M. Joumaah, *Non-symplectic involutions of irreducible symplectic manifolds of $K3^{[n]}$ -type*, Math. Z. **283** (2016), no. 3-4, 761–790.
- [8] K. Oguiso and S. Schröer, *Enriques manifolds*, J. Reine Angew. Math. **661** (2011), 215–235.
- [9] K.-I. Yoshikawa, *$K3$ surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space*, Invent. Math. **156** (2004), no. 1, 53–117.