

アファインはめ込みと quasi-Codazzi 構造

嘉陽海渡 (Kaito KAYO)*

概要

2つの torsion-free なアファイン接続が非退化な計量に関して双対であるとき、これを Codazzi 構造と呼ぶ。非退化な等積アファインはめ込みが与えられたとき、その誘導接続やアファイン基本形式を用いて、Codazzi 構造が自然に誘導されることが知られている。また逆に、Codazzi 構造が与えられたとき、それを誘導するアファイン接続が存在するための条件も知られている。本研究では、Codazzi 構造の定義を退化する計量を許容するように拡張し、それが（退化）等積アファインはめ込みと、上述のような関係を持つことを示す。

1 はじめに

多様体がアファインはめ込みとして実現可能であるための条件を調べることは、微分幾何における重要な問題の一つである。1918 年、Radon は 2 次元多様体がアファインはめ込みとして実現できるための条件を調べた [8]。一方、多次元の場合については 1990 年に Dillen–Nomizu–Vranksen により、統計構造が関与する形でその理論が拡張された [3]（定理 2.7）。統計構造は Codazzi 構造とも呼ばれ、計量を用いて定義される幾何構造である。講演者は先行研究 [4] において、quasi-Codazzi 構造を導入した。これは計量の退化を許容するように Codazzi 構造を一般化した幾何構造である。本研究では、quasi-Codazzi 構造が自然に現れる具体例としてアファインはめ込みを取り上げる。さらに、定理 2.7 の仮定を退化する計量へと弱めた際には、quasi-Codazzi 構造が関与する形で定理が拡張できることを紹介する。以下に概要を述べる。

2つの torsion-free なアファイン接続が計量に関して双対な関係にあるとき、それらを Codazzi 構造と呼ぶ。特にそのアファイン接続が共に平坦であるときには Hesse 構造と呼ばれ、Hesse 構造は様々な応用を持つ。しかし、応用上は計量が退化する場合があります。そのような場合には Hesse 構造を定義することができない。Nakajima–Ohmoto [6] により、計量の退化を許容する Hesse 構造として quasi-Hesse 構造が導入された。今回紹介する quasi-Codazzi 構造は Codazzi 構造の一般化であり、特に、接続が共に平坦な quasi-Codazzi 構造は quasi-Hesse 構造となっている。

アファインはめ込みとは超曲面はめ込み $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ と横断的ベクトル場 ξ の組であり、特にアファインはめ込みが非退化かつ等積であるとき、 M 上に計量とアファイン接続が誘導され、それらは Codazzi 構造をなす。逆に、アファイン微分幾何学の基本定理より、Codazzi 構造が与えられたとき、それを誘導する非退化等積アファインはめ込みが存在するための条件も知られている。本研究では、同様の関係が quasi-Codazzi 構造に対しても成り立つことを示す。すなわち、（退化）等積アファインはめ込みが与えられたときそれが quasi-Codazzi 構造を誘導することを示し、逆に quasi-Codazzi 構造が与えられたとき、それを誘導する（退化）等積アファインはめ込みが存在するための条件を報告する。

*E-mail : kayo.kaito.b9@elms.hokudai.ac.jp

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2119 の支援を受けたものです。

2 準備

2.1 Codazzi 構造

本節では統計多様体の定義とその性質を解説する．より詳しい解説は [1, 2, 5] を参照されたい． (M, h) を n 次元擬リーマン多様体とし， ∇ を M 上のアファイン接続とする．また， $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ とする．

定義 2.1 ([1, 2, 5]). ∇ の計量 h に関する双対接続 ∇^* を次で定義する．

$$Xh(Y, Z) = h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla_X^* Z).$$

h の非退化性より ∇^* は一意に存在し，明らかに $(\nabla^*)^* = \nabla$ が成り立つ．

また， ∇ と ∇^* が共に torsion-free，つまり，

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \quad \nabla_X^* Y - \nabla_Y^* X - [X, Y] = 0$$

が成り立つとき，3 つ組 (h, ∇, ∇^*) を M 上の Codazzi 構造という．特に ∇ と ∇^* が共に平坦（曲率が消えている）なとき，Hesse 構造と呼ぶ

命題 2.2 ∇ が torsion-free であるとする．このとき， ∇^* が torsion-free であるという条件と $(0, 3)$ -テンソル $\nabla h(X, Y, Z) := Xh(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$ が全対称であることが同値である．

2.2 アファインはめ込み

本節ではアファインはめ込みの定義と性質を紹介する．より詳しい解説は [5, 7] を参照されたい． $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ をはめ込み， D を $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の標準接続とする．

定義 2.3 $\xi \in \Gamma(f^*T\mathbb{R}^n)$ が f に沿った横断的ベクトル場であるとき，つまり，直和分解 $T\mathbb{R}^n = f_*TM \oplus \text{Span}\{\xi\}$ が成り立つとき，組 $\{f, \xi\}$ をアファインはめ込みと呼ぶ．

アファインはめ込み $\{f, \xi\}$ が与えられたとき，上記の直和分解を用いて， M 上に次の諸量が誘導される：

$$D_X f_* Y = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi, \quad D_X \xi = -f_*(S(X)) + \tau(X)\xi.$$

∇ を誘導接続， h をアファイン基本形式， S をアファイン型作用素， τ を横断的接続形式と呼ぶ．特に ∇ は torsion-free であり， h は対称性をもつ．これらの諸量は次の 4 つの基本方程式をみたすことが知られている．

- (i) Gauss 方程式： $R^\nabla(X, Y)Z = h(Y, Z)S(X) - h(X, Z)S(Y)$;
- (ii) Codazzi 方程式 (I)： $(\nabla_X h)(Y, Z) + \tau(X)h(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z) + \tau(Y)h(X, Z)$;
- (iii) Codazzi 方程式 (II)： $(\nabla_X S)(Y) - \tau(X)S(Y) = (\nabla_Y S)(X) - \tau(Y)S(X)$;
- (iv) Ricci 方程式： $h(X, S(Y)) - h(S(X), Y) = (\nabla_X \tau)(Y) - (\nabla_Y \tau)(X) = d\tau(X, Y)$.

$\tau \equiv 0$ が成り立つとき, $\{f, \xi\}$ を等積アファインはめ込みと呼ぶ. また, h が非退化であるときには $\{f, \xi\}$ を非退化アファインはめ込みと呼ぶ. $\{f, \xi\}$ が非退化等積アファインはめ込みであるとき, Codazzi 方程式 (I) と命題 2.2 により (h, ∇, ∇^*) は Codazzi 構造となる. ただし, ∇^* は ∇ の h に関する双対接続である.

例 2.4 $f: \mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, \phi(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\xi = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ とする. ただし, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ である. このとき $\{f, \xi\}$ はアファインはめ込みとなり, 特に ϕ によるグラフはめ込みと呼ばれる. グラフはめ込みに対して諸量を計算すると, 各 i, j について,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0, \quad h\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}, \quad S \equiv 0, \quad \tau \equiv 0$$

となる. したがって h が非退化, つまり ϕ のヘッセ行列が正則行列であるとき, グラフはめ込みは Hesse 構造を誘導する.

アファインはめ込みにより誘導される Codazzi 構造について, 双対接続は次のようにして構成することもできる.

定義 2.5 $\mathbb{R}_{n+1}$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ の双対空間とし, $\langle \alpha, \mathbf{v} \rangle := \alpha(\mathbf{v})$ とする. ただし, $\alpha \in \mathbb{R}_{n+1}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ である. このとき, 余法線写像 $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}_{n+1}$ を各点 $p \in M$ で

$$\langle \nu(p), f_* X_p \rangle = 0, \quad \langle \nu(p), \xi_p \rangle = 1$$

をみたすようにとる.

余法線写像の定義より, 微分写像 ν_* を計算すると,

$$\langle \nu_* X, f_* Y \rangle = -h(X, Y), \quad \langle \nu_* X, \xi \rangle = -\tau(X)$$

が成り立つ. したがって, h が非退化であるとき ν ははめ込みとなり, さらに ν は自身に横断的である. つまり, $\{\nu, -\nu\}$ はアファインはめ込みとなる. このとき $\{\nu, -\nu\}$ により誘導される接続は ∇ の h に関する双対接続となっている.

また, Codazzi 構造を誘導するアファインはめ込みの存在性について次の事実が知られている.

定義 2.6 ∇ を torsion-free なアファイン接続とする. 局所的に平坦な接続 $\bar{\nabla}$ と閉形式 ρ が存在し

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \rho(X)Y + \rho(Y)X$$

をみたすとき, ∇ を射影平坦であるという.

定理 2.7 [3] M を単連結多様体, (h, ∇, ∇^*) を Codazzi 構造とする. ∇ の Ricci テンソルが対称, ∇^* が射影平坦であるとき. この Codazzi 構造を誘導するアファインはめ込み $\{f, \xi\}$ が存在する.

3 Quasi-Codazzi 構造

本節では quasi-Codazzi 構造の定義, 及び, その構造と等積アファインはめ込みとの関連を紹介する. ここで quasi-Codazzi 構造とは, Codazzi 構造を計量の退化を許容するように拡張したもの

である．今回は簡単のために quasi-Codazzi 構造を特別な形で定義する．より詳細な定義は [4] を参照されたい．

E^+ を M 上の n 階のベクトル束， E^- を E^+ の双対ベクトル束とし， $E = E^+ \oplus E^-$ を $2n$ 階のベクトル束とする．また， $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ， $\eta^\pm, \zeta^\pm \in \Gamma(E^\pm)$ とする． E 上の計量 θ を

$$\theta(\eta^+ \oplus \eta^-, \zeta^+ \oplus \zeta^-) = \frac{1}{2} \{ \zeta^-(\eta^+) + \eta^-(\zeta^+) \}$$

として定める．

定義 3.1 ∇^+ を E^+ 上の接続とする．双対接続 ∇^- を E^- 上の接続として，次で定める．

$$X\theta(\eta^+, \eta^-) = \theta(\nabla_X^+ \eta^+, \eta^-) + \theta(\eta^+, \nabla_X^- \eta^-).$$

θ の非退化性から ∇^- は一意に決まる．

束写像 $\Phi := \Phi^+ \oplus \Phi^- : TM \ni X \mapsto \Phi^+(X) \oplus \Phi^-(X) \in E^+ \oplus E^-$ を $\text{rank } \Phi = n$ かつ $\theta(\Phi^+(X), \Phi^-(Y)) = \theta(\Phi^+(Y), \Phi^-(X))$ が成り立つようにとる．このとき， M 上の対称 $(0, 2)$ テンソル h を $h(X, Y) := \theta(\Phi(X), \Phi(Y))$ として定めると， $h(X, Y) = 2\theta(\Phi^+(X), \Phi^-(Y))$ が成り立つ．

定義 3.2 次の 2 つの条件，

$$\nabla_X^+ \Phi^+(Y) - \nabla_Y^+ \Phi^+(X) - \Phi^+([X, Y]) = 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla_X^- \Phi^-(Y) - \nabla_Y^- \Phi^-(X) - \Phi^-([X, Y]) = 0 \quad (3.2)$$

が成り立つとき，組 $(h, E, \Phi, \nabla^+, \nabla^-)$ を M 上の quasi-Codazzi 構造と呼ぶ．特に ∇^+ と ∇^- が共に平坦（曲率が消えている）なとき，quasi-Hesse 構造となる [6]．

注意 3.3 $(h, E, \Phi, \nabla^+, \nabla^-)$ を quasi-Codazzi 構造とする． h が非退化であることと， Φ^+ と Φ^- が同型写像になっていることは同値である．したがって， h が非退化であるときには， M 上のアファイン接続 ∇, ∇^* を $\Phi^+(\nabla_X Y) = \nabla_X^+ \Phi^+(Y)$ ， $\Phi^-(\nabla_X^* Y) = \nabla_X^- \Phi^-(Y)$ として定義することができる．このとき条件 (3.1) から，

$$\begin{aligned} \Phi^+(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) &= \Phi^+(\nabla_X Y) - \Phi^+(\nabla_Y X) - \Phi^+([X, Y]) \\ &= \nabla_X^+ \Phi^+(Y) - \nabla_Y^+ \Phi^+(X) - \Phi^+([X, Y]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ． ∇^* も同様である．したがって， ∇ と ∇^* は共に torsion-free であり， (h, ∇, ∇^*) は Codazzi 構造となる．

命題 3.4 M 上の $(0, 3)$ テンソル C を

$$C(X, Y, Z) = -2\{\theta(\nabla_X^+ \Phi^+(Y), \Phi^-(Z)) - \theta(\Phi^+(Z), \nabla_X^- \Phi^-(Y))\}$$

で定める． $\Phi^+ : TM \rightarrow E^+$ が同型であり，条件 (3.1) が成り立つと仮定する．このとき，条件 (3.2) が成り立つことと， C が全対称であることが同値である．

注意 3.5 Φ^+ が同型のとき, $\Phi^+(\nabla_X Y) := \nabla_X^+ \Phi^+(Y)$ として M 上の接続を定義すると,

$$\begin{aligned} C(X, Y, Z) &= -2\{\theta(\nabla_X^+ \Phi^+(Y), \Phi^-(Z)) - \theta(\Phi^+(Z), \nabla_X^- \Phi^-(Y))\} \\ &= -2\{\theta(\nabla_X^+ \Phi^+(Y), \Phi^-(Z)) - X\theta(\Phi^+(Z), \Phi^-(Y)) + \theta(\nabla_X^+ \Phi^+(Z), \Phi^-(Y))\} \\ &= 2\{X\theta(\Phi^+(Z), \Phi^-(Y)) - \theta(\Phi^+(\nabla_X Y), \Phi^-(Z)) - \theta(\Phi^+(\nabla_X Z), \Phi^-(Y))\} \\ &= Xh(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \\ &= \nabla h(X, Y, Z) \end{aligned}$$

が成り立つ.

例 3.6 (h, ∇, ∇^*) を M 上の Codazzi 構造とする. $E = E^+ \oplus E^- := TM \oplus T^*M$, $\Phi^+(X) := \text{id}(X)$, $\Phi^-(X) := h(X, -)$, $\nabla^+ := \nabla$, $\nabla_X^- \Phi^-(Y) := \Phi^-(\nabla_X^* Y)$ とする. このとき, $(h, TM \oplus T^*M, \Phi^+ \oplus \Phi^-, \nabla^+, \nabla^-)$ が quasi-Codazzi 構造となる.

次に (退化) 等積アファインはめ込みから自然に quasi-Codazzi 構造が誘導されることを紹介する. $\{f, \xi\}$ を等積アファインはめ込み, ν を余法線写像とする. $E = E^+ \oplus E^- := f_*TM \oplus (f_*TM)^*$, $\Phi^+ := f_*$, $\Phi^- := -\nu_*$ とし, E^+ 上の接続 ∇^+ を $\nabla_X^+ f_*(Y) := f_*(\nabla_X Y)$ とする. h は非退化とは限らないので ∇ の双対接続は定義できない. しかし, θ を用いて E^- 上に定義 3.1 の意味で双対接続を取ることができる.

$$X\theta(\eta^+, \eta^-) = \theta(\nabla_X^+ \eta^+, \eta) + \theta(\eta^+, \nabla_X^- \eta).$$

∇^+ の定義から条件 (3.1) が成り立ち, さらに, Codazzi 方程式 (I) と命題 3.4 から条件 (3.2) も成り立つ. したがって, $(h, f_*TM \oplus (f_*TM)^*, f_* \oplus -\nu_*, \nabla^+, \nabla^-)$ は quasi-Codazzi 構造になっている.

例 3.7 $\{f, \xi\}$ を ϕ によるグラフはめ込みとする. 例 2.4 では ϕ のヘッセ行列が正則行列であるときには Hesse 構造が誘導されることを紹介した. もし正則でないときには, 上記の記号の取り方によって quasi-Hesse 構造が誘導される.

逆に quasi-Codazzi 構造が与えられたとき, それを誘導するアファインはめ込みが存在するための条件は以下の通りである.

定義 3.8 $\mathcal{E}$ を M 上の n 階のベクトル束, $\nabla^\mathcal{E}$ を $\mathcal{E}$ 上の接続, $\psi: TM \rightarrow \mathcal{E}$ を束写像とし,

$$\nabla_X^\mathcal{E} \psi(Y) - \nabla_Y^\mathcal{E} \psi(X) - \psi([X, Y]) = 0$$

をみたすとする. $\nabla^\mathcal{E}$ が $(\mathcal{E}, \psi)$ に関して射影平坦であるとは, 局所的に $\mathcal{E}$ 上の平坦接続 $\overline{\nabla}^\mathcal{E}$ と $\rho \circ \psi$ が閉形式となる $(0, 1)$ -テンソル $\rho: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在し,

$$\overline{\nabla}_X^\mathcal{E} \gamma = \nabla_X^\mathcal{E} \gamma + \rho(\gamma)\psi(X) + \rho \circ \psi(X)\gamma$$

が成り立つときをいう. ただし, $\gamma \in \Gamma(\mathcal{E})$ である.

定理 3.9 M を単連結多様体, $(h, E, \Phi^+ \oplus \Phi^-, \nabla^+, \nabla^-)$ を M 上の quasi-Codazzi 構造, Φ^+ は同型とする. この quasi-Codazzi 構造を誘導するアファインはめ込みが存在するための条件は, $\text{tr}\{\eta^- \mapsto R^-(X, Y)\eta^-\} = 0$ かつ, ∇^- が (E^-, Φ^-) に関して射影平坦であることである. ただし, R^- は ∇^- の曲率である.

参考文献

- [1] S. Amari, *Information Geometry and Its Application*, Applied Math. Sci., 194, Springer (2016).
- [2] S. Amari, H. Nagaoka, *Method of Information Geometry*, A.M.S., Oxford Univ. Press (2000).
- [3] F. Dillen, K. Nomizu, L. Varanken, Conjugate Connections and Radon's Theorem in Affine Differential Geometry, *Monatsh. Math.* **109** (1990), 221–235
- [4] K. Kayo, Statistical manifold with degenerate metric, *Information Geometry* **7** (2024), 229–252.
- [5] H. Matsuzoe, Statistical manifolds and affine differential geometry, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **57** (2010), 303–321.
- [6] N. Nakajima, T. Ohmoto, The dually flat structure for singular models, *Information Geometry. J.* **4** (2021), 31–64.
- [7] K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine Differential Geometry-Geometry of Affine Immersions-*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [8] J. Radon, Die Grundgleichungen der affinen Flächentheorie, *Leipziger Berichte* **70** (1918), 91–107.