Analysis of Contraction Mappings to the Complement of Closed Curves

折笠　俊一郎　(京都大学)*

概　　要

スカラー曲率と剛性に関するGromovの問題提起に対する講演者の研究[Ori25]を中心に, 本稿ではその幾何学的背景とアプローチを概説する.

1. 背景:剛性が破れるのはいつか?

スカラー曲率に関して,「剛性」と呼ばれる現象が知られている. その中でも最も基本的な定理は以下のLlarullによるものである. ここでRiemann多様体X, Y間のC^1級写像$f : X \to Y$が **1-contracting** であるとは$\mathrm{Dil}_1(f) \leq 1$であることとし, **area-decreasing** であるとは$\mathrm{Dil}_2(f) \leq 1$であることとする. (次節のk-dilation $\mathrm{Dil}_k(f)$の定義も参照.) 以降$\mathbb{S}^n$は単位球面$\mathbb{S}^n = (S^n, g_{std})$とする.

Theorem 1.1 (Llarull, [Lla98]) Mをn次元のコンパクト, スピンRiemann多様体とする. さらに写像度が非ゼロの1-contracting map $f : (M, g) \to (S^n, g_{std})$および任意の$x \in M$に対して,

$$Sc(g)_x \geq n(n-1)$$

を仮定する. このとき $f : (M, g) \xrightarrow{\cong} (S^n, g_{std})$ は等長同型である.

したがって, 上の定理の帰結として特に, 球面上のRiemann計量gであって$Sc(g) \geq Sc(g_{std}) \equiv n(n-1)$および$g \geq g_{std}$を各点で満たすならば, $g \equiv g_{std}$であることがわかる.

近年のGromovによる問い([Gro18])として, 上記のような剛性は, 部分集合Σを除いていくと破れるのであろうか? という問いが提起されている.

Question 1.2 (Gromov, [Gro18]) $\Sigma \subset S^n$ を余次元2以上の閉部分集合とし, gを$S^n \setminus \Sigma$上のRiemann計量であって$g \geq g_{std}$かつ$Sc(g) \geq Sc(g_{std}) \equiv n(n-1)$を満たすとする. このとき$\Sigma$がどのような条件であれば, $g \equiv g_{std}$となるか?

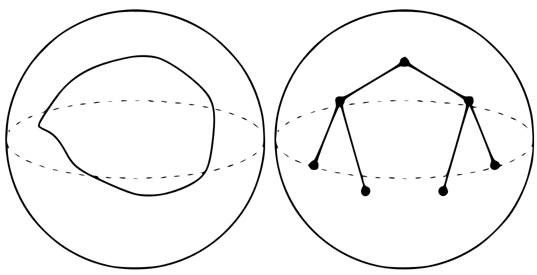

図 1: 単位球面内の閉部分集合Σ

上の問いは完備性を課さないが, 定義域が完備な場合もRiemann多様体の端がワイルドである可能性も含むので, 十分難しく次の問いもある.

Question 1.3 (Gromov, [Gro18]) $\Sigma \subset S^n$ を余次元2以上の閉部分集合とし, X を向き付けられた n 次元完備Riemann多様体とする. また, $f : X \to \mathbb{S}^n \setminus \Sigma$ をproperかつ写像度が非

本研究は, JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2110 の支援を受けたものである.
* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学理学研究科 数学教室
e-mail: orikasa.shunichiro.34x@st.kyoto-u.ac.jp

ゼロの滑らかな写像とし, さらにこの写像が1-contracting（またはarea-decreasing）であるとする. このときΣがどのような条件であれば, $\inf Sc(X) < n(n-1)$となるか? 特に滑らかな閉曲線$Z \subset S^n (n \geq 3)$で, 単位球面のスピン構造に関するホロノミーが非自明なものに対して, 不等式$\inf Sc(X) < n(n-1)$が成り立つかどうか?

これらの問いに対する先行研究はQuestion1.2に関して, 適切な条件下で剛性が成り立つという結果がある. (Σが有限集合で特に対蹠点の場合 [BBH$^+$24] の結果がある. また計量がL^∞計量のクラスでΣが単位半球面に含まれる場合の研究 [WX24] があるようである.) Question 1.3に関しては [Xie23] でΣが単位半球面に含まれ, 1-dilationの条件を緩めた場合の結果があるが, 元の問いの設定で特にホロノミーが非自明な場合は知られていなかった.

本講演の主定理は, Question1.3の部分的な解答を与えるものである. 本講演の内容は [Ori25] に基づく. 主定理の前に定義を行う. Theorem 1.5において, 埋め込まれた閉曲線Σと任意の管状近傍$W(\Sigma)$を考える. このときホモロジー類$h \in H_2(S^n, W(\Sigma); \mathbb{R})$に対して,

$$\mathrm{Area}_g(h) := \inf\{Area_g(C); [C] = h, C \in C_2(S^n, W(\Sigma); \mathbb{R})\}$$

と定める. (stable normとも呼ばれる, stable normについては [Kat07] を参照.)

まずQuestion 1.3に関してGromovにより主張がされていたTheorem 1.4の証明を与えた.

Theorem 1.4 ([Ori25]) $n = 2m$とする. $\Sigma \subset S^n$を有限個の辺を持つtreeないし, 閉曲線であってΣ上での主スピン束$P_{\mathrm{Spin}(n)}(S^n)|_\Sigma$のモノドロミー変換が自明であると仮定する. (X, g)をn次元のスピン完備Riemann多様体とする. $f : X \to \mathbb{S}^n \setminus \Sigma$がproperかつ写像度が非ゼロの1-contractingな写像であるとき, 次の評価が成り立つ：

$$\inf_{x \in X} \mathrm{Sc}(g)_x < n(n-1)$$

次にTheorem 1.5でホロノミーが非自明な場合に関して, Σを張る曲面の面積とホロノミーの条件のもとで次の結果を与えた.

Theorem 1.5 ([Ori25]) $n > 4$かつ$n \equiv 0 \mod 4$とする. ある普遍定数$C(n)$が存在して, 以下の主張が成り立つ: Σを滑らかに埋め込まれた閉曲線$\iota : S^1 \hookrightarrow S^n$とし, gを$S^n \setminus \Sigma$上の完備Riemann計量とし, S^+をS^n上のpositive spinor bundle, $\{e^{2\pi i\theta_i}\}_i$は$\iota^* S^+$に沿ったホロノミーパラメータとする. $f : (S^n \setminus \Sigma, g) \to \mathbb{S}^n \setminus \Sigma$は1-contractingな微分同相写像とし,

$$\mathrm{Area}_g(h) > C(n) \cdot \max_i\{|\theta_i|\}$$

とする. (ただし$W(\Sigma)$はΣの任意の管状近傍, $h \in H_2(S^n, W(\Sigma); \mathbb{Z})$は整係数の生成元) このとき次の評価が成り立つ:

$$\inf_{x \in X} \mathrm{Sc}(g)_x < n(n-1)$$

証明方法はGromov-Lawsonの解析 [GL83](の定量版) と閉曲線の近傍を変形する写像を組み合わせることによる. 今回用いたGromov-Lawsonの解析 [GL83] はSchoen-Yauの手法 [SY87] と関係するものであり, 次節でその説明を行う.

2. スカラー曲率によるRiemann多様体への幾何学的制約

本節では, 必要な概念の定義を導入しつつ, スカラー曲率によってRiemann多様体に与える幾何学的制約の概要を振り返る. まず, スカラー曲率と多様体Mのトポロジーとの関係を理解することは, 微分幾何学における主要な問題の一つである. よく知られているようにn次元トーラスT^nは正のスカラー曲率を持つ計量を許容しない.

Theorem 2.1 (Schoen-Yau ,[SY87], Gromov-Lawson, [GL83]) T^n 上のRiemann計量 g が非負のスカラー曲率を持つならば, g は平坦である.

この定理は, Schoen-Yau により次元 $n < 8$ の場合に [SY87] において証明された．その証明は極小曲面の手法によるものである．この結果は最終的に, Gromov-Lawson がspinorを用いて任意の次元に対して一般化した（[GL83] を参照）.

本稿の話題のように, T^n から部分集合 K を除いた場合に, その補集合 $T^n \setminus K$ 上に正のスカラー曲率をもつ計量が存在するかどうか, というのは自然に生じる問いである．この問いに対する近年の進展は述べないが, [GL83] により K が部分多様体 $T^{n-1} \subset T^n$ と共通部分を持たないコンパクト部分集合であるとき, $T^n \setminus K$ 上に完備な正スカラー曲率計量が存在しないことは知られている．これはTheorem 2.5から従う事実である.

まず, Riemann 多様体 $(M^m, g), (N^n, h)$ の間の C^1 級写像 $f : M \to N$ に対して, その k-dilation を以下のように定義する：

Definition 2.2 $F : (M^m, g) \to (N^n, h)$ を C^1 級写像とする．F は k**-dilation** を以下で定義する.

$$\mathrm{Dil}_k(F) := \sup_{\Sigma^k \subset M} \frac{\mathrm{Vol}_k(F(\Sigma))}{\mathrm{Vol}_k(\Sigma)},$$

ここで Σ^k は滑らかな k 次元部分多様体であり, Vol_k は k 次元Hausdorff測度である.

この量は微分 $dF_x : T_xM \to T_{F(x)}N$ の特異値分解から得られる特異値 $s_1 \geq s_2 \geq \cdots$ を用いて計算することで, $\mathrm{Dil}_k(F) = \sup_{x \in M} |\wedge^k dF_x|$ と等しいことがわかる.

Remark 2.3 $\mathrm{Dil}_k(F)$ は, 次元 k が異なると真に異なる状況を生み出すことがある．たとえば, ユークリッド空間内の単位閉球 $\overline{B}^3 \to \overline{B}^2$ の全射であって Dil_2 を任意に小さくできる写像の族が存在し, これは Dil_1 の場合とは異なる現象である．またスカラー曲率に関しても, area-enlargeable であって enlargeable でないコンパクト多様体が存在するかどうかは, 現在のところ分かっていない（cf. [CS21]）.

(area-)enlargeableの定義は以下である.

Definition 2.4 M を次元 n の向き付けられた連結 C^∞ 級多様体とし, $k \in \{1, 2\}$ とする．M 上のRiemann計量 g が **enlargeable in dimension** k であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 以下を満たす連結被覆 $\widetilde{M} \to M$ と写像

$$f : (\widetilde{M}, \overline{g}) \to \mathbb{S}^n$$

が存在することをいう：

- f はコンパクト台を持つ, すなわちあるコンパクト部分集合 $K \subset \widetilde{M}$ が存在して, $f|_{\widetilde{M} \setminus K}$ は定値写像である.
- f は写像度が 0 でない（f はコンパクト台を持つため写像度が定義できる）.
- f は k-dimensionally ε-contractingである．つまり $\mathrm{Dil}_k(f) \leq \epsilon$.

ここで, $\overline{g}$ は g を被覆空間 $\widetilde{M}$ に持ち上げた Riemann 計量である．任意の（完備であるか否かを問わず）Riemann 計量 g に対して, M がenlargeable in dimension kであるとき, M を **enlargeable in dimension** kという．(M がコンパクトならば, すべての計量が同値であるため, ある 1 つの計量に対して条件を確認するだけで十分である.) 特に $k = 2$ のとき, area-enlargeableと呼ばれ, $k = 1$ のときには単にenlargeableという.

enlargeableであればarea-enlargeableである．また先ほどの$T^n \setminus K$ (ただし K は部分多様体 $T^{n-1} \subset T^n$ と共通部分を持たないコンパクト部分集合) はarea-enlargeableである．次の結果がよく知られている.

Theorem 2.5 (Gromov-Lawson, [GL83]) area-enlargeableな多様体は, 正のスカラー曲率を持つ完備Riemann計量を持たない.

それでは, スカラー曲率が正であるとき, Riemann多様体に課される幾何学的制約はどのようなものがあるか. 最も代表的な結果は, 以下のGromov-LawsonによるUrysohn幅の評価である.

Theorem 2.6 (Gromov-Lawson, [GL83]) (M^3, g) を単連結な3次元完備Riemann多様体とし, $Sc(g) \geq 2$ を満たすとする. このとき, 距離グラフ (K, d) と1-Lipschitz写像 $\varphi : (M, g) \to (K, d)$ が存在し, 任意の点 $p \in K$ に対して

$$\mathrm{diam}(\varphi^{-1}(p)) \leq \frac{12}{\sqrt{3}}\pi$$

が成り立つ. つまり M の **Urysohn 1-幅が** $\frac{12}{\sqrt{3}}\pi$ 以下であることを意味する.

スカラー曲率が体積の比 $\frac{\mathrm{Vol}(B_g(p;r))}{\omega^n r^n}$ の $r \to 0$ におけるテイラー展開の2次の係数として現れることに着目したTheorem 2.6の一般化に相当する結果も知られている. 次のGuthによる2つの結果の証明では, ある被覆を用いて空間を近似し, その脈体に関して極小曲面論を用いた解析を行う手法に基づいている.

Theorem 2.7 (Guth, [Gut11]) ある定数 $n > 0$ が存在して, 次のことが成り立つ. (M^n, g) を閉Riemann多様体とし, ある半径 $R > 0$ が存在して, (M^n, g) 内の任意の半径 R のボールの体積が高々 nR^n であると仮定する. このとき, Urysohn 幅 $UW_{n-1}(M^n, g) \leq R$ が成り立つ.

さらに球面への写像と体積の増大に関しては, 次のことが示されている.

Theorem 2.8 (Guth, [Gut11]) (M^n, g) から単位球面への写像度1の1-Lipschitz 写像 $f : M \to \mathbb{S}^n$ があるとする. このとき任意の $R \leq 1$ に対して

$$V(R) \geq \delta(n) R^n$$

が成り立つ.

再びspinorを用いた手法に戻る. 極小曲面を用いたアプローチではスカラー曲率が正の下で, 極小曲面の直径や2次シストールの評価が示されていた. その類似がDirac operatorの解析にも存在し, 主に次の結果の証明に用いられた. (この手法は[GL83]においてSchoen-Yauの手法とspinorを用いた手法の関係性として指摘されている.)

Theorem 2.9 (Gromov-Lawson, [GL83]) X をコンパクトな enlargeable 多様体とする. このとき $X \times \mathbb{R}^2$ 上において, 次の条件を満たすような一様に正のスカラー曲率を持つ完備なRiemann 計量 g は存在しない : $X \times \mathbb{R}^2$ 内に, $\{*\} \times \mathbb{R}^2$ と同じ局所有限ホモロジー類に属し, かつ面積有限なproperに埋め込まれた曲面が存在しない.

Theorem 1.5の証明は, このGromov-Lawsonの解析の応用によるものである.

3. 主結果の証明の概略

本節では, 主結果 Theorem 1.5の証明の概略について述べる (Theorem 1.4も同様の議論によって示される). 証明は背理法による. つまり $\inf_{x \in X} \mathrm{Sc}(g)_x \geq n(n-1)$ を仮定する. Llarullの定理 [Lla98] の証明と同様に単位球面上の Clifford 束 $\mathbb{C}l(TS^n)$ の f による引き戻しを考えたい. より正確には, $f : S^n \setminus \Sigma \to \mathbb{S}^n \setminus \Sigma$ に Σ の管状近傍の deform を施した h に対して引き戻し $E = h^*\mathbb{C}l(TS^n)$ を考える. 次元が4以上であるため, S^1 が標準的な埋め込みとアイソトピックになる. 上記の h と整合的になるような微分同相写像 $\phi : S^n \setminus \Sigma \to S^{n-2} \times \mathbb{R}^2$ を固定する. ϕ に $\mathbb{R}^2$ の動径方向と偏角の方向の成分を合成することで, $\delta : S^n \setminus \Sigma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, および $\beta : X_{>0} \to S^1$ を定める. ただし δ による level set を $X_{[a,b]} := \delta^{-1}([a, b])$ のように定める.

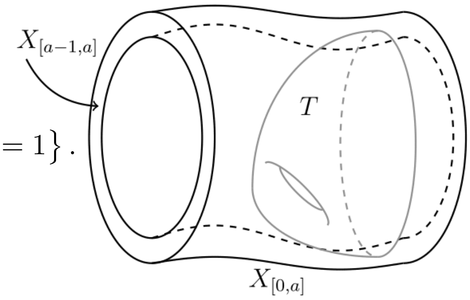

図 2: T の状況

次のステップとして微分 1 形式 $\varphi = \beta^* d\theta$ を考え，以下の「Plateau 問題」を考察する：

$$e(a) := \inf \left\{ \mathrm{Area}_g(T) \mid T \in C_2(X_{[0,a]}, X_{[a-1,a]}),\ \partial T(\varphi) = 1 \right\}.$$

この関数 $e(a)$ は単調非減少である．仮に

$$\lim_{a\to\infty} e(a) \le C(n) \cdot \max_i \{|\theta_i|\}$$

が成立すると，境界が Σ の管状近傍にかかるような十分大きいサイクルで条件を破るものが取れてしまう．よって $\lim_{a\to\infty} e(a) > C(n) \cdot \max_i \{|\theta_i|\}$ が必要である．($C(n)$ は最後のステップで取り方が確定する．)

以上により $e(a)$ は下からの評価がとれて，Gromov-Lawson の議論 [GL83]（の定量版）により微分 2 形式の comass ノルム $||d\omega||$ の制約を満たす微分 1 形式 φ の拡張 ω がとれる．これを元に Clifford 束と X の端で同型になる複素ベクトル束 F が構成される (この構成において h の定め方を用いる)．つまり，S^1 上では Clifford 束の接続 1 形式は θ_i を用いて直線束の直和に分解され，h を用いて X の端においては引き戻される．ω を用いて X 上に拡張された直線束と大域的な接続 1 形式が定まりそれらの直和として F を定義すればよい．

最後のステップでは，インデックスの計算を行う．まず，twisted Dirac operator $\not{D}_E^+$ および $\not{D}_F^+$ の解析的インデックスがゼロであることは Weitzenböck formula より導かれる．さらに relative index theorem より twisted Dirac operator の解析的インデックスの差は特性類（$\hat{A}$ 類と Chern 類）で計算される．解析的インデックスはゼロである一方，トポロジカルなインデックスは非ゼロであり矛盾が導かれる．

参考文献

[BBH+24] Christian Bär, Simon Brendle, Bernhard Hanke, Yipeng Wang, et al., *Scalar curvature rigidity of warped product metrics*, SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications **20** (2024), 035.

[CS21] Simone Cecchini and Thomas Schick, *Enlargeable metrics on nonspin manifolds*, Proceedings of the American Mathematical Society **149** (2021), no. 5, 2199–2211.

[GL83] Mikhael Gromov and H Blaine Lawson, *Positive scalar curvature and the dirac operator on complete riemannian manifolds*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **58** (1983), 83–196.

[Gro18] Misha Gromov, *Metric inequalities with scalar curvature*, Geometric and Functional Analysis **28** (2018), 645–726.

[Gut11] Larry Guth, *Volumes of balls in large riemannian manifolds*, Annals of mathematics (2011), 51–76.

[Kat07] Mikhail Gersh Katz, *Systolic geometry and topology*, no. 137, American Mathematical Soc., 2007.

[Lla98] Marcelo Llarull, *Sharp estimates and the dirac operator*, Mathematische Annalen **310** (1998), no. 1, 55–71.

[Ori25] Shunichiro Orikasa, *Analysis of contraction mappings to the complement of closed curves*, 2025, arXiv:2502.15135 [math.DG].

[SY87] Richard Schoen and Shing-Tung Yau, *The structure of manifolds with positive scalar curvature*, Directions in partial differential equations, Elsevier, 1987, pp. 235–242.

[WX24] Jinmin Wang and Zhizhang Xie, *Scalar curvature rigidity of spheres with subsets removed and l^∞ metrics*, 2024.

[Xie23] Zhizhang Xie, *A quantitative relative index theorem and gromov's conjectures on positive scalar curvature (with an appendix by jinmin wang and zhizhang xie)*, Journal of Noncommutative Geometry **17** (2023), no. 2, 609–662.