特異点をもつ部分多様体の絶対全曲率

横浜国立大学大学院理工学府　数物・電子情報系理工学専攻
山内優太 (Yuta YAMAUCHI) *

概 要

本講演では $(n+r)$ 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+r}$ 内のフロンタルと呼ばれる，特異点をもつ n 次元部分多様体に対する Chern-Lashof の定理の拡張について紹介する．まず，$\boldsymbol{R}^{n+r}$ 内の許容的かつコンパクトな n 次元フロンタルに対し，その絶対全曲率がベッチ数の総和以上となることを証明する．さらに，絶対全曲率が 2 に等しく，かつ全ての特異点が第一種である場合，そのフロンタルの像は $\boldsymbol{R}^{n+r}$ 内の n 次元アファイン部分空間に含まれる閉凸体と一致する．本講演の内容は [13] に基づく．

1 導入

n, r を正の整数とする．向き付けられたコンパクトな n 次元多様体 M^n から $(n+r)$ 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+r}$ へのはめ込み $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ を考える．B を f の単位法ベクトル束，G を Lipschiz-Killing 曲率とする．この時,

$$\tau(M^n, f) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})} \int_B |G| \, d\mu_B$$

を f の**絶対全曲率**と呼ぶ．ただし $\mathrm{vol}(S^{n+r-1})$ は $(n+r-1)$ 次元単位球面 S^{n+r-1} の体積を表す．絶対全曲率について，次が知られている．

事実 1.1 (Chern-Lashof の定理 [1, 2])**.** M^n を向き付けられたコンパクトな n 次元多様体，$f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ を $(n+r)$ 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+r}$ へのはめ込みとする．

(1) b_i を M^n の i 次ベッチ数とする $(0 \leq i \leq n)$．この時，絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ に対して以下が成り立つ．

$$\tau(M^n, f) \geq \sum_{i=0}^{n} b_i(M^n).$$

(2) 絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ が 3 未満ならば，M^n は n 次元単位球面 S^n と位相同型となる．

(3) 絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ が 2 に等しいならば，像 $f(M^n)$ は $\boldsymbol{R}^{n+r}$ 内の n 次元アファイン部分空間に埋め込まれた凸超曲面となる．逆もまた成り立つ．

これまで Chern-Lashof の定理は様々な形で一般化されてきた (cf. [12, 7, 10, 3, 4])．一方，特異点を持つ部分多様体には絶対全曲率を定義されるクラスが存在する．Kossowski と Scherfner は特異点をもつ曲面として $\boldsymbol{R}^3$ 内の 2 次元波面に対して Chern-Lashof の定理を拡張した ([6])．しかし，そこでは最小絶対全曲率と凸性との関係は明らかにされていない．本講演では，さらに対象を広げて，$\boldsymbol{R}^{n+r}$ 内の n 次元フロンタルに対して得られた Chern-Lashof 型定理と，最小絶対全曲率とフロンタルの凸性との関係について得られた結果を紹介する．

*E-mail: yamauchi-yuta-hj@ynu.jp
本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2178 の支援を受けたものである．

2　準備

2.1　フロンタルと特異点

この節ではフロンタルの定義を紹介する．部分多様体の一般化としてのフロンタルの概念は [5] にて紹介されている．また，曲面，超曲面の場合は詳細に調べられている．詳しくは [8, 11] を見よ．

n, r を正の整数とする．n 次元多様体 M^n からユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+r}$ への滑らかな写像 $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ に対して，点 $p \in M^n$ で f がはめ込みであるとき p を**正則点**と呼び，そうでない時は**特異点**と呼ぶ．Σ_f を f の特異点集合とし，正則点集合 M^n_{reg} を $M^n_{\mathrm{reg}} := M^n \setminus \Sigma_f$ とおく．正則点集合が稠密な写像 f が**フロンタル**であるとは，M^n 上の任意の点 p とその開近傍 U に対し，滑らかな写像 $\Pi : U \to \widetilde{Gr}(n, n+r)$ が存在して，

$$df_q(X) \in \Pi(q) \qquad (q \in U,\, X \in T_qM^n)$$

を満たす時をいう．ここで $\widetilde{Gr}(n, n+r)$ は $\boldsymbol{R}^{n+r}$ 内の向き付き n 次元部分空間のグラスマン多様体を指す．また，このような Π を f の **generalized Gauss map** と呼ぶ．

定義 2.1. フロンタル $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ の generalized Gauss map Π が M^n 上で大域的に定められる時，フロンタル f は**余向き付け可能**であるという．

例として，はめ込み f は余向き付け可能である．これは，$\Pi(q) := df_q(T_qM^n)$ $(q \in M^n)$ とおくことで確かめられる．M^n の二重被覆を取ることで，必要ならば一般性を失うことなく f を余向き付け可能とすることができる．よって，本稿ではフロンタルは余向き付け可能だと仮定する．

フロンタル f とその generalized Gauss map Π に対し，$\Pi^{\perp}(p)$ を $\Pi(p)$ の直交補空間とする．任意の M^n の座標近傍 $(U; u_1, u_2, \cdots, u_n)$ に対し，U 上の関数 λ を

$$\lambda(p) = \det(f_1(p), f_2(p), \cdots, f_n(p), E_1(p), \cdots, E_r(p))$$

で定める．ただし，$f_i = \dfrac{\partial f}{\partial u_i}$ とし，$\{E_1, \cdots, E_r\}$ は $\Pi^{\perp}$ の滑らかな正規直交枠である．この λ を f の**符号付き体積密度関数**と呼ぶ．p がフロンタル f の特異点であることと，$\lambda(p) = 0$ であることは同値である．

定義 2.2. 特異点 $p \in M^n$ が**非退化特異点**であるとは，$(d\lambda)_p$ が 0 とならないことを指す．

非退化性は，局所座標の取り方及び正規直交枠の取り方に依らない．

補題 2.3 (cf. [13]). 特異点 p が非退化特異点であるとき，$\mathrm{rank}(df)_p = n - 1$ が成り立つ．

p をフロンタル $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ の非退化特異点とする．補題 2.3 より，$\dim(\ker(df)_p) = 1$ が成り立つ．この $\ker(df)_p$ を p における**退化空間**と呼ぶ．フロンタル $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ の特異点が全て非退化特異点であるならば，陰関数定理より特異点集合 Σ_f は M^n の $n-1$ 次元部分多様体となる．

定義 2.4. フロンタル $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ の特異点は全て非退化特異点であるとする．p を特異点とした時，$\ker(df)_p \not\subset T_p\Sigma_f$ が成り立つならば，$p \in M^n$ を**第 1 種特異点**と呼び，そうでない時は $p \in M^n$ を**第 2 種特異点**と呼ぶ．

C_f を M^n 上の f の第 2 種特異点の集合とする．

定義 2.5 ([13]). フロンタル $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ が以下を満たす時，f を**許容的なフロンタル**と呼ぶ

- 非退化特異点のみを持つ．
- ある Σ_f の超曲面 $\mathcal{H}$ が存在し，$C_f \subseteq \mathcal{H}$ が成り立つ．

例として，特異点が全て第 1 種特異点であるフロンタルは許容的である．また，高々 A_{k+1} 特異点をもつフロンタルは許容的である (cf. [9]).

2.2 絶対全曲率

ここでは Lipschitz-Killing 曲率の定義を紹介し，許容的なフロンタルに対して絶対全曲率を定める (定義 2.8).

ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^{n+r}$ に対し，$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ で標準的な内積を表す．また，$\boldsymbol{u}$ のノルムを $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}$ で表す．各 $p \in M^n$ に対し $B_p = \{\boldsymbol{v} \in \Pi^\perp(p) \mid \|\boldsymbol{v}\| = 1\}$ と表し，f の**単位法ベクトル束** B を

$$B = \bigcup_{p \in M^n} B_p$$

で定める．B の滑らかな切断を f の**単位法ベクトル場**と呼ぶ．N を f の単位法ベクトル場とする．この時，正則点集合 M^n_{reg} 上で次のワインガルテンの公式が成り立つ．

$$D_X N = -df(A_N X) + D^\perp_X N.$$

ただし，X を M^n 上の任意のベクトル場，D を $\boldsymbol{R}^{n+r}$ の標準的な接続，$D^\perp$ を法接続，A_N を N に関する型作用素とする．B_{reg} を $B_{\mathrm{reg}} := \bigcup_{p \in M^n_{\mathrm{reg}}} B_p$ によって定める．$(p, \xi) \in B_{\mathrm{reg}}$ に対し，**Lipschitz-Killing 曲率** $G(p, \xi)$ を

$$G(p, \xi) = \det A_\xi$$

で定める．

M^n の局所座標系 $(U; u_1, \cdots, u_n)$ に対し，

$$d\hat{V} = \lambda \, du_1 \wedge \cdots \wedge du_n, \quad dV = |\lambda| \, du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$$

をそれぞれ f の**符号付き体積要素**, (符号無し) **体積要素**と呼ぶ．この時，$d\hat{V}$ は局所座標 $(u_1, \cdots, u_n)$ と $\Pi^\perp$ の向きに同調した正規直交枠 $\{E_1, \cdots, E_r\}$ の取り方に依らない．また，dV は M^n の向きに同調した局所座標 $(u_1, \cdots, u_n)$ の取り方，及び $\Pi^\perp$ の向きに同調した正規直交枠 $\{E_1, \cdots, E_r\}$ の取り方に依らない．また，$d\sigma$ を B の各ファイバー上の体積要素とし，B の符号付き体積要素 $d\hat{\mu}_B$，(符号無し) 体積要素 $d\mu_B$ をそれぞれ

$$d\hat{\mu}_B = d\hat{V} \wedge d\sigma, \quad d\mu_B = dV \wedge d\sigma$$

によって定める．

滑らかな写像

$$\nu : B \to S^{n+r-1}; (p, \xi) \mapsto \xi$$

を f の**標準的ガウス写像**と呼ぶ．

命題 2.6 ([13, Proposition 2.5])**.** $d\mu_{S^{n+r-1}}$ を S^{n+r-1} の体積要素とする．この時，標準的ガウス写像 ν による $d\mu_{S^{n+r-1}}$ の引き戻しを $\nu^* d\mu_{S^{n+r-1}}$ と表す．B_{reg} 上で以下が成り立つ．

$$\nu^* d\mu_{S^{n+r-1}} = (-1)^n G(p, \xi) \, d\hat{\mu}_B$$

したがって，G を B_{reg} 上で定義される Lipschitz-Killing 曲率とするとき，命題 2.6 より $G(p, \xi) \, d\hat{\mu}_B$ は特異点集合を越えて B 全体で定義されるなめらかな $(n + r - 1)$ 次微分形式を定める．したがって，次の系が得られる．

系 2.7 ([13, Corollary 2.6])**.** $|G(p, \xi)| \, d\mu_B$ は B 上の連続な $(n + r - 1)$ 次微分形式である．

今後，M^n を向き付けられたコンパクトな n 次元多様体，$f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ は許容的なフロンタルであるとし，Π を f の generalized Gauss map とする．この時，f の特異点はすべて非退化であるため，特異点集合 Σ_f は M^n 内の超曲面となる．$\bar{f}$ を f の Σ_f への制限とする．$\bar{\Pi} : \Sigma_f \to \widetilde{Gr}(n-1, n+r)$ を

$$\bar{\Pi}(p) := (df)_p(T_pM^n) \qquad (p \in \Sigma_f)$$

と定める．この時，p は非退化特異点であるため，補題 2.3 より $df_p(T_pM^n)$ は $(n-1)$ 次元部分空間になることに注意する．$\bar{\Pi}$ は $\bar{f}$ の generalized Gauss map となるので，$\bar{f} : \Sigma_f \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ は余向き付け可能なフロンタルとなる．$\bar{f}$ の単位法束，標準的ガウス写像，Lipschitz-Killing 曲率をそれぞれ $\bar{B}, \bar{\nu}, \bar{G}$ とおく．

定義 2.8 ([13]). M^n をコンパクトかつ向き付け可能な n 次元多様体とし，$f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ は余向き付け可能かつ許容的なフロンタルであるとする．この時，**絶対全曲率** $\tau(M^n, f)$ を次のように定める．

$$\tau(M^n, f) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})} \int_B |G(p,\xi)|\, d\mu_B + \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})} \int_{\bar{B}} |\bar{G}(q,\eta)|\, d\mu_{\bar{B}}.$$

3 主結果

フロンタルに対する Chern-Lashof 型定理として，次の定理 A を得た．

定理 A ([13]). M^n をコンパクトかつ向き付け可能な n 次元多様体とし，$f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ は余向き付け可能かつ許容的なフロンタルであるとする．この時，以下が成り立つ．

(1) b_i を M^n の i 次ベッチ数とする $(0 \leq i \leq n)$．この時，絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ に対して以下が成り立つ．

$$\tau(M^n, f) \geq \sum_{i=0}^{n} b_i(M^n).$$

(2) 絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ が 3 未満ならば，M^n は n 次元単位球面 S^n と位相同型となる．

(3) 絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ が 2 に等しいならば，像 $f(M^n)$ は $\boldsymbol{R}^{n+r}$ 内の n 次元アファイン部分空間に含まれる．

Chern-Lashof の定理 (事実 1.1) と比べて，定理 A はフロンタルの像が $(n+1)$ 次元アファイン部分空間に含まれることまでしか主張できていない．しかし，特異点について条件を加えることで次の定理 B を得られる．

定理 B ([13]). M^n をコンパクトかつ向き付け可能な n 次元多様体とし，$f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ を余向き付け可能なフロンタルであるとする．特異点集合 Σ_f が空でなく，かつ特異点が全て第 1 種特異点であるとする．この時，$\tau(M^n, f) = 2$ であることと，次の三つの条件が同時に成り立つことは同値となる．

(a) f の像 $f(M^n)$ は n 次元アファイン部分空間に含まれる閉凸体となる，

(b) M^n は S^n と同相であり，Σ_f は S^{n-1} と同相である，

(c) 特異点集合の像 $f(\Sigma_f)$ は $f(M^n)$ の境界と一致する．

Chern-Lashof の定理 (事実 1.1) の場合，最小全曲率をもつはめ込み f の像 $f(M^n)$ は $(n+1)$ 次元アファイン部分空間に含まれたが，定理 B の場合，最小全曲率をもつフロンタル f の像 $f(M^n)$ は n 次元アファイン部分空間に含まれることに注意する．

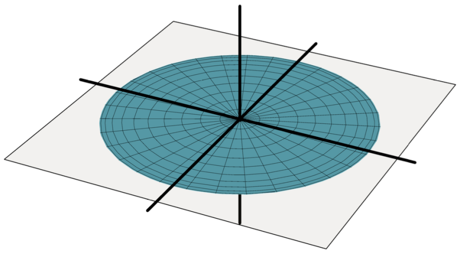

図 1: $\boldsymbol{R}^3$ 内の定理 B の仮定を満たす，絶対全曲率が 2 のフロンタルの図.

参考文献

[1] S. -S. Chern and R. K. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds*, Am. J. Math. **79** (1957), 306–318.

[2] S. -S. Chern and R. K. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds. II*, Mich. Math. J. **5** (1958), 5–12.

[3] J. A. Hoisington, *On the total curvature and Betti numbers of complex projective manifolds*, Geom. Topol. **26** (2022), 1–45.

[4] A. Honda, C. Tanaka, and Y. Yamauchi, *The total absolute curvature of closed curves with singularities*, Adv. Geom. **25** (2025), 93–104.

[5] G. Ishikawa. *Singularities of frontals*, in: Singularities in Generic Geometry, in: Advanced Studies in Pure Mathmatics (ASPM), vol. 78, Math, Soc, Japan, 2018, pp. 55–106.

[6] M. Kossowski and M. Scherfner, *Total curvature for C^∞-singular surfaces with limiting tangent bundle*, Ann. Global Anal. Geom. **28** (2005), 179–199.

[7] N. Koike, *The Lipschitz-Killing curvature for an equiaffine immersion and theorems of Gauss-Bonnet type and Chern-Lashof type*, Result. Math. **39** (2001), 230–244.

[8] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. Math. **169-2** (2009), 491–529.

[9] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *A_k singularities of wave fronts*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **146** (2009), 731–746.

[10] E. Teufel and G. Solanes, *Horo-tightness and total (absolute) curvatures in hyperbolic spaces*, Isr. J. Math. **194** (2013), 427–459.

[11] M. Umehara, K. Saji, and K. Yamada, Differential geometry of curves and surfaces with singularities, Series in Algebraic and Differential Geometry 1. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Hackensack, NJ, xvi, 370 p. (2022).

[12] T. J. Willmore and B. A. Saleemi, *The total absolute curvature of immersed manifolds*, J. Lond. Math. Soc. **41** (1966), 153–160.

[13] Y. Yamauchi, *The total absolute curvature of submanifolds with singularities,* preprint (arXiv:2412.19147).