

Hermitian-Yang-Mills 接続のモジュライ空間について

佐々木 淳 (東京科学大学 D1)*

概要

コンパクト Kähler 多様体と、その上の滑らかな Hermite ベクトル束を固定する．本講演では、

- その Hermitian-Yang-Mills 接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\text{HYM}}$ が適当な条件を満たす点のまわりで複素多様体であること、
 - 単純な Higgs 構造のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\text{Higgs}}$ に対して、 $\mathcal{M}_{\text{HYM}}$ から $\mathcal{M}_{\text{Higgs}}$ への連続で単射な開写像が存在すること、
- について、[3] で得られる結果を紹介する．

1 Higgs 束と Hermitian-Yang-Mills 接続

(M, g) を連結な n 次元コンパクト Kähler 多様体、 (E, h) を M 上の階数 r の滑らかな Hermite ベクトル束とする． $k \in \mathbb{Z}$ に対して、 $\Omega^k(E)$ で E に値をとる滑らかな k 形式のなすベクトル空間を表す．

定義 1.1. E の Higgs 構造とは、 $\mathbb{C}$ -線形写像 $D'' : \Omega^0(E) \rightarrow \Omega^1(E)$ で、以下の 2 条件を満たすもののことをいう．

(Leibniz 則) $\forall f \in C^\infty(M), \forall s \in \Omega^0(E), D''(fs) = fD''s + s \otimes \bar{\partial}f$

(可積分条件) $D'' \circ D'' = 0 : \Omega^0(E) \rightarrow \Omega^2(E)$

ベクトル束 E に Higgs 構造 D'' が与えられたとき、組 (E, D'') のことを Higgs 束という．これは正則ベクトル束の一般化である．Higgs 束の概念は、まず底空間が Riemann 面の場合に Hitchin[2] により導入され、その後 Simpson[4] によって一般次元の Kähler 多様体の場合に拡張された． E の Higgs 構造のなす集合には、 E のゲージ群が右から作用する．この作用に関する商空間を $\mathcal{M}_{\text{Higgs}}$ と書く．

E の接続 D が与えられたとき、計量 h により、 $D = D' + D''$ を満たす $\mathbb{C}$ -線形写像

* 〒152-8551 東京都 目黒区 大岡山 2-12-1 東京科学大学 理学院 数学系 数学コース
email: sasaki.j.ac@m.titech.ac.jp, sasaki.j.fb69@m.isct.ac.jp
本研究は科研費 (課題番号: 25KJ1222) の助成を受けたものである．

$D', D'' : \Omega^0(E) \rightarrow \Omega^1(E)$ が以下のように与えられる (cf. [5, p.13]). 接続 D を分解 $\Omega^1(E) = \Omega^{1,0}(E) \oplus \Omega^{0,1}(E)$ に従い $D = D^{1,0} + D^{0,1}$ と分解する. このとき, 半接続 $\tilde{D}^{1,0}, \tilde{D}^{0,1}$ であって, $D^{1,0} + \tilde{D}^{0,1}, D^{0,1} + \tilde{D}^{1,0}$ がそれぞれ (E, h) の計量接続となるものが一意に存在する. よって

$$\begin{aligned}\partial^E : \Omega^0(E) &\rightarrow \Omega^{1,0}(E), & \bar{\partial}^E : \Omega^0(E) &\rightarrow \Omega^{0,1}(E), \\ \theta : \Omega^0(E) &\rightarrow \Omega^{1,0}(E), & \theta^* : \Omega^0(E) &\rightarrow \Omega^{0,1}(E)\end{aligned}$$

をそれぞれ

$$\begin{aligned}\partial^E &= \frac{1}{2} (D^{1,0} + \tilde{D}^{1,0}), & \bar{\partial}^E &= \frac{1}{2} (D^{0,1} + \tilde{D}^{0,1}), \\ \theta &= \frac{1}{2} (D^{1,0} - \tilde{D}^{1,0}), & \theta^* &= \frac{1}{2} (D^{0,1} - \tilde{D}^{0,1})\end{aligned}\tag{1.1}$$

と定め, $D' = \partial^E + \theta^*, D'' = \bar{\partial}^E + \theta$ と定義する.

定義 1.2. E の接続 D が Hermitian-Yang-Mills (HYM) 接続であるとは, 以下の 2 条件を満たすことをいう.

(可積分条件) $D = D' + D''$ とするとき, D'' が E の Higgs 構造を定める.

(Hermitian-Yang-Mills (HYM) 方程式) D の曲率を $R(D)$ とするとき, D が以下の曲率方程式を満たす.

$$\sqrt{-1}\Lambda R(D) = c \operatorname{id}_E, \quad c = \frac{2\pi \deg E}{r \cdot (n-1)! \cdot \operatorname{Vol}(M, g)}$$

ただし Λ は (M, g) の Kähler 形式 ω による縮約であり, $\deg E = \int_M c_1(E) \wedge \omega^{n-1}$ である.

E の HYM 接続のなす集合には, (E, h) のゲージ群が右から作用する. この作用に関する商空間を $\mathcal{M}_{\text{HYM}}$ と書く.

E の接続 D が与えられたとき, (1.1) の記号を用いて $\nabla = \partial^E + \bar{\partial}^E, \Theta = \theta + \theta^*$ とすると, $D = \nabla + \Theta$ を満たす (E, h) の計量接続 ∇ と $\Theta \in \Omega^1(\operatorname{Herm}(E, h))$ を得る. このとき, HYM 方程式は以下のようにも記述できる.

$$\sqrt{-1}\Lambda(R(\nabla) + \Theta \wedge \Theta) = c \operatorname{id}_E$$

HYM 接続は, Hermitian-Einstein (HE) 接続の一般化である. これは, HYM 接続の定義における可積分条件を, 条件『 D'' が E の正則構造を定める』に置き換えることで定義されるものであり, その際, HYM 方程式は Hermitian-Einstein (HE) 方程式と呼ばれる.

2 無限小変形から得られる楕円型複体

HYM 接続 $D = \nabla + \Theta$ に対して, 次の楕円型複体を考える.

$$(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) : 0 \longrightarrow \mathcal{B}^0 \xrightarrow{D_{\text{End}(E)}} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{D_0} \mathcal{B}^0 \oplus \mathcal{C}^2 \xrightarrow{D_2} \mathcal{C}^3 \xrightarrow{D''_{\text{End}(E)}} \dots \xrightarrow{D''_{\text{End}(E)}} \mathcal{C}^{2n} \longrightarrow 0$$

ただし $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $\mathcal{B}^k = \Omega^k(\text{Herm}_{\text{skew}}(E, h))$, $\mathcal{C}^k = \Omega^k(\text{End}(E))$ であり, $\alpha_1 \in \mathcal{C}^1, \varphi + \alpha_2 \in \mathcal{B}^0 \oplus \mathcal{C}^2$ に対して, $\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1$ と歪 Hermite 成分と Hermite 成分に分解するとき,

$$D_0 \alpha_1 = \left(\Lambda(\nabla \beta_1 + [\Theta \wedge \gamma_1]), D''_{\text{End}(E)}(\beta_1'' + \gamma_1') \right), \quad D_2(\varphi + \alpha_2) = D''_{\text{End}(E)} \alpha_2$$

である.

$D = D' + D''$ とするとき, D'' は E の Higgs 構造を定めるため, Dolbeault-Higgs 複体 (cf.[1]) を考えることができる. それを $(\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*)$ とし, $(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*), (\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*)$ の k 次コホモロジー群をそれぞれ $H_D^k(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*), H_{D''}^k(\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*)$ とすると, それらの間に以下の関係が成り立つ.

命題 2.1. 実ベクトル空間の間関係として, 次の自然な同型写像がある.

- (1) $H_D^0(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq H_{D''}^0(\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*)$
- (2) $H_D^1(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) \simeq H_{D''}^1(\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*)$
- (3) $H_D^2(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) \simeq H_D^0(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) \oplus H_{D''}^2(\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*)$
- (4) $H_D^q(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) \simeq H_{D''}^q(\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*), q \geq 3$

また $\text{Herm}_{\text{skew}}^0(E, h), \text{End}^0(E)$ をそれぞれ $\text{Herm}_{\text{skew}}(E, h), \text{End}(E)$ のトレースフリーなものなす部分束とし, $(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*), (\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*)$ の定義において $\mathcal{B}^k, \mathcal{C}^k$ をそれぞれ

$$\tilde{\mathcal{B}}^k := \Omega^k(\text{Herm}_{\text{skew}}^0(E, h)), \quad \tilde{\mathcal{C}}^k := \Omega^k(\text{End}^0(E))$$

に置き換えて得られる部分複体を $(\tilde{\mathcal{B}}_{\text{HYM}}^*), (\tilde{\mathcal{C}}_{\text{Higgs}}^*)$ とする. これらの k 次コホモロジー群をそれぞれ $\tilde{H}_D^k(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*), \tilde{H}_{D''}^k(\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*)$ とするとき, これらの間にも命題 2.1 と同様の関係が成り立つ.

3 モジュライ空間の局所構造

HYM 接続 D に対して, D におけるスライス $\mathcal{S}_D$ を

$$\mathcal{S}_D = \{ \alpha \in \Omega^1(\text{End}(E)) \mid D_0 \alpha + Q(\alpha) = 0, D^* \alpha = 0 \}$$

と定める. ただし $\alpha \in \Omega^1(\text{End}(E))$ に対して, 歪 Hermite 成分と Hermite 成分に $\alpha = \beta + \gamma$ と分解するとき,

$$Q(\alpha) = (\Lambda(\beta \wedge \beta + \gamma \wedge \gamma), (\beta'' + \gamma') \wedge (\beta'' + \gamma'))$$

であり, 条件 $D_0\alpha + Q(\alpha) = 0$ は, $D + \alpha$ が (E, h) の HYM 接続であるための必要十分条件である. このとき, 陰関数定理を用いることで, 以下の補題が示せる.

補題 3.1 (スライスの補題). HYM 接続 D に対して, 写像 $p_D : \mathcal{S}_D \rightarrow \mathcal{M}_{\text{HYM}}$ を $p_D(\alpha) = [D + \alpha]$ とする. このとき, D が $\tilde{H}_D^0(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) = 0$ を満たすとする, $0 \in \mathcal{S}_D$ の近傍と $[D] \in \mathcal{M}_{\text{HYM}}$ の近傍で, p_D がそれらの間の同相写像となるものが存在する.

条件 $\tilde{H}_D^0(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) = 0$ は, HYM 接続 D が既約であることと同値である. また命題 2.1 よりこの条件は $\tilde{H}_{D''}^0(\mathcal{C}_{\text{Higgs}}^*) = 0$ と同値であり, これは Higgs 束 (E, D'') が単純であることを意味する. ただし, Higgs 束 (E, D'') が単純であるとは, $D''_{\text{End}(E)}$ に関して平行な滑らかな $\text{End}(E)$ の切断が id_E の定数倍のものに限ることをいう.

楕円型複体 $(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*)$ の Green 作用素を G とするとき, 倉西写像 $k_D : \Omega^1(\text{End}(E)) \rightarrow \Omega^1(\text{End}(E))$ を

$$k_D(\alpha) = \alpha + (D_0^* \circ G)(Q(\alpha))$$

と定める. このとき, 調和積分論から, $k_D(\mathcal{S}_D) \subset H_D^1(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*)$ であることが分かる. また, 逆関数定理により, 以下の定理が示せる.

定理 3.2. HYM 接続 D が $\tilde{H}_D^2(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) = 0$ を満たすとき, $0 \in \mathcal{S}_D$ の近傍と $0 \in H_D^1(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*)$ の近傍で, 倉西写像 $k_D : \mathcal{S}_D \rightarrow H_D^1(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*)$ がそれらの間の同相写像となるものが存在する.

補題 3.1 と定理 3.2 を組みあわせることにより, モジュライ空間 $\mathcal{M}_{\text{HYM}}$ の, $\tilde{H}_D^0(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) = 0, \tilde{H}_D^2(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) = 0$ を満たす点 $[D]$ まわりの座標近傍を得る. またこのようにして得られる座標近傍に関して, 座標変換が正則であることが示せる. このことから, 次の定理を得る.

定理 3.3 ([3]). HYM 接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{\text{HYM}}$ は, $\tilde{H}_D^0(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) = 0, \tilde{H}_D^2(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*) = 0$ を満たす点 $[D]$ のまわりで複素多様体であり, その接空間は $H_D^1(\mathcal{B}_{\text{HYM}}^*)$ と同型である.

4 HYM 接続のモジュライ空間から Higgs 構造のモジュライ空間への埋め込み

写像 $f : \mathcal{M}_{\text{HYM}} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{Higgs}}$ を $f([D]) = [D'']$ とすると, これは well-defined である. $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{HYM}}, \widetilde{\mathcal{M}}_{\text{Higgs}}$ をそれぞれ既約な HYM 接続, 単純な Higgs 構造のモジュライ空間とする

と, $f(\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{HYM}}) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\text{Higgs}}$ であり, $f: \widetilde{\mathcal{M}}_{\text{HYM}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\text{Higgs}}$ は連続な単射となる. 更に, 陰関数定理から次が得られる.

定理 4.1 ([3]). f は開写像である.

この定理により, モジュライ空間 $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{HYM}}$ は $\widetilde{\mathcal{M}}_{\text{Higgs}}$ の開集合と同相であり, Higgs 束に対する Kobayashi-Hitchin 対応 [4] から, その開集合は slope 安定な Higgs 構造のモジュライ空間である.

参考文献

- [1] A. Fujiki, *HyperKähler structure on the moduli space of flat bundles*, Prospects in Complex Geometry, Lecture Notes in Math., vol. 1468, 1991, pp. 1–83.
- [2] N. J. Hitchin, *The Self-Duality Equations on a Riemann Surface*, Proc. London Math. Soc., vol. s3-55, 1987, pp. 59–126.
- [3] J. Sasaki, *The moduli space of Hermitian-Yang-Mills connections*, 2025, arXiv:2409.16625.
- [4] C. T. Simpson, *Constructing Variations of Hodge Structure Using Yang-Mills Theory and Applications to Uniformization*, J. Amer. Math. Soc., vol. 1, 1988, pp. 867–918.
- [5] ———, *Higgs bundles and local systems*, Publications Mathématiques de l’IHÉS, vol. 75, 1992, pp. 5–95.