

第 62 回実函数論・函数解析学
合同シンポジウム
講演集

期日：2023 年 8 月 28 日（月）～ 8 月 30 日（水）
会場：千葉大学西千葉キャンパス理学部 1 号館

まえがき

本講演集は、2023年8月28日(月)から8月30日(水)までの3日間にわたり、千葉大学西千葉キャンパス理学部1号館で開催された第62回実函数論・函数解析学合同シンポジウムの講演集です。

本シンポジウムの開催のために多くの方々にご協力をいただきましたが、関係者各位のご尽力によって、講演者の方々の素晴らしい論文を本講演集で発表することができました。各グループの責任者の方々、講演者の皆様、本シンポジウム参加者の皆様方に深く感謝いたします。

なお、本シンポジウムの講演会場の運営、および講演集の作成には、下記の科学研究費補助金の援助を受けています。

挑戦的研究(萌芽)(代表 赤木 剛朗) 研究課題番号: 21K18581

「非整数階微分と非線形構造が共存する発展方程式
–摂動論と解の漸近解析–」

基盤研究(C)(代表 渡邊 恵一) 研究課題番号: 21K03288

「ジャイロベクトル空間の関数解析的研究」

最後に、近年のIT技術の発展や会場費の高騰に伴う経済的な事情により、2023年度第3回実函数論・函数解析学合同シンポジウム会議での議決を経て、同シンポジウムの講演集の印刷物の作成は今回をもって最後とすることになりました。なおPDF版の講演集の作成は来年度以降も継続されます。

赤木 剛朗 (東北大学・理学部)

廣恵 一希 (千葉大学・理学部)

渡邊 恵一 (新潟大学・理学部)

第 62 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム プログラム

期日：2023 年 8 月 28 日 (月) 13:30 ～ 8 月 30 日 (水) 11:45

会場：千葉大学西千葉キャンパス理学部 1 号館 1 階大講義室

〒 263-8522 千葉県千葉市稲毛区弥生町 1-33

https://www.chiba-u.ac.jp/campus_map/

8 月 28 日 (月)

13:30–14:30：福田 亮治（大分大学・理工学部数理科学プログラム）

“ k 加法的集合関数の非離散化とその応用”

14:45–15:45：樋口 健太（愛媛大学・理工学研究科）

“行列シュレディンガー作用素の半古典極限における散乱問題と一般化古典軌道”

16:00–17:00：鈴木 敏行（神奈川大学・工学部）

“Semilinear Schrödinger equations with singular electromagnetic potentials of critical decays”

8 月 29 日 (火)

9:30–10:30：勝呂 剛志（大阪公立大学・数学研究所）

“ある移流拡散方程式の初期値問題のアマルガム空間における適切性について”

10:45–11:45：森田 陽介（九州大学・数理学研究院）

“コンパクト商を持たない非 Riemann 等質空間について”

13:45–14:45：神澤 健雄（山口東京理科大学・工学部数理情報科学科）

“結合的代数の分割とその微分方程式・量子開放系への応用”

15:00–16:00：青山 耕治（千葉大学・社会科学研究院）

“増大作用素のリゾルベントに関する収束定理”

16:15–17:15：三浦 毅（新潟大学・理学部）

“関数空間上の等距離写像と関連する問題”

8月30日（水）

9:30–10:30：曾我部 太郎（京都大学・理学部）

“The Reciprocal Kirchberg algebras”

10:45–11:45：井上 公人（西日本工業大学）

“正規分布の平均-分散の同時検定と条件付き Wishart 分布”

※合同シンポジウム委員会で検討した結果、今回は懇親会はなしとさせていただきます。

代表者：赤木 剛朗（東北大学・理学部）

廣惠 一希（千葉大学・理学部）

渡邊 恵一（新潟大学・理学部）

目次

福田 亮治 (大分大学・理工学部数理科学プログラム)	
k 加法的集合関数の非離散化とその応用	1
樋口 健太 (愛媛大学・理工学研究科)	
行列シュレディンガー作用素の半古典極限における散乱問題と一般化古典軌道	20
鈴木 敏行 (神奈川大学・工学部)	
Semilinear Schrödinger equations with singular electromagnetic potentials of critical decays	40
勝呂 剛志 (大阪公立大学・数学研究所)	
ある移流拡散方程式の初期値問題のアマルガム空間における適切性について ...	56
森田 陽介 (九州大学・数理学研究院)	
コンパクト商を持たない非 Riemann 等質空間について	66
神澤 健雄 (山口東京理科大学・工学部数理情報科学科)	
結合的代数の分割とその微分方程式・量子開放系への応用	75
青山 耕治 (千葉大学・社会科学研究院)	
増大作用素のリゾルベントに関する収束定理	87
三浦 毅 (新潟大学・理学部)	
関数空間上の等距離写像と関連する問題	100
曾我部 太郎 (京都大学・理学部)	
The Reciprocal Kirchberg algebras	110
井上 公人 (西日本工業大学)	
正規分布の平均-分散の同時検定と条件付き Wishart 分布	120

k -加法的集合関数の非離散化とその応用

福田亮治 (大分大理工)*

1. はじめに

可測空間上の集合関数が単調性を持ち空集合で0であるとき、ファジィ測度と呼ばれる。この報告では、空集合では0であることを常に仮定するが、単調性は必ずしも仮定しない集合関数を扱う。いずれにしても、測度の重要な性質である加法性を仮定しないため、積分などのそれに関わる手法において、基本的性質として用いられていた様々な性質が満たされないことになる。この報告では、それらをどう克服するかという問題に対して、 k -加法性という概念を非離散的に一般化した試みに関して、ファジィシステム研究所の岡崎悦明先生、九州工業大学の本田先生との共同研究を中心に紹介する。

有限集合上の集合関数に関する概念や理論は、協力ゲーム理論 ([1, 2]) や証拠理論 (デンプスター・シェーファー理論 ([3, 4]) などの応用分野をその基礎としているものが多い。集合に関して何らかの数値を対応付ける集合関数は、一般的に加法性を持つとは限らないことは言うまでもないが、多くの場合に加法性を持つ場合と類似した概念を用いて解析される。それらは、初期段階においては無意識にまたは煩雑になるのを避けるために、加法性があるものとして処理されてきた。身近な例を挙げると、試験の点数の合計によって優劣を計る場合には、満点を100点にそろえて全てを加えることで合計点で評価することが多い。大学入試などで共通に行われる試験をもとに評価をする場合、科目ごとに重みづけを与えた点数を足し合わせることがあるが、これは有限集合上の加法的な測度に関する積分に相当する。これは有限集合上の加法的な測度に関する積分に相当する。この方法を車の車種の人気度の定量化に適用することを考えてみる。それぞれの車種に対して、売上額などをもとに人気度が定量化されているとする。また、その自動車(車種)を説明するために、燃費や、性能、デザインの良さなどをもとにした何項目かの数値(説明変数)があるとする。テストデータとして、十分な数の車種それぞれに対して、人気度と説明変数(ベクトル)の組が与えられている場合、その線形和で人気度を近似することができる。これを加法的な測度に対する積分モデルと考えると、基礎となる測度を非加法的なものに変えたものが、シヨケ積分などのファジィ積分を基礎とした近似モデルで、よりデリケートな解析ができることになる。 [5, 6]

これらの手法で実用上問題になることの一つに、説明変数の種類の増加に伴うパラメータ数の増加がある。 n 個の要素からなる集合上に加法的な測度を考える場合、1点集合毎の測度である n 個のパラメータより一意に決定することができる。これに対し、加法性を仮定しない場合は 2^n 個の自由度を持つことになる。このような指数オーダーの発散は多くの場合非現実的な状況を生み出す。例えば18個の集合で26万を超えるパラメータ数となりその同定は容易ではない。ちなみに18は2023年4月時点の大分県の市町村の数で全国で2番目に少ない。このようなパラメータの増加を軽減するための手法の一つとして、 k -加法的測度(k は自然数)への制限が挙げられる。正確な定義は次節に述べるが、集合関数において $k+1$ 個以上の要素の相互関係を無視したものとして定義される。この場合同定に必要なパラメータ数を要素数の k 乗のオーダーに抑えることができる。例えば要素数18の集合での2-加法的な集合関数のパラメータ数は171となり、

* e-mail: rfukuda@oita-u.ac.jp

計算機を用いた解析においては十分に計算可能な数だと思われる。

テイラー展開やフーリエ展開/変換などの積分を用いた様々な手法は離散的な解析においても様々な発展を見ることが出来る。これらは連続的な無限集合のものを離散的に解析する手法であると共に、要素数や参照点を現実的に計算できる数まで減らすための手法とも見ることが出来る。非加法的集合関数に対してもこれに相当する非離散化により同様の発展が期待される。実際非離散的な可測空間上で定義される集合関数(主にファジィ測度)に対して、積分の非離散化や単調収束定理などの解析が盛んにおこなわれている ([7, 8])。この報告では k -加法性に対して、2つの視点からその非離散化を検討してみる。一つはメビウス変換を用いた集合関数の表現を直積空間や(有限)部分集合の空間上の測度を用いた表現とみなし、それを非離散的に拡張する方法であり、もう一つはメビウス変換を非離散化した上でそれを用いた性質として k -加法性を特徴づける方法である。前者を構成的な k 加法性、後者を定式的な k 加法性と呼ぶことにする。

なお、メビウス変換の非離散化や加法的な集合関数による表現については Denneberg [9], 成川・室伏 [10] などでも議論されてて、ここで議論されていることと関連が大きい。残念ながら、情報を得たのが最近であるため、関連する他の研究を含め詳細な説明は次の機会とさせていただきます。

構成的な k 加法性の基礎となる考え方は デンプスター・シェイファー理論の基本確率割り当てに見ることが出来る ([3] 参照)。デンプスター・シェイファー理論では、有限集合上の集合関数が、そのべき集合上に定義される確率測度を用いて表現される場合を考えているが、確率測度を実測度に変えることにより全ての集合関数を表現することができ、これはメビウス変換を用いた表現と同じものである。このべき集合を k 個の直積空間として定めたものが Mesiar [11] における k -加法化であり、 k 個までの有限部分集合として定めたものが [12] における k -加法化である。これらは本質的には同じものと考えてよい。この意味での k 加法性を持つ集合関数は積分の計算などで解析しやすい特徴を持つが、[13] では(構成的な) k -加法性を持つ単調測度に対する Pan 積分の単調減少収束定理を得ている。

[14] におけるメビウス変換の非離散化は互いに素な任意有限個の集合を変数とする集合関数 $\tau = \tau(A_1, \dots, A_k)$ ($k \in \mathbb{N}$) として定義される。ある有限分割の有限個の集合一つずつをアトムと考え、これを含む最小の σ 集合体(これも有限集合族)に集合関数を制限したとき、本質的には有限集合上の集合関数となる。上のメビウス変換は、この集合関数に対するメビウス変換と同じものである。この非離散化されたメビウス変換に対して、集合の個数が $k+1$ 個以上の場合の $\tau(\dots)$ の値が0になることで k 加法性を定義することができる。[14] では一定の性質(強ダルブー性)を持つ有限測度をベースとした歪測度が、この意味での(定式的な) k -加法性を持つことと歪関数(測度を変換する関数)が多項式であることが同値であることを示している。また、構成的な k -加法的集合関数はすべて定式的な k -加法的集合関数であり、一定の条件下(全有界性と強い連続性)では定式的な k -加法的集合関数は構成的な k -加法性を持つことが [15] で示されている。さらに、[16] では構成的 k 加法性において $k \rightarrow \infty$ とした「構成的集合関数」を定め、歪関数が解析的な場合に(少し条件を加えれば)構成的集合関数になることを示している。また、構成的集合関数に対して、その有限次元要素(k 加法性 ($k < \infty$) に対応する集合の値)を非離散化したメビウス変換を用いて抽出できることも示されている。

2. 有限集合上の集合関数とメビウス変換

この節では集合関数に関するいくつかの概念や記法を与え、有限集合の場合を中心にその性質について述べる。この節で紹介する概念や性質は一般的によく知られているもので [17, 18] などで扱われている。ただ、設定その他において多少一般的なものと扱いを変えているものがある。奇異に感じるところがあればぜひとも今後の改善のため何らかの形でご指摘いただきたい。

この報告を通して、 (X, \mathcal{B}) を可測空間とする。すなわち X を集合、 $\mathcal{B} \subset 2^X$ を σ 集合体とする。全体集合を有限集合として議論する場合は、全体集合を N と表し、特に断らなければ $\mathcal{B} = 2^N$ と定められているものとする。この報告においては、全ての (X, \mathcal{B}) 上の (または N 上の) 集合関数 $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, ($\mu : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$) は $\mu(\emptyset) = 0$ を満たし、 $\pm\infty$ の値は取らないものとする。集合関数 μ が単調性 ($A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$) をみたすとき、ファジィ測度と呼ばれる。

定義 1 メビウス変換

μ を有限集合 N 上の集合関数とする。 μ に関するメビウス変換 $\left\{ \tau_A^{(\mu)} \right\}_{A \subset N}$ を $|A|$ に関して帰納的に次のように定める。

$$(a) \quad \tau_\emptyset = 0, \quad \tau_{\{a\}} = \mu(\{a\}).$$

$$(b) \quad \tau_A = \mu(A) - \sum_{B \subsetneq A} \tau_B.$$

μ に対応することを特筆する場合には $\tau^{(\mu)}$ と記述することにする。

集合毎に決まる値に対して和を考える場合などに \emptyset を除いて考えることがある。この報告では煩雑さをさけるために \emptyset に対応する値は 0 としている。

N 上の集合関数 μ に対するメビウス変換 τ は次の性質を満たす。次の命題の (b) をもってメビウス変換の定義とする場合が多く、その場合 (a) の証明は (b) の証明と同様に与えることができる。

補題 2 N 上の集合関数 μ に対して次が成り立つ。

$$(a) \quad \mu(A) = \sum_{B \subset A} \tau_B.$$

$$(b) \quad \tau_A = \sum_{B \subset A} (-1)^{|A|-|B|} \mu(B).$$

□

定義 3 N 上の集合関数 μ が k -加法的であるとは、対応するメビウス変換 τ が

$$|B| > k \Rightarrow \tau_B = 0, \quad (B \subset N).$$

を満たすこととする。

k -加法的測度のメビウス変換は、 k 個までの集合に対応する項を除いて 0 となる。これらをパラメータと考える場合、 $|N|$ の増加に対して $|N|^k$ のオーダーの発散になる。

定義 4 可測空間 (X, \mathcal{B}) に対して,

$$\mathcal{D} = \{\mathbb{D} = \{D_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{B} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \{D_k\}_{k=1}^n : \text{互いに素}\}$$

により \mathcal{D} を定める. $\mathbb{D} = \{D_k\}_{k=1}^n \in \mathcal{D}$ に対して

$$|\mathbb{D}| = n, \quad \cup \mathbb{D} = \bigcup_{k=1}^n D_k,$$

と定める. また $\mathbb{D}' \subset \mathbb{D}$ や $\mathbb{D}' \subsetneq \mathbb{D}$ であることを, 有限集合族としての包含関係として定める. (X, \mathcal{B}) 上の集合関数 μ のメビウス変換 $\tau = \tau^\mu$ を \mathcal{D} 上の関数として帰納的に次で定める.

(a) $|\mathbb{D}| = 1$ のとき $\mathbb{D} = \{D\}$ に対して $\tau(\mathbb{D}) = \mu(D)$ とする. ($\emptyset \in \mathcal{D}$ とし, $\tau(\emptyset) = 0$ と定める.)

(b) $|\mathbb{D}'| < |\mathbb{D}|$ に対して定義されているとき

$$\tau(\mathbb{D}) = \mu(\cup \mathbb{D}) - \sum_{\mathbb{D}' \subsetneq \mathbb{D}} \tau(\mathbb{D}')$$

と定める.

上の定義は μ を $\mu(\mathbb{D}') = \mu(\cup \mathbb{D}')$ とみなし $N = \mathbb{D}$ 上に定まる集合関数とみてメビウス変換を定めていることと同等になる. X が有限集合の場合は, 2種類のメビウス変換が定義されることになるが, 先に定義した方は $\{\tau_A\}_{A \subset N}$ の形で表記し区別することにする.

補題 2 は次のように表現される. (証明は本質的に同じ)

補題 5 $\mathbb{D} \in \mathcal{D}$ に対して次が成り立つ.

(a)
$$\mu(\cup \mathbb{D}) = \sum_{\mathbb{D}' \subset \mathbb{D}} \tau(\mathbb{D}').$$

(b)
$$\tau(\mathbb{D}) = \sum_{\mathbb{D}' \subset \mathbb{D}} (-1)^{|\mathbb{D}| - |\mathbb{D}'|} \mu(\cup \mathbb{D}').$$

次に, メビウス変換と零集合の関係を述べる. 加法的な測度に関する零集合は, その単調性や加法性から扱いが単純だが, 非加法的で単調性もない場合注意が必要になる.

定義 6 零集合 μ を $((X, \mathcal{B})$ または N 上の集合関数, $A \in \mathcal{B}$ とする.

(a) A が零集合 (null set, μ -null set) であるとは, $\mu(A) = 0$ であることとする.

(b) A が完全零集合 (c-null set, c- μ -null set) であるとは, 任意の $B \in \mathcal{B}$, $B \subset A$, が $\mu(B) = 0$ を満たすこととする.

(c) A が強零集合 (s-null set, s- μ -nullset) であるとは, 任意の $B, C \in \mathcal{B}$, $B \subset A$, が $\mu(C) = \mu(C \cup B)$ を満たすこととする.

集合関数が単調であれば、零集合は完全零集合になる。また集合関数が(有限)加法的であれば完全零集合は強零集合になる。

補題 7 μ を集合関数とするとき次が成り立つ。

- (a) A が完全零集合であることと次が同値になる。

$$\begin{aligned} N \text{ 上の場合} & \quad \tau_B = 0 \quad \forall B \subset A. \\ (X, \mathcal{B}) \text{ 上の場合} & \quad \tau(\mathbb{D}) = 0 \quad \text{if } \cup \mathbb{D} \subset A. \end{aligned}$$

- (b) A が強零集合であることと次が同値になる。

$$\begin{aligned} N \text{ 上の場合} & \quad \tau_B = 0 \quad \text{if } B \cap A \neq \emptyset. \\ (X, \mathcal{B}) \text{ 上の場合} & \quad \tau(\mathbb{D}) = 0 \quad \text{if } \exists D \in \mathbb{D} \text{ s.t. } D \subset A. \end{aligned}$$

□

次に零加法性について議論する。これも完全零集合に関する考察をすることで、メビウス変換との関連が得られる。

定義 8 (零加法性, 完全零加法性)

- (a) 集合関数 μ が零加法的(完全零加法的)であるとは任意の零集合(完全零集合) A と任意の $B \in \mathcal{B}$ (または $B \subset N$) に対して,

$$\mu(B) = \mu(B \cup A)$$

を満たすこととする。

- (b) 集合関数 μ が弱零加法的(完全弱零加法的)であるとは任意の2つの零集合(完全零集合) A, B に対して $A \cup B$ が零集合(完全零集合)であることとする。

完全零加法的であるとは、任意の完全零集合が強零集合になることでもある。

完全零加法性, 完全弱零加法性については次の性質が成り立つ。

補題 9 (a) N 上の集合関数 μ が完全零加法的であることと次が同値である。

$$(A \subset N, \exists a \in A, \text{ s.t. } \mu(\{a\}) = 0) \Rightarrow \tau_A = 0.$$

- (a)' (X, \mathcal{B}) 上の集合関数 μ が完全零加法的であることと次が同値である。

$$(\mathbb{D} = \{D_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{D}, \exists k \leq n \text{ s.t. } \mu(D_k) = 0) \Rightarrow \tau(\mathbb{D}) = 0.$$

- (b) N 上の集合関数 μ が完全弱零加法的であることと次が同値である。

$$(A \subset N, \mu(\{a\}) = 0 \quad \forall a \in A) \Rightarrow \tau_A = 0.$$

- (b)' (X, \mathcal{B}) 上の集合関数 μ が完全弱零加法的であることと次が同値である。

$$(\mathbb{D} = \{D_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{D}, \mu(D_k) = 0 \quad \forall k \leq n) \Rightarrow \tau(\mathbb{D}) = 0.$$

□

続いてショケ積分を定めメビウス変換との関連について述べる.

定義 10 (G.Choquet[19])

μ を (X, \mathcal{B}) 上の集合関数, f を (X, \mathcal{B}) 上の非負可測関数とするとき

$$\rho(r) = \rho_f(r) = \mu(\{x : f(x) \geq r\}).$$

により分布関数 $\rho(r)$ を定める.

$$\rho(r) = \rho_f(r) = \mu(\{x : f(x) \geq r\}).$$

この分布関数を用いて f のショケ積分を次で定める.

$$\int^{\text{ch}} f d\mu = \int_0^\infty \rho(r) dr.$$

有限集合上のショケ積分については次の性質が成り立つ.

補題 11 μ を N 上の集合関数, f を N 上の非負関数とする. この時次が成り立つ.

$$\int^{\text{ch}} f d\mu = \sum_{B \subset N} \min_{x \in B} f(x) \tau_B.$$

□

この性質によりショケ積分は, メビウス変換の線形結合で表すことができる. ある種の定量化が, ある (有限) 集合上に定義される関数毎に数値が対応するような状況で, 一定量のデータが得られている場合に, ショケ積分で近似されることを仮定する事で, 内在する集合関数を近似することができる. 例えば, 車の性能を燃費や可測, 操作性といった性能, 外見や内装といった意匠的観点などについてそれぞれ定量化しているとして, 別に定量化した総合評価 (人気度など) をこれらの項目を使って表現したい場合に, ショケ積分を用いた集合関数の同定が有効である. その場合, 一般にはパラメータ数は集合要素数の指数オーダーでの発散となるため, k -加法性を仮定した解析が実用的であることが多い.

続いてシャープレイ値とメビウス変換との関連について述べる.

定義 12 μ を N 上の集合関数とする. $x \in N$ のシャープレイ値を次で定める.

$$\phi(x) = \phi_\mu(x) = \sum_{A \subset N \setminus \{x\}} \frac{|A|!(|N| - |A| - 1)!}{|N|!} (\mu(A \cup \{x\}) - \mu(A))$$

シャープレイ値は, 注目する要素が対応する集合関数で見た時にどの程度貢献しているかを数値化したものであるが, 次の性質を用いてメビウス変換を通して見た方が意味が分かりやすいかもしれない.

補題 13 μ を N 上の集合関数とするとき次が成り立つ.

$$\phi(x) = \sum_{x \in A \subset N} \frac{1}{|A|} \tau_A.$$

□

3. 抽出空間 [12]

(X, \mathcal{B}) を可測空間とする. 正の整数 k に対して $X^{[k]}$, $X^{[\leq k]}$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} X^{[k]} &= \{\{x_j\}_{j=1}^k : x_j \in X, j \leq k\}. \\ X^{[\leq k]} &= \{\{x_j\}_{j=1}^n : n \leq k, x_j \in X, j \leq n\}. \end{aligned}$$

同様に 可測集合 $A \in \mathcal{B}$ に対して, 制限抽出 $A^{[k]}$, $A^{[\leq k]}$ を次で定める.

$$\begin{aligned} A^{[k]} &= \{\{x_j\}_{j=1}^k : x_j \in A, j \leq k\}. \\ A^{[\leq k]} &= \{\{x_j\}_{j=1}^n : n \leq k, x_j \in A, j \leq n\}. \end{aligned}$$

注意 抽出空間や制限抽出の要素 $\{x_j\}_{j=1}^n \in X^{[\leq k]}$ は X の有限部分集合なので, $x_j \neq x_{j'}$ if $j \neq j'$ ($j, j' \leq n \leq k$) を満たす.

$X^{[\leq k]}$ 上の σ -集合体 $\mathcal{B}^{[\leq k]}$ を次で定める.

$$\mathcal{B}^{[\leq k]} = \sigma(\{A^{[\leq k]} : A \in \mathcal{B}\}),$$

ここに, $\sigma(\dots)$ は \dots 部を含む最小の σ -集合体とする.

これらを用いて構成的 k -加法性を次のように定める.

定義 14 可測空間上の集合関数 μ が構成的 k -加法性を持つ ($k \in \mathbb{N}$) とは, $(X^{[\leq k]}, \mathcal{B}^{[\leq k]})$ 上の (有界) 実測度 ν が存在して

$$\mu(A) = \nu(A^{[\leq k]}), \quad \forall A \in \mathcal{B}.$$

を満たすこととする. この時実測度 ν を μ に関する構成測度と呼ぶ.

注意 有限集合 N 上の集合関数 μ は, メビウス変換 $\{\tau_B\}_{B \subset N}$ を用いると, 任意の $A \subset N$ に対して,

$$\mu(A) = \sum_{B \subset A} \tau_B \tag{1}$$

を満たすことを 補題 2 で示した. (この資料におけるメビウス変換の定義ではほぼ自明な性質である.)

全体集合が有限集合である場合は, べき集合は k を全体集合の要素数とした抽出空間と考えてよい. メビウス変換の集合ごとの値をポイントマスと考えると, (1) は構成的 k -加法性の定義そのものである. この様な意味で有限集合上の集合関数は全て構成的 k -加法性を持つとみることができる. デンプスターシェイファー理論における基本確率割り当ては, 有限集合のべき集合上に確率測度を考えそれをメビウス変換として集合関数を再構成するもので, 構成測度として確率測度を考えた場合に相当する. この場合は, 単調で優加法的な集合関数になる. デンプスターシェイファー理論の詳細については, [3] (菅野, 室伏) に説明があるので, ここでは紹介を割愛する.

非離散的集合関数としての構成的 k -加法性は [11] において定められているが, 構成測度は抽出空間ではなく直積空間 X^n 上に定義されている. 次の例でみるように, その場合構成測度に一意性がないことがわかる.

例 15 $X = \{a, b\}$, $\mathcal{B} = 2^X$ とし, 集合関数 μ を

$$\mu(\emptyset) = 0, \mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = \mu(\{a, b\}) = 1.$$

と定める. $X^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ とし, 可測空間としての σ -集合体はべき集合を考える. ここで X^2 上の測度 ν, ν' として次のものを考える.

$$\begin{aligned} \nu &: \nu(\{(a, a)\}) = \nu(\{(b, b)\}) = 1, \nu(\{(a, b)\}) = -1, \nu(\{(b, a)\}) = 0 \\ \nu' &: \nu'(\{(a, a)\}) = \nu'(\{(b, b)\}) = 1, \nu'(\{(a, b)\}) = 0, \nu'(\{(b, a)\}) = -1 \end{aligned}$$

このとき $\nu \neq \nu'$ であるが $A = \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ の全てに対して

$$\nu(A^2) = \nu'(A^2)$$

が成り立つ. ちなみに抽出空間上では $\{\{a, b\}\} = \{\{b, a\}\} =$ (集合としては同じ) であるので, この例でも一意性を持っている.

続いて一般に 構成的 k -加法性を持つ集合関数に対して, 構成測度が抽出空間上一意に定まることを説明する. まずは抽出空間上に次のような集合族を考える.

定義 16 $k \in \mathbb{N}$ または $k = \infty$ とし, $k = \infty$ の場合 $n \leq k$ は n の大きさに制限がないことを表すこととする.

(a)

$$\mathcal{D} = \{\mathbb{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_n\} : n \in \mathbb{N}, D_1, D_2, \dots, D_n \in \mathcal{B} \text{ は互いに素}\}$$

$$\mathbb{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_n\} \in \mathcal{D} \text{ に対して, } |\mathbb{D}| = n, \cup \mathbb{D} = \bigcup_{j=1}^n D_j \text{ と定める.}$$

(b) $\mathbb{D} = \{D_j\}_{j=1}^n \in \mathcal{D}$ に対して,

$$\begin{aligned} \Gamma_k(\mathbb{D}) &= \Gamma_k(D_1, \dots, D_n) \\ &= \{\{x_i\}_{i=1}^m \subset \cup \mathbb{D}, m \leq k, \{x_i\}_{i=1}^m \cap D_j \neq \emptyset, \forall j \leq n\} \end{aligned}$$

$k < n$ のとき $\Gamma_k(\mathbb{D}) = \emptyset$.

(c)

$$\mathcal{G}_k = \{\Gamma_k(\mathbb{D}) : \mathbb{D} \in \mathcal{D} | |\mathbb{D}| \leq k\}$$

(d)

$$\mathcal{A}_k = \left\{ \bigcup_{j=1}^n G_j, G_j \in \mathcal{G}_k : n \leq k, \{G_j\}_{j=1}^n : \text{互いに素} \right\}$$

上で定めた記号において下付きの k が省略される場合, $k = \infty$ であるとする.

命題 1 上で定めた \mathcal{A}_k は集合体になる. (全体集合, 空集合を含み, 補集合, 有限和で閉じている.) □

\mathcal{A} の要素は $A^{[\leq k]}$ およびその補集合の有限和および共通部分で表すことができるので、(帰納的に個数の少ないもので表現できるものを取り去ることで定めることができる) , $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\{A^{[\leq k]} : A \in \mathcal{B}\})$ が成り立つ.

次の性質は、この節の以後の議論に必要なだけでなく、定式的な k -加法性の定義や関連する性質を考える上での基礎となるものである.

命題 2 [14] μ を (X, \mathcal{B}) 上の集合関数, τ を対応するメビウス変換とする.
 $D_1, D_2, \dots, D_n, D, D' \subset \mathcal{B}$ が互いに素であるとき

$$\mathbb{D}_0 = \{D_1, D_2, \dots, D_n\} \in \mathcal{D}.$$

は次の等式を満たす.

$$\tau(\mathbb{D}_0 \cup \{D \cup D'\}) = \tau(\mathbb{D}_0 \cup \{D\}) + \tau(\mathbb{D}_0 \cup \{D'\}) + \tau(\mathbb{D}_0 \cup \{D, D'\}) \quad (2)$$

表記について $\mathbb{D} = \{D_1, \dots, D_{n-1}, D_n\} \in \mathcal{D}$ であるとき $\mathbb{D}' = \{D_1, \dots, D_{n-1}\}$ と $\{D_n\}$ を用いて $\mathbb{D} = \mathbb{D}' \cup \{D_n\}$ と表記することにする. □

命題 3 μ を構成的 k -加法性を持つ集合関数, τ を対応するメビウス変換, $\mu^{[\leq k]}$ を対応する構成測度とするととき, 全ての $\mathbb{D} \in \mathcal{D}_k$ に対して, 次が成り立つ.

$$\tau(\mathbb{D}) = \mu^{[\leq k]}(\Gamma_k(\mathbb{D})),$$

□

以上の議論より, σ 集合体を生成する集合体上での測度の値が, メビウス変換で決定され, メビウス変換は集合関数から一意に定まることから次の定理を得る.

定理 17 構成的な k -加法性を持つ集合関数 μ に対して, 構成測度 $\mu^{[\leq k]}$ は $(X^{[\leq k]}, \mathcal{B}^{[\leq k]})$ 上の測度として一意に定まる. □

4. 定式的 k -加法性 [14]

定式的な意味での k -加法性は [14] において次のように定義された.

定義 18 (X, \mathcal{B}) 上の集合関数 μ が定式的に k -加法性 ($k \in \mathbb{N}$) を持つとは対応するメビウス変換 τ が

$$|\mathbb{D}| > k \Rightarrow \tau(\mathbb{D}) = 0.$$

を満たすこととする.

有限集合上で定義される集合関数に対する k -加法性を考えると, 自然な拡張であると考えられるが, 「加法性」の一般化としての性質は次の命題で特徴づけられる. この性質の証明には 命題 2 が重要な役割をはたしている.

定理 19 μ を (X, \mathcal{B}) 上の集合関数, τ を対応するメビウス変換とするととき次は同値である.

- (a) μ が定式的な k -加法性を持つ.

(b) $\mathbb{D} \in \mathcal{D}$ が $|\mathbb{D}| = k + 1$ に対して $\tau(\mathbb{D}) = 0$.

(c) $\mathbb{D} \in \mathcal{D}$, $|\mathbb{D}| = k - 1$ であれば, $A, B \in \mathcal{B}$, $A \cap B = \emptyset$, $(A \cup B) \cap (\cup \mathbb{D}) = \emptyset$ であれば

$$\tau(\mathbb{D} \cup \{A \cup B\}) = \tau(\mathbb{D} \cup \{A\}) + \tau(\mathbb{D} \cup \{B\})$$

が成り立つ.

□

補題 20 $\mathbb{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_{n-1}\} \in \mathcal{D}$, $A, B \in \mathcal{B}$ が

$$(\cup \mathbb{D}) \cap A, (\cup \mathbb{D}) \cap B, A \cap B = \emptyset$$

であるとき

$$\Gamma_k(\mathbb{D} \cup \{A \cup B\}) = \Gamma_k(\mathbb{D} \cup \{A\}) \cup \Gamma_k(\mathbb{D} \cup \{B\}) \cup \Gamma_k(\mathbb{D} \cup \{A, B\})$$

と表され, 右辺の3つの集合は互いに素である.

注意 $k = n$ のとき $|\mathbb{D} \cup \{A, B\}| = k + 1$ なので $\Gamma_k(\mathbb{D} \cup \{A, B\}) = \emptyset$ となり次が成り立つ.

$$\Gamma_k(\mathbb{D} \cup \{A \cup B\}) = \Gamma_k(\mathbb{D} \cup \{A\}) \cup \Gamma_k(\mathbb{D} \cup \{B\})$$

□

上の補題を用いると次の命題を示すことができる.

命題 4 構成的 k -加法性を持つ集合関数 μ は, 定式的 k -加法的でもある.

□

5. 歪測度の k -加法性 [14, 15]

定義 21 (X, \mathcal{B}) 上の集合関数 μ が歪測度であるとは (X, \mathcal{B}) 上の正值有限測度 ν と $f(0) = 0$ を満たすボレル可測関数 f を用いて $\mu(A) = f(\nu(A))$ と表される事とする. このとき 関数 f を歪関数と呼ぶ.

歪関数 f が単調非減少であるとき, ファジィ測度になる.

補題 22 [14, 15] μ を (X, \mathcal{B}) 上の集合関数で歪測度を f とする歪測度であるとする. f が k 次の多項式で $f(0) = 0$ を満たせば, μ は構成的かつ定式的に k -加法性を持つ.

□

次のような条件下では, k 加法性を持つ歪測度の形をある程度特定することができる.

定義 23 (X, \mathcal{B}) 上の非負有限測度 ν が強ダルブー性を持つとは, 任意の $\nu(A) > 0$ なる $A \in \mathcal{B}$ と $0 < t < \nu(A)$ を満たす t に対して $\nu(B) = t$, $B \subset A$ を満たす $B \in \mathcal{B}$ が存在することとする.

補題 24 $n \in \mathbb{N}$, $f : [0, M] \rightarrow \mathbb{R}$: n 回連続的微分可能であるとする.

$$\Delta_n f(x, h) = \sum_{\ell=0}^n (-1)^{n-\ell} {}_n C_\ell f(x + \ell h)$$

と定めるとき任意の $x \in (0, M)$ に対して次が成り立つ.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_n f(x, h)}{h^n} = f^{(n)}(x).$$

□

これを用いると強ダルブー性のある時に 定式的 k -加法性のある歪測度の形が次のように特徴づけられる.

定理 25 (X, \mathcal{B}) 上の集合関数 μ が, 強ダルブー性を持つ非負有限測度 ν と $[0, \nu(X)]$ を含む開区間上で k 回連続的微分可能な関数 f を用いて $\mu(A) = f(\nu(A))$ ($A \in \mathcal{B}$) と表されるとき, 次は同値.

- (a) μ は定式的 k -加法性を持つ.
- (b) μ は構成的 k -加法性を持つ.
- (c) f は $f(0) = 0$ を満たす k 次 (以下) の多項式である.

□

6. 2つの k -加法性の同等性 [15]

集合関数が 構成的に k -加法的であれば, 定式的な k -加法性を持つことは 命題 4 で示した. 歪測度の場合は一定の条件下で同値であるともいえる.

一般的には定式的な k -加法性をもつ集合関数が, 構成的 k -加法性を持つためには, 連続的な拡張に関するいくつかの条件を課す必要がある. この証明は [15] で示しているが, その時点では [12] で示した, 構成測度の一意性の議論がされておらず, 本稿で設定した \mathcal{A}_k が集合体であることや, Γ_k の構成測度に対する値が, メビウス変換であることなどはこの時点では示されていない. これらが得られた後で見直すと, この性質は拡張定理で必要となるいくつかの条件を課すことで得られる事がわかる.

構成測度は有限測度であることを仮定しているので, 次の条件が必要となる.

定義 26 (全有界性) (X, \mathcal{B}) 上の集合関数 μ が k 次の全有界性を持つとは

$$\sup_{\{\Gamma_k(\mathbb{D}_j)\}_{j=1}^n \in \mathcal{A}_k} \sum_{j=1}^n |\tau(\mathbb{D}_j)| < \infty$$

を満たすこととする.

また, 測度の拡張に必要な 有限加法族としての σ -加法性を次のように表現する.

定義 27 (\emptyset における精密連続性) (X, \mathcal{B}) 上の集合関数 μ が (\emptyset における) k 次の精密連続性を持つとは, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{\{\Gamma(\mathbb{D}_j^{(n)})\}_{j=1}^{m(n)}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ が $A_n \searrow$ をみたすとき

$$\sum_{j=1}^{m(n)} \tau(\mathbb{D}_j^{(n)}) \rightarrow 0, \quad (\text{as } n \rightarrow \infty)$$

を満たすこととする.

このときカラテオドリの拡張定理をもちいると次の定理を得る.

定理 28 (X, \mathcal{B}) 上の集合関数 μ が次の条件を満たすとき構成的な k -加法性を持つ.

- (a) μ は定式的な k -加法性を持つ.
- (b) μ は k 次の全有界性を持つ.
- (c) μ は k 次の精密連続性を持つ.

7. 強零集合と補填測度 [12]

集合関数が与えられていて, それを基礎とした関数の解析を行う場合, しかるべき尺度が必要になる. 具体的には測度の場合の L_p ノルムのようなものを考えたいが, 対象となる集合関数は, 加法性や単調性もなく, 何らかの工夫が必要となる. この節では構成的 k -加法性を持つ集合関数が与えられたとき, 対応する強零集合に着目し, それに適した解析の基を模索する.

まず, ジョルダン分解を用いた測度の絶対値に相当するものを設定する.

定義 29 μ を構成的な k -加法性を持つ (X, \mathcal{B}) 上の集合関数とし, $\mu^{[\leq k]}$ を対応する構成測度とする. . . この時 ジョルダン分解の意味での測度の絶対値 $|\mu^{[\leq k]}|$ を用いて補填測度 $\bar{\mu}(A)$ を次で定める.

$$\bar{\mu}(A) = |\mu^{[\leq k]}|(\Gamma_k(A, A^c) \cup A^{[\leq k]}).$$

補填測度(一般に加法性を持つわけではない)は次の性質を満たす.

補題 30 μ を構成的な k -加法性を持つ (X, \mathcal{B}) 上の集合関数とし, $\bar{\mu}$ を対応する補填測度とする. . .

- (a) $\bar{\mu}$ は短調で, 劣加法的である.

$$\begin{aligned} & \cdot A \subset B \ (A, B \in \mathcal{B}) \Rightarrow \bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B), \\ & \cdot \bar{\mu}(A \cup B) \leq \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

- (b) $\bar{\mu}$ は上下からの連続性がある.

$$\begin{aligned} & \cdot A \searrow A \quad \text{in } \mathcal{B} \Rightarrow \bar{\mu}(A_n) \searrow \bar{\mu}(A). \\ & \cdot A \nearrow A \quad \text{in } \mathcal{B} \Rightarrow \bar{\mu}(A_n) \nearrow \bar{\mu}(A). \end{aligned}$$

□

メビウス変換は測度の構成と密接な関係があることが示されてきたが、強零集合でないことの十分条件も次のように与えることができる。

命題 5 μ を (X, \mathcal{B}) 上の集合関数で、 τ を対応するメビウス変換とするとき $\mathbb{D} = \{D_1, \dots, D_n\} \in \mathcal{D}_k$ が $\tau(\mathbb{D}) \neq 0$ をみたせば、任意の $j \leq n$ に対して D_j は強零集合ではない。 □

構成的 k -加法性を持つ集合関数の強零集合は先に定めた補填測度を用いて次のように条件づけられる。

定理 31 μ を構成的 k -加法性を持つ集合関数、 $\bar{\mu}$ を体操する補填測度とする。このとき A が強零集合であることと $\bar{\mu}(A) = 0$ であることが同値である。 □

続いて積分との関係について述べる。 (X, \mathcal{B}) 上の非負可測関数 f に対して、分布関数 $\rho_f(r)$ を $\rho_f(r) = \mu(\{x : f(x) > r\})$ と定め、これを用いて、ショケ積分は次で定められていた。

$$\int^{\text{ch}} f d\mu = \int_0^\infty \rho_f(r) dr.$$

パン積分は次で定義される。

定義 32 (Q. Yang [20])

μ を (X, \mathcal{B}) 上の単調な集合関数、 f を (X, \mathcal{B}) 上の非負可測関数とする。このときパン積分 $\int^{\text{pan}} f d\mu$ は次で定義される。

$$\int^{\text{pan}} f d\mu = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n a_j \mu(D_j) : \{D_j\}_{j \leq n} : X \text{ の分割}, a_j \geq 0, \right. \\ \left. (j \leq n < \infty), \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{1}_{D_j}(x) \leq f(x), \forall x \in X \right\}.$$

ここに $\sum_{j=1}^n a_j \mathbf{1}_{D_j}(x)$ の形の関数を単関数とよび、 $\sum_{j=1}^n a_j \mu(D_j)$ を単関数に対する基本和と呼ぶ。

フাজィ測度に関するショケ積分、パン積分では関数を必ずしもうまく分離できない。次の例はその状況を示している。

例 33 $X = \{a, b\}$ とし、単調な非負集合関数 μ を次で定める。

$$\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0, \quad \mu(\{a, b\}) = 1.$$

このときメビウス変換は次のようになる。

$$\tau(\{a\}) = \tau(\{b\}) = 0, \quad \tau(\{a, b\}) = \tau(\{a\}, \{b\}) = 1.$$

関数 f を次で定める。

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 0.$$

この時 分布関数は次で定める.

$$\rho_f(r) = \mu(\{x : f(x) > r\}) = \mu(\{a\}) \text{ or } \mu(\emptyset) = 0.$$

よって,

$$\int^{\text{ch}} f d\mu = \int_0^\infty \rho_f(r) dr = 0.$$

この場合, f 以下になる単関数は本質的に次の2つとなる.

$$0 \times \mathbf{1}_{\{a,b\}}, \quad 1 \times \mathbf{1}_{\{a\}} + 0 \times \mathbf{1}_{\{b\}}.$$

このとき単関数の基本和は

$$0 \times \mu(\{a,b\}) = 0, \quad 1 \times \mu(\{a\}) + 0 \times \mu(\{b\}) = 0.$$

となるので,

$$\int^{\text{pan}} f d\mu = \max\{0 \times \mu(\{a,b\}), 1 \times \mu(\{a\}) + 0 \times \mu(\{b\})\} = 0.$$

これらにより, 双方とも積分値は0になるが, f は $\{a\}$ 上で $f \neq 0$ ($\{x : f(x) \neq 0\} = \{a\}$) となる.

$$\mu(\{b\}) = 0 \neq 1 = \mu(\{a,b\}) (= \mu(\{b\} \cup \{a\})).$$

従って $\{x : f(x) \neq 0\}$ は強零集合ではない.

よってシヨケ積分やパン積分での L_p ノルム (測度ではないのでノルムと呼んでよいかどうか微妙ではあるが) によって, 強零ではない集合上で食い違う 0 と f を分離することはできない.

次に 補填測度 $\bar{\mu}$ に関するシヨケ積分による L^p -空間について考察する.

命題 6 μ を構成的な k -加法性を持つ集合関数, $\mu^{[\leq k]}$ を対応する構成測度, $\bar{\mu}$ を補填測度とする. このとき 非負可測関数 f に対して次が成り立つ.

$$|\mu^{[\leq k]}|(\{\omega : \max_{x \in \omega} f(x) > r\}) = \bar{\mu}(\{x : f(x) > r\}).$$

□

定理 34 μ を構成的 k -加法性を持つ集合関数, $\bar{\mu}$ を対応する補填測度とする.

$$\|f\|_{p, ch} = \left\{ \int^{\text{ch}} |f|^p d\bar{\mu} \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$L_{ch}^p = L_{ch}^p(d\bar{\mu}) = \{f : \|f\|_{p, ch} < \infty\}, \quad (p \geq 1)$$

とするとき, 次が成り立つ.

(a) $(L_{ch}^p(d\bar{\mu}), \|\cdot\|_{p, ch})$ はバナッハ空間. .

(b) 2つの関数 $f, g \in L_{ch}^p$ は $\{x : |f(x) - g(x)| > 0\}$ が強零集合のとき同一視される. □

次の命題は [21] で示されている劣加法的な場合のパン積分の線形性と, [22] で示されている単調増加収束定理より容易に導くことができる.

命題 7 ν を単調, 劣加法的, 上下に連続な集合関数であるとする. 新たな集合関数 $\nu^*(: \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty])$ を

$$\nu^*(A) = \int^{\text{pan}} \mathbf{1}_A d\nu.$$

により定義するとき, $\nu^*(X) < \infty$ であれば, $\nu^*(A)$ は (X, \mathcal{B}) 上 σ -加法的な有限測度である. \square

定理 35 ν を (X, \mathcal{B}) 上の劣加法的な単調測度で, 上下の連続性を持つとする. ν^* を命題 7 で定めた測度とし, $\nu^*(X) < \infty$ であるとする. このとき, (X, \mathcal{B}) 上の任意の非負可測関数 f に対して,

$$\int^{\text{pan}} f d\nu = \int^{\text{pan}} f d\nu^* (= \int f d\nu^*)$$

が成り立つ. \square

補題 36 ν を単調, 劣加法的, 上下に連続な集合関数であるとき, $p \geq 1$ に対して.

$$\|f\|_{p, \text{pan}} = \left\{ \int^{\text{pan}} |f|^p d\nu \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad L_{\text{pan}}^p = \{f : \|f\|_{p, \text{pan}} < \infty\},$$

従って L_{pan}^p はバナハ空間になる. \square

さらに, $p > 1$ であれば $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ なる $q > 0$ に対して, $L_{\text{pan}}^p = L_{\text{pan}}^q$ を満たす.

8. 構成的集合関数と歪測度 [16]

定義 37 X の有限部分集合全体を次で定める.

$$X^{[*]} = \left\{ \{x_j\}_{j=1}^n : n \in \mathbb{N}, x_j \in X, j \leq n \right\},$$

また $A \in \mathcal{B}$ に対して

$$A^{[*]} = \left\{ \{x_j\}_{j=1}^n : n \in \mathbb{N}, x_j \in A, j \leq n \right\} \subset X^{[*]}.$$

と定める.

$$\mathcal{B}^{[*]} = \sigma(\{A^{[*]} : A \in \mathcal{B}\})$$

とする. このとき $(X^{[*]}, \mathcal{B}^{[*]})$ を抽出空間という.

(X, \mathcal{B}) 上の集合関数 μ が, 抽出空間 $(X^{[*]}, \mathcal{B}^{[*]})$ の符号付有限測度 $\mu^{[*]}$ を用いて

$$\mu(A) = \mu^{[*]}(A^{[*]}), \quad \forall A \in \mathcal{B}.$$

と表されるとき μ を構成的集合関数という.

$\mu^{[*]}$ は $\mu^{[\leq k]}$ に対して $k \rightarrow \infty$ としたものである。

歪測度の場合の十分条件として次のような性質が成り立つ。

定理 38 (X, \mathcal{B}) を可測空間, μ を (X, \mathcal{B}) 上に定義される歪測度, ν, f を対応する有限測度と歪関数とする. f が次のように与えられる解析的関数で

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j, \quad a_j \in \mathbb{R},$$

$\nu(X) = M$ に対して

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| M^j < \infty.$$

を満たすとする場合, μ は構成的集合関数である. □

つづいて, 構成的集合関数から有限次元要素を抽出する事について考える. 抽出空間は有限部分集合の集まりの上の測度を用いて表現されているので, 個数を固定した部分集合族の影響を抽象的には表現することができる. ここでは, それを元の集合関数を用いて表現することを考える.

まず, 構成的集合関数 μ の有限次元要素を定める.

定義 39 μ を構成的集合関数, $\mu^{[*]}$ を対応する構成測度とする. このとき $A \in \mathcal{B}$ の k 次元要素 $\mu_k(A)$ を次で定める.

$$\mu_k(A) = \mu^{[*]}(A^{[*]} \cap X^{[k]}).$$

次の性質は, 初歩的な性質であるが, この性質の本質を説明しているので, ここで特筆しておく.

命題 8 可測空間 (X, \mathcal{B}) を考える. \mathcal{B} は可算生成とする. このとき次の (1) - (3) は同値.

- (1) 全ての一点集合 $\{x\}$ ($x \in X$) が可測である.
- (2) 任意の $x, y \in X$ ($x \neq y$) に対して, $x \in A, y \notin A$ を満たす $A \in \mathcal{B}$ がある.
- (3) 次を満たすような有限分割列

$$\{\mathbb{D}_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \{D_j^{(n)}\}_{j=1}^{N(n)} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

がとれる.

(3-1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して \mathbb{D}_{n+1} は \mathbb{D}_n の細分である. . .

$$(3-2) \quad \mathcal{B} = \sigma \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{D}_n \right).$$

(3-3) 任意の $x, y \in X$ ($x \neq y$), に対して, 番号 $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq n_0$ なるすべての n に対して, $x \in D_j^{(n)}, x \in D_\ell^{(n)}$ を満たすように, $j, \ell \leq N(n)$ を決めることができる.

□

これを用いて次の定理を得る.

定理 40 (X, \mathcal{B}) を可算生成な可測空間, μ を (X, \mathcal{B}) 上の構成的集合関数, $\mu^{[*]}$ を対応する構成測度とする. 全ての一点集合が $\{x\} \in \mathcal{B}$ を満たすとき, を補題 8 で定めた集合列, $\{\Delta_n = \{D_j^{(n)}\}_{j=1}^{N(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して,

$$\mu^{[1]}(A^{[*]}) = \mu^{[*]}(A^{[*]} \cap X^{(1)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{N(n)} \mu(D_j^{(n)} \cap A)$$

が成り立つ.

□

例 41 $X = [0, 1)$ としその上にルベグ測度 λ を考える. X 上のボレル集合体 \mathcal{B} 上の集合関数を $\mu(A) = \lambda(A)^2 + \lambda(A)$ と定める. これは多項式を歪関数とする歪測度なので, 構成的に 2-加法的である.

これに対して次のような分割を考える.

$$\{\Delta_n\} = \left\{ \left\{ \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right] \right\}_{j=1}^{2^n} \right\}.$$

これは命題 8 の条件 (3-1) - (3-3) を満たす.

A を (X, \mathcal{B}) 上の可測集合とするととき.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{2^n} \mu \left(\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right] \cap A \right) \\ &= \sum_{j=1}^{2^n} \left(\lambda \left(\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right] \cap A \right) + \lambda \left(\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right] \cap A \right)^2 \right) \\ &= \lambda(A) + \sum_{j=1}^{2^n} \lambda \left(\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right] \cap A \right)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=1}^{2^n} \lambda \left(\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right] \cap A \right)^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{2^n} \lambda \left(\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right] \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{(2^n)^2} = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2^n} \mu \left(\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right] \cap A \right) = \lambda(A)$$

より高次元の要素については次の性質が成り立つ.

定理 42 定理 40. と同じ設定および仮定をする. 可測集合による有限分割 \mathbb{D} は \mathcal{D} に属す. $\mathbb{D}' \subset \mathbb{D}$ は \mathbb{D}' が \mathbb{D} に属する集合で構成されることを意味している.

$\mathbb{D} = \{D_j\}_{j=1}^N \in \mathcal{D}$ と $A \in \mathcal{B}$ に対して

$$A \cap \mathbb{D} = \{A \cap D_j\}_{j=1}^N.$$

と定める. このとき, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\mu^{[k]}(A^{[*]}) = \mu^{[*]}(A^{[*]} \cap X^{[k]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\mathbb{D} \subset \mathbb{D}_n, |\mathbb{D}|=k} \tau(A \cap \mathbb{D}).$$

□

9. まとめ

本報告では, ここ数年の k -加法性およびその一般化に対して検討したものをまとめてみた. もとからの漠然とした目標は, 非離散化した空間で非加法的な集合関数が設定されているとき, それに基づく関数解析的な議論がやりやすい空間を設定することだったように思う. k がいくらでも大きくてよいのであれば, 有限集合上の集合関数は全て k -加法的であるので, 凸性や優/劣加法性といったものを仮定せずにもすむ広い空間が設定できるという期待もあった. しかし, 例えば歪測度の中では, たとえ $k \rightarrow \infty$ とした場合でも, 対応する歪関数に関してかなり強い仮定を置かないとそれが含まれそうにない. 広く網羅する空間とするためには, あと何段階かブレイクスルーが必要なようだ. また, この様な議論はいろんな角度から独立に解析されていてそれらの相互関係もまとめるに至っていない. 現在の状況としては, 魅力がやっと見えてきたが, やるべきことが多すぎて少し戸惑っているところともいえる. これは, ありがたいことで今回この報告をするために調べたりまとめたりしたことの最大の成果だと思っている.

最後に, この報告をまとめるにあたり, 議論コメントなど様々なご協力をいただいた岡崎先生, 本田先生, 関連研究に対して貴重な情報をいただいた成川先生 (玉川大工学部), ならびに様々なヒントやアドバイスをいただいた全ての方に深い感謝の意を表し, この稿を閉じることとする.

参考文献

- [1] 中山幹夫, 船木由喜彦, 武藤滋夫, 協力ゲーム理論, 勁草書房, 2008.
- [2] 岸. 信, 協力ゲーム理論入門, オペレーションズリサーチ 60(6) (2015) 343–350.
- [3] 菅野道夫, 室伏俊明, ファジィ測度, 日刊工業新聞社, 1993.
- [4] G. Shafer, A mathematical theory of evidence, Princeton Univ., 1976.
- [5] A. Honda, Y. Okazaki, Theory of inclusion-exclusion integral, Information Sciences 376 (2017) 136–147.
- [6] A. Honda, Y. Okazaki, Program design and implementation of inclusion-exclusion integral neural network, Proceedings The 20th International Conference on Modeling Decisions for Artificial Intelligence (2023) 98–109.
- [7] J. Kawabe, Nonadditive measures and nonlinear integrals -focusing on a theoretical aspect-, SUGAKU EXPOSITIONS 34(1) (2021) 61–92.
- [8] T. Murofushi, S. Sujino, A sufficient condition for a strong form of the egorov theorem in non-additive measure theory, SUGAKU EXPOSITIONS 34(1) (2021) 61–92.

- [9] D. Denneberg, Representation of the choquet integral with the σ -additive möbius transform, *Fuzzy Sets and Systems* 92 (1997) 139–156.
- [10] Y. Narukawa, T. Murofushi, Representation of the choquet integral with the σ -additive möbius transform, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 14(5) (2006) 579–589.
- [11] R. Mesiar, k -order additivity and maxitivity, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. modena* 51 (2003) 179–189.
- [12] R. Fukuda, A. Honda, Y. Okazaki, Suitable l_p spaces for a k -additive set function, *Fuzzy Set and Systems Volume 457*, 15 April 2023, Pages 20-31 (15) (2021) 20–31.
- [13] R. Fukuda, A. Honda, Y. Okazaki, Constructive k -additive measure and decreasing convergence theorems, in: *MDAI 2020. Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 12256, Springer, 2020, pp. 104–116.
- [14] A. Honda, R. Fukuda, Y. Okazaki, Non-discrete k -order additivity of a set function and distorted measure, *Fuzzy sets and systems(Available online)* 480 (28) (2022) 36–47.
- [15] R. Fukuda, A. Honda, Y. Okazaki, On two generalizations for k -additivity, in: *MDAI 2021. Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 12898, Springer, 2021, pp. 43–53.
- [16] R. Fukuda, A. Honda, Y. Okazaki, Constructive set function and extraction of a k -dimensional element, in: *MDAI 2023. Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 13890, Springer, 2023, pp. 58–69.
- [17] E. Pap, *Null-Additive Set Functions, Mathematics and Its Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [18] 藤本勝成, 意思決定とメビウス変換, *日本フuzzy学会誌* 10(2) (1998) 206–214.
- [19] G. Choquet, Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier* 5 (1953) 131–295.
- [20] Q. Yang, The pan-integral on the fuzzy measure space, *Fuzzy Mathematics (in Chinese)* 3 (1985) 107–114.
- [21] Y. Ouyang, R. Mesiar, On linearity of pan-integral and pan-integrable functions space, *InternatFional Journal of Approximate Reasoning archive* 90 Issue C (2017) 307–318.
- [22] Q. Zhang, R. Mesiar, J. Li, P. Struk, Generalized lebesgue integral, *International Journal of Approximate Reasoning* 52(3) (2011) 427–443.

行列シュレディンガー作用素の 半古典極限における散乱問題と一般化古典軌道

樋口 健太 (愛媛大学) †

1 序章

本稿では行列 Schrödinger 作用素の散乱問題について論じる。特に散乱行列および量子共鳴の半古典極限における漸近挙動と、作用素のシンボルに対応する一般化古典軌道との関係に着目する。

1.1 背景

本稿では、小さな正のパラメータ h に依存する行列 Schrödinger 作用素 $P(h)$ を考察する：

$$(1.1) \quad P(h) = \text{diag}(P_1(h), \dots, P_N(h)) + hR(x, hD_x).$$

ただし、 $R(x, hD_x)$ は $N \times N$ 行列型の 1 階の微分作用素 ($N \geq 1$) とし、関数とその掛け算作用素を同一視する。作用素 $P_1(h), \dots, P_N(h)$ はそれぞれ通常の Schrödinger 作用素である：

$$P_j(h) = (hD_x)^2 + V_j(x), \quad V_j \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \quad (j = 1, 2, \dots, N),$$
$$D_x = -i \frac{\partial}{\partial x} = -i \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right), \quad (hD_x)^2 = -h^2 \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

多原子分子における複数の原子核と電子の運動は、Born-Oppenheimer 近似の意味で半古典極限 $h \rightarrow 0^+$ における作用素 $P(h)$ の散乱問題へと帰着することが知られている [11, 24, 25, 30, 32].

固有値や量子共鳴の分布、散乱行列の挙動に着目する。本稿では $P(h)$ が本質的自己共役の場合のみ扱うため、そのスペクトルは実軸上に分布する。量子共鳴は (カットオフされた) レゾルベント作用素を本質的スペクトルを超えて有理型に延長した際の極として定義され、複素下半平面に離散的に現れる。物理学的には、量子共鳴の虚部の逆数は対応する共鳴状態の半減期と解釈され、実軸近くの量子共鳴の分布は重要である。また、散乱行列は $L^2(\mathbb{S}^{d-1}; \mathbb{C}^N)$ のユニタリ作用素で、一般化固有関数の挙動から定義される。これは量子的粒子がそれぞれの方向へ散乱する確率振幅を与えると解釈される。

* 内容の一部は Marouane Assal 氏 (Santiago de Chile 大学), 藤家雪朗氏 (立命館大学) との共同研究に基づく。

† 本研究は JSPS 特別研究員奨励費 JP22J00430 の助成を受けている。

‡ E-mail: higuchi.kenta.vf@ehime-u.ac.jp

作用素 $P(h)$ のスペクトルや散乱の問題においては、 N 個の Schrödinger 作用素からなる対角行列型作用素 ((1.1) の第一項) の $hR(x, hD_x)$ による摂動という見方がある。Schrödinger 作用素の半古典極限における性質は対応する古典力学との密接な関わりが知られており、Bohr の対応原理とも関連して非常に盛んに研究されている ([13, 14, 20, 29, 42] などの本およびその参考文献を参照)。このとき、各 $P_j(h)$ にはその半古典擬微分作用素 (4.1節) としてのシンボル $p_j(x, \xi) = |\xi|^2 + V_j(x)$ をハミルトニアンとする古典力学が対応する。ここで、 $(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^d$ は古典的粒子の変位、運動量とそれぞれ解釈され、相空間 $T^*\mathbb{R}^d$ における軌道はハミルトンベクトル場

$$H_{p_j} = \frac{\partial p_j}{\partial \xi} \cdot \partial_x - \frac{\partial p_j}{\partial x} \cdot \partial_\xi$$

の積分曲線となる。このような設定では、力学的エネルギー $p_j(x, \xi)$ はそれぞれの古典軌道の上で不変であり、等位曲面 $\Gamma_j(E) = \{(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^d; p_j(x, \xi) = E\}$ ($E \in \mathbb{R}$) はエネルギー超曲面とよばれる。歴史的には、作用素 $P(h)$ はエネルギー超曲面 $\Gamma_1(E), \dots, \Gamma_N(E)$ が互いに素である場合が先に研究され、様々な問題で摂動 hR による変化が h に関して指数的に小さいことが示された (例えば量子共鳴の分布 [6, 36, 28], 散乱行列の挙動 [35, 33, 31, 7] など)。近年では、エネルギー超曲面が交わるモデルも研究され、 h の多項式オーダーの変化が様々な問題で示されている (固有値や量子共鳴の分布 [2, 4, 10, 17, 19], 散乱行列の挙動 [3] など)。

1.2 問題と本稿の目的

エネルギー超曲面の交差を扱った先行研究では、1次元 2×2 行列 ($d = 1, N = 2$) のモデルを扱っており、交差集合は余次元 1 かつ横断的 ([3, 10, 19] など) としているものが多い ([2, 17] は 2 次の接触)。交差点の幾何に関するこれらの制限を緩和することは一つの重要な問題である。

本稿の目的は以下の 3 点である。第一に、Marouane Assal 氏、藤家雪郎氏との共同研究 [4, 5] の結果を紹介する。この研究では $P(h)$ の量子共鳴の漸近分布において、交差が横断的という仮定を有限次の接触へと一般化した。また、一般化古典軌道およびそのグラフ構造 (3.1節および 3.2節) を導入することにより、単なるモデルのみでなくある程度一般的なポテンシャルの組 (V_1, V_2) に対して一元的に量子共鳴の分布を明らかにした。一般化古典軌道を用いると、交差点の小さな近傍における局所的な解析と量子共鳴の分布に関する大域的な議論を分けることができる。従って、(一般化古典軌道の適用範囲で) 局所的な解析が進展すれば直ちに量子共鳴の分布も得られることとなる。第二に、一般化古典軌道による考え方が散乱行列の漸近挙動の解析にも適用できることについて述べる。すると上記と同じ理由から、散乱行列の漸近挙動も交差点の近傍における局所的な解析と大域的な議論を分けて論じることができる。第三に、 $P_1(h), P_2(h)$ の間の干渉の大きさについて、局所的な解析に現れるものと大域的な性質におけるものの関係を論じる。特に、この二つが直接的に関係する場合だけでなく、全く違ったオーダーの干渉がみられる例についても述べる。

2 半古典極限における量子共鳴や散乱行列の漸近挙動

本稿では論文に記載した結果を少し弱めた形で紹介する．作用素 $P(h)$ が一次元 2×2 行列の場合 ($d = 1, N = 2$) を考える．有界かつコンパクト台をもつ実数値の C^∞ 級関数 r_0, r_1 により,

$$P(h) = \begin{pmatrix} P_1(h) & hW \\ hW^* & P_2(h) \end{pmatrix}, \quad W = r_0(x) + ir_1(x)hD_x,$$

という形を仮定する．実数 E_1, E_2 について $V_1 - E_1, V_2 - E_2$ は台がコンパクトとする：

$$V_j - E_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \quad (j = 1, 2).$$

2.1 量子共鳴と散乱行列の定義

上述した仮定のもとで作用素 $P(h)$ の量子共鳴および散乱行列を定義する．これらは実際にはより一般的な設定で定義される．いくつかの同値な定義の仕方が知られているが、今回は一般化を考えないため、この設定において最も単純と思うものを採用する．特に、以下で紹介する定義から次元 d や関数 $V_j - E_j$ や r_0, r_1 をコンパクト台でなくした場合への一般化を想像するのは容易でないと思われる．一方、 $N \geq 1$ に関する一般化は容易である．

複素数 $E \in \mathbb{C} \setminus \{E_1, E_2\}$ に対して、次の定常方程式を考える：

$$(P(h) - E)w = 0.$$

ただし、関数 $w = w(x)$ は \mathbb{C}^2 に値をとり、解全体の集合は 4 次のベクトル空間をなす．関数 $w_{1,L}^\sharp, w_{1,L}^\flat, w_{2,L}^\sharp, w_{2,L}^\flat, w_{1,R}^\sharp, w_{1,R}^\flat, w_{2,R}^\sharp, w_{2,R}^\flat$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} w_{j,L}^\sharp &= \mathbf{v}_j \exp\left(-\frac{i}{h}\sqrt{E - E_j}x\right), & w_{j,L}^\flat &= \mathbf{v}_j \exp\left(\frac{i}{h}\sqrt{E - E_j}x\right) & x \ll -1, \\ w_{j,R}^\sharp &= \mathbf{v}_j \exp\left(\frac{i}{h}\sqrt{E - E_j}x\right), & w_{j,R}^\flat &= \mathbf{v}_j \exp\left(-\frac{i}{h}\sqrt{E - E_j}x\right) & x \gg +1, \end{aligned}$$

をみたすような唯一の解とする ($j = 1, 2$)．ただし、 $\mathbf{v}_1 = {}^t(1 \ 0)$ 、 $\mathbf{v}_2 = {}^t(0 \ 1)$ とし、平方根は実部が正となる分枝を選ぶ（負の数の場合は $i[0, +\infty)$ に値をとるものとする）．これらは Jost 解とよばれ、2 つの組 $(w_{1,L}^\sharp, w_{1,L}^\flat, w_{2,L}^\sharp, w_{2,L}^\flat)$ 、 $(w_{1,R}^\sharp, w_{1,R}^\flat, w_{2,R}^\sharp, w_{2,R}^\flat)$ はそれぞれ解空間の基底をなす．定常方程式の解が $w_{1,L}^\sharp, w_{2,L}^\sharp$ の線形結合で表せるとき左遠方 ($x \ll -1$) で外向き、 $w_{1,R}^\sharp, w_{2,R}^\sharp$ の線形結合で表せるとき右遠方 ($x \gg +1$) で外向きといい、左右とも外向きの場合単に外向きということとする．ある複素数 E において、外向き解が存在するとき、 E は $P(h)$ の量子共鳴という．量子共鳴全体の集合を $\text{Res}(P(h))$ と書くこととすると、 $E \in \text{Res}(P(h))$ は $w_{1,R}^\sharp, w_{1,L}^\sharp, w_{2,R}^\sharp, w_{2,L}^\sharp$ が一次従属であることと同値である．従って、 E が量子共鳴でないとき、

$$(w_{1,L}^\flat \ w_{1,R}^\flat \ w_{2,L}^\flat \ w_{2,R}^\flat) = (w_{1,R}^\sharp \ w_{1,L}^\sharp \ w_{2,R}^\sharp \ w_{2,L}^\sharp)S$$

をみたく 4×4 行列 $S = S(E, h)$ が存在する. これを散乱行列とよぶ. 本稿では, 散乱行列を 4 つの 2×2 ブロックへ分解し, 次のように表記する:

$$S(E) = \begin{pmatrix} S_{1,1}(E, h) & S_{1,2}(E, h) \\ S_{2,1}(E, h) & S_{2,2}(E, h) \end{pmatrix}.$$

もし $R = 0$, すなわち $W = 0$ の場合には, $S_{1,2} = S_{2,1} = 0$ となり, $S_{1,1}, S_{2,2}$ はそれぞれ通常の Schrödinger 作用素 $P_1(h), P_2(h)$ の散乱行列となる.

量子共鳴は複素上半平面には存在しない. なぜなら, $E - E_1, E - E_2$ の虚部が正のときには外向き解は遠方で指数減衰し, 特に L^2 関数となる. 従って, 複素上半平面の E が量子共鳴であることは固有値であることと同値となる. 作用素 $P(h)$ は本質的的自己共役であることから, 実数でない固有値は存在しない. 同様の理由から $E < \min\{E_1, E_2\}$ であるような量子共鳴は固有値のみ.

2.2 通常の Schrödinger 作用素のスペクトルと量子共鳴

作用素 $P(h)$ の固有値や量子共鳴の分布を $P_1(h)$ や $P_2(h)$ と比較するため, ここではまず後者について紹介する.

Schrödinger 作用素 $P_j(h)$ は $L^2(\mathbb{R})$ の本質的的自己共役作用素であり, 区間 $(\inf V_j, E_j)$ に高々有限個の固有値をもち, $[E_j, +\infty)$ が本質的スペクトルとなる. 例えば $E_0 \in (\inf V_j, E_j)$ が次の条件をみたくする場合に E_0 の近傍における固有値の半古典漸近分布がよく知られている.

条件 A. 実数 $a < b$ で, 次をみたくものが存在する:

$$\text{任意の } x \in \mathbb{R} \text{ について } \frac{V_j(x) - E_0}{(x - a)(x - b)} > 0.$$

条件 A は E_0 の摂動に関して安定した条件であることに注意されたい. つまり, ある E_0 においてこの条件が真ならば E_0 の (h に依存しない) 小さな実近傍においても真となる. このとき, E_0 の近傍における固有値は Bohr-Sommerfeld の量子化条件

$$(2.1) \quad \cos\left(\frac{\mathcal{A}(E)}{2h}\right) = 0, \quad \text{ただし } \mathcal{A}(E) = 2 \int_{\mathbb{R}} \sqrt{(E - V_j(x))_+} dx, \quad (r)_+ = \max\{r, 0\}$$

の根と一対一に対応する. より正確には, h に依存しない定数 $L > 0$ を固定し, E_0 の Lh -近傍における Bohr-Sommerfeld 集合 $\mathfrak{B}_h = \mathfrak{B}_h(E_0, L)$ を

$$(2.2) \quad \mathfrak{B}_h(E_0, L) = \{E \in [E_0 - Lh, E_0 + Lh]; \cos(\mathcal{A}(E)/2h) = 0\}$$

によって定義する. すると, \mathfrak{B}_h から $P_j(h)$ の固有値への写像 λ_h で,

$$|\lambda_h(E) - E| = \mathcal{O}(h^2)$$

となるようなものが各 $h \in (0, h_0]$ で一意に存在する ($h_0 > 0$). 逆に, 任意の $\varepsilon > 0$ について

$$\lambda_h(\mathfrak{B}_h(E_0, L)) \supset \sigma(P_j(h)) \cap [E_0 - (L - \varepsilon)h, E_0 + (L - \varepsilon)h]$$

が $h \in (0, h_\varepsilon]$ ($h_\varepsilon > 0$) で成り立つ (ただし, $\sigma(P_j(h))$ は $P_j(h)$ のスペクトル).

条件 Aのもとでは対応する古典力学のエネルギー超曲面 $\Gamma_j(E)$ は E が E_0 に近いときに単純閉曲線となる. 関数 $\mathcal{A}(E)$ はこの閉曲線を一周する古典軌道 $\gamma_j(E)$ に対応する作用と一致する:

$$\mathcal{A}(E) = \int_{\gamma_j(E)} \xi dx.$$

実軸近くの量子共鳴についても, 対応する古典力学との関係が知られている. 実数 $E_0 \in (E_j, +\infty)$ が $P_j(h)$ に対応する古典力学における非捕捉的なエネルギーとすると, 任意の定数 $M > 0$ について E_0 の $Mh \log(1/h)$ -近傍に $P_j(h)$ の量子共鳴は $h \in (0, h_M]$ のとき存在しない ($h_M > 0$ は M に依存). ここで E_0 が非捕捉的とは, エネルギー E_0 をもつ古典的粒子が時刻 $t \rightarrow \pm\infty$ において必ず空間遠方へと散逸すること, つまり任意の点 $(x_0, \xi_0) \in \Gamma_j(E_0)$ について

$$|\exp(tH_{p_j})(x_0, \xi_0)| \rightarrow +\infty \quad \text{as } |t| \rightarrow +\infty.$$

現在の設定では古典禁止領域 $\{x \in \mathbb{R}; V_j(x) > E_0\}$ が連結または空集合であり, その境界 $\{x \in \mathbb{R}; V_j(x) = E_0\}$ で V_j の微分が消えないことと同値である.

2.3 行列 Schrödinger 作用素の量子共鳴

ここでは [4, 5] の結果を紹介する. これは $P_1(h)$ について条件 Aをみたし, $P_2(h)$ について非捕捉的となるような実数 $E_0 \in (E_2, E_1)$ の近傍における量子共鳴の分布を与える. 前の節の結果から, もし $W = 0$ なら E_0 の実近傍は $P(h)$ の連続スペクトルとなっており, そのなかには固有値が埋め込まれている. しかし, $W \neq 0$ とすると固有値は一般に量子共鳴へと変化する (固有値のままである場合もある [41]). これは物理学的には分子前期分離という現象に対応しており, $P_1(h)$ の固有値に対応する安定状態 (固有関数) が $P_2(h)$ の非捕捉的な状態へと何らかの確率で遷移するためと考えられる. Fermi の黄金律の文脈でも議論される [38, 9]. このとき, $P(h)$ の共鳴に対応する外向き解は準安定状態とよばれる. エネルギー超曲面 $\Gamma_1(E_0)$ と $\Gamma_2(E_0)$ が互いに素である場合は, 虚部が h について指数的に小さな量子共鳴の分布が示されている [1, 28, 36, 6]. これは遷移確率が指数的に小さいことを示唆する. 本稿ではエネルギー超曲面が交差し, それぞれが高々有限次の接触である場合を扱う.

条件 B. 交差点集合 $\Gamma_c(E_0) := \Gamma_1(E_0) \cap \Gamma_2(E_0)$ は空でない. 任意の $\rho \in \Gamma_c(E_0)$ について

$$(2.3) \quad H_{p_1}^\mu p_2(\rho) \neq 0$$

となる自然数 μ が存在する.

式 (2.3) は p_1, p_2 について非対称であるが, μ の存在およびこれをみたす最小の μ の値は p_1, p_2 を入れ替えても不変である. 各 $\rho \in \Gamma_c(E_0)$ に対して, (2.3) をみたす最小の自然数 μ を $m_\rho \geq 1$ と書き, ρ における $\Gamma_1(E_0)$ と $\Gamma_2(E_0)$ の接触次数という. 特に, 横断的なときには $m_\rho = 1$.

次の定理は, E_0 の近傍における $P(h)$ の量子共鳴が $P_1(h)$ の固有値と一対一に対応することを示す. 実際 [4, 5] では, さらに量子共鳴の虚部の漸近展開の初項も与えている (定理 4).

定理 1 ([4, 5]). 実数 $E_0 \in (E_2, E_1)$ は, $P_1(h)$ について条件 **A** をみたし, $P_2(h)$ に対応する古典力学において非捕捉的であるとする. また, 条件 **B** を仮定し, 最大の接触次数を $m := \max_{\rho \in \Gamma_c(E_0)} m_\rho$ とする. 定数 $L > 0$ を任意に固定する. このとき十分小さな $h > 0$ について, *Schrödinger* 作用素 $P_1(h)$ に対応する *Bohr-Sommerfeld* 集合 $\mathfrak{B}_h(E_0, L)$ から $P(h)$ の量子共鳴への写像 z_h で,

$$(2.4) \quad |z_h(E) - E| = \mathcal{O}(h^{\frac{m+3}{m+1}})$$

をみたすものが一意に存在する. 逆に, 任意の $\varepsilon > 0$ について,

$$(2.5) \quad z_h(\mathfrak{B}_h(E_0, L)) \supset \text{Res}(P(h)) \cap \{E \in \mathbb{C}; |\text{Re} E - E_0| \leq (L - \varepsilon)h, |\text{Im} E| \leq Lh\}.$$

交差点集合 $\Gamma_c(E_0)$ の要素数が高々 2 個で, それぞれが横断的もしくは二次の接触であるようなモデルについては [17, 19] などの先行研究があるが, [4, 5] はそれらを含んで一般化している. また, (2.4) にみられる $P_1(h)$ の固有値との距離は $h^{\frac{m+3}{m+1}}$ のオーダーであるが, これは後でそれぞれの交差点 $\rho \in \Gamma_c(E_0)$ における“乗り換え確率”のオーダー $h^{\frac{1}{m_\rho+1}}$ から直接決まる. 交差点において W が超局所的に楕円型でない場合については, [18, 27] などでより詳しく調べられている.

また, $P_1(h), P_2(h)$ がともに条件 **A** をみたすようなエネルギーの近傍における固有値の分布, 特に分離現象が [2] で, $P_1(h), P_2(h)$ の両方について非捕捉的なエネルギーの近傍における量子共鳴の分布が [21] で示されている. これらの研究でも 3章で紹介する考え方が用いられている.

2.4 通常の Schrödinger 作用素の散乱行列

量子共鳴と同様, 作用素 $P(h)$ に対する散乱行列の前に通常の Schrödinger 作用素 $P_j(h)$ の散乱行列について述べる.

エネルギー $E > E_j$ における散乱行列は二次のユニタリ行列となる. 二つの対角成分はそれぞれ量子的粒子の $\pm\infty$ から $\mp\infty$ への透過, 非対角成分は反射に対応する確率振幅と解釈される. もし E が対応する古典力学において非捕捉的な場合には, 散乱行列は半古典極限において古典力学とよく対応する. つまり, エネルギー E よりも高いポテンシャル障壁がある場合 ($\sup V_j > E$) にはほとんど確率 1 で反射し, そうでない場合には透過する. ほとんどというのは, トンネル効果により h についてとても小さな確率で透過・反射がそれぞれ起こるためである. これらの確率は指数的に小さく, Agmon 距離やその一般化を用いて係数が与えられることが知られている [35, 37].

ポテンシャル障壁が二枚となるようなエネルギーは, 障壁の間に周期軌道が現れるため非捕捉的ではない. 古典力学的には障壁の数が増えたとしても, 遠方からやってきた粒子は最初に出会うポテンシャル障壁を越えられずに折り返して同じ方向へと戻っていくはずである. また, 通常確率論から考えたとしても, 二枚の障壁を越える確率は一枚の障壁を越える確率よりも小さいと考える方が自然に思える. しかし実際には, 二枚の障壁が対称な場合には透過確率がほとんど 1 となるようなエネルギーが現れることが知られており, 共鳴トンネル効果とよばれる. そのようなエネルギーは二枚のポテンシャル間の周期軌道が生成する量子化条件をみたすもので, 離散的に現れる (量子共鳴の実部とも同様). この現象は形式的な WKB 解の接続 (正当化可能) によって示唆さ

れ [8], 後に半導体を用いた実験により実現された [12, 23, 39]. また, ポテンシャル障壁の極大値付近のエネルギーを考えた場合 [15] や, 量子ウォークによって抽象的に散乱問題を考えた場合 [34] にも同様の現象が知られている.

2.5 行列 Schrödinger 作用素の散乱行列

作用素 $P(h)$ に対しては, エネルギー E_0 が $P_1(h), P_2(h)$ のどちらに対応する古典力学においても非捕捉的な場合が盛んに研究されている. エネルギー超曲面が互いに素である場合には, $S_{1,2}(E_0, h)$ や $S_{2,1}(E_0, h)$ が $h \rightarrow 0^+$ において指数的に小さいことが知られている [7, 28, 35, 31]. これらの研究では, ポテンシャルの解析性などの仮定のもとで指数関数の係数が一般化された Agmon 距離を用いて評価できることも明らかにされている. 一方, 4 点で横断的に交わるモデルでは $\mathcal{O}(h^{1/2})$ と多項式オーダーになることが示された [3].

本稿で紹介する証明のアイデアは, 交差集合が空でなく, それぞれが高々有限次の接触であるという仮定 B のもとで適用される. ここでは特に, 上述したような非捕捉的エネルギーにおける挙動と大きく異なる場合についての結果を紹介する.

以下, この節では $E_1 < E_0 < E_2$ とし, E_0 は $P_1(h)$ に対応する古典力学における非捕捉的エネルギーだが, $P_2(h)$ については条件 A をみたとする. 2.3 節でみたように, Bohr-Sommerfeld の量子化条件をみたすエネルギーの近くに $P(h)$ の量子共鳴が現れる. 以下の定理は, そのようなエネルギーの近傍を除けば, 散乱行列 $S_{1,1}$ の半古典漸近挙動は $P_1(h)$ に対する散乱行列 (以下 S_1 と表記) と大きく変わらないことを主張する.

定理 2. 上記の条件および条件 B を仮定する. 正の数 $L > 0, \varepsilon > 0$ を任意に固定する. このとき,

$$(2.6) \quad \text{dist}(E, \mathfrak{B}_h(E_0, L)) \geq \varepsilon h$$

をみたとす $E \in [E_0 - Lh, E_0 + Lh]$ について一様に,

$$(2.7) \quad \|S_{1,1}(E, h) - S_1(E, h)\|_\infty = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{m+1}}).$$

ただし, 行列のノルム $\|\cdot\|_\infty$ は行列の各成分の絶対値のうち最大のものとする.

次の定理は, 2 つの具体的なモデルにおいて, 量子化条件をみたすエネルギー近くで散乱行列の半古典漸近挙動が大きく変化することを示す. 定理 2 の仮定に加えて, 次の条件を仮定する.

条件 C. 任意の交差点 $\rho = (\rho_x, \rho_\xi) \in \Gamma_c(E_0)$ において, $r_0(\rho_x) + ir_1(\rho_x)\rho_\xi \neq 0$. また, 係数関数 V_1, V_2, r_0, r_1 が全て偶関数とし, 以下のいずれかをみたとする:

モデル 1: 任意の $x \in \mathbb{R}$ で $V_1(x) < E_0$ であり, $\{x \in \mathbb{R}; V_1(x) = V_2(x)\} = \{0\}$.

モデル 2: ある正の実数 $a > 0$ について

$$\frac{V_1(x) - E_0}{x^2 - a^2} < 0 < \frac{V_2(x) - E_0}{x^2 - a^2}.$$

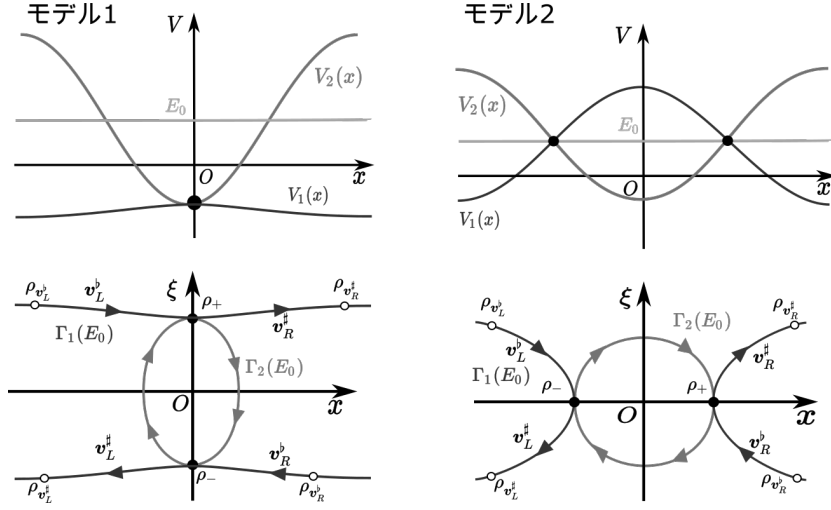


図1 条件 C をみたすポテンシャルおよび E_0 (上) と対応するエネルギー超曲面 (下)

いずれの場合も交差点の数 $\#\Gamma_c(E_0)$ は 2 つであり, それらの接触次数は互いに一致する. これを m と書く. このとき, $S_{1,1}$ は E_0 の実近傍において二次のユニタリ行列となる. 以下, $S_{1,1}(E, h)$ の対角成分および非対角成分の絶対値の二乗を透過確率, 反射確率とよび, それぞれ $\tau(E, h)$, $\rho(E, h)$ と書く. 特に $\tau(E, h) + \rho(E, h) = 1$. 定理 2 より, Bohr-Sommerfeld の量子化条件をみたすエネルギーから離れていれば,

$$\tau(E, h) = \begin{cases} 1 + \mathcal{O}(h^{\frac{2}{m+1}}) & (\text{モデル 1}), \\ \mathcal{O}(h^{\frac{2}{m+1}}) & (\text{モデル 2}). \end{cases}$$

定理 3. 定数 $L > 0$ を任意に固定する. 定理 2 の仮定と条件 C を仮定する. このとき, $E \in \mathfrak{B}_h(E_0, L)$ について一様に,

$$(2.8) \quad \tau(E) = \begin{cases} \mathcal{O}(h^{\frac{1}{m+1}}) & (\text{モデル 1}), \\ 1 + \mathcal{O}(h^{\frac{1}{m+1}}) & (\text{モデル 2}). \end{cases}$$

定理 3 は, 共鳴トンネル効果と同様に量子化条件をみたすエネルギーの近傍における特異な現象となっている. 実際には交差点がない場合にも $(\Gamma_c(E_0) \neq \emptyset)$ 類似の結果が予想される. 特にモデル 2 の類似に関しては [1] で量子共鳴の計算に用いられた転送行列の方法が有効と思われる. 一方で, モデル 1 の類似については, 相空間におけるトンネル効果の大きさを [7, 28, 35, 31] で得られたよりもより詳しく調べる必要があると予想され, 難しい問題と思う.

3 一般化古典軌道に対する Feynman 経路積分の類似

本章では, 半古典極限における量子共鳴や固有値の漸近分布や散乱行列の漸近挙動を計算する形式的な方法を天下りの定義し, いくつかの具体例に当てはめる. この計算方法は Feynman 経路積分の考え方との親和性がみられる. Feynman 経路積分は何らかのクラスに属する全ての経路に

関して随伴する確率振幅の和をとる（積分する）ことによって Schrödinger 方程式の基本解が与えられるというアイデアに基づく．考えるべき経路のクラスやその上での“測度”を定めることなどは容易ではない．一方，半古典極限においては古典軌道からの寄与が主要となることが一般化された停留位相法などから示されている（講究録 [26] およびその参考文献を参照されたい）．また，Schrödinger 方程式の定常問題において，（不動点のまわりで一般化された）古典軌道に対する確率振幅の可算和で散乱行列が計算されている [15]．本稿では， p_1, p_2 それぞれの古典軌道および，交差点集合 $\Gamma_c(E_0)$ での乗り換えを許容した一般化古典軌道（[40] も参照）に対する確率振幅を定義し，その可算和によって量子共鳴や散乱行列を計算する．この方法は個別のモデルに対しては [3, 2, 19, 21] などで用いられ，[4] で量子共鳴の問題に関してやや一般的に用いられている．

3.1 確率振幅の定義と例

本節ではまず，一般化古典軌道における確率振幅を天下一的に定義し，それを用いていくつかのモデルの量子共鳴や散乱行列を計算する．一般には定理 4, 補題 3.5, 補題 3.6 のような事実がある．

以下実数 E_0 を固定し， E は E_0 の $\mathcal{O}(\hbar)$ の複素近傍に属するとする．連続な曲線

$$\gamma : [0, T] \rightarrow \Gamma_1(E_0) \cup \Gamma_2(E_0) \subset T^*\mathbb{R}$$

が一般化古典軌道とは，交差点以外でいずれかの古典軌道と一致しているときにいう．つまり，

$$\gamma(t) \in \Gamma_j(E_0) \setminus \Gamma_c(E_0) \implies \gamma'(t) = H_{p_j}(\gamma(t)) \quad (j = 1, 2).$$

各交差点では， p_1 の生成する古典軌道と p_2 の生成する古典軌道の間を“乗り換える”場合がある．交差点 $\rho \in \Gamma_c(E_0)$ の前後において同じ古典軌道に沿って進む， $\Gamma_1(E_0)$ から $\Gamma_2(E_0)$ へ乗り換える， $\Gamma_2(E_0)$ から $\Gamma_1(E_0)$ へ乗り換える確率振幅をそれぞれ $1 - 2^{-1}\hbar^{\frac{2}{m_\rho+1}}|\omega_\rho|^2$, $-i\hbar^{\frac{1}{m_\rho+1}}\omega_\rho$, $-i\hbar^{\frac{1}{m_\rho+1}}\bar{\omega}_\rho$ と定義する．ここで，

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \omega_\rho &= 2\eta \overline{W(\rho)} \left(\frac{(m+1)!}{|H_{p_1}^{m_\rho} p_2(\rho)|} \right)^{\frac{1}{m+1}}, \quad W(\rho) = r_0(\rho_x) - ir_1(\rho_x)\rho_\xi, \\ \eta &= \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2(m_\rho+1)}\right) & m_\rho \text{ が偶数のとき} \\ \exp\left(\text{sgn}(H_{p_1}^{m_\rho} p_2(\rho)) \frac{\pi}{2(m_\rho+1)}\right) & m_\rho \text{ が奇数のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

と与えられるものとする．特に， $\rho = (\rho_x, \rho_\xi) \in \Gamma_c(E_0) \setminus \{\xi = 0\}$ のとき， $\check{\rho} = (\rho_x, -\rho_\xi) \in \Gamma_c(E_0)$ となるが，両者には次の対称性がある：

$$(3.2) \quad \omega_{\check{\rho}} = \overline{\omega_\rho}, \quad m_{\check{\rho}} = m_\rho.$$

一般化古典軌道 γ の始点及び終点は交差点や変わり点（ x 軸上の点）でないとする．このとき， γ の確率振幅を次で定める：

$$(3.3) \quad \mathcal{P}_0(\gamma) := \tau(\gamma) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_\gamma \xi dx - \frac{i\pi}{2} \nu(\gamma)\right).$$

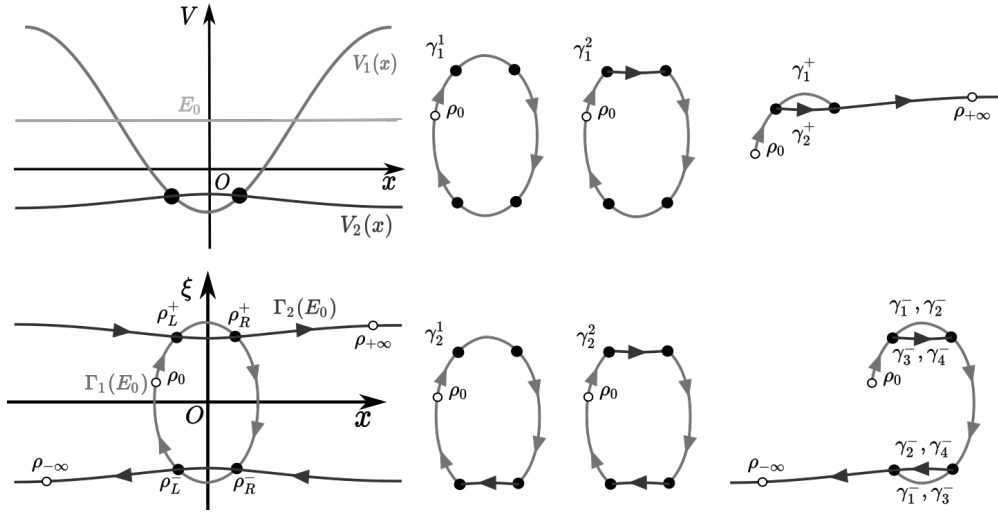


図2 例 3.2, 例 3.3 のポテンシャルおよび E_0 (左上) と対応するエネルギー超曲面 (左下), 自己交差のない一般化古典軌道 (右)

ただし, $\nu(\gamma)$ は γ が x 軸を横切る回数で, $\tau(\gamma)$ は γ が通過する交差点について, 直進もしくは乗り換えに対応する確率振幅の積をとったものである.

確率振幅は素朴な確率とは違い複素数に値をとる. 特に, 事象の和に対する確率はこれによって大きく変わる. それぞれの事象に対して複素数で与えられた確率振幅を足したものの絶対値二乗が和事象の確率を与えると考えるため, 個別の事象の確率よりも和事象の確率が小さくなる場合がある. 有名な二重スリットの実験はこの考え方に基づいて説明される [16]. 以下の例においてもそのような現象がみられる.

量子共鳴 (や固有値) は, 内向きの流入のない定常解が存在することと解釈できる. 閉じた一般化古典軌道の確率振幅に関する整合性条件が量子共鳴であるための必要条件を与える (補題 3.5).

例 3.1 (Bohr-Sommerfeld の量子化条件). エネルギー E_0 において $P_1(\hbar)$ が条件 A をみたすとし, $W = 0$ とする. このとき, $\Gamma_1(E_0)$ を一周する古典軌道に対応する確率振幅は $-\exp(iA/\hbar)$. この値が 1 となるという整合性条件が Bohr-Sommerfeld の量子化条件 (2.1) である.

例 3.2 (量子共鳴). 図 2 のようなモデルを考える. 点 ρ_0 から ρ_0 への自己交差のない一般化古典軌道は γ_j^k ($j, k \in \{1, 2\}^2$) の 4 通りある. このとき, 確率振幅の和 $\sum_{(j,k) \in \{1,2\}^2} \mathcal{P}_0(\gamma_j^k)$ は

$$-e^{iA/\hbar} \left(1 - \hbar^{\frac{2}{m_L+1}} |\omega_L|^2 - \hbar^{\frac{2}{m_R+1}} |\omega_R|^2 - 2e^{-i\tilde{A}/\hbar} \hbar^{\frac{1}{m_L+1} + \frac{1}{m_R+1}} \overline{\omega_L \omega_R} + \mathcal{O}(\hbar^{\frac{2}{m_L+1} + \frac{2}{m_R+1}}) \right).$$

ただし, $\tilde{A} = A - \int_{\gamma_1^2} \xi dx = A - \int_{\gamma_2^1} \xi dx$, $m_L = m_{\rho_L^+} = m_{\rho_L^-}$, $m_R = m_{\rho_R^+} = m_{\rho_R^-}$, $\omega_L = \overline{\omega_{\rho_L^+}} = \omega_{\rho_L^-}$, $\omega_R = \overline{\omega_{\rho_R^+}} = \omega_{\rho_R^-}$ とした. これが 1 となる整合性条件を考える. Bohr-Sommerfeld 条件をみたす実数 E_1 における Taylor 展開 $-\exp(i\hbar^{-1}A(E)) \sim 1 + iA'(E_1)\hbar^{-1}(E - E_1)$ より,

$$E \sim E_1 - i \frac{\hbar}{A'(E_1)} \left(\hbar^{\frac{2}{m_L+1}} |\omega_L|^2 + \hbar^{\frac{2}{m_R+1}} |\omega_R|^2 + 2e^{-i\tilde{A}/\hbar} \hbar^{\frac{1}{m_L+1} + \frac{1}{m_R+1}} \overline{\omega_L \omega_R} \right).$$

特に、量子共鳴 E の虚部はおおよそ

$$\begin{aligned} & -\frac{h}{\mathcal{A}'(E_0)} \left(h^{\frac{2}{m_L+1}} |\omega_L|^2 + h^{\frac{2}{m_R+1}} |\omega_R|^2 + 2\text{Re} \left(e^{i\tilde{\mathcal{A}}/h} h^{\frac{1}{m_L+1} + \frac{1}{m_R+1}} \omega_L \omega_R \right) \right) \\ & = -\frac{h}{\mathcal{A}'(E_0)} \left| h^{\frac{1}{m_L+1}} e^{i\tilde{\mathcal{A}}/h} \omega_L + h^{\frac{1}{m_R+1}} \omega_R \right|^2. \end{aligned}$$

整合性条件では、一周して戻ってくる確率振幅に着目していたが、量子共鳴の虚部は外へと散逸する確率振幅から計算することもできる (定理 4). 量子共鳴の虚部の逆数は半減期を与えるので、直観とも整合する. 主要部が Bohr-Sommerfeld の量子化条件を与え、第二項が虚部の大きさに対応する整合性条件と比べ、こちらは主要項が虚部の大きさを与えるため、近似の精度を上げやすい.

例 3.3 (量子共鳴の虚部). 例 3.2 と同じモデルにおいて、 ρ_0 を始点として $\rho_{+\infty}$ を終点とする自己交差のない一般化古典軌道は γ_1^+ , γ_2^+ の二通り存在するが、それらに対応する確率振幅の和は

$$\mathcal{P}_0(\gamma_1^+) + \mathcal{P}_0(\gamma_2^+) = e^{i \int_{\gamma_2^+} \xi dx} \left(h^{\frac{1}{m_L+1}} \overline{\omega_L} + e^{i\tilde{\mathcal{A}}/h} h^{\frac{1}{m_R+1}} \omega_R \right) + \mathcal{O}(h^{\frac{2}{m_L+1}} + h^{\frac{2}{m_R+1}})$$

となる. 同様に、 γ_1^- , γ_2^- , γ_3^- , γ_4^- については

$$\sum_{k=1}^4 \mathcal{P}_0(\gamma_k^-) = -ie^{i \int_{\gamma_1^-} \xi dx} \left(h^{\frac{1}{m_L+1}} \omega_L + e^{-i\tilde{\mathcal{A}}/h} h^{\frac{1}{m_R+1}} \overline{\omega_R} \right) + \mathcal{O}(h^{\frac{2}{m_L+1}} + h^{\frac{2}{m_R+1}}).$$

これらの絶対値の二乗を量子的粒子が $\pm\infty$ へと散逸する確率と考えると、その和

$$C \sum_{\pm} \left| \mathcal{P}_0(\gamma_1^{\pm}) + \mathcal{P}_0(\gamma_2^{\pm}) \right|^2 = 2C \left| h^{\frac{1}{m_L+1}} e^{i\tilde{\mathcal{A}}/h} \omega_L + h^{\frac{1}{m_R+1}} \overline{\omega_R} \right|^2$$

が量子的粒子が散逸する確率となる. ただし、 $C = h/2\mathcal{A}'(E_0)$ は規格化定数とする. これは整合性条件から得られた量子共鳴の虚部と一致している.

定理 4 ([4, 5]). 定理 1 と同じ仮定のもとで、 $\Gamma_1(E_0)$ から点 ρ_0 , $\Gamma_2(E_0)$ から $\rho_{\pm\infty} = (x_{\pm}, \xi_{\pm})$ を $\pm x_{\pm} \gg 1$ となるようにとる. このとき、量子共鳴 $z_h(E)$ の虚部は

$$(3.4) \quad \text{Im} z_h(h) = -\frac{h}{2\mathcal{A}'(E_0)} \sum_{\pm} \left| \sum_{\gamma \in \text{Path}^1(\rho_0, \rho_{\pm\infty})} \mathcal{P}_0(\gamma, E, h) \right|^2$$

によって与えられる. ただし、 $\text{Path}^1(\rho_0, \rho_{\pm\infty})$ は ρ_0 を始点とし、 $\rho_{\pm\infty}$ を終点とする自己交差のない一般化古典軌道全体のなす有限集合とする.

注意. 一般化古典軌道 $\gamma \in \text{Path}^1(\rho_0, \rho_{\pm\infty})$ は $\Gamma_1(E_0)$, $\Gamma_2(E_0)$ の間を一回以上乗り換えるので

$$\mathcal{P}_0(\gamma) = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{m+1}}), \quad m = \max_{\rho \in \Gamma_c(E_0)} m_{\rho}$$

となり、定理 1 の評価 (2.4) と矛盾しない.

例 3.4 (モデル 1 の散乱行列). 定理 3 のモデル 1 において, $\rho_{v_L^\pm}$ から $\rho_{v_L^\#}$ への一般化古典軌道は, 交差点 ρ_+ で $\Gamma_2(E_0)$ へ乗り換え, ρ_- で再び $\Gamma_1(E_0)$ へ乗り換えるもの (γ_0 と書く) と, ρ_+ で乗り換えた後に $\Gamma_2(E_0)$ を k 周してから ρ_- で $\Gamma_1(E_0)$ へと乗り換えて $\rho^\#$ へ至るもの (γ_k と書く) がある. それぞれの確率振幅は,

$$\mathcal{P}_0(\gamma_0) = ie^{i \int_{\gamma_0} \xi dx/h} h^{\frac{2}{m+1}} |\omega|^2 \quad \mathcal{P}_0(\gamma_k) = \left(-e^{iA/h} \left(1 - \frac{1}{2} h^{\frac{2}{m+1}} |\omega|^2 \right) \right)^k \mathcal{P}_0(\gamma_0)$$

となり, その和は

$$\mathcal{P}_0(\gamma_0) \sum_{k \geq 0} \left(-e^{iA/h} \left(1 - \frac{1}{2} h^{\frac{2}{m+1}} |\omega|^2 \right) \right)^k = \frac{\mathcal{P}_0(\gamma_0)}{1 + e^{iA/h} \left(1 - \frac{1}{2} h^{\frac{2}{m+1}} |\omega|^2 \right)}.$$

定理 2 の意味で Bohr-Sommerfeld 集合 \mathfrak{B}_h から離れたとき, これは $\mathcal{O}(h^{\frac{2}{m+1}})$ である. 一方, Bohr-Sommerfeld の量子化条件のもとでは,

$$\frac{\mathcal{P}_0(\gamma_0)}{h^{\frac{2}{m+1}} |\omega|^2 \left(1 - \frac{1}{2} h^{\frac{2}{m+1}} |\omega|^2 \right)} = ie^{i \int_{\gamma_0} \xi dx/h} \left(1 + \mathcal{O}(h^{\frac{2}{m+1}}) \right).$$

補題 3.6 によると, これの二乗は $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{m+1}})$ の精度で反射確率を近似する.

3.2 一般化古典軌道のグラフ構造

本節では, 前の節での具体的なモデルに対する計算を一般化する. 次の章で正当化する.

条件 B より, エネルギー超曲面の和集合 $\Gamma(E_0) := \Gamma_1(E_0) \cup \Gamma_2(E_0)$ から交差点集合を除いた集合 $\Gamma(E_0) \setminus \Gamma_c(E_0)$ は有限個の連結成分をもつ. 連結成分の全体の集合を \mathcal{V} と書く. 連結成分 $v \in \mathcal{V}$ が有界なとき, 両端点は古典軌道としての始点 v^- と終点 v^+ であり, 非有界なときにはどちらか一方のみをもつ. 有向辺の集合 \mathcal{E} を

$$(3.5) \quad \mathcal{E} := \{(v, v') \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}; v^+ = (v')^-\}$$

によって定義する. それぞれの連結成分 $v \in \mathcal{V}$ から代表点 ρ_v を任意にとる. このとき, 各有向辺 $e = (v, v')$ に対する重み $m_{v, v'}$ を, ρ_v から $\rho_{v'}$ への一般化古典軌道のうち, 交差点を一度だけ通過するものの確率振幅によって定義する. 有向辺でない順序対 $(v, v') \notin \mathcal{E}$ について $m_{v, v'} = 0$ と定義すれば, $M = (m_{v', v})_{(v, v') \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}}$ は有向グラフ $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ の重み付きの隣接行列となる.

次の補題は, 前の節における整合性の条件を一般化したものである. 隣接行列 $M(E, h)$ が固有値 1 をもつことが整合性の条件となっている.

補題 3.5. 定数 $L > 0$ を任意に固定する. 隣接行列が固有値 1 をもつような複素数の集合を

$$\text{Res}_0(P(h)) = \text{Res}_0(P(h), E_0, L) := \{E \in \mathbb{C}; |E - E_0| \leq Lh, \det(M(E, h) - I) = 0\}$$

とすると, 定数 $C > 0, h_0 > 0$ が存在して, 全ての $h \in (0, h_0]$ について

$$\{E \in \mathbb{C}; |E - E_0| \leq Lh, \text{dist}(E, \text{Res}_0(P(h), E_0, L)) > Ch^2\} \cap \text{Res}(P(h)) = \emptyset.$$

次に、散乱行列の計算を考える。集合 $\Gamma(E_0) \setminus \Gamma_c(E_0)$ の連結成分のうち、非有界なものはそれぞれ始点と終点のどちらか一方のみをもつのであった。始点のみをもつ連結成分の上では、古典軌道は時刻の経過につれて $|x| \rightarrow +\infty$ となり、外向きである。このような連結成分の全体を \mathcal{V}^\sharp と書く。同様に、終点のみをもつ連結成分の全体を \mathcal{V}^\flat と書く。今、列ベクトル空間 $\mathbb{C}^\mathcal{V}$ において、 χ^\sharp および χ^\flat をそれぞれ $\mathbb{C}^{\mathcal{V}^\sharp}$ および $\mathbb{C}^{\mathcal{V}^\flat}$ への制限とする。このとき、 $E \notin \text{Res}_0(P(h))$ について

$$\tilde{S}(E) := \chi^\sharp (I - M(E, h))^{-1} (\chi^\flat)^*$$

とおくと、これは半古典極限において散乱行列と対応する。

以下、定理 2 の仮定のもとでこの対応を述べる。このとき、 $x \rightarrow -\infty$ の方向に非有界な連結成分 $\mathbf{v}_L^\flat, \mathbf{v}_L^\sharp$ と $x \rightarrow +\infty$ の方向に非有界な連結成分 $\mathbf{v}_R^\flat, \mathbf{v}_R^\sharp$ が存在して $\mathcal{V}^\flat = \{\mathbf{v}_L^\flat, \mathbf{v}_R^\flat\}$, $\mathcal{V}^\sharp = \{\mathbf{v}_R^\sharp, \mathbf{v}_L^\sharp\}$ と書ける。ベクトル $u^\flat \in \mathbb{C}^{\mathcal{V}^\flat}$ および $u^\sharp \in \mathbb{C}^{\mathcal{V}^\sharp}$ をそれぞれ複素ベクトル ${}^t(u^\flat(\mathbf{v}_L^\flat), u^\flat(\mathbf{v}_R^\flat))$ および ${}^t(u^\sharp(\mathbf{v}_R^\sharp), u^\sharp(\mathbf{v}_L^\sharp))$ と同一視し、それぞれの代表点の (x, ξ) 座標を $\rho_{\mathbf{v}_L^\flat} = (x_L^\flat, \xi_L^\flat)$ のように書く。

補題 3.6. 定数 $L > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta \geq 0$ を任意に固定する。定理 2 と同じ仮定のもとで、

$$(3.6) \quad \left\| S_{1,1}(E, h) - \Theta^\sharp(E, h) \tilde{S}(E, h) \Theta^\flat(E, h) \right\|_\infty = \mathcal{O}(h^{\frac{3}{m+1}-\delta}), \quad m = \max_{\rho \in \Gamma_c(E_0)} m_\rho$$

が $|\det(I - M(E, h))| \geq \varepsilon h^\delta$ となる $E \in \{|E - E_0| \leq Lh\}$ について一様になりたつ。ただし、

$$\begin{aligned} \Theta^\flat(E, h) &= \text{diag}(e^{i\sqrt{E-E_1} x_L^\flat/h}, e^{-i\sqrt{E-E_1} x_R^\flat/h}), \\ \Theta^\sharp(E, h) &= \text{diag}(e^{i\sqrt{E-E_1} x_R^\sharp/h}, e^{-i\sqrt{E-E_1} x_L^\sharp/h}). \end{aligned}$$

経路積分と $\tilde{S}(E)$ との関係について述べる。重み付きの隣接行列 $M(E, h)$ について、 $M(E, h)^k$ ($k \in \mathbb{N}$) の各 $(\mathbf{v}', \mathbf{v})$ -成分は頂点 \mathbf{v} から \mathbf{v}' への長さ k の有向道全体についてその道に沿った重みの積を足した値になる。重みは確率振幅によって定義していたが、定義より確率振幅は一般化古典軌道の合成 $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ (γ_1 の終点と γ_2 の始点が一一致) について

$$(3.7) \quad \mathcal{P}_0(\gamma) = \mathcal{P}_0(\gamma_1 \cup \gamma_2) = \mathcal{P}_0(\gamma_1) \mathcal{P}_0(\gamma_2)$$

という関係がある。従って、 $(\mathbf{v}, \mathbf{v}'), (\mathbf{v}', \mathbf{v}'') \in \mathcal{E}$ のとき、重みの積 $m_{\mathbf{v}, \mathbf{v}'} m_{\mathbf{v}', \mathbf{v}''}$ は代表点 $\rho_{\mathbf{v}}$ から交差点を一度通過して $\rho_{\mathbf{v}'}$ へ至り、さらに交差点を一度通過して $\rho_{\mathbf{v}''}$ へと至る唯一の一般化古典軌道に対する確率振幅となる。よって、 $M(E, h)^k$ の $(\mathbf{v}', \mathbf{v})$ -成分は

$$(3.8) \quad \sum_{\gamma \in \text{Path}(\rho_{\mathbf{v}}, \rho_{\mathbf{v}'})} \mathcal{P}_0(\gamma)$$

となる。ただし、 $n_c(\gamma)$ は γ が交差点を通過する回数とする。よって、形式的に Neumann 級数展開 $(I - M)^{-1} \sim \sum_{k \geq 0} M^k$ を用いれば

$$\tilde{S}(E) \sim \chi^\sharp \left(\sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{\gamma \in \text{Path}(\rho_{\mathbf{v}}, \rho_{\mathbf{v}'}) \\ n_c(\gamma) = k}} \mathcal{P}_0(\gamma) \right) (\chi^\flat)^* = \left(\sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{\gamma \in \text{Path}(\rho_{\mathbf{v}_o^\flat}, \rho_{\mathbf{v}_t^\sharp}) \\ n_c(\gamma) = k}} \mathcal{P}_0(\gamma) \right)_{(t, o) \in \{L, R\}^2}$$

となる。右辺の各成分は内向き古典軌道上の代表点から外向き古典軌道上の代表点への一般化古典軌道に対する確率振幅の和になっていることに注目されたい。

しかし、Neumann 級数に由来する上記の可算和は一般に絶対収束しない。また、条件収束についても一般には明らかになっていない。道の長さの順に和を取った場合の散乱行列への条件収束については一次元の量子ウォークに関しては [22] で示されている。

3.3 証明の概要

本稿で紹介した定理 1, 2, 3 は、前の節で紹介した補題 3.5, 補題 3.6 を認めるとすぐに従う。本節ではその議論の概要を説明する。定理 4 はモデルに対して [19] で示されたものを [4] で一般化している。本稿ではその証明は解説しない。

定理 1 の証明の概略) . 補題 3.5 に現れる行列式 $\det(I - M(E, h))$ を計算すると、

$$(3.9) \quad \det(I - M(E, h)) = 1 + \sum_K \prod_{\gamma \in K} (-\mathcal{P}_0(\gamma)) + \mathcal{O}(h)$$

となる。ただし、和は自己交差のない閉道全体の集合の部分集合 K で、 $\gamma, \gamma' \in K$ ならば $\gamma \cap \gamma' = \emptyset$ (同じ有向辺を持たない) となるようなものについてとる。これは、重み付きの隣接行列の行列式について一般に成立する。ここで、一度も $\Gamma_1(E_0)$ と $\Gamma_2(E_0)$ の間の乗換のない一般化古典軌道は $\Gamma_1(E_0)$ 以外に存在しないことと、閉軌道であることから乗換は偶数回起こることを合わせると、 $\Gamma_1(E_0)$ でない閉道 γ については $\mathcal{P}_0(\gamma) = \mathcal{O}(h^{\frac{2}{m+1}})$ となる。一方、 $\Gamma_1(E_0)$ の確率振幅は具体的に計算できるので、

$$(3.10) \quad \det(I - M(E, h)) = 1 + e^{i\mathcal{A}(E)/h} + \mathcal{O}(h^{\frac{2}{m+1}})$$

となる。また、この E に関する微分は $h\partial_E \det(I - M(E, h)) = i\mathcal{A}'(E)e^{i\mathcal{A}(E)/h} + \mathcal{O}(h^{\frac{2}{m+1}})$ となる。Rouché の定理から、Bohr-Sommerfeld 条件をみたす実エネルギー一つひとつの $\mathcal{O}(h^{\frac{m+3}{m+1}})$ の複素近傍の一つずつ $\text{Res}_0(P(h))$ の元があることがわかる。

さらに補題 3.5 から、その $\mathcal{O}(h^2)$ -近傍の外側には量子共鳴が存在しないことが従う。最後に $P(h)$ において W を sW で置き換えた作用素の族 $\{P(h, s); |s| < 2\}$ に対して以上の議論を当てはめる。すると、 $|s| < 2$ のとき量子共鳴の存在する範囲は Bohr-Sommerfeld の量子化条件の根の $\mathcal{O}(h^{\frac{m+3}{m+1}})$ -近傍であるが、隣り合う根の間隔は $2\pi h/\mathcal{A}'(E_0) + \mathcal{O}(h^2)$ であることから、互いに交差しない。また、この近傍は十分小さな $h > 0$ を固定して s を動かすとき連続的に変化する。加藤-Rellich の定理を (厳密には $P(h, s)$ を複素伸長作用素で変形したものに対して) 用いると、量子共鳴もそれぞれ s について連続的に変化する事がわかる。また、 $s = 0$ のときには $P(h, 0)$ の固有値、即ち $P_1(h)$ の固有値がそれぞれの根の近傍の一つずつ存在するので、 s を動かしてもそのようになる。特に $s = 1$ のときが定理の主張である。□

定理 2 の証明の概略) . 行列式 $\det(I - M(E, h))$ は (3.10) でその漸近挙動が与えられているが、定理 2 の条件 (2.6) のもとでその絶対値は h に依存しない正の数で下から評価される。従って補題

3.6が適用できる．通常の Schrödinger 作用素 $P_1(h)$ の散乱行列 S_1 は $P(h)$ において $W = 0$ とした場合と一致するので，同様に (3.6) を適用できる．このときの行列 $M(E, h)$ を $M_0(E, h)$ と書くと，三角不等式から両者の差は

$$\|S_{1,1}(E) - S_1(E)\|_\infty \leq \|(I - M(E, h))^{-1} - (I - M_0(E, h))\|_\infty + \mathcal{O}(h)$$

となる．逆行列 $(I - M(E, h))^{-1}$ を余因子行列によって表示すると，各成分は有限の長さの一般化古典軌道の確率振幅の和を行列式 $\det(I - M(E, h))$ で割ったものとなる．これは $(I - M_0(E, h))^{-1}$ についても同様であるが， $W = 0$ より全ての交差点 $\rho \in \Gamma_c(E_0)$ で $\omega_\rho = 0$ となる．即ち， $\Gamma_1(E_0)$ と $\Gamma_2(E_0)$ の間を一度でも乗り換える一般化古典軌道の確率振幅は 0 となり，定義 3.3 の $\tau(\gamma)$ は 1 か 0 に値をとる関数となる．しかし，このことによる差は $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{m+1}})$ の範囲である．よって，定理の主張が従う． \square

定理 3 の証明の概略)．定理 3 で扱うそれぞれのモデルについて $\det(I - M(E, h))$ を計算すると， E_0 の $\mathcal{O}(h)$ の実近傍でモデル 1, モデル 2 とともに

$$(3.11) \quad \det(I - M(E, h)) = 1 + e^{iA(E)/h} (1 - h^{\frac{2}{m+1}} |\omega|^2 + \mathcal{O}(h^{\frac{4}{m+1}}))$$

となる．特に $\delta = 2/(m+1)$ とすると補題 3.6 が E_0 の実近傍で常に適用できる．ただし，モデル 1 における二つの交差点 $\rho_\pm = (0, \pm\sqrt{E_0 - V_1(0)})$ とモデル 2 における二つの交差点 $\rho_\pm = (\pm a, 0)$ に対して， $\omega = \omega_{\rho_+} = \overline{\omega_{\rho_-}}$ とおいた．仮定より，偶数次の接触であり $m \geq 2$ となることにも注意されたい．一方，モデル 1 において $\tilde{S}(E)$ の (1, 2)-成分にあたる余因子行列の行列式は

$$(3.12) \quad \mathcal{P}_0(\gamma) = ie^{i \int_\gamma \xi dx/h} h^{\frac{2}{m+1}} |\omega|^2$$

となる．ただし， γ は v_R^\sharp の代表点を始点とし，二つの交差点 ρ_-, ρ_+ をこの順に一度だけ通過して v_R^\sharp の代表点を終点とする唯一の一般化古典軌道である．この確率振幅と (3.11) の商の絶対値二乗が反射確率を $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{m+1}})$ の誤差で近似するが，特に E が Bohr-Sommerfeld の量子化条件をみたすときには $1 + \mathcal{O}(h^{\frac{1}{m+1}})$ となる．また，モデル 2 において $\tilde{S}(E)$ の (1, 1)-成分にあたる余因子行列の行列式は

$$(3.13) \quad \mathcal{P}_0(\gamma) = ie^{i \int_\gamma \xi dx/h} h^{\frac{2}{m+1}} \omega^2$$

となる．ただし， γ は v_L^\sharp の代表点を始点とし，二つの交差点 ρ_-, ρ_+ をこの順に一度だけ通過して v_R^\sharp の代表点を終点とする唯一の一般化古典軌道である．この確率振幅と (3.11) の商の絶対値二乗が透過確率を $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{m+1}})$ の誤差で近似するが，特に E が Bohr-Sommerfeld の量子化条件をみたすときには $1 + \mathcal{O}(h^{\frac{1}{m+1}})$ となる． \square

4 議論の正当化

本章では，前の章で導入した確率振幅の数学的な意味について解説し，補題 3.5 および補題 3.6 の証明を与える．前節と合わせて定理 1 から 3 の証明を終える．

4.1 半古典擬微分作用素

ここでは、半古典擬微分作用素の定義およびいくつかの性質を簡単に紹介する（詳しくは [13, 29, 42] などを参照）。行列値シンボルの空間 S_N^m ($m \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) を次で定義する：

$$S_N^m := \left\{ a \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^{N \times N}); \|\partial_x^k \partial_\xi^l a(x, \xi)\|_\infty \leq C_{k,l} (1 + \xi^2)^{\frac{m}{2}}, \forall k, l \in \mathbb{N} \right\}.$$

シンボル $a \in S_N^m$ に対して、その h -Weyl 量子化 $a^w(x, hD_x)$ は $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^N)$ の非有界作用素として次の式で定義される：

$$(4.1) \quad a^w(x, hD_x)u(x) := \frac{1}{2\pi h} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x-y)\xi/h} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

Calderón-Vaillancourt の定理（例えば [13, 定理 7.11]）より、 $m \leq 0$ のときには $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^N)$ における有界作用素となる。Schrödinger 作用素 $P_j(h)$ は S_1^2 のシンボル p_j の h -Weyl 量子化である。

十分小さな全ての $h > 0$ について L^2 -ノルムが一様に有界な ($\|f_h\|_{L^2(\mathbb{R})} \lesssim 1$ と書く) 関数 $f_h \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ が相空間の点 (x_0, ξ_0) で超局所的に $\mathcal{O}(h^\infty)$ とは、

$$(4.2) \quad \|\chi^w(x, hD_x) f_h\|_{L^2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(h^\infty)$$

となる関数 $\chi \in C_c^\infty(T^*\mathbb{R}; [0, 1])$ で、 $\chi(x_0, \xi_0) = 1$ をみたすものが存在するときという。このことを $f_h \equiv 0$ m.l. near (x_0, ξ_0) と書く。また、 $\Omega \subset T^*\mathbb{R}$ の各点で超局所的に $\mathcal{O}(h^\infty)$ のとき、単に Ω において超局所的に $\mathcal{O}(h^\infty)$ という。ベクトル値のときには全ての成分がそれぞれ超局所的に $\mathcal{O}(h^\infty)$ のときという。特に、 $a \in S_N^m$ および $w \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^N)$ ($\|w\|_{L^2} \lesssim 1$) に対して、 $a^w(x, hD_x)w$ が $\Omega \subset T^*\mathbb{R}$ において超局所的に $\mathcal{O}(h^\infty)$ のとき、 w は Ω において方程式 $a^w(x, hD_x)w = 0$ の超局所解という。このとき超局所解は $\Omega \setminus \{\det a(x, \xi) = 0\}$ 上で超局所的に $\mathcal{O}(h^\infty)$ となることが知られている。

4.2 一般化古典軌道に沿った半古典特異性の伝播

前節の議論から、超局所解の性質はシンボルの行列式の零集合上で調べればよいことがわかる。方程式 $(P(h) - E)w = 0$ においては、 $\Gamma(E) = \Gamma_1(E) \cup \Gamma_2(E)$ を零集合として考えられる。さらに、特異性の伝播によって有限個の点での超局所解の振る舞いが古典軌道や一般化古典軌道の曲線上での振る舞いを決定する。ここではそのことを紹介する（[4, Section 3] も参照）。

集合 $\Gamma \setminus (\Gamma_c \cup \{\xi = 0\})$ から任意に点 $\rho = (\rho_x, \rho_\xi)$ をとると、 ρ で規格化された WKB 型の超局所解がとれる。それを f_ρ と書く。点 ρ が Γ_j に属するとき、 f_ρ は

$$f_\rho = e^{(\text{sgn} \rho_\xi) i \phi_j(x, \rho_x)/h} \begin{pmatrix} \sigma_1(x, h) \\ \sigma_2(x, h) \end{pmatrix}$$

という形で書くことができ、 $\phi_j(x, \rho_x) = \int_{\rho_x}^x \sqrt{E - V_j(y)} dy$, $\sigma_j = (E - V_j(x))^{-1/4} + \mathcal{O}(h)$, $\sigma_{\hat{j}} = \mathcal{O}(h)$ ($\{j, \hat{j}\} = \{1, 2\}$) となる。このような f_ρ は $\mathcal{O}(h)$ を法として一意に定まる。また、 ρ の

近傍における超局所解全体の集合は（差が超局所的に $\mathcal{O}(h^\infty)$ である二つの関数は同値であるとみなすと）1次元のベクトル空間をなすので、任意の超局所解は f_ρ の定数倍と同値である．確率振幅 \mathcal{P}_0 は、このときの定数が一般化古典軌道に沿ってどのように変化するかを次の命題 1,2 の意味で近似する．

命題 1. 一般化古典軌道 γ は交差点を一度も通過しないとし、その始点、終点をそれぞれ ρ^- , ρ^+ と書く．このとき、 γ の像における超局所解 w がある定数 α^- について $w \equiv \alpha^- f_{\rho^-}$ *m.l. near* ρ^- をみたすとする、

$$(4.3) \quad \alpha^+ = (1 + \mathcal{O}(h)) \mathcal{P}_0(\gamma) \alpha^-$$

であるようなある定数 α^+ について $w \equiv \alpha^+ f_{\rho^+}$ *m.l. near* ρ^+ .

命題 2. 一般化古典軌道 γ は交差点 ρ を一度のみ通過するとし、その始点、終点をそれぞれ ρ^- , ρ^+ と書く．始点 ρ^- が Γ_j ($j = 1, 2$) に属するとき、 Γ_j ($\{j, \hat{j}\} = \{1, 2\}$) の点を始点とし、同じ交差点 ρ のみを通過して終点 ρ^+ へと至る一般化古典軌道 $\check{\gamma}$ を任意にとる．その始点を $\check{\rho}^-$ と書く．関数 w が $\gamma \cup \check{\gamma}$ の像における超局所解であるとし、定数 α^- , $\check{\alpha}^-$ は

$$w \equiv \alpha^- f_{\rho^-} \quad \textit{m.l. near } \rho^-, \quad w \equiv \check{\alpha}^- f_{\check{\rho}^-} \quad \textit{m.l. near } \check{\rho}^-$$

みたすとする．このとき、

$$(4.4) \quad \alpha^+ = (1 + \mathcal{O}(h)) \left[(\mathcal{P}_0(\gamma) + \mathcal{O}(h^{\frac{3}{m_\rho+1}})) \alpha^- + (\mathcal{P}_0(\check{\gamma}) + \mathcal{O}(h^{\frac{3}{m_\rho+1}})) \check{\alpha}^- \right]$$

であるようなある定数 α^+ について $w \equiv \alpha^+ f_{\rho^+}$ *m.l. near* ρ^+ .

以上の命題、特に式 (4.3), (4.4) においては、 $\mathcal{O}(h)$ や $\mathcal{O}(h^{\frac{3}{m_\rho+1}})$ の誤差が現れている．基底として選ぶ f_ρ を固定することにより、それぞれ

$$\alpha^+ = \mathcal{P}(\gamma) \alpha^- + \mathcal{O}(h^\infty), \quad \alpha^+ = \mathcal{P}(\gamma) \alpha^- + \mathcal{P}(\check{\gamma}) \check{\alpha}^- + \mathcal{O}(h^\infty),$$

となるように $\mathcal{P}(\gamma) = \mathcal{P}_0(\gamma) + \mathcal{O}(h^{\frac{3}{m_\rho+1}})$ を定義できる ([4] では \mathcal{P} のみを定義している)．前の章で \mathcal{P}_0 から行列 M を定義した方法によって行列 \widetilde{M} を \mathcal{P} から定義すると、次がなりたつ．

補題 4.1. 集合 $\{(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}; |x|^2 + |\xi|^2 \leq R\}$ ($R \gg 1$) における超局所解 w に対して、 \mathcal{V} のそれぞれの元 v の代表点 ρ_v で $w \equiv \alpha(v) f_{\rho_v}$ *m.l. near* ρ_v となるように $\alpha \in \mathbb{C}^\mathcal{V}$ をとれば、

$$(4.5) \quad (\widetilde{M} + \chi^\flat) \alpha = \alpha + \mathcal{O}(h^\infty)$$

をみたす．ただし、 χ^\flat は内向きの非有界連結成分への射影である（補題 3.6 を参照）．

4.3 補題の証明

補題 3.5 および補題 3.6 の証明の概略について説明する．これらはいずれも方程式 $(P(h) - E)w = 0$ の解の挙動についての考察へと帰着する．さらに、解が存在するとき、十分広い区間 I で 1 とな

ようなカットオフ関数を w に掛けたものは L^2 関数で, $I_x \times \mathbb{R}_\xi \subset T^*\mathbb{R}$ において w との差が超局所的に $\mathcal{O}(h^\infty)$ となるような超局所解となる.

本稿では量子共鳴や散乱行列は Jost 解を用いて定義した. 考えるエネルギー E_0 が E_j より小さいとき, 外向きおよび内向きの Jost 解 $w_{j,\bullet}^\sharp, w_{j,\bullet}^b$ ($\bullet = L, R$) はそれぞれの方向に指数減衰および指数増大する. 一方, $E_j < E_0$ のときには, Jost 解 $w_{j,L}^\bullet, w_{j,R}^\bullet$ ($\bullet = \sharp, b$) はそれぞれが集合 $\Gamma \setminus \Gamma_c$ の非有界な連結成分と対応する. 例えば, 関数 $e^{\pm i\sqrt{E-E_1}x/h}$ は集合 $\{(x, \xi); \xi = \pm\sqrt{E-E_1}\}$ の上でのみ超局所的に $\mathcal{O}(h^\infty)$ でない. 定理 3 の仮定 (特に $E_1 < E_0 < E_2$) のもとで解 w が

$$w = c_1 w_{1,L}^b + c_2 w_{1,L}^\sharp + c_3 w_{2,L}^\sharp$$

と書けているとすると, 補題 3.6 および補題 4.1 の表記で

$$\alpha(\mathbf{v}_L^b) = c_1 e^{i\sqrt{E-E_1}x_L/h}, \quad \alpha(\mathbf{v}_L^\sharp) = c_2 e^{i\sqrt{E-E_1}x_L/h}$$

という関係となる. このことから, w が外向きの解であるということは, $\alpha(\mathbf{v}_L^b) = \alpha(\mathbf{v}_R^b) = 0$ を導く. また $(\alpha(\mathbf{v}_L^b), \alpha(\mathbf{v}_R^b))$ に対して $(\alpha(\mathbf{v}_R^\sharp), \alpha(\mathbf{v}_L^\sharp))$ を対応させる写像に左右から Θ^\sharp, Θ^b を掛けたものが散乱行列 $S_{1,1}$ となることがわかる. そのような写像は, 式 (4.5) を $\alpha = (I - \widetilde{M})^{-1} \chi^b \alpha + \mathcal{O}(h^\infty)$ と書き換えて χ^\sharp を左から掛けることで得られる. これによって補題 3.6 が導かれる.

また, 外向き解 w に対して式 (4.5) を考えると

$$\widetilde{M}\alpha = \alpha + \mathcal{O}(h^\infty)$$

となる. もし 1 が \widetilde{M} の固有値でないとすると, $\alpha = \mathcal{O}(h^\infty)$ が従うが, これと w が外向きであることを合わせると $w = \mathcal{O}(h^\infty)$ が導かれる ([4, Proposition 4.8]). 補題 3.5 は本質的にこの事実から従う.

参考文献

- [1] S. Ashida: Molecular predissociation resonances below an energy level crossing. *Asymptot. Anal.* 107 (2018), no. 3-4, pp.135–167.
- [2] M. Assal, S. Fujiié: Eigenvalue splitting of polynomial order for a system of Schrödinger operators with energy-level crossing. *Comm. Math. Physics* 386 (2021), pp.1519–1550.
- [3] B. Abdelmoumen, H. Baklouti, and S.B. Abdeljeilil: Interacting double-state scattering system. *Asymptot. Anal.* vol. 111, no. 1 (2019), pp.15–42.
- [4] M. Assal, S. Fujiié, K. Higuchi: Semiclassical resonance asymptotics for systems with degenerate crossings of classical trajectories. Preprint in arXiv: 2211.11651 (2023).
- [5] M. Assal, S. Fujiié, K. Higuchi: Semiclassical resonance asymptotics for systems with degenerate crossings of classical trajectories II. Work in progress.
- [6] H. Baklouti: Asymptotique des largeurs de résonances pour un modèle d'effet tunnel microlocal. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor.* 68 (1998) no. 2, pp.179–228.

- [7] M. Benchaou and A. Martinez : Estimations exponentielles en théorie de la diffusion pour des opérateurs de Schrödinger matriciels. *Ann. Inst. Henri. Poincaré* 71, 6, pp.561–594 (1999).
- [8] D. Bohm : *Quantum theory*, Prentice-Hall, New York, 1951.
- [9] P. Briet and A. Martinez : Estimates on the molecular dynamics for the predissociation process. *J. Spectr. Theor.* 7(2) (2017), pp.487–517.
- [10] Y. Colin de Verdière : The level crossing problem in semi-classical analysis. II. The Hermitian case. *Ann. Institut Fourier* 359, no. 5 (2004), pp.1423–1441.
- [11] J. M. Combes, P. Duclos, and R. Seiler : The Born Oppenheimer approximation. *Rigorous Atomic and molecular Physics* (1981), pp.185–213.
- [12] L. L. Chang, L. Esaki, and R. Tsu : Resonant tunneling in semi-conductor double barriers. *Appl. Phys. Lett.* 24 (1974), pp.593–595.
- [13] M. Dimassi, S. Sjöstrand : *Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit*. Cambridge University Press, 1999.
- [14] S. Dyatlov, M. Zworski : *Mathematical Theory of Scattering Resonances. Graduate Studies in Mathematics, 200*. American Mathematical Soc., 2019.
- [15] S. Fujiié : Semiclassical representation of the scattering matrix by a Feynman integral. *Commun. Math. Phys.* 198 (1998) pp.407–425.
- [16] R.P. Feynman and A.R. Hibbs : *Quantum mechanics and path integrals*. McGraw-Hill: New York, 1964.
- [17] S. Fujiié, A. Martinez, and T. Watanabe : Widths of resonances at an energy-level crossing I: Elliptic interaction. *J. Diff. Eq.* 260 (2016) pp.4051–4085.
- [18] S. Fujiié, A. Martinez, T. Watanabe : Widths of resonances at an energy-level crossing II: Vector field interaction. *J. Diff. Eq.* 262 (2017) pp.5880–5895.
- [19] S. Fujiié, A. Martinez, T. Watanabe : Widths of resonances above an energy-level crossing, *J. Funct. Anal.*, 280 (2021), no. 6, 108918.
- [20] B. Helffer, J. Sjöstrand : Résonances en limite semiclassique. *Bull. Soc. Math. France, Mémoire No. 24–25*, (1986).
- [21] K. Higuchi : Résonances semiclassiques engendrées par des croisements de trajectoires classiques. *C. R. Acad. Sci.* 359, issue 6 (2021), pp. 657–663.
- [22] K. Higuchi : Feynman-type representation of the scattering matrix on the line via a discrete-time quantum walk. *J. Phys. A: Math. Theor.* 54 (2021) 235203.
- [23] L. V. Iogansen : The possibility of resonance transmission of electrons in crystals through a system of barriers. *Soviet Physics JETP*, 18 (1) (1964) pp. 146–150.
- [24] M. Klein, A. Martinez, R. Seiler, X.W. Wang : On the Born-Oppenheimer expansion for polyatomic molecules, *Comm. Math. Phys.*, 143 no. 3 (1992) pp.607–639.
- [25] M. Klein, A. Martinez, X.W. Wang : On the Born-Oppenheimer approximation of wave

- operators in molecular scattering theory, *Comm. Math. Phys.*, 152 (1993), pp.73–95.
- [26] N. Kumano-go and D. Fujiwara: Feynman path integrals and semiclassical approximation (Algebraic analysis and the exact WKB analysis for systems of differential equations). 数理解析研究所講究録別冊 5 (2008) pp.241–263.
- [27] V. Louatron: Semiclassical resonances for matrix Schrödinger operators with vanishing interactions at crossings of classical trajectories. Preprint in arXiv: 2306.02350 (2023).
- [28] A. Martinez: Estimates on complex interactions in phase space. *Math. Nachr.*, 167 (1994), pp.203–254.
- [29] A. Martinez: *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*. Springer-Verlag New-York, UTX Series, 2002.
- [30] A. Martinez and B. Messirdi: Resonances for diatomic molecules in the Born-Oppenheimer approximation. *Commun. Part. Diff. Eq.*, 19, (1994), pp.1139–1162.
- [31] A. Martinez, S. Nakamura, and V. Sordoni: Phase space tunneling in multistate scattering. *J. Funct. Anal.*, 191 (2002), pp.297–317.
- [32] A. Martinez and V. Sordoni: Twisted pseudodifferential calculus and application to the quantum evolution of molecules. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 200 (936) (2009).
- [33] A. Martinez and V. Sordoni: Widths of highly excited resonances in multidimensional molecular predissociation. *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 72, No. 3 (2020), pp.687–730.
- [34] K. Matsue, L. Matsuoka, O. Ogurisu, and E. Segawa: Resonant-tunneling in discrete-time quantum walk. *Quantum Stud. Math. Found.*, 6 (2019) pp.35–44.
- [35] S. Nakamura: Tunneling effects in momentum space and scattering. In *Spectral and scattering theory* (pp.131–151). CRC Press (1994).
- [36] S. Nakamura: On an example of phase-space tunneling, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor.*, 63 (1995), no. 2, pp.211–229.
- [37] T. Ramond: Semiclassical study of quantum scattering on the line, *Commun. in Math. Phys.*, 177 (1966), pp.221–254.
- [38] M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. IV*. Academic Press New York, 1972.
- [39] R. Tsu and L. Esaki: Tunneling in a finite superlattice. *Appl. Phys. Lett.* 22 (1973), pp.562–564.
- [40] S. Wakabayashi: Singularities of solutions of the Cauchy problem for symmetric hyperbolic systems. *Commun. Part. Diff. Eq.* 9 (12) (1984) pp.1147–1177.
- [41] X.P. Wang: Embedded eigenvalues and resonances of Schrödinger operators with two channels. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*. Vol. 16. No. 1. (2007) pp.179–214.
- [42] M. Zworski: *Semiclassical Analysis. Graduate Studies in Mathematics, 138*. American Mathematical Soc., 2012.

Semilinear Schrödinger equations with singular electromagnetic potentials of critical decays

Toshiyuki Suzuki (鈴木 敏行)

神奈川大学 工学部

t21.suzuki@gmail.com

1. Introduction

本講演および本資料は、次の電場および磁場ポテンシャルの付いた非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題について、解の一意存在や有限時間爆発に関する結果を紹介したい。

$$(NLS) \quad \begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} = (-i \nabla + A)^2 u + V u + \lambda |u|^{p-1} u & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

ただし、 $i = \sqrt{-1}$, $N \geq 3$, $V \in C(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}; \mathbb{R})$, $A \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}; \mathbb{R}^N)$ とし、

$$\nabla = [\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_N], \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_N^2.$$

V および A には、次のスケールに関する条件を仮定する。

$$(1.1) \quad V(\mu x) = \mu^{-2} V(x), \quad A(\mu x) = \mu^{-1} A(x), \quad \mu > 0.$$

また、 A にはゲージ条件として、次も仮定する。

$$(1.2) \quad x \cdot A(x) = 0.$$

仮定に見合う例として、 V については $a|x|^{-2}$ や $b x_N |x|^{-3}$ などが挙げられる。前者は最近盛んに偏微分方程式の研究で扱われている (Hardy ポテンシャルということもある)。一方、後者については、クーロンポテンシャルで記述されるような単極子同士を隣接させた双極子の場を考えると、近似的に現れる。また、 A については $b|x|^{-2}[-x_2, x_1, 0, \dots, 0]$ (Aharonov–Bohm 効果) などが挙げられる。以下では、作用素 P を

$$P := (-i \nabla + A)^2 + V = -\Delta - 2i A \cdot \nabla - i \operatorname{div} A + |A|^2 + V$$

と定める ($\operatorname{div} A = \nabla \cdot A$)。 (1.1) より $P[u(\mu x)] = \mu^2 (Pu)(\mu x)$, $\mu > 0$ となることに注意する。これはスケール変換によってポテンシャルを無視することができないことを意味する。 P が $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上の非負自己共役となるように、

$$(1.3) \quad 0 \leq \delta(V, A) := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} [(-i \nabla + A)u]^2 + V |u|^2 dx; \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-2} |u|^2 dx = 1 \right\}$$

を仮定する。このとき、 P は Friedrichs 拡張の意味で非負自己共役である (form-sum)。したがって、1 次半形式

$$h_P[u, v] := \int_{\mathbb{R}^N} [(-i \nabla u + Au) \cdot \overline{(-i \nabla v + Av)} + V u \bar{v}] dx$$

の定義域が $(1 + P)^{1/2}$ の定義域と一致している. この定義域についてはこの後考察する.
さて, P を極座標表示すれば, (1.1) と (1.2) により

$$\begin{aligned} P &= -\partial_r^2 - \frac{N-1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} (-\Delta_S - 2i A_S \cdot \nabla_S - i \nabla_S \cdot A_S + |A_S|^2 + V_S) \\ &= -\partial_r^2 - \frac{N-1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} [(-i \nabla_S + A_S)^2 + V_S] \end{aligned}$$

となる. ただし, $A_S := A(x/|x|)$, ∇_S や Δ_S は単位球面 $S = S^{N-1}$ 上における勾配と Laplacian (Laplace-Beltrami 作用素) である. そこで, 単位球面上の微分作用素として

$$Q := (-i \nabla_S + A_S)^2 + V_S + (N-2)^2/4$$

を定義すれば, $L^2(S^{N-1})$ 上の非負自己共役作用素になっている. 実際, (1.3) から

$$\int_{S^{N-1}} \left[|(-i \nabla_S + A_S)u|^2 + \left(V_S + \frac{(N-2)^2}{4} \right) |u|^2 \right] d\sigma_{S^{N-1}} \geq \delta(V, A) \int_{S^{N-1}} |u|^2 d\sigma_{S^{N-1}}$$

が得られる. これより, $\delta(V, A) > 0$, $-1 \leq s \leq 1$ ならば, $Q^{s/2}$ と $(1 - \Delta_S)^{s/2}$ は同値である. 実際, $\delta(V, A) \geq 0$ ならば,

$$(1.4) \quad \begin{aligned} c_1 \|(1 - \Delta_S)^{1/2} u\|_{L^2(S^{N-1})}^2 &\leq \|Q^{1/2} u\|_{L^2(S^{N-1})}^2 \leq c_2 \|(1 - \Delta_S)^{1/2} u\|_{L^2(S^{N-1})}^2; \\ c_1 &:= \frac{\delta(V, A)}{1 + 2\delta_{V,A} + 2\|V_S^-\|_{L^\infty(S^{N-1})} + \|A_S\|_{L^\infty(S^{N-1})}^2}, \\ c_2 &:= 2 \vee 2\|A_S\|_{L^\infty(S^{N-1})}^2 + \|V_S^+\|_{L^\infty(S^{N-1})}. \end{aligned}$$

Heinz-Kato の不等式 ([11, Theorem 2]) や双対を考えれば, 同値性が得られる. なお, $\delta(V, A) = 0$ の場合はこのままでは同値性が成立しない. さて, 球対称 Hardy の不等式

$$(1.5) \quad \int_0^\infty \frac{|f(r)|^2}{r^2} r^{N-1} dr \leq \frac{4}{(N-2)^2} \int_0^\infty |\partial_r f(r)|^2 r^{N-1} dr, \quad N \geq 3$$

を用いれば,

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \tilde{c}_1 \|(1 - \Delta)^{1/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 &\leq \|(1 + P)^{1/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \tilde{c}_2 \|(1 - \Delta)^{1/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2; \\ \tilde{c}_1 &:= c_1 \wedge 1 - \left(1 - \frac{4c_1}{(N-2)^2} \right)^+ \geq 0, \quad \tilde{c}_2 := c_2 \vee 1 + \left(\frac{4c_2}{(N-2)^2} - 1 \right)^+ > 0. \end{aligned}$$

が得られる. これより, $\delta(V, A) > 0$ ならば, $D((1 + P)^{1/2}) = H^1(\mathbb{R}^N)$ がわかる. 一方, $\delta(V, A) = 0$ のときは, [14] にある例を用いることによって $D((1 + P)^{1/2}) \supsetneq H^1(\mathbb{R}^N)$ となる. なお, $D((1 + P)^{1/2}) \subset H^s(\mathbb{R}^N)$ ($s < 1$) であるので, ほぼ $H^1(\mathbb{R}^N)$ といって差し支えない. これに関連して, [25, Theorem 2.2] や [21, Theorem 3.1] によれば,

$$(1.7) \quad \|(-\Delta)^{s/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C_s(V, A) \|P^{s/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \quad 0 < s < 1;$$

$$(1.8) \quad \||x|^{-s} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\Gamma((1-s + \sqrt{\delta(V, A)})/2)}{2^s \Gamma((1+s + \sqrt{\delta(V, A)})/2)} \|P^{s/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \quad 0 < s < 1.$$

1.1. Notations and Preliminaries

後出しになるが、記号について説明する。 $L^p(\mathbb{R}^N)$ ($1 \leq p \leq \infty$) は Lebesgue 空間とする。 $L^2(\mathbb{R}^N)$ に値をとる閉作用素 S の定義域を $D(S)$ と表す: $D(S) = \{u; Su \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$. ここで、 $D(S)$ は $L^2(\mathbb{R}^N)$ よりも広い空間を表すこともあることに注意する。例えば、(分数階の) Sobolev 空間 $H^s(\mathbb{R}^N) := D((1 - \Delta)^{s/2})$ ($s \in \mathbb{R}$) が考えられる。 $s < 0$ のとき、 $H^s(\mathbb{R}^N)$ は $L^2(\mathbb{R}^N)$ よりも広い空間である。

$m(r)$ を $(0, \infty)$ 上の非負な可測関数とする。このとき、 $L^2(0, \infty; m(r) dr)$ は次をノルムとする Hilbert 空間とする。

$$\|u\|_{L^2(0, \infty; m(r) dr)} := \left[\int_0^\infty |u(r)|^2 m(r) dr \right]^{1/2}.$$

$I \subset \mathbb{R}$ を开区間とし、 Y が回帰的 Banach 空間とする。 $C(\bar{I}; Y)$ は \bar{I} 上で連続な Y に値をとる関数全体を表す (\bar{I} は I の閉包)。 $C^1(\bar{I}; Y)$ も同様で、導関数が \bar{I} 上で連続な Y に値をとる関数全体を表す。 $L^p(I; Y)$ は次のようなノルムを持つ Lebesgue-Bochner 空間とする。

$$\|u\|_{L^p(I; Y)} := \| \|u(\cdot)\|_Y \|_{L^p(I)} < \infty.$$

また、ベクトル値 Sobolev 空間 $W^{1,p}(I; Y)$ も定義され、

$$W^{1,p}(I; Y) := \{u \in L^p(I; Y); \|u'\|_{L^p(I; Y)} < \infty\}.$$

なお、 u' は u の弱導関数である。よく知られるように、 $W^{1,p}(I; Y) \subset C(\bar{I}; Y)$ ($1 \leq p \leq \infty$) である ([4, Corollary 1.4.36])。

記法の簡略化のために、 $a \vee b := \max\{a, b\}$, $a \wedge b := \min\{a, b\}$ を用いる。これを用いて、実数値関数の正の部分と負の部分を $W^\pm := (\pm W) \vee 0$ (複号同順) と定める。このとき、 $W^\pm \geq 0$, $W = W^+ - W^-$, $|W| = W^+ + W^-$, に注意する。

2. Strichartz 評価

非線形 Schrödinger 方程式の研究において有効なツールとして知られているのが **Strichartz 評価** と呼ばれる次の時間変数と空間変数に関するノルムについての不等式である。

$$(2.1) \quad \|\exp(-itP)\varphi\|_{L^{\tau_0}(\mathbb{R}; L^{\rho_0}(\mathbb{R}^N))} \leq C_{V,A}(\tau_0) \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

$$(2.2) \quad \left\| \int_0^t \exp(-i(t-s)P) F(s) ds \right\|_{L^{\tau_2}(\mathbb{R}; L^{\rho_2}(\mathbb{R}^N))} \leq C_{V,A}(\tau_1, \tau_2) \|F\|_{L^{\tau_1'}(\mathbb{R}; L^{\rho_1'}(\mathbb{R}^N))}.$$

ただし、 $p' := p/(p-1)$ は Hölder 共役指数である。さて、 (τ_j, ρ_j) ($j = 0, 1, 2$) は次を満たす指数の組で、**許容対** という。

$$\frac{2}{\tau_j} + \frac{N}{\rho_j} = \frac{N}{2}, \quad \tau_j, \rho_j \geq 2, \quad (\tau_j, \rho_j) \neq (2, \infty).$$

許容対のうち、 $(2, 2N/(N-2))$ を **端点** という。

この Strichartz 評価については数多くの研究があるが、本研究と関わりが深いものをいくつか取り上げる。まず、 $P = -\Delta$ の場合には Keel, Tao [13] により端点も含めて成立し、更

に, 空間の Lebesgue 空間 $L^p(\mathbb{R}^N)$ は補間指数 2 である Lorentz 空間 $L^{\rho,2}(\mathbb{R}^N)$ に精密化されることまで示された. この結果と後で述べる Kato-smoothness を利用することにより Burq, Planchon, Stalker, Tahvildar-Zadeh [1] は $P = -\Delta + a|x|^{-2}$ ($a > -(N-2)^2/4$) の場合に (2.1) を証明している. なお, (2.2) については Pierfelice [19] も参照のこと. これを一般化して (1.1) と (1.3) を満たす V に対して $P = -\Delta + V$, $\delta(V, 0) > 0$ となる場合にも Strichartz 評価が得られた ([2]).

一方, $P = -\Delta + a|x|^{-2}$ ($a = -(N-2)^2/4$) や $P = -\Delta + V$, $\delta(V, 0) = 0$ などといった自己共役性の限界である場合について, [21] や [23] において端点を除き Strichartz 評価 (2.1), (2.2) の成立が示された. なお, 端点の評価については, Mizutani [15] により詳細に解析された. まず, (2.1) は空間の Lebesgue 空間 $L^{p_0}(\mathbb{R}^N) = L^{2N/(N-2)}(\mathbb{R}^N)$ を弱 Lebesgue 空間 $L^{2N/(N-2),\infty}(\mathbb{R}^N)$ にすることで成立する. 他方, (2.2) については $L^{\rho_1}(\mathbb{R}^N)$ を $L^{2N/(N-2),\infty}(\mathbb{R}^N)$, $L^{\rho_2}(\mathbb{R}^N)$ を $L^{2N/(N+2),1}(\mathbb{R}^N)$ と変更しても評価が不成立であることを示した. 実はこれらは Tao [26] による 2次元における Strichartz 評価の本来除外されていた端点においての評価の詳細な解析が効いている.

さて, $A \neq 0$ の場合に Strichartz 評価の成否は明らかでない. 例えば, D'Ancona, Faneli [6] や D'Ancona [7] は次で表されるスケーリングの仮定と, 追加の正則性のもとで Strichartz 評価 (2.1) が成立することを示した:

$$|x|^2 |V(x)|, |x| |A(x)| \leq C (1 + |x|)^{-\delta} (1 + |\log |x||)^{-1-\delta'}, \quad \delta > 0, \delta' > 0,$$

一方, Faneli, Garcia [9] は $V(x) = 0$ と

$$A(x) = \begin{cases} |x|^{-1-\alpha} [-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2n-2}, x_{2n-3}, 0, 0] & N = 2n, \\ |x|^{-1-\alpha} [-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2n}, x_{2n-1}, 0] & N = 2n + 1, \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1$$

であれば, (2.1) が (自己共役性から Stone の定理により従う $(\tau, \rho) = (\infty, 2)$ を除いて) 成立しないことを示した. なお, $\alpha = 1$ の場合が今回仮定する (1.1) と (1.2) を満たすことに注意する. ところで, Faneli, Felli, Fontelos, Primo [8] は (1.1) と (1.2) の条件の下で時間分散評価を得ているが, Keel, Tao [13] の理論を適用して Strichartz 評価を導くには不十分である. 実際,

$$\|\exp(-itP)u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C |t|^{-N/2} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

を得れば適用できるが, この成立条件として挙げられているのは $V(x) = a|x|^{-2}$, $a \geq 0$, $N = 3$ であり, 一般の V に対しては明らかになっていない. このように, 肯定的なものや否定的なものちょうど境目にあるのが, 今回仮定している条件 (1.1) である.

Theorem 2.1 ([25, Theorem 3.3]). $N \geq 3$ とし, V と A は (1.1), (1.2), (1.3) を仮定する. このとき, 端点以外の許容対 (τ_j, ρ_j) ($j = 0, 1, 2$) に対して (2.1), (2.2) が成立する.

なお, $\delta(V, A) > 0$ ならば, 空間の Lebesgue 空間 $L^p(\mathbb{R}^N)$ は補間指数 2 である Lorentz 空間 $L^{\rho,2}(\mathbb{R}^N)$ に精密化できる.

時間や紙面の都合で証明の概要のみ記述する. まず, 先述した Q は S^{N-1} 上における非負自己共役作用素であるから, 固有値と固有関数が存在する. なお, Q の第 1 固有値は (1.3) より $\delta(V, A)$ である. $A \neq 0$ なので, 第 1 固有値が単純とは限らない点にも注意が必要である.

以降, Q の第 m 固有値を ν_m^2 ($\nu_m \geq 0$) とし, 正規直交化した Q の固有値 ν_m^2 に対する固有関数を $Y_{m,j}$ と表す. このとき, 任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ は次のように分解できる (一般化された球面調和関数展開)

$$f(x) = \sum_{m,j} f_{m,j}(|x|) Y_{m,j}(x/|x|), \quad \text{ただし, } f_{m,j}(r) \in L^2(0, \infty; r^{N-1} dr).$$

この分解において, 第 m 固有関数からなる部分全体を

$$\mathcal{Y}_m := \left\{ \sum_j f_{m,j}(|x|) Y_{m,j}(x/|x|); f_{m,j} \in L^2(\mathbb{R}_+; r^{N-1} dr) \right\}$$

とおく. このとき, \mathcal{Y}_m 上では $Pf = B_{\nu_m} f$ となることに注意する. ただし,

$$B_{\nu} f := \left(-\partial_r^2 - \frac{N-1}{r} \partial_r + \frac{\nu^2 - (N-2)^2/4}{r^2} \right) f.$$

以降では, $L^2(\mathbb{R}^N)$ から \mathcal{Y}_1 への射影を χ と表し, $\chi^\perp := 1 - \chi$ とする. これらの射影は P や $|x|$ と可換である.

準備が整ったので, 実際に Strichartz 評価を導く. まず, Kato-super-smoothness を示す.

Definition 2.2. X, Y を複素 Hilbert 空間とする. また, S は X 上の自己共役作用素とする. 閉作用素 $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ が S -smooth であるとは, 次が有限確定であることと定義する:

$$\|T\|_{\text{sm}(S)}^2 := \sup_{\varepsilon > 0, u \in X \setminus \{0\}} \frac{1}{4\pi^2 \|u\|_X^2} \int_{-\infty}^{\infty} [\|T(S - \lambda + i\varepsilon)^{-1} u\|_Y^2 + \|T(S - \lambda - i\varepsilon)^{-1} u\|_Y^2] d\lambda.$$

また, 閉作用素 $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ が S -super-smooth であるとは, 次が成立することをいう:

$$(2.3) \quad \|T(S - \lambda \pm i\varepsilon)^{-1} T^* u\|_Y \leq C_T \|u\|_{Y^*}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$$

($T^* : D(T^*) \subset Y^* \rightarrow X$ は T の共役作用素である). T が S -super-smooth ならば S -smooth であり, $\|T\|_{\text{sm}(S)}^2 \leq C_T/\pi$ である ([12, Theorem 5.1] および [20, Theorem XIII.25] の系を参照). さらに, T が S -smooth ないし S -super-smooth ならば,

$$(2.4) \quad \|T \exp(-itS) \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}; Y)} \leq (2\pi \|T\|_{\text{sm}(S)}^2)^{1/2} \|\varphi\|_X \leq (2C_T)^{1/2} \|\varphi\|_X.$$

Fourier 変換や Laplace 変換を考えることにより, T が S -super-smooth のとき, 次も得る:

$$(2.5) \quad \left\| \int_0^t T \exp(-i(t-\tau)S) T^* F(\tau) d\tau \right\|_{L^2(\mathbb{R}; Y)} \leq C_T \|F\|_{L^2(\mathbb{R}; Y^*)}.$$

ここでは, 次のように $\chi^\perp |x|^{-1} Q^{1/4}$ が P -super-smooth であることを示す:

$$(2.6) \quad \sup_{\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \|(\chi^\perp |x|^{-1} Q^{1/4})(P + \zeta)^{-1} (Q^{1/4} |x|^{-1} \chi^\perp) f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

その際,

$$(2.7) \quad \|r^{-1} (B_\nu + z^2)^{-1} r^{-1} f\|_{L^2(0, \infty; r^{N-1} dr)}^2 \leq (\nu^{-4} \vee 2\nu^{-2}) \|f\|_{L^2(0, \infty; r^{N-1} dr)}^2$$

を示せば十分である. これは [2, Theorem 2.1] において詳細に計算されており, 最後の係数については最適化を行った ([23, Lemma 4.4]). (2.7) の両辺に ν^2 を掛けて中に入れたうえで, $\nu = \nu_m$, $f = f_{m,l}$ とし, ν_m を作用素 $Q^{1/2}$ に置き換える. 一般化された球面調和関数展開と固有関数同士の直交性により

$$\begin{aligned} & \|\chi^\perp |x|^{-1} Q^{1/4} (P + z^2)^{-1} Q^{1/4} |x|^{-1} \chi^\perp f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq (\lambda_2^{-1} \vee 2) \sum_{m=2}^{\infty} \sum_l \|f_{m,l}\|_{L^2(\mathbb{R}_+; r^{N-1} dr)}^2 \\ & = (\nu_2^{-2} \vee 2) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \end{aligned}$$

を得る. なお, $\nu_1 > 0$, すなわち $\delta(V, A) > 0$ のときは χ^\perp が無くても評価が示せる (ν_2^{-2} は ν_1^{-2} でよい). 注意が必要なのは, $\delta(V, A) = 0$ のときである. このときは $\nu_1 = 0$ であるから, \mathcal{Y}_1 に含む部分についての評価が不成立である. そこで, あらかじめ \mathcal{Y}_1 を除去しておく必要がある. それが射影 χ^\perp の役割である.

Kato-smoothness が示せたことから, 次が成立する.

$$(2.8) \quad \|\chi^\perp |x|^{-1} Q^{1/4} \exp(-itP) \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^N))} \leq C(\lambda_2) \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

$$(2.9) \quad \left\| \int_0^t \chi^\perp |x|^{-1} Q^{1/2} \exp(-i(t-\tau)P) |x|^{-1} \chi^\perp F(\tau) d\tau \right\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^N))} \\ \leq (\lambda_2^{-1} \vee 2)^{1/2} \|F\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^N))}.$$

次に, $u(t) = \exp(-itP) \chi^\perp u_0$ を $\exp(it\Delta)$ を用いて書き下す ($\delta(V, A) > 0$ のときは χ^\perp は不要). すると,

$$\begin{aligned} u(t) &= \exp(it\Delta) \chi^\perp \varphi - i \int_0^t \exp(i(t-s)\Delta) (V + |A|^2 - i \operatorname{div} A) u(s) ds \\ &\quad - 2 \int_0^t \exp(i(t-s)\Delta) A \cdot \nabla u(s) ds \\ &=: I_1 - iI_2 - 2I_3. \end{aligned}$$

I_1 の評価は $P = -\Delta$ についての精密化された Strichartz 評価 (Keel, Tao [13]) により

$$\|I_1\|_{L^\tau(\mathbb{R}; L^{\rho, 2}(\mathbb{R}^N))} = \|\exp(it\Delta) \chi^\perp \varphi\|_{L^\tau(\mathbb{R}; L^{\rho, 2}(\mathbb{R}^N))} \leq C \|\chi^\perp \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

I_2 の評価は, まず, [13] により

$$\|I_2\|_{L^\tau(\mathbb{R}; L^{\rho, 2}(\mathbb{R}^N))} \leq C \|(V + |A|^2 - i \operatorname{div} A) u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^{2N/(N+2), 2}(\mathbb{R}^N))}.$$

ここで, Hölder の不等式と (2.8) から,

$$\begin{aligned} & \|(V + |A|^2 - i \operatorname{div} A) u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^{2N/(N+2), 2}(\mathbb{R}^N))} \\ &= \||x|^2 (V + |A|^2 - i \operatorname{div} A) |x|^{-1} \chi^\perp |x|^{-1} \exp(-itP) \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}; L^{2N/(N+2), 2}(\mathbb{R}^N))} \\ &\leq C \|V_S + |A_S|^2 - i \nabla_S \cdot A_S\|_{L^\infty(S^{N-1})} \||x|^{-1}\|_{L^{N, \infty}(\mathbb{R}^N)} \|\chi^\perp |x|^{-1} \exp(-itP) \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^N))} \\ &\leq C' \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

最後に I_3 の評価だが, まず, [13], (2.8), および Christ–Kiselev の補題 [5] から

$$(2.10) \quad \left\| \int_0^t \exp(i(t-\tau)\Delta) F(\tau) d\tau \right\|_{L^\tau(\mathbb{R}; L^{\rho,2}(\mathbb{R}^N))} \leq C'_\tau \left\| |x|(1-\Delta_S)^{-1/4} F \right\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^N))},$$

が成立する. ただし, [5] の影響で, (τ, ρ) は端点を除く許容対である. これを用いると,

$$\|I_3\|_{L^\tau(\mathbb{R}; L^{\rho,2}(\mathbb{R}^N))} \leq C \left\| |x|^{-1} (1-\Delta_S)^{-1/4} A_S \cdot \nabla_S u \right\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^N))}.$$

一方, $A_S \in W^{1,\infty}(S^{N-1})$ だから,

$$\begin{aligned} \|A_S \cdot \nabla_S u\|_{L^2(S^{N-1})} &\leq \|A_S\|_{L^\infty} \|u\|_{H^1(S^{N-1})} = \|A_S\|_{L^\infty} \|(1-\Delta_S)^{1/2} u\|_{L^2(S^{N-1})}; \\ \|(1-\Delta_S)^{-1/2} A_S \cdot \nabla_S u\|_{L^2(S^{N-1})} &= \|A_S \cdot \nabla_S u\|_{H^{-1}(S^{N-1})} \leq \|A_S\|_{W^{1,\infty}} \|u\|_{L^2(S^{N-1})} \end{aligned}$$

が成立する. これらを補間することで, 次を得る.

$$\|(1-\Delta_S)^{-1/4} A_S \cdot \nabla_S Y\|_{L^2(S^{N-1})} \leq \|A_S\|_{W^{1,\infty}(S^{N-1})} \|(1-\Delta_S)^{1/4} Y\|_{L^2(S^{N-1})}.$$

$(1-\Delta_S)^{1/4} \chi^\perp$ と $Q^{1/4} \chi^\perp$ の同値性に注意すれば,

$$\begin{aligned} &\left\| |x|^{-1} (1-\Delta_S)^{-1/4} A_S \cdot \nabla_S u \right\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^N))} \\ &\leq \|A_S\|_{W^{1,\infty}(S^{N-1})} \left\| |x|^{-1} (1-\Delta_S)^{1/4} u \right\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^N))} \\ &\leq \|A_S\|_{W^{1,\infty}(S^{N-1})} \left\| |x|^{-1} Q^{1/4} u \right\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^N))} \\ &\leq C'(\lambda_2) \|A_S\|_{W^{1,\infty}(S^{N-1})} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

以上で, 次が示された:

$$(2.11) \quad \left\| \exp(-itP) \chi^\perp \varphi \right\|_{L^\tau(\mathbb{R}; L^{\rho,2}(\mathbb{R}^N))} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

$\delta(V, A) > 0$ であれば, χ^\perp がないものも成立するので, (2.1) が精密化されたうえで示されたことになる. 一方, $\delta(V, A) = 0$ の場合は, $\exp(-itP) \chi \varphi$ に対する評価も必要である. つまり,

$$(2.12) \quad \left\| \chi \exp(-itP) \varphi \right\|_{L^\tau(\mathbb{R}; L^\rho(\mathbb{R}^N))} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

以下, Δ_2 は \mathbb{R}^2 上の Laplacian とする. このとき, 次が成立することを Tao が示した ([26, Corollary 1.4]).

$$(2.13) \quad \left\| \exp(it\Delta_2) \varphi \right\|_{L^2(\mathbb{R}; L^\infty_{\text{rad}}(\mathbb{R}^2))} \leq C_{\text{end}} \|\varphi\|_{L^2_{\text{rad}}(\mathbb{R}^2)}.$$

$\{Y_{1,1}, Y_{1,2}, \dots, Y_{1,m}\}$ を Q の第 1 固有空間の正規直交基底とする. $U(Y) : L^2_{\text{rad}}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{Y}_1$ ($Y = Y_{1,k}; k = 1, 2, \dots, m$) を次のように定義する:

$$U(Y)\varphi(x) := \sqrt{2\pi} |x|^{-(N-2)/2} \varphi(|x|) Y(x/|x|).$$

このとき, $U(Y)$ は等長作用素である:

$$\begin{aligned} \|U(Y)\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 &= \int_0^\infty \left[\int_{S^{N-1}} |\sqrt{2\pi} r^{-(N-2)/2} \varphi(r) Y(y)|^2 d\sigma(y) \right] r^{N-1} dr \\ &= \int_0^\infty 2\pi |\varphi(r)|^2 \left[\int_{S^{N-1}} |Y(y)|^2 d\sigma(y) \right] r dr = \|\varphi\|_{L^2_{\text{rad}}(\mathbb{R}^2)}^2. \end{aligned}$$

更に, Y が Q の固有関数であることを利用することで, 次が成立する.

$$(2.14) \quad U(Y)(-\Delta_2) = PU(Y), \quad U(Y) \exp(it\Delta_2) = \exp(-itP)U(Y).$$

さて, $\chi\varphi \in \mathcal{Y}_1$ だから, $f_1, f_2, \dots, f_m \in L^2(\mathbb{R}_+; r^{N-1} dr)$ があって,

$$\chi\varphi = f_1 Y_{1,1} + \dots + f_m Y_{1,m}.$$

このとき,

$$\exp(-itP)\chi\varphi = \sum_{k=1}^m U(Y_{1,k}) \exp(it\Delta_2) U(Y_{1,k})^{-1} (f_k Y_{1,k}).$$

これに注意し, (2.13) や (2.14) および Hölder の不等式を用いることで

$$(2.15) \quad \|\chi \exp(-itP)\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}; L^{2N/(N-2), \infty}(\mathbb{R}^N))} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

が示される. 一方, P の自己共役性から Stone の定理により自動的に得られる

$$(2.16) \quad \|\chi \exp(-itP)\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^N))} \leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

と (2.15) から, $\theta \in (0, 1)$ に対し

$$\begin{aligned} \|\chi \exp(-itP)\varphi\|^{1-\theta} & \left\|_{L^\infty(\mathbb{R}; L^{2/(1-\theta), 2/(1-\theta)}(\mathbb{R}^N))} \right\| = \|\chi\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{1-\theta} \leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{1-\theta}, \\ \|\chi \exp(-itP)\varphi\|^\theta & \left\|_{L^{2/\theta}(\mathbb{R}; L^{2N/(\theta(N-2)), \infty}(\mathbb{R}^N))} \right\| \leq (C_{V,A}^{2*})^\theta \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^\theta. \end{aligned}$$

Hölder の不等式から

$$\|\chi \exp(-itP)\varphi\|_{L^{2/\theta}(\mathbb{R}; L^{2N/(N-2\theta), 2/(1-\theta)}(\mathbb{R}^N))} \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

これより, $\chi \exp(-itP)$ は $L^2(\mathbb{R}^N)$ から $L^2(\mathbb{R}; L^{2N/(N-2), \infty}(\mathbb{R}^N))$ への有界線形写像であり, $L^2(\mathbb{R}^N)$ から $L^{2/\theta}(\mathbb{R}; L^{2N/(N-2\theta), 2/(1-\theta)}(\mathbb{R}^N))$ への有界線形写像である. そこで, この作用素を実補間することで, $L^2(\mathbb{R}^N)$ から $L^\tau(\mathbb{R}; L^{\rho, \tau}(\mathbb{R}^N))$ への有界線形写像であることがいえる. ただし,

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1 - \omega(1 - \theta)}{2}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} - \frac{1 - \omega(1 - \theta)}{N}, \quad \omega \in (0, 1).$$

ここで, (τ, ρ) は端点ではない許容対である. さて, $\tau \leq \rho$ であれば, $L^{\rho, \tau}(\mathbb{R}^N) \subset L^\rho(\mathbb{R}^N)$ がいえるので, これを用いて (2.12) が示される. ここで, 条件を書き下すと $2 < \tau \leq 2 + 4/N$ ($2 + 4/N \leq \rho < 2N/(N-2)$) である. 一方, $\tau > 2 + 4/N$ ($2 \leq \rho < 2 + 4/N$) の場合には, $2 < \tau \leq 2 + 4/N$ ($2 + 4/N \leq \rho < 2N/(N-2)$) のときの評価と (2.16) から, Hölder の不等式を用いることで (2.12) が示される. あとは (2.11) と $L^{\rho, 2}(\mathbb{R}^N) \subset L^\rho(\mathbb{R}^N)$ と (2.12) を組み合わせれば, (2.1) が得られる.

最後に, (2.2) については TT^* arguments を用いる (Christ–Kiselev の補題 [5]).

3. 非線形 Schrödinger 方程式の可解性

一般に非線形 Schrödinger 方程式の解の存在は Kato の方法 (Kato-Yajima の方法) を用いるのが標準的である. しかし, 今回の設定では適用が難しいので別の方法を用いる. まずはその困難な部分を説明するため, 一旦 Kato の方法を紹介する (例えば, [3, Chapter 4]). $P = -\Delta$ の場合を考える. まず, 方程式 (NLS) を積分方程式に書き換えることで, 方程式の解が次の写像の不動点であることがいえるので, この不動点の存在を示せばよい.

$$\Phi(u) := \exp(-itP)u_0 - i\lambda \int_0^t \exp(-i(t-s)P)|u(s)|^{p-1}u(s) ds.$$

そこで, 次の完備距離空間を設定する. $I = (-T, T)$ として

$$E := \left\{ u; \|u\|_{L^\infty(I; L^2(\mathbb{R}^N))}, \|\nabla u\|_{L^\infty(I; L^2(\mathbb{R}^N))}, \|u\|_{L^r(I; L^{p+1}(\mathbb{R}^N))}, \|\nabla u\|_{L^r(I; L^{p+1}(\mathbb{R}^N))} \leq M \right\}$$

$$d(u, v) := \|u - v\|_{L^\infty(-T, T; L^2(\mathbb{R}^N))} + \|u - v\|_{L^r(-T, T; L^{p+1}(\mathbb{R}^N))}.$$

ただし, $r := 4(p+1)/[N(p-1)]$ であり, $(r, p+1)$ は許容対である. $M := 2\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + 1$ とし, 適当に T を小さくすることで, 写像 Φ が E から E の写像として well-defined となり, (必要に応じてさらに T を小さくすることで) 写像の縮小性 $d(\Phi u, \Phi v) \leq c d(u, v)$ ($0 < c < 1$) も示せる. あとは Banach の不動点定理を用いれば, 解の存在がわかる. 一意性も自動的に得られる. なお, この Kato の方法は分数階の微分のクラス ($H^s(\mathbb{R}^N)$ で連続な解) における解の存在を示すのにも適用できる (この場合, 分数階微分に対する Leibniz 則が必要).

非線形項の処理をするなら P の分数ベキを利用するよりも, 従来 of 微分である ∇ のほうが扱いやすい. しかし, 一般の P に対しては $\nabla \exp(-itP) = \exp(-itP)\nabla$ が成立しないので, 写像の適切性を導くのが難しい. ここで, ∇ と $P^{1/2}$ が適切な Lebesgue 空間 $L^p(\mathbb{R}^N)$ で同値であれば, この方法は修正の上適用することができる. しかし, この同値性は一般には保証されない. 例えば, $V = a|x|^{-2}$, $A = 0$ の場合には, Killip, Miao, Visan, Zhang, Zheng [14] により

$$\sigma := 0 \vee \left(\frac{N-2}{2} - \sqrt{a + \frac{(N-2)^2}{4}} \right),$$

$$\frac{s+\sigma}{N} < \frac{1}{p} < 1 - \frac{\sigma}{N} \Rightarrow \|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|P^{s/2}u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

$$\frac{s \wedge \sigma}{N} < \frac{1}{p} < 1 - \frac{\sigma}{N} \Rightarrow \|P^{s/2}u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

であり, 証明を見る限りは $A = 0$ である限り, a を $\delta(V, 0)$ と置き換えることで $P = -\Delta + V$ に対しても成立する. ところが, $A \neq 0$ であるため, このような同値性の結果はない状態である. さらにいえば, $\delta(V, A) = 0$ の場合には $s = 1$, $p = 2$ での同値性が崩れているように, $D((1+P)^{1/2}) \neq H^1(\mathbb{R}^N)$ であり, 1階微分のクラスで解を見つけるのは問題設定として適切ではないように見える.

このように, 従来からある Kato の方法を適用するのが難しいため, それを回避すべく, エネルギー法 (弱コンパクト性に基づく手法) が Okazawa, Suzuki, Yokota [17] により開発されが, 今回はそれを用いる. まず, 次の半線形 Schrödinger 方程式の抽象的 Cauchy 問題を考える. S は複素 Hilbert 空間 X 上の非負自己共役作用素とし, $X_S := D((1+S)^{1/2})$,

$X_S^* := D((1+S)^{-1/2})(X_S)$ の双対空間) とおく.

$$(3.1) \quad \begin{cases} i \frac{du}{dt} = Su + g(u), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

ただし, $g : X_S \rightarrow X_S^*$ は以下の 5 条件を満たす非線形写像とする. 記法の単純化のため, $B_M := \{u \in X_S; \|u\|_{X_S} = \|(1+S)^{1/2}u\|_X \leq M\}$ とする.

(G1) 次を満たす $G \in C^1(X_S; \mathbb{R})$ がある: 任意の $u \in X_S$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(u, \varepsilon) > 0$ があって

$$|G(u+v) - G(u) - \operatorname{Re}\langle g(u), v \rangle_{X_S^*, X_S}| \leq \varepsilon \|v\|_{X_S} \quad \forall v \in B_\delta.$$

なお, これを $d_{X_S}G(u) = g(u)$ と略記することにする.

(G2) すべての $M > 0$ に対して $C(M) > 0$ があって

$$\|g(u) - g(v)\|_{X_S^*} \leq C(M)\|u - v\|_{X_S} \quad \forall u, v \in B_M;$$

(G3) すべての $M > 0$ と $\delta > 0$ に対して $C_\delta(M) > 0$ があって

$$|G(u) - G(v)| \leq \delta + C_\delta(M)\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in B_M;$$

(G4) $\operatorname{Re}\langle g(u), iu \rangle_{X_S^*, X_S} = 0 \quad \forall u \in X_S$;

(G5) $I \subset \mathbb{R}$ を有界な开区間とする. $\{w_n\}_n$ を $L^\infty(I; X_S)$ における次を満たす有界列とする

$$\begin{cases} w_n(t) \rightarrow w(t) \quad (n \rightarrow \infty) & \text{weakly in } X_S \text{ a.a. } t \in I, \\ g(w_n) \rightarrow f \quad (n \rightarrow \infty) & \text{weakly* in } L^\infty(I; X_S^*). \end{cases}$$

このとき,

$$(3.2) \quad \operatorname{Re} \int_I \langle f(t), iw(t) \rangle_{X_S^*, X_S} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_I \langle g(w_n(t)), iw_n(t) \rangle_{X_S^*, X_S} dt.$$

さらに, 次が言えれば, $f = g(w)$:

$$w_n(t) \rightarrow w(t) \quad (n \rightarrow \infty) \text{ strongly in } X \text{ a.a. } t \in I.$$

Proposition 3.1 (Energy methods [17, Theorems 2.1 and 2.2]). $g : X_S \rightarrow X_S^*$ は (G1)–(G5) を仮定する. このとき, 任意の $u_0 \in X_S$ ($\|u_0\|_{X_S} \leq M$) に対して $T_M > 0$ があって, (3.1) の時間局所解 $u \in C_w([-T_M, T_M]; X_S) \cap W^{1, \infty}(-T_M, T_M; X_S^*)$ が存在する. また, 保存則が成立する:

$$(3.3) \quad \|u(t)\|_X = \|u_0\|_X, \quad E(u(t)) \leq E(u_0) \quad \forall t \in [-T_M, T_M].$$

ただし, $E(\cdot)$ はエネルギー汎関数であり,

$$E(\varphi) := \frac{1}{2} \|(1+S)^{1/2}\varphi\|_X^2 + G(\varphi), \quad \varphi \in X_S.$$

さらに, (3.1) の時間局所解が一意ならば, 解 u は $C([-T_M, T_M]; X_S) \cap C^1([-T_M, T_M]; X_S^*)$ に属し, (3.3) の不等号は等号になる.

Remark 3.2. (G5) よりも単純な仮定にすることもできる ([17, Lemma 5.3]). 今回の非線形項はこれが適用できる. なお, 適用できない非線形項もある.

(G5)' 任意の X_S 内の点列 $\{u_n\}_n$ に対し,

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u \ (n \rightarrow \infty) & \text{weakly in } X_S, \\ g(u_n) \rightarrow f \ (n \rightarrow \infty) & \text{weakly in } X_S^* \end{cases} \Rightarrow f = g(u).$$

(NLS) に対する解の存在は上記のエネルギー法が適用できるが, 解の一意性は保証されていないので, Strichartz 評価を用いて示す必要がある. 結果として次が得られる. 以下では $\mathcal{D} = D((1+P)^{1/2}) = X_P$, $\mathcal{D}^* = D((1+P)^{-1/2}) = X_P^*$ とおく. (G1)–(G5) の条件確認の際には, $\mathcal{D} \subset L^p(\Omega)$, $2 \leq p < 2N/(N-2)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は有界開集合) のコンパクト性や Sobolev の埋蔵定理

$$\|u\|_{L^{2N/(N-2s)}(\mathbb{R}^N)} \leq C_s \|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \quad 0 < s < 1$$

を用いる.

Theorem 3.3 ([25, Theorem 4.1]). $N \geq 3$. $\lambda \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < 1 + 4/(N-2)$ とする. V と A は (1.1), (1.2), (1.3) を仮定する. このとき, 任意の $u_0 \in \mathcal{D}$ に対して, (NLS) の時間局所解 $u \in C([-T, T]; \mathcal{D}) \cap C^1([-T, T]; \mathcal{D}^*)$ が一意に存在する. また, 次の保存則が成立する.

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \quad E(u(t)) = E(u_0).$$

ただし,

$$E(\varphi) := \frac{1}{2} \|(1+P)^{1/2}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \frac{\lambda}{p+1} \|\varphi\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}^{p+1}.$$

4. 解の有限時間爆発

解の爆発というのは, ある $T_1, T_2 > 0$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow T_1 - 0} \|(1+P)^{1/2}u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow T_2 + 0} \|(1+P)^{1/2}u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \infty$$

を意味する. 前者を正の時刻での爆発, 後者を負の時刻での爆発ということにする. 非線形 Schrödinger 方程式に対しては Glassey [10] による方法が使われることが多い. そのため, 初期値に対しては $|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ を追加で仮定する必要がある. なお, 球対称関数の場合にはこのような仮定はなくても証明できる ([16]).

まずは次の Virial 等式を示す必要がある.

$$(4.1) \quad \frac{d}{dt} \||x|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = 4 \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^N} x \overline{u(t, x)} \cdot \nabla u(t, x) dx,$$

$$(4.2) \quad \frac{d^2}{dt^2} \||x|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = 16 E(u(t)) + \frac{4\lambda(Np - N - 4)}{p+1} \|u(t)\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}^{p+1}.$$

その上で, 有限時間爆発の証明は次のように行われる. $1 + 4/N \leq p < 1 + 4/(N-2)$, $\lambda < 0$, $|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $E(u_0) < 0$ のとき, (NLS) の解 u が時間大域的に延長できたとすれば, $\varphi(t) := \||x|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2$ について常に $\varphi(t) \geq 0$ である. ここで, Virial 等式 4.2 から

$$\varphi''(t) = 16 E(u(t)) + \frac{4\lambda(Np - N - 4)}{p+1} \|u(t)\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}^{p+1} \leq 16 E(u_0) < 0$$

であるから, $\varphi(\pm T) < 0$ となる $T > 0$ が存在する. これは $\varphi(t) \geq 0$ と矛盾である. したがって, 有限時刻で爆発する (時間局所解が大域的に延長できない) ことがいえる.

解の有限時刻での爆発の証明に実質的な役割を果たすのが Virial 等式 (4.2) であり, これを導くのが重要になってくる. 形式計算であれば (4.1) や (4.2) は明らかだが, この正当化が問題になる. (4.1) については,

$$f_\varepsilon(t) := \left\| \frac{x}{\sqrt{1 + \varepsilon|x|^2}} u(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{1 + \varepsilon|x|^2} |u(t, x)|^2 dx$$

を微分して, (NLS) を代入し, 先述した一般化された球面調和関数展開を用いて示される

$$\left| \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \bar{u} x \cdot \nabla u dx \right| \leq \|P^{1/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|x \varphi u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

(ただし, φ は実数値球対称関数) を用いることで, $f_\varepsilon(t)$ の $\varepsilon > 0$ に関する一様有界性が得られ, $\varepsilon \rightarrow +0$ とすることで (4.1) が得られ, 更に $u \in C([-T, T]; D(|x|))$ も得られる.

(4.2) を正当化するためには, 次の作用素の性質が必要になる.

$$d(\beta)f(x) := \beta^{N/2} f(\beta x), \quad \beta > 0; \quad m(\sigma)f(x) := \exp\left(\frac{i\sigma|x|^2}{4}\right) f(x), \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

このとき, [24, Lemma 2.1] にあるように, (1.1), (1.2), (1.3) の条件の下では次が成立する.

$$(4.3) \quad d(\beta) m(\sigma) = m(\beta^2 \sigma) d(\beta), \quad \beta > 0, \sigma \in \mathbb{R};$$

$$(4.4) \quad \exp(-i\tau P) d(\beta) = d(\beta) \exp(-i\beta^2 \tau P), \quad \beta > 0, \tau \in \mathbb{R};$$

$$(4.5) \quad \exp(-i\tau P) m(\sigma) = m\left(\frac{\sigma}{1 + \sigma\tau}\right) d\left(\frac{1}{1 + \sigma\tau}\right) \exp\left(\frac{-i\tau}{1 + \sigma\tau} P\right), \\ \tau \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}, 1 + \sigma\tau > 0.$$

そこで, 擬共形変換を考える. これは散乱問題を扱う際によく用いられるものである. この変換は数多くのタイプがあるが, 今回は次の形のものを採用する.

$$(\mathcal{C}u)(t) := m\left(\frac{-1}{1-t}\right) d\left(\frac{1}{1-t}\right) u\left(\frac{t}{1-t}\right).$$

このとき, u が (NLS) の解であれば, $v(t) := (\mathcal{C}u)(t)$ は次の解になっている.

$$(4.6) \quad \begin{cases} i v_t = P v + \lambda(1-t)^{-2+N(p-1)/2} |v|^{p-1} v, \\ v(0) = m(-1) u_0. \end{cases}$$

この解 $v(t)$ に対する保存則が成立し, それを用いる. そのため後述する §5 にあるような非自励系の半線形 Schrödinger 方程式に対するエネルギー法を必要とする. なお, Ozawa [18] のような手法も検討の余地があるが, (NLS) の解の存在を Kato の方法で導かなかつたため, 直接適用することは難しい. さて, 保存則を書き下せば

$$(4.7) \quad \frac{d}{dt} E(t, v(t)) = G_t(t, v(t)),$$

ただし,

$$E(t, \varphi) := \frac{1}{2} \|P^{1/2} \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + G(t, \varphi),$$

$$G(t, \varphi) := (1-t)^{N(p-1)/2-2} G_0(\varphi), \quad G_0(\varphi) := \frac{\lambda}{p+1} \|\varphi\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N)}^{p+1}.$$

(4.7) から,

$$(4.8) \quad E\left(\frac{t}{1+t}, v\left(\frac{t}{1+t}\right)\right) - E(0, m(-1)u_0) = \int_0^{t/(1+t)} G_t(s, v(s)) ds.$$

$v(t/(1+t)) = m(-(1+t))d(1+t)u(t)$ なので, (4.8) の右辺は

$$\begin{aligned} & \int_0^{t/(1+t)} -\frac{N(p-1)-4}{2} (1-s)^{N(p-1)/2-3} G_0(v(s, x)) ds \\ &= -\frac{N(p-1)-4}{2} \int_0^t (1+\sigma)^{3-N(p-1)/2} G_0(v(\sigma/(1+\sigma), x)) (1+\sigma)^{-2} d\sigma \\ &= -\frac{N(p-1)-4}{2} \int_0^t (1+\sigma)^{1-N(p-1)/2} G_0((1+\sigma)^{N/2} u(\sigma, (1+\sigma)x)) d\sigma \\ &= -\frac{N(p-1)-4}{2} \int_0^t (1+\sigma) G_0(u(\sigma, x)) d\sigma. \end{aligned}$$

ここで $\sigma = s/(1-s)$ と置換した. 一方, (4.8) の左辺第 1 項について計算を進めると,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\| P^{1/2} v\left(\frac{t}{1+t}\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + G\left(\frac{t}{1+t}, v\left(\frac{t}{1+t}\right)\right) \\ &= \frac{1}{8} \| |x| u(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \frac{(1+t)^2}{2} \| P^{1/2} u(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - \frac{1+t}{2} \operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{xu(t)} \cdot \nabla u(t) dx \\ &+ (1+t)^2 G_0(u(t, x)). \end{aligned}$$

(4.1) を用いることにより, (4.8) は次のように書き換えられる:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \|xu(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + (1+t)^2 E(u(t)) - \frac{1+t}{8} \frac{d}{dt} \|xu(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - E(0, m(-1)u_0) \\ &= -\frac{N(p-1)-4}{2} \int_0^t (1+\sigma) G_0(u(\sigma, x)) d\sigma. \end{aligned}$$

両辺を t で微分して, 整理すれば, (4.2) が得られる.

Virial 等式が正当化されたことで, 解の有限時刻爆発の証明が完遂する. なお, 詳細な解析をすれば, 正の時刻には爆発するが, 負の時刻には爆発しない解となる条件も記述できるが, 割愛する.

Theorem 4.1 ([25, Theorem 4.11]). $1 + 4/N \leq p < 1 + 4/(N-2)$, $\lambda < 0$ とする. $u_0 \in \mathcal{D}$ は $|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $E(u_0) < 0$ とする. このとき, (NLS) の時間局所解は大域的に延長できない, すなわち, 正・負いずれもの有限時刻で爆発する.

なお, 以上の結果 (解の一意存在や有限時刻爆発など) は, 非線形項が Hartree 項と呼ばれる

$$g(u(x)) := \lambda u(x) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|^\gamma} dy, \quad 0 < \gamma < (N \wedge 4)$$

であっても成立する. また, 今回は時間や紙面の都合で, (NLS) の研究で行われるような散乱問題, 例えば, 任意の (NLS) の解は

$$(4.9) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(+itP)u(t) = u_+ \quad \text{strongly in } \Sigma := \mathcal{D} \cap D(|x|)$$

となるような u_+ をもつのか, 任意の $u_+ \in \Sigma$ に対して (4.9) を満たすような (NLS) の解 u が存在するか, というような問題も考察しているが, 割愛した.

5. 補足: 非自励系半線形 Schrödinger 方程式に対するエネルギー法

非自励の非線形 Schrödinger 方程式に対する抽象 Cauchy 問題を考える.

$$(5.1) \quad \begin{cases} i \frac{du}{dt} = Su + g(t, u) & \text{in } [-T, T] \times X_S^*, \\ u(0) = u_0 & \text{in } X_S. \end{cases}$$

非線形項 $g(t, u)$ については以下の 7 条件を考える.

(A1) $G \in C([-T, T] \times X_S; \mathbb{R})$ があって, $d_{X_S} G(t, u) = g(t, u)$;

(A2)

$$\|g(t, u) - g(t, v)\|_{X_S^*} \leq C(M)\|u - v\|_{X_S} \quad \forall t \in [-T, T], \forall u, v \in B_M;$$

(A3) 非負の $\varphi \in L^1(-T, T)$ があって,

$$\|g(t, u) - g(s, u)\|_{X_S^*} \leq C(M) \left| \int_s^t \varphi(\sigma) d\sigma \right| \quad \forall t, s \in [-T, T], \forall u \in B_M;$$

(A4) 任意の $M > 0$ と $\delta > 0$ に対して $C_{1,\delta}(M) > 0$ があって

$$|G(t, u) - G(t, v)| \leq \delta + C_{1,\delta}(M)\|u - v\|_X \quad \forall t \in [-T, T], \forall u, v \in B_M;$$

(A5) $G(t, u)$ は任意の $u \in X_S$ に対して t について微分可能であり, 次を満たす $\varphi \in L^1(-T, T)$ がある. 任意の $M > 0$ と $\delta > 0$ に対して $C_{2,\delta}(M) > 0$ があって,

$$|G_t(t, u) - G_t(t, v)| \leq \varphi(t)[\delta + C_{2,\delta}(M)\|u - v\|_X] \quad \text{a.a. } t \in (-T, T), \forall u \in B_M;$$

(A6)

$$\operatorname{Re} \langle g(t, u), iu \rangle_{X_S^*, X_S} = 0 \quad \forall t \in [-T, T], \forall u \in X_S;$$

(A7) $\{w_n\}_n$ は $L^\infty(-T, T; X_S)$ における次を満たす有界列とする.

$$\begin{cases} w_n(t) \rightarrow w(t) \quad (n \rightarrow \infty) & \text{weakly in } X_S \text{ a.a. } t \in I, \\ g(t, w_n) \rightarrow f \quad (n \rightarrow \infty) & \text{weakly}^* \text{ in } L^\infty(I; X_S^*). \end{cases}$$

このとき,

$$\operatorname{Re} \int_I \langle f(t), i w(t) \rangle_{X_S^*, X_S} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_I \langle g(t, w_n(t)), i w_n(t) \rangle_{X_S^*, X_S} dt.$$

さらに, 次もいえれば $f(t) = g(t, w(t))$ が示される.

$$w_n(t) \rightarrow w(t) \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{strongly in } X \text{ a.a. } t \in I.$$

Proposition 5.1. ([22, Theorem 2.1, Remark 2.8]) $g(t, u)$ は (A1)–(A7) を仮定し, $u_0 \in X_S$ とする. このとき, $T_0 \in (0, T]$ が $\|u_0\|_{X_S}$ に依存して決定され, (5.1) の時間局所解 $u \in C_w([-T_0, T_0]; X_S) \cap W^{1,\infty}(-T_0, T_0; X_S^*)$ が存在する. また, この解は次の保存則を満たす:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} & \|u(t)\|_X = \|u_0\|_X \quad \forall t \in [-T_0, T_0], \\ & E(t, u(t)) - E(0, u_0) \leq \int_0^t G_t(s, u(s)) ds \quad \forall t \in [-T_0, T_0]. \end{aligned}$$

ただし, $E(t, \varphi) = (1/2) \|(1+S)^{1/2} \varphi\|_X^2 + G(t, \varphi)$. 更に, この時間局所解が一意ならば, (5.2) の不等号は等号になり, $u \in C([-T_0, T_0]; X_S) \cap C^1([-T_0, T_0]; X_S^*)$ となる.

References

- [1] N. Burq, F. Planchon, J. Stalker, A. S. Tahvildar-Zadeh, *Strichartz estimates for the wave and Schrödinger equations with the inverse-square potential*, J. Funct. Anal. **203** (2003), 519–549.
- [2] N. Burq, F. Planchon, J. Stalker, A. S. Tahvildar-Zadeh, *Strichartz estimates for the wave and Schrödinger equations with potentials of critical decay*, Indiana Univ. Math. J. **53** (2004), 1665–1680.
- [3] T. Cazenave, “Semilinear Schrödinger Equations,” Courant Lecture Notes in Mathematics, 10. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, 2003.
- [4] T. Cazenave, A. Haraux, “An Introduction to Semilinear Evolution Equations,” Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 13. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.
- [5] M. Christ, A. Kiselev, *Maximal functions associated to filtrations*, J. Funct. Anal. **179** (2001), 409–425.
- [6] P. D’Ancona, L. Faneli, *Strichartz and smoothing estimates for dispersive equations with magnetic potentials*, Commun. Partial Differ. Equ., **33** (2008), 1082–1112.
- [7] P. D’Ancona *On large potential perturbations of the Schrödinger, wave and Klein–Gordon equations*, Comm. Pure Appl. Anal. **19** (2020), 609–640.
- [8] L. Faneli, V. Felli, M. A. Fontelos, A. Primo, *Time decay of scaling critical electromagnetic Schrödinger flows*, Commun. Math. Phys., **324** (2013) 1033–1067.
- [9] L. Faneli, A. Garcia, *Counterexamples to Strichartz estimates for the magnetic Schrödinger equation*, Commun. Contemp. Math. **13** (2011), 213–234.

- [10] R. T. Glassey, *On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys., **18** (1977), 1794–1797.
- [11] T. Kato, *Notes on some inequalities for linear operators*, Math. Ann., **125** (1952), 208–212.
- [12] T. Kato, *Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators*, Math. Ann., **162** (1965/1966), 258–279.
- [13] M. Keel, T. Tao, *Endpoint Strichartz estimates*, Amer. J. Math. **120** (1998), 955–980.
- [14] R. Killip, C. Miao, M. Visan, J. Zhang, J. Zheng, *Sobolev spaces adapted to the Schrödinger operator with inverse-square potential*, Math. Z. **288** (2018), 1273–1298.
- [15] H. Mizutani, *Remarks on endpoint Strichartz estimates for Schrödinger equations with the critical inverse-square potential*, J. Differ. Equ., **263** (2017), 3832–3853.
- [16] T. Ogawa, Y. Tsutsumi, *Blow-up of H^1 -solution for the nonlinear Schrödinger equation*, J. Differ. Equ., **92** (1991), 317–330.
- [17] N. Okazawa, T. Suzuki, T. Yokota, *Energy methods for abstract nonlinear Schrödinger equations*, Evol. Equ. Control Theory, **1** (2012), 337–354.
- [18] T. Ozawa, *Remarks on proofs of conservation laws for nonlinear Schrödinger equations*, Calc. Var. Partial Differ. Equ., **25** (2006), 403–408.
- [19] V. Pierfelice, *Weighted Strichartz estimates for the Schrödinger and wave equations on Damek-Ricci spaces*, Math. Z. **260** (2008), 377–392.
- [20] M. Reed, B. Simon, “Methods of modern mathematical physics, vol. II, Fourier analysis, selfadjointness,” Academic Press, New York, 1975.
- [21] T. Suzuki, *Solvability of nonlinear Schrödinger equations with some critical singular potential via generalized Hardy-Rellich inequalities*, Funkcial. Ekvac., **59** (2016), 1–34.
- [22] T. Suzuki, *Scattering theory for semilinear Schrödinger equations with an inverse-square potential via energy methods*, Evol. Equ. Control Theory, **8** (2019), 447–471.
- [23] T. Suzuki, *Semilinear Schrödinger equations with a potential of some critical inverse-square type*, J. Differ. Equ., **268** (2020), 7629–7668.
- [24] T. Suzuki, *Semilinear Schrödinger evolution equations with inverse-square and harmonic potentials via pseudo-conformal symmetry*, Commun. Pure Appl. Anal., **20** (2021), 4347–4377.
- [25] T. Suzuki, *Semilinear Schrödinger equations with a critical scale of the singular electromagnetic field*, J. Differ. Equ., **371** (2023), 151–190.
- [26] T. Tao, *Spherically averaged endpoint Strichartz estimates for the two-dimensional Schrödinger equation*, Commun. Partial. Differ. Equ., **25** (2000), 1471–1485.

ある移流拡散方程式の初期値問題の アマルガム空間における適切性について

大阪公立大学 数学研究所
勝呂剛志 (Takeshi SUGURO)

1 序

本稿では、以下の移流拡散方程式の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta \psi + \lambda \psi = u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、 $n \geq 2$, $\lambda \geq 0$ とし、 $u = u(t, x)$ と $\psi = \psi(t, x)$ は未知函数、 u_0 は与えられた初期値とする。 $\lambda = 0$ の場合、問題 (1.1) は恒星系を構成する物質の運動を記述する数理モデルに対応し、未知函数 (u, ψ) はそれぞれ、物質の質量密度と物質に掛かる重力ポテンシャルを意味する。他方で、問題 (1.1) は Keller–Segel [11] により提唱された走化性粘菌の運動を記述する以下のモデルを単純化したものとみなすこともできる：

$$\begin{cases} \partial_t u_\tau - \Delta u_\tau + \nabla \cdot (u_\tau \nabla \psi_\tau) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{1}{\tau} \partial_t \psi_\tau - \Delta \psi_\tau + \lambda \psi_\tau = u_\tau, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u_\tau(0, x) = u_0(x), \quad \psi_\tau(0, x) = \psi_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.2)$$

この場合、未知函数 (u_τ, ψ_τ) はそれぞれ、粘菌の質量密度と粘菌自身が発する化学誘因物質の凝集度に対応する。ここで、 $\tau > 0$ は緩和時間パラメータと呼ばれるもので、粘菌の拡散速度と化学誘因物質の拡散速度の相対的な比を表す。Keller–Segel 系の初期値問題 (1.2) において、形式的に $\tau \rightarrow \infty$ としたものが移流拡散方程式の初期値問題 (1.1) である。この収束に関する問題は特異極限問題と呼ばれ、近年では、Kurokiba–Ogawa [16, 17], Nogayama–Sawano [21], Ogawa–Suguro [22] により解の収束性が示されている。

移流拡散方程式の初期値問題 (1.1) は Jäger–Luckhaus [10] により与えられ、Keller–Segel 系の初期値問題 (1.2) とともに多くの研究がなされている。空間 2 次元かつ有界領域の場合において、有限時間で爆発する球対称非負値解の存在を Nagai [19], 時間大域的に存在する解の存在を Nagai–Senba–Yoshida [20] により示されている。一方で、考える領域が n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n である初期値問題 (1.1) に対して、 $\lambda = 0$ の場合にスケール変換

$$u_\mu(t, x) \equiv \mu^2 u(\mu^2 t, \mu x) \quad \text{and} \quad \psi_\mu(t, x) \equiv \psi(\mu^2 t, \mu x), \quad \mu > 0 \quad (1.3)$$

の下で問題 (1.1) が不変であることから定まるスケール臨界空間において問題 (1.1) の適切性が考察された. Kurokiba–Ogawa [15] では, エネルギー法を用いることで Lebesgue 空間における適切性を考えており, Kozono–Sugiyama [14] では, 弱 Lebesgue 空間における時間大域解が構成されている. ここで, 弱 Lebesgue 空間とは, $1 \leq p < \infty$ と Lebesgue 測度 μ に対して,

$$L_{\text{w}}^p(\mathbb{R}^n) \equiv \left\{ f : \text{可測函数}; \|f\|_{L_{\text{w}}^p} \equiv \sup_{\alpha > 0} \left\{ \alpha \mu(\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| > \alpha\})^{\frac{1}{p}} \right\} < +\infty \right\}$$

で定まり, $L^p(\mathbb{R}^n) \subsetneq L_{\text{w}}^p(\mathbb{R}^n)$ であることがわかる. 特に, 斉次函数 $|x|^{-n/p}$ は $L_{\text{w}}^p(\mathbb{R}^n)$ に属すが, $L^p(\mathbb{R}^n)$ に属さない. Kozono–Sugiyama [14] で示された結果は函数 $|x|^{-2}$ を扱える枠組みであり, 実は, この斉次函数は $\lambda = 0$ の場合の問題 (1.1) の特異定常解でもあり, Chandrasekhar 解と呼ばれる. 高次元の場合やより一般の Besov 空間においては, Iwabuchi [8] や Iwabuchi–Nakamura [9] により, 十分小さい初期値に対する時間大域可解性が示されている.

初期値問題 (1.1) の第二式が楕円型偏微分方程式である Poisson 方程式, あるいは, Helmholtz 方程式であるので, 問題 (1.1) の第二式の解 ψ は Riesz ポテンシャル, あるいは, Bessel ポテンシャルを用いて表すことができる. すなわち,

$$\psi(t, x) = (\lambda - \Delta)^{-1}u(t, x) = (\mathcal{B}_\lambda * u)(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}_\lambda(y - x)u(t, y) dy, \quad (1.4)$$

ここで, $\lambda \geq 0$ に対して, \mathcal{B}_λ は Riesz ポテンシャル ($\lambda = 0$ の場合), あるいは, Bessel ポテンシャル ($\lambda > 0$ の場合) であり,

$$\mathcal{B}_\lambda(x) \equiv \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x|, & \lambda = 0, n = 2, \\ \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} |x|^{-(n-2)}, \omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}, & \lambda = 0, n \geq 3, \\ (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{|x|^2}{4s}} e^{-\lambda s} s^{-\frac{n-2}{2}} \frac{ds}{s}, & \lambda > 0, n \geq 2 \end{cases} \quad (1.5)$$

で定まる. $\lambda > 0$ の場合, Bessel ポテンシャル (1.5) は積分で定義されるが, 原点近傍においては Riesz ポテンシャル $|x|^{-(n-2)}$ と同様の振る舞いをし, 空間遠方において指数減衰する. 問題 (1.1) の第一式に現れるポテンシャル項 $\nabla\psi$ が (1.4) のように, 解 u の積分を用いて表現されることから, 問題 (1.1) は非局所な干渉項を擁する非線形問題であることがわかる.

本稿では, 初期値問題 (1.1) の第二式の解の表示 (1.4) におけるポテンシャル \mathcal{B}_λ の空間遠方における減衰に着目し, 問題 (1.1) が適切であるために, 函数に対して空間遠方におけるどういった減衰を課す必要があるかを考える. 近年では, $\lambda > 0$ の場合に, 空間遠方において函数に減衰を課さない函数空間での初期値問題 (1.1) の適切性が得られている. 論文 [24] において, 以下で定義される一様局所 Lebesgue 空間における問題 (1.1) の適切性が得られた: $1 \leq p < \infty$ に対して,

$$L_{\text{ul}}^p(\mathbb{R}^n) \equiv \left\{ f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n); \|f\|_{L_{\text{ul}}^p} \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{B_1(x)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\} \quad (1.6)$$

と定める. ここで, $B_1(x) = \{y \in \mathbb{R}^n; |y - x| < 1\}$ とおいた. 一様局所 Lebesgue 空間のノルムの定義 (1.6) より, 明らかに $L^p(\mathbb{R}^n) \subsetneq L_{\text{ul}}^p(\mathbb{R}^n)$ であり, 実際には, 定数函数や周期函数は $L_{\text{ul}}^p(\mathbb{R}^n)$ に

属すが, こういった函数は全空間において可積分ではない. Lebesgue 空間 $L^p(\mathbb{R}^n)$ より一様局所 Lebesgue 空間 $L^p_{\text{ul}}(\mathbb{R}^n)$ の方がより広い枠組みで問題 (1.1) の適切性を考えることができる一方で, 前者は可分であるが後者は可分ではない. 問題 (1.1) の解の初期値への L^p_{ul} における位相の収束性を見るために, 滑らかな函数空間全体を L^p_{ul} -ノルムで完備化した空間

$$\mathcal{L}^p_{\text{ul}}(\mathbb{R}^n) \equiv \overline{BUC(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{L^p_{\text{ul}}}}$$

を導入する. 包含関係 $\mathcal{L}^p_{\text{ul}} \subsetneq L^p_{\text{ul}}$ であることが知られている. 論文 [24] において, 問題 (1.1) がスケール臨界な一様局所 Lebesgue 空間での適切性が得られた:

命題 1.1 (時間局所適切性, [24]). $n \geq 2, \lambda > 0$ とする. また,

$$p \geq \frac{n}{2} \quad \text{and} \quad q = \min \left\{ \frac{2np}{2n-p}, 2p \right\}$$

とする. このとき, 任意の初期値 $u_0 \in \mathcal{L}^p_{\text{ul}}(\mathbb{R}^n)$ に対して, ある $T > 0$ と初期値問題 (1.1) の一意な軟解 u が存在して,

$$u \in C([0, T]; \mathcal{L}^p_{\text{ul}}(\mathbb{R}^n)) \cap C((0, T); \mathcal{L}^q_{\text{ul}}(\mathbb{R}^n))$$

をみたす.

$\lambda > 0$ の場合, 定数函数が初期値問題 (1.1) をみたすことが知られている. 実際に,

$$u(t, x) = 1 \quad \text{and} \quad \psi(t, x) = \frac{1}{\lambda} \tag{1.7}$$

とおくと, (u, ψ) は (1.1) をみたす. Cygan–Karch–Krawczyk–Wakui [3] において, $\lambda = 1$ の場合における定数解 (1.7) の安定性が示された. 命題 1.1 はこういった定数函数を扱える枠組みにおいて, 問題 (1.1) が適切であることを意味する.

函数に対して空間遠方における減衰を課さない函数空間での初期値問題の適切性の研究は, 非線形拡散方程式や非圧縮性 Navier–Stokes 方程式の初期値問題に対して考察されており, 前者に対しては, Fujishima–Ioku [6], Ishige–Sato [7], Sato [23] 等が挙げられ, 後者に対しては, Koch–Tataru [13], Maekawa–Terasawa [18] 等が挙げられる.

本稿の目標は, 函数に対して空間遠方における減衰度に着目した函数空間における初期値問題 (1.1) の適切性の検証である. $\lambda > 0$ の場合, 第二式の解の積分核である Bessel ポテンシャルは原点近傍において Riesz ポテンシャルと同様の振る舞いをする一方で, 空間遠方では指数減衰する可積分函数であるため, 一様局所 Lebesgue 空間での適切性が示された. しかし, $\lambda = 0$ の場合, 積分核は Riesz ポテンシャルであり, 空間遠方では多項式程度の減衰しか積分核には期待できないため, 一様局所 Lebesgue 空間での議論は一般的に困難である. そこで, 函数の空間局所的な特異性と空間遠方における減衰度をそれぞれ別の Lebesgue 空間の指数で測ることができる (Wiener の) アマルガム空間を導入することで, 問題 (1.1) の適切性を考える. アマルガム空間を導入するために, n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の矩形分解

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} Q(k)$$

を考える. ここで, $Q(k)$ は中心が格子点 k , 一辺の長さが 1 の矩形とする.

定義 1.2 (アマルガム空間). $1 \leq p < \infty, 1 \leq \nu < \infty$ に対して, アマルガム空間 $L_A^{p,\nu}$ を

$$L_A^{p,\nu} \equiv \left\{ f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n); \|f\|_{L_A^{p,\nu}} \equiv \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|f\|_{L^p(Q(k))}^\nu \right)^{\frac{1}{\nu}} < +\infty \right\}$$

で定める.

$\nu = p$ のとき, アマルガム空間 $L_A^{p,p}$ は Lebesgue 空間 L^p と一致し, $\nu = \infty$ の場合は, 一様局所 Lebesgue 空間 L_{loc}^p に対応している. アマルガム空間は函数の空間局所的な特異性を L^p , 空間遠方における減衰を L^ν とそれぞれの Lebesgue 指数で測ることができる. この函数空間は Feichtinger [4], Fournier–Stewart [5] らにより整備され, ノルムの定義から, $\nu > p$ ならば, $L^p \subsetneq L_A^{p,\nu}$ であることがわかる.

以上の函数空間の枠組みで, 初期値問題 (1.1) の解を定義する:

定義 1.3 (軟解). $1 \leq p < \infty, 1 \leq \nu \leq \infty$ とする. 初期値 $u_0 \in L_A^{p,\nu}$ と $T > 0$ に対して, 函数 u が初期値問題 (1.1) の軟解であるとは, 積分方程式

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t \nabla e^{(t-s)\Delta} \cdot (u(s) \nabla \psi(s)) ds \quad (1.8)$$

を $C([0, T]; L_A^{p,\nu})$ でみたすことである. 但し, 熱半群 $e^{t\Delta}$ を

$$e^{t\Delta} f = G_t * f, \quad G_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

で定め, $\psi \equiv \mathcal{B}_\lambda * u$ とおいた.

Fujita–Kato の原理により, 問題 (1.1) を不変とするスケール変換 (1.3) の下, ノルムが不変となる Bochner 空間 $L^\infty(0, \infty; X)$ (X は Banach 空間) において, 問題 (1.1) の時間局所適切性と時間大域可解性が期待される. 実際, スケール臨界指数 $p = n/2$ を境とした問題 (1.1) の時間局所適切性が得られた:

定理 1.4 ([25]). $n \geq 2$ かつ $\lambda \geq 0$ とする. また,

$$p \geq \frac{n}{2}, \quad 1 \leq \nu < n, \quad q = \min \left\{ \frac{2np}{2n-p}, 2p \right\} \quad (1.9)$$

とおき, $\nu \leq \nu_1 < \infty$ は $2\nu/(\nu+1) < \nu_1 < 2n\nu/(n+\nu)$ をみたすとする. このとき, 任意の $u_0 \in L_A^{p,\nu}$ に対して, ある $T > 0$ と初期値問題 (1.1) の一意な軟解 u が存在して,

$$u \in C([0, T]; L_A^{p,\nu}) \cap C((0, T); L_A^{q,\nu_1})$$

をみたす. 特に, 問題 (1.1) は $C([0, T]; L_A^{p,\nu}) \cap C((0, T); L_A^{q,\nu_1})$ において適切である.

移流拡散方程式の初期値問題 (1.1) との同様の構造を持つ非線形偏微分方程式として, 以下の非圧縮性 Navier–Stokes 方程式の初期値問題が考察される:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.10)$$

ここで, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_n(t, x))$ と $p = p(t, x)$ はそれぞれ, 速度ベクトル場と圧力を表す未知関数とする. また, $\mathbf{u}_0 = (u_{0,1}, u_{0,2}, \dots, u_{0,n})$ は $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$ をみたす与えられた初期値である. 問題 (1.1) 同様に, (1.10) はスケール不変性を擁し, 実際に,

$$\mathbf{u}_\mu(t, x) = \mu \mathbf{u}(\mu^2 t, \mu x) \quad \text{and} \quad p_\mu(t, x) = \mu^2 p(\mu^2 t, \mu x)$$

において, 問題 (1.10) は不変となる. 問題 (1.10) に対して, 軟解は以下で定まる:

$$\mathbf{u}(t) = e^{t\Delta} \mathbf{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}_\sigma \nabla \cdot (\mathbf{u}(s) \otimes \mathbf{u}(s)) ds, \quad (1.11)$$

ここで, \mathbb{P}_σ は Helmholtz 射影であり, $\mathbb{P}_\sigma = \operatorname{Id} + \partial_i \partial_j (-\Delta)^{-1}$ で定まる. また, $f \otimes g \equiv (f_i g_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ はテンソル積である. Helmholtz 射影 \mathbb{P}_σ が非局所作用素であることから, 積分方程式 (1.11) の非線形項において, 移流拡散方程式 (1.8) 同様の非局所構造が現れる. 一様局所 Lebesgue 空間における軟解 (1.11) の存在は既に Maekawa–Terasawa [18] により示されていた. これは, 非線形項において, 熱半群 $e^{t\Delta}$ が非局所作用素 \mathbb{P}_σ に直接作用することで, そのポテンシャルが有界かつ可積分となり, 一様局所 Lebesgue 空間において well-defined となるためである. 一方で, 移流拡散方程式の軟解 (1.8) では,

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t \nabla e^{(t-s)\Delta} \cdot (u(s) \nabla (\lambda - \Delta)^{-1} u(s)) ds$$

と書き表され, 熱半群が非局所作用素に直接作用しないことがわかる. そこで, 論文 [24] では, $\lambda > 0$ の場合において, Bessel ポテンシャルが可積分であることに着目し, 一様局所 Lebesgue 空間におけるポテンシャル評価を導出することで, 問題 (1.1) の適切性 (命題 1.1) を得ることができた.

近年では, Bradshaw–Tsai [2] が $2 \leq q < \infty$ に対するアマルガム空間 $L_A^{2,q}$ における問題 (1.10) の局所エネルギー弱解の存在を示した. また, Bradshaw–Lai–Tsai [1] では, $1 \leq q \leq \infty$ に対するアマルガム空間 $L_A^{n,q}$ における問題 (1.10) の軟解が構成されている. $n = 2$, あるいは, $n = 3$ の場合において, 問題 (1.10) の解の渦度を用いることで, 渦度方程式に書き直される. この渦度方程式は移流拡散方程式の初期値問題 (1.1) と同等のスケール構造を擁する. 論文 [25] では, 渦度方程式の初期値問題のアマルガム空間での適切性を示している.

定理 1.4 の証明においては, 初期値問題 (1.1) の解写像の縮小性と Banach の不動点定理を適用する. 定理 1.4 の系として, Lebesgue 空間における十分小さい初期値に対する時間大域可解性が得られる:

系 1.5 (時間大域可解性). $n \geq 2$, $\lambda \geq 0$ とする. このとき, ある定数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 初期値 u_0 が $\|u_0\|_{L^{n/2}} \leq \varepsilon_0$ をみたすならば, 初期値問題 (1.1) のある時間大域解

$$u \in C([0, \infty); L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)) \cap C((0, \infty); L^{\frac{2n}{3}}(\mathbb{R}^n))$$

が存在する.

2 ポテンシャル評価

本節では、アマルガム空間上で成り立つ不等式を述べる。アマルガム空間の包含関係として、以下が成り立つ: $1 < \nu_1 < p < \nu_2 < \infty$ に対して、

$$L_A^{p,1} \subsetneq L_A^{p,\nu_1} \subsetneq L^p = L_A^{p,p} \subsetneq L_A^{p,\nu_2} \subsetneq L_A^{p,\infty} = L_{\text{ul}}^p$$

が成り立つ。特に、 $1 \leq \nu \leq p < \infty$ ならば、

$$L^p \cap L^\nu \subset L_A^{p,\nu} \subset L^\nu$$

であり、 $1 \leq p \leq \nu < \infty$ ならば、

$$L^p \cup L^\nu \subset L_A^{p,\nu}$$

となる。具体的に、 $1 \leq q < p < \nu \leq \infty$ に対して、 $f_0(x) \equiv |x|^{-n/p}$ とおくと、 f_0 はアマルガム空間 $L_A^{q,\nu}$ に属すが、どの Lebesgue 空間にも属さない。

アマルガム空間上においても、Lebesgue 空間のように Hölder の不等式と畳み込み積分に関する Hausdorff–Young の不等式が成り立つ:

命題 2.1 (Hölder の不等式). $n \geq 1$, $1 \leq p_1, p_2, p_3 \leq \infty$, $1 \leq \nu_1, \nu_2, \nu_3 \leq \infty$ とする。さらに、

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \quad \text{and} \quad \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}$$

をみたすとする。このとき、

$$\|fg\|_{L_A^{p,\nu}} \leq \|f\|_{L_A^{p_1,\nu_1}} \|g\|_{L_A^{p_2,\nu_2}} \quad (2.1)$$

が成り立つ。

命題 2.2 (Hausdorff–Young の不等式). $n \geq 1$, $1 \leq p_1, p_2, p_3 \leq \infty$, $1 \leq \nu_1, \nu_2, \nu_3 \leq \infty$ とする。さらに、

$$1 + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \quad \text{and} \quad 1 + \frac{1}{\nu_3} = \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}$$

をみたすとする。このとき、ある定数 $C > 0$ が存在して、任意の $f \in L_A^{p_1,\nu_1}$ と $g \in L_A^{p_2,\nu_2}(\mathbb{R}^n)$ に対して、

$$\|f * g\|_{L_A^{p_3,\nu_3}} \leq C \|f\|_{L_A^{p_1,\nu_1}} \|g\|_{L_A^{p_2,\nu_2}}$$

が成り立つ。

命題 2.2 において、Gauss 関数 G_t を取ることで、アマルガム空間における熱半群評価が得られる:

命題 2.3. $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $1 \leq \nu_1 \leq \nu_2 \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする。このとき、ある定数 $C_0 > 0$ が存在して、任意の $f \in L_A^{p_1,\nu_1}(\mathbb{R}^n)$ に対して、

$$\|D^\alpha e^{t\Delta} f\|_{L_A^{p_2,\nu_2}} \leq C_0 t^{-\frac{\alpha}{2}} \left(t^{-\frac{n}{2} \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right)} + t^{-\frac{n}{2} \left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} \right)} \right) \|f\|_{L_A^{p_1,\nu_1}}$$

が成り立つ。

この命題 2.3 は, アマルガム空間上において, 熱半群 $e^{t\Delta}$ が well-defined であることを意味する. 一方で, 非線形項に現れる Bessel ポテンシャルはアマルガム空間上においてどのように振る舞うであろうか. $\lambda > 0$ のとき, 各点評価として, ある定数 $C(n), c(n) > 0$ が存在して,

$$\mathcal{B}_\lambda(x) \leq \begin{cases} c(2) \log \frac{2}{|x|} + 1 + O(|x|^2) & \text{for } |x| \leq 2 \text{ if } n = 2, \\ c(n)|x|^{-(n-2)} + 1 + O(|x|^{-n}) & \text{for } |x| \leq 2 \text{ if } n \geq 3, \\ C(n)e^{-\frac{\sqrt{\lambda}|x|}{2}} & \text{for } |x| \geq 2 \text{ if } n \geq 2 \end{cases} \quad (2.2)$$

をみます. 各点評価 (2.2) より, $n = 2$ のとき, 任意の $1 \leq p < \infty$ に対して, $\mathcal{B}_\lambda \in L^p(\mathbb{R}^2)$ であり, $n \geq 3$ のとき, 任意の $1 \leq p < n/(n-2)$ に対して, $\mathcal{B}_\lambda \in L^p(\mathbb{R}^n)$ となる. 特に, $\mathcal{B}_\lambda \in L_w^{n/(n-2)}(\mathbb{R}^n)$ である. 同様にして, 任意の $1 \leq p < n/(n-1)$ に対して, $\nabla \mathcal{B}_\lambda \in L^p(\mathbb{R}^n)$ であることもわかる.

Riesz ポテンシャル ($\lambda = 0$) を含んだポテンシャルのアマルガム空間における以下の評価が得られた (より一般の Calderón–Zygmund 作用素のアマルガム空間における有界性は Kikuchi–Nakai–Tomita–Yabuta–Yoneda [12] により示されている):

命題 2.4 ([25]). $n \geq 2, \lambda \geq 0, 1 < p_1 \leq p_2 < \infty, 1 \leq \nu_1 \leq \nu_2 < \infty$ とする. さらに,

$$0 \leq \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} < 1$$

をみますとする. このとき, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $f \in L_A^{p_1, \nu_1}$ に対して,

$$\|\nabla \mathcal{B}_\lambda * f\|_{L_A^{p_2, \nu_2}} \leq C \|f\|_{L_A^{p_1, \nu_1}} \quad (2.3)$$

が成り立つ.

注意. 指数が制限されるのは, Riesz ポテンシャルの特異性に由来するためである. このポテンシャル評価は Lebesgue 空間における Hardy–Littlewood–Sobolev の不等式に対応する:

$$\|\nabla(-\Delta)^{-1}f\|_{L^{p_2}} \leq C_{\text{HLS}} \|f\|_{L^{p_1}} \quad \text{if } \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} = \frac{1}{n}.$$

$\lambda > 0$ の場合において, Bessel ポテンシャルの可積分性より, 一様局所 Lebesgue 空間における以下のポテンシャル評価を得る:

命題 2.5 ([24]). $n \geq 2, \lambda > 0, 1 < p_1 \leq p_2 < \infty$ とする. さらに,

$$0 \leq \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{n}$$

をみますとする. このとき, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $f \in L_{\text{ul}}^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\|\nabla \mathcal{B}_\lambda * f\|_{L_{\text{ul}}^{p_2}} \leq C \lambda^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \lambda^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right) \right) \|f\|_{L_{\text{ul}}^{p_1}}$$

が成り立つ.

これらのポテンシャル評価は、初期値問題 (1.1) の軟解の定義 (1.8) における非線形項に対する双線形評価で有用である。初期値問題 (1.1) で現れるポテンシャル項 $\nabla\psi$ は Bessel ポテンシャルと解 u の畳み込み積分により表現される。畳み込み作用素はユークリッド空間全体における積分で定義されるため、一般的に、アマルガム空間や一様局所 Lebesgue 空間上において有界であるとは限らない。 $\lambda > 0$ のとき、Bessel ポテンシャルは可積分性、特に、空間遠方において指数減衰性をもつため、一様局所 Lebesgue 空間における well-defined 性が保証され、問題 (1.1) の適切性 (命題 1.1) が得られた。一方で、 $\lambda = 0$ の場合、Riesz ポテンシャルは空間遠方における減衰性の弱さから、一様局所 Lebesgue 空間での適切性が期待できない。ここでは、Riesz ポテンシャルの空間遠方における減衰度に着目し、ある種の Hardy–Littlewood–Sobolev の不等式の拡張を得ることができた。

3 主定理の証明の概略

定理 1.4 の仮定 (1.9) をみたす組 (p, ν, q, ν_1) に対して、初期値を $u_0 \in L_A^{p, \nu}$ とし、定数 $M > 0$ を

$$\|u_0\|_{L_A^{p, \nu}} \leq \frac{M}{2} \min \{C_0^{-1}, 1\}$$

をみたすように取る。ここで、定数 C_0 は命題 2.3 において現れたものである。定数 $T, \eta > 0$ に対して、函数空間 X_T を

$$X_T \equiv \left\{ u \in L^\infty(0, T; L_A^{p, \nu}) \cap L^\infty(0, T; L_A^{q, \nu_1}); \right. \\ \left. \sup_{0 < t < T} \|u(t)\|_{L_A^{p, \nu}} \leq M, \sup_{0 < t < T} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|u(t)\|_{L_A^{q, \nu_1}} \leq \eta \right\}$$

と定める。すると、 X_T は距離

$$d(u, v) \equiv \sup_{0 < t < T} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|u(t) - v(t)\|_{L_A^{q, \nu_1}}, \quad u, v \in X_T$$

に関して完備である。軟解の定義 (1.8) より、 $u \in X_T$ と $t \in (0, T)$ に対して、

$$\Phi[u](t) \equiv e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t \nabla e^{(t-s)\Delta} \cdot (u(s)\nabla\psi(s)) ds$$

と定めたとき、写像 Φ が X_T から X_T への縮小写像であることを示せば、Banach の不動点定理から、ある一意な解の存在が示される。そこで、 Φ の有界性や縮小性を示す上で、重要となるのが以下の双線形評価である：

補題 3.1. $n \geq 2, \lambda \geq 0$ とする。また、組 (p, ν, q, ν_1) は定理 1.4 の仮定 (1.9) をみたすとする。このとき、ある定数が $C > 0$ が存在して、

$$\|u\nabla\psi\|_{L_A^{p, \nu}} \leq C \|u\|_{L_A^{q, \nu_1}}^2 \quad (3.1)$$

が成り立つ。

補題 3.1 の証明 Hölder の不等式 (2.1) より、

$$\|u\nabla\psi\|_{L_A^{p, \nu}} \leq \|u\|_{L_A^{q, \nu_1}} \|\nabla\psi\|_{L_A^{\bar{q}, \bar{\nu}}} \quad (3.2)$$

を得る. ここで, $\tilde{q}, \tilde{\nu} \geq 1$ は

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} \quad \text{and} \quad \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\tilde{\nu}}$$

をみたすものである. 定理 1.4 の仮定 (1.9) より,

$$0 \leq \frac{1}{q} - \frac{1}{\tilde{q}} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\tilde{\nu}} < 1$$

であるので, 命題 2.4 と不等式 (3.2) を組み合わせることで, 双線形評価 (3.1) を得る. \square

参考文献

- [1] Bradshaw, Z., Lai, C.-C., and Tsai, T.-P., *Mild solutions and spacetime integral bounds for Stokes and Navier-Stokes flows in Wiener amalgam spaces*, Math. Ann. (2023).
- [2] Bradshaw, Z. and Tsai, T.-P., *Local energy solutions to the Navier-Stokes equations in Wiener amalgam spaces*, SIAM J. Math. Anal. **53** (2021), 1993–2026.
- [3] Cygan, S., Karch, G., Krawczyk, K., and Wakui, H., *Stability of constant steady states of a chemotaxis model*, J. Evol. Equ. **21** (2021), 4873–4896.
- [4] Feichtinger, H. G., *Generalized amalgams, with applications to Fourier transform*, Canad. J. Math. **42** (1990), 395–409.
- [5] Fournier, J. J. F. and Stewart, J., *Amalgams of L^p and l^q* , Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **13** (1985), 1–21.
- [6] Fujishima, Y. and Ioku, N., *Existence and nonexistence of solutions for the heat equation with a superlinear source term*, J. Math. Pures Appl. (9) **118** (2018), 128–158.
- [7] Ishige, K. and Sato, R., *Heat equation with a nonlinear boundary condition and uniformly local L^r spaces*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **36** (2016), 2627–2652.
- [8] Iwabuchi, T., *Global well-posedness for Keller-Segel system in Besov type spaces*, J. Math. Anal. Appl. **379** (2011), 930–948.
- [9] Iwabuchi, T. and Nakamura, M., *Small solutions for nonlinear heat equations, the Navier-Stokes equation, and the Keller-Segel system in Besov and Triebel-Lizorkin spaces*, Adv. Differential Equations **18** (2013), 687–736.
- [10] Jäger, W. and Luckhaus, S., *On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis*, Trans. Amer. Math. Soc. **329** (1992), 819–824.
- [11] Keller, E. F. and Segel, L. A., *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theoret. Biol. **26** (1970), 399–415.
- [12] Kikuchi, N., Nakai, E., Tomita, N., Yabuta, K., and Yoneda, T., *Calderón-Zygmund operators on amalgam spaces and in the discrete case*, J. Math. Anal. Appl. **335** (2007), 198–212.
- [13] Koch, H. and Tataru, D., *Well-posedness for the Navier-Stokes equations*, Adv. Math. **157** (2001), 22–35.

- [14] Kozono, H. and Sugiyama, Y., *Local existence and finite time blow-up of solutions in the 2-D Keller-Segel system*, J. Evol. Equ. **8** (2008), 353–378.
- [15] Kurokiba, M. and Ogawa, T., *Well-posedness for the drift-diffusion system in L^p arising from the semiconductor device simulation*, J. Math. Anal. Appl. **342** (2008), 1052–1067.
- [16] Kurokiba, M. and Ogawa, T., *Singular limit problem for the Keller-Segel system and drift-diffusion system in scaling critical spaces*, J. Evol. Equ. **20** (2020), 421–457.
- [17] Kurokiba, M. and Ogawa, T., *Singular limit problem for the two-dimensional Keller-Segel system in scaling critical space*, J. Differential Equations **269** (2020), 8959–8997.
- [18] Maekawa, Y. and Terasawa, Y., *The Navier-Stokes equations with initial data in uniformly local L^p spaces*, Differential Integral Equations **19** (2006), 369–400.
- [19] Nagai, T., *Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system*, Adv. Math. Sci. Appl. **5** (1995), 581–601.
- [20] Nagai, T., Senba, T., and Yoshida, K., *Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis*, Funkcial. Ekvac. **40** (1997), 411–433.
- [21] Nogayama, T. and Sawano, Y., *Singular limit problem for the Keller–Segel system and drift-diffusion system in scaling critical Besov–Morrey spaces*, J. Math. Anal. Appl. (2023), Paper No. 127207.
- [22] Ogawa, T. and Suguro, T., *Maximal regularity of the heat evolution equation on spatial local spaces and application to a singular limit problem of the Keller–Segel system*, Math. Ann. (2022).
- [23] Sato, R., *Existence of solutions to the slow diffusion equation with a nonlinear source*, J. Math. Anal. Appl. **484** (2020), 123721, 14 pp.
- [24] Suguro, T., *Well-posedness and unconditional uniqueness of mild solutions to the Keller–Segel system in uniformly local spaces*, J. Evol. Equ. **21** (2021), 4599–4618.
- [25] Suguro, T., *Well-posedness of mild solutions to the drift-diffusion and the vorticity equations in amalgam spaces*, J. Math. Anal. Appl. **520** (2023), Paper No. 126843, 17pp.

コンパクト商を持たない非 Riemann 等質空間について

森田 陽介 (九州大学 数理学研究院)*

概要

等質空間 G/H を G の離散部分群 Γ で割った商空間 $\Gamma \backslash G/H$ には, Γ の G/H への作用が固有かつ自由なとき, 多様体の構造が自然に定まる. このようにして得られる多様体を G/H の Clifford–Klein 形といい, 特にコンパクトな Clifford–Klein 形のことをしばしば単にコンパクト商と呼ぶ. 等質空間 G/H が非 Riemann な場合, Γ の作用が一般には固有とは限らないため, Clifford–Klein 形の研究は Riemann の場合とは非常に異なる様相を呈する. 1980 年代末から現在に至るまで, 非 Riemann な等質空間がコンパクト商を持つための様々な必要条件・十分条件が発見されてきた. 本講演では, 小林 [Kob92] による 2 つの閉部分群を比較する Lie 群論的手法を非簡約な閉部分群にまで拡張することで得られる, コンパクト商の非存在の結果を紹介する.

1 イントロダクション

G を Lie 群, H をその閉部分群とする. 以下議論を簡単にするため, 等質空間 G/H への G への作用は効果的であると仮定する. Γ を G の離散部分群とし, Γ の左作用で G/H を割って得られる商空間 $\Gamma \backslash G/H$ を考えよう.

定義 1.1. 射影 $G/H \rightarrow \Gamma \backslash G/H$ が局所微分同相となるような多様体の構造が $\Gamma \backslash G/H$ 上に定まるとき, 商空間 $\Gamma \backslash G/H$ を **Clifford–Klein 形**, 離散部分群 Γ を G/H の **不連続群** という.

多様体の一般論から, $\Gamma \backslash G/H$ が Clifford–Klein 形になることは, Γ の G/H への作用が**固有かつ自由**であることと同値であることを注意しておく.

注意 1.2. Γ 作用が固有だが自由でないときには, $\Gamma \backslash G/H$ には orbifold と呼ばれる, 有限群による商特異点を許した多様体の一般化の構造が定まる.

一方 Γ の作用が固有でないときは, たとえ作用が自由であったとしても, 商空間 $\Gamma \backslash G/H$ は病理的な非 Hausdorff 空間になる. たとえば H が非コンパクトな G の閉部分群, Γ が G の余コンパクト格子のとき, Γ の G/H への作用は固有ではないことが簡単にわかるが, 実際このとき $\Gamma \backslash G/H$ はコンパクトな多様体 $\Gamma \backslash G$ の非コンパクトな Lie 群 H による商であるから, 決して多様体や orbifold のような素性の良い空間にはなり得ない.

* E-mail address: y-morita@math.kyushu-u.ac.jp

双曲多様体,あるいはより一般に Riemann 局所対称空間は, Clifford–Klein 形の一例である. この例においては H はコンパクトで, G/H 上には G 不変な Riemann 計量が定まる. そのことから Γ の G/H への作用はこの計量に関して等長的であり, 特に Γ の G/H への作用は必ず固有になることが簡単にわかる.

一方, H が非コンパクトなときには, Γ の G/H への作用は固有であるとは限らず, Clifford–Klein 形の性質を調べることは H がコンパクトな場合よりも遥かに難しくなる. 実際, Riemann 局所対称空間の研究において極めて有効であった Riemann 幾何学的手法と整数論的手法のいずれも, この状況においては (少なくとも私の理解する限りにおいて) まったく役に立たない:

- H が非コンパクトの場合は G/H に G 不変な Riemann 計量を定めることができないため, 「正值性」に基づく種々の幾何解析的な議論が使えない. 例えば G が簡約 Lie 群, H が G の非コンパクトな簡約部分群のとき, Laplace 作用素は楕円型ではなく, ウルトラ双極型の偏微分作用素になってしまう.
- G が簡約 Lie 群, H が G の非コンパクトな簡約部分群のとき, G の算術的部分群は (自明な状況を除き) 決して Γ に固有に作用しない.

Calabi–Markus [CM62], Wolf [Wol62], Kulkarni [Kul81] らの先駆的な結果ののちに, 1980 年代後半の小林俊行の論文 [Kob89] によって「非 Riemann 等質空間の Clifford–Klein 形の大域的な幾何学」という枠組みが確立し, またこの論文と続編 [Kob92], [Kob96], [Kob97] などにおいて Clifford–Klein 形を調べる上で重要ないくつかの基本的結果が証明された ([Kob96] の主結果については Benoist [Ben96] も別に証明を得ている). その後 1990 年代から現在にいたるまでに非 Riemann 等質空間の Clifford–Klein 形の研究は徐々に進展してきている.

それが現実的に実現可能であるかはともあれ, この分野のひとつの究極的な目標は, コンパクトな Clifford–Klein 形 (しばしば単にコンパクト商と呼ばれる) の分類とってよいであろう. 分類の「粒度」をどう設定するかに応じて, 以下の 3 種類の問いが立てられる:

- (i) 等質空間 G/H が与えられたときに, それがコンパクト商を持つか否か判定せよ.
- (ii) (i) の答えが「持つ」のときに, $\Gamma \backslash G/H$ がコンパクト Clifford–Klein 形になるような Γ を (抽象的な離散群として) 分類せよ.
- (iii) (ii) の分類にあらわれる離散群 Γ それぞれに対して, $\Gamma \backslash G/H$ がコンパクト Clifford–Klein 形になるような Γ の G への埋め込み全体がなすモジュライ空間を調べよ.

例 1.3. 不定値直交群 $O(p, q)$ は以下で定義される Lie 群である (これは $p, q \geq 1$ のとき非コンパクトになることを注意しておく):

$$O(p, q) = \{g \in M(p+q, \mathbb{R}) \mid {}^t g \cdot I_{p,q} \cdot g = I_{p,q}\}, \quad I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$

非 Riemann な等質空間の最も基本的な例に, 擬 Riemann 双曲空間

$$\mathbf{H}^{p,q} = O(p, q+1)/O(p, q)$$

がある (これを ± 1 倍で割った空間 $PO(p, q+1)/P(O(p, q) \times O(1))$ を $\mathbf{H}^{p,q}$ と呼ぶことも多い). この場合, 上述の (i)–(iii) の問いはそれぞれ以下のように言い換えられる:

- (i) 完備, 断面曲率 $\equiv -1$, 符号 (p, q) のコンパクトな擬 Riemann 多様体 M が存在するような $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ を全て決定せよ.
- (ii) (i) の答えが「存在する」のときに, M の基本群として現れうる離散群を分類せよ.
- (iii) (ii) の分類にあらわれる離散群 Γ それぞれに対して, 基本群が Γ になるような完備, 断面曲率 $\equiv -1$, 符号 (p, q) のコンパクトな擬 Riemann 多様体全体がなすモジュライ空間を調べよ.

これまで多くの研究者たちによってこれらの問いの研究が進められてきているが, $\mathbf{H}^{p,q}$ の場合に限っても, (i)–(iii) のいずれも完全な解答は未だ遙か彼方にある (と筆者には感じられる). 例えば (i) は $(p, q) = (4, 2)$ をはじめとする無限個の値に対して未解決である.

筆者はこれまで主に (i) の問いを研究してきた. 今回の講演では以下の結果を紹介したい:

定理 1.4. 任意の $p, q \geq 1$ に対し, 等質空間 $G/H = GL(p+q, \mathbb{R})/O(p, q)$ はコンパクト商を持たない.

Lie 群論に詳しい人のために, 定理 1.4 を 1 つの例として含む, 一般的な形の主張を述べておく (用語の定義の説明は省略する):

定理 1.5. G/H は簡約対称空間で H は非コンパクトとする. G/L を G/H の associated 対称空間とする. もし L が G の Levi 部分群ならば, G/H はコンパクトな Clifford–Klein 形を持たない.

次の表は, 定理 1.5 が適用可能な (G, H, L) の三つ組を, G が単純 Lie 群の場合に Lie 環のレヴェルで分類したものである:

\mathfrak{g}	\mathfrak{h}	\mathfrak{l}	条件
$\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(p, q)$	$\mathfrak{sl}(p, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$p, q \geq 1$
$\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(p, q)$	$\mathfrak{sl}(p, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$	$p, q \geq 1$
$\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{H})$	$\mathfrak{sp}(p, q)$	$\mathfrak{sl}(p, \mathbb{H}) \oplus \mathfrak{sl}(q, \mathbb{H}) \oplus \mathbb{R}$	$p, q \geq 1$
$\mathfrak{su}(n, n)$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{R}$	$n \geq 1$
$\mathfrak{so}(n+2, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(n, 2)$	$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$n \geq 3$
$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}^*(2n)$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$n \geq 3$
$\mathfrak{so}(p+1, q+1)$	$\mathfrak{so}(p, 1) \oplus \mathfrak{so}(1, q)$	$\mathfrak{so}(p, q) \oplus \mathbb{R}$	$p, q \geq 0,$ $(p, q) \neq (0, 0), (1, 1)$
$\mathfrak{so}(n, n)$	$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$	$n \geq 3$

$\mathfrak{so}^*(4n)$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H}) \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H}) \oplus \mathbb{R}$	$n \geq 2$
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$n \geq 1$
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$	$n \geq 1$
$\mathfrak{sp}(n, n)$	$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H}) \oplus \mathbb{R}$	$n \geq 1$
$\mathfrak{e}_{6, \mathbb{C}}$	$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	$\mathfrak{so}(10, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	—
$\mathfrak{e}_{6(6)}$	$\mathfrak{sp}(2, 2)$	$\mathfrak{so}(5, 5) \oplus \mathbb{R}$	—
$\mathfrak{e}_{6(-26)}$	$\mathfrak{f}_4(-20)$	$\mathfrak{so}(9, 1) \oplus \mathbb{R}$	—
$\mathfrak{e}_{7, \mathbb{C}}$	$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{e}_{6, \mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}$	—
$\mathfrak{e}_{7(7)}$	$\mathfrak{sl}(4, \mathbb{H})$	$\mathfrak{e}_{6(6)} \oplus \mathbb{R}$	—
$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{e}_{6(-26)} \oplus \mathbb{R}$	$\mathfrak{e}_{6(-26)} \oplus \mathbb{R}$	—

表 1: 定理 1.5 が適用可能な例

定理 1.4, 1.5 ははじめ, 筆者 [Mor17b] および Tholozan [Tho15+] によって, Lie 環の相対コホモロジーと Clifford–Klein 形の de Rham コホモロジーの振る舞いをうまく比較することによって証明された. その後筆者は [Mor21+] において, 小林 [Kob92] の手法に基づく Lie 群論的な別証明を与えた. 本稿では後者の証明を定理 1.4 の場合に紹介する. 筆者の理解する限りにおいて, 2つの証明は全く別の原理に基づくものであり, なぜ同じ結果が得られるのかは不明である.

謝辞. この原稿は科研費 19K14529 の支援のもと書かれた.

2 準備

2.1 コホモロジー次元

定義 2.1. 離散群 Γ の \mathbb{Q} -コホモロジー次元 $\text{cd}_{\mathbb{Q}} \Gamma \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を,

$$\text{cd}_{\mathbb{R}} \Gamma = \sup\{p \in \mathbb{N} \mid H^p(\Gamma; V) \neq 0 \text{ なる } \mathbb{Q}\Gamma\text{-加群 } V \text{ が存在する}\}$$

で定義する.

また, G が連結成分有限個の Lie 群ならば, G の極大コンパクト部分群 K が共役を除いて一意的存在し, G/K は Euclid 空間に微分同相になることが知られている (Cartan–Malcev–岩澤–Mostow). そこで, 次のように定義する:

定義 2.2. 連結成分有限個の Lie 群 G に対して, $d(G) = \dim G - \dim K$ (ただし K は G の極大コンパクト部分群) とおく. $d(G)$ は G の非コンパクト次元と呼ばれる.

以上の定義のもと, 次が成り立つ:

補題 2.3 (小林 [Kob89, Cor. 5.5], M. [Mor17b, Lem. 2.2]). G を Lie 群, H を G の閉部分群とする. G と H の連結成分は有限個とする. Γ は G の離散部分群で, $\Gamma \backslash G/H$ は Clifford–Klein 形になるとする. このとき $\text{cd}_{\mathbb{Q}} \Gamma \leq d(G) - d(H)$ が成り立つ. 等号が成立するためには, $\Gamma \backslash G/H$ がコンパクトなことが必要かつ十分である.

この補題は, 以下のいずれかを用いると証明できる:

- Galois 被覆 $G/H \rightarrow \Gamma \backslash G/H$ に関する Cartan–Leray のスペクトル系列
- Double fibration $\Gamma \backslash G/H \leftarrow \Gamma \backslash G/K_H \rightarrow \Gamma \backslash G/K$ に関する Leray–Serre のスペクトル系列 (ただし K, K_H はそれぞれ G, H の極大コンパクト部分群で $K_H \subset K$ を満たす)

2.2 作用の固有性の十分条件

この節では, 定理 1.4 の証明に利用する結果を紹介する. まずは記号を導入する:

定義 2.4. G を Lie 群, H, L を G の閉部分集合とする.

- (1) ある G のコンパクト部分集合 C について $H \subset C \cdot L \cdot C^{-1}$ が成り立つとき, $H \prec L$ in G と書く.
- (2) $H \prec L$ in G かつ $L \prec H$ in G のとき $H \sim L$ in G と書く.

次の補題は初等的な位相空間論の議論からすぐに分かる:

補題 2.5 (cf. Benoist [Ben96, §3.1], 小林 [Kob96, §2]). 任意の Lie 群 G に対し次が成り立つ:

- (1) \prec は前順序をなし, したがって \sim は同値関係になる.
- (2) H, H', L を G の閉部分群とする. L が G/H に固有に作用し, $H' \prec H$ in G が成り立つならば, L は G/H' にも固有に作用する.

注意 2.6. G が簡約 Lie 群のときに, 作用の固有性の必要十分条件が小林 [Kob89, Thm. 4.1], [Kob96, Thm. 1.1] および Benoist [Ben96, Prop. 1.5] によって得られているが, 今回の定理 1.4 ないし定理 1.5 の証明のためには, 補題 2.5 のような粗い結果で十分である.

2.3 コンパクト商が存在するための必要条件

次の結果は, 本質的には小林 [Kob92] によって証明された:

命題 2.7 (小林 [Kob92, Thm. 1.5], M. [Mor21+, Prop. 1.3]). G を線型 Lie 群, H を G の閉部分群とする. G と H の連結成分は有限個とする. 次の (1), (2) のどちらかを満たす連結成分有限個の G の閉部分群 H' が存在するとする:

- (1) $H' \prec H$ in G , $d(H') > d(H)$.
 (2) $H' \prec H$ in G , $d(H') = d(H)$ かつ G/H' はコンパクト商を持たない.

このとき, G/H はコンパクト商を持たない.

Proof. (1) と (2) の証明はほぼ同じなので, ここでは (2) の証明のみ説明する.

コンパクト商 $\Gamma \backslash G/H$ が存在したとして矛盾を導こう. Selberg の補題 [Sel60, Lem. 8] より, Γ は torsion-free と仮定しても一般性を失わない. まず補題 2.3 より $\text{cd}_{\mathbb{Q}} \Gamma = d(G) - d(H)$ である. 一方, Γ は G/H に固有に作用して $H' \prec H$ in G だから, 補題 2.5 (2) より Γ も G/H' に固有に作用する. Γ は torsion-free にとったので, この作用が自由なこともわかる. さらに $d(H') = d(H)$ と仮定していたので $\text{cd}_{\mathbb{Q}} \Gamma = d(G) - d(H')$ であり, 再び補題 2.3 より $\Gamma \backslash G/H'$ はコンパクトである. しかしこれは G/H' がコンパクト商を持たないという仮定に反する. \square

注意 2.8. 小林の論文 [Kob92] では, 命題 2.7 (1) の仮定を満たす (G, H, H') の種々の例が与えられているが, それらの例はすべて G が簡約 Lie 群で H, H' が G の簡約な閉部分群というものであった. 今回紹介する定理 1.4 (ないし定理 1.5) の証明では, G は簡約 Lie 群, H は G の簡約な閉部分群であるが, H' として非簡約な閉部分群を用いる. 簡約型の等質空間 G/H のコンパクト商の存在問題を, 非簡約な閉部分群 H' を利用して解くというのは, 少し面白い議論だと筆者は思っている.

3 定理 1.4 の証明

命題 2.7 (2) より, 定理 1.4 を証明するためには次の命題が成り立つことを確かめればよい:

命題 3.1. $G/H = \text{GL}(p+q, \mathbb{R})/\text{O}(p, q)$ とし, さらに G の閉部分群 H' を以下で定める:

$$H' = \left\{ \begin{pmatrix} k & X \\ 0 & \ell \end{pmatrix} \mid X \in \text{M}(p, q; \mathbb{R}), k \in \text{O}(p), \ell \in \text{O}(q) \right\}.$$

このとき以下が成り立つ:

- (a) $H' \sim H$ in G .
 (b) $d(H') = d(H)$.
 (c) G/H' はコンパクト商を持たない.

Proof. まず, H と H' の極大コンパクト部分群はいずれも $\text{O}(p) \times \text{O}(q)$ であるから $d(H) = d(H') = pq$ であり, (b) は確かに成り立っている.

(c) は [Mor17a, Ex. 7.1] においてコホモロジー的手法による証明を与えたが, より易しい証明がその後見つかったので, ここではそちらを紹介する (筆者ははじめ北川宜稔氏からの示唆によりこの証明に気付いたが, その後 Zimmer [Zim94, Prop. 2.1] が実質上同じアイデアをすでに述べていたことがわかった).

G と H' はどちらもユニモジュラーな Lie 群なので, G/H' 上には G -不変な体積形式 (Radon 測度) が定数倍を除いてただ 1 つ存在する. これを Ω とおく. $\Gamma \backslash G/H'$ が Clifford–Klein 形 のとき, Ω から誘導される $\Gamma \backslash G/H'$ 上の体積形式を Ω_Γ とおき, $\Gamma \backslash G/H'$ の Ω_Γ に関する体積を $\text{vol}(\Gamma \backslash G/H')$ と書くことにする. さて,

$$a_t = \begin{pmatrix} t^{-q} I_p & 0 \\ 0 & t^p I_q \end{pmatrix} \in G \quad (t > 0)$$

とおくと $a_t \in N_G(H')$ である (ただし $N_G(H')$ は H' の G における正規化群). したがって

$$\varphi_t: \Gamma \backslash G/H' \rightarrow \Gamma \backslash G/H', \quad \Gamma \cdot g \cdot H' \mapsto \Gamma \cdot ga_t \cdot H'$$

は well-defined な微分同相写像. Lie 環のレヴェルでの計算から

$$\varphi_t^* \Omega_\Gamma = t^{pq(p+q)} \Omega_\Gamma$$

がわかる. 積分の変数変換公式より,

$$\int_{\Gamma \backslash G/H'} \Omega_\Gamma = \int_{\Gamma \backslash G/H'} \varphi_t^* \Omega_\Gamma = t^{pq(p+q)} \int_{\Gamma \backslash G/H'} \Omega_\Gamma,$$

すなわち

$$\text{vol}(\Gamma \backslash G/H') = t^{pq(p+q)} \text{vol}(\Gamma \backslash G/H')$$

である. $\Gamma \backslash G/H'$ がコンパクトだとすると $0 < \text{vol}(\Gamma \backslash G/H') < \infty$ のはずだから矛盾である.

(a) は小林 [Kob96, Ex. 6.5] によって示されているが, 一応ここでも証明を与えることにする. まず $p \leq q$ と仮定しても一般性を失わない.

$$i: \underbrace{\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \cdots \times \text{SL}(2, \mathbb{R})}_p \rightarrow \text{GL}(p+q, \mathbb{R}),$$

$$\left(\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_p & b_p \\ c_p & d_p \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} \text{diag}(a_1, \dots, a_p) & \text{diag}(b_1, \dots, b_p) & 0 \\ \text{diag}(c_1, \dots, c_p) & \text{diag}(d_1, \dots, d_p) & 0 \\ 0 & 0 & I_{q-p} \end{pmatrix} \right)$$

という Lie 群の埋め込みを考え, $G' = i(\text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \cdots \times \text{SL}(2, \mathbb{R}))$ とおく. G' の閉部分群 A', U' をそれぞれ

$$A' = i(A_{\text{SL}(2, \mathbb{R})} \times \cdots \times A_{\text{SL}(2, \mathbb{R})}), \quad A_{\text{SL}(2, \mathbb{R})} = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U' = i(U_{\text{SL}(2, \mathbb{R})} \times \cdots \times U_{\text{SL}(2, \mathbb{R})}), \quad U_{\text{SL}(2, \mathbb{R})} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

で定める. さらに, $K_H = O(p) \times O(q) \subset G$ とおく.

このとき

$$\text{SO}(2) \cdot U_{\text{SL}(2, \mathbb{R})} \cdot \text{SO}(2) = \text{SL}(2, \mathbb{R}), \quad \text{SO}(2) \cdot A_{\text{SL}(2, \mathbb{R})} \cdot \text{SO}(2) = \text{SL}(2, \mathbb{R})$$

であるから, $U' \sim G'$ in G および $A' \sim G'$ in G がわかる. 一方, $O(p, q)$ に対する **KAK 分解** より

$$K_H \cdot A' \cdot K_H = H$$

であり, したがって $H \sim A'$ in G だとわかる. また, **特異値分解定理**によれば, 任意の $X \in M(p, q; \mathbb{R})$ に対してある $k \in O(p)$ と $\ell \in O(q)$ が存在して

$$k \cdot X \cdot \ell^{-1} = \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0_{p, q-p} & \\ & & & t_p \end{pmatrix} \quad (t_1 \geq \dots \geq t_p \geq 0)$$

と書けるのであった (特異値分解定理は, 簡約 Lie 群の極大分裂可換空間の一意性の $O(p, q)$ の場合に他ならないことを, 一応注意しておく). このことから

$$K_H \cdot U' \cdot K_H = H'$$

がただちにわかり, したがって $H' \sim U'$ in G が従う. 以上で $H' \sim H$ in G が証明できた. \square

注意 3.2. 定理 1.5 を示すためには, 上の証明を次のように修正すればよい:

- (c) を示す際には, Levi 部分群 L の中心 $Z(L)$ の双曲的な元を a_t とおく.
- (a) を示す際には, L に属さない G の制限ルートの族でどの 2 つも強直交するもののうち極大なものを取り, そこから

$$i: \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \dots \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow G$$

を作る (cf. Helgason [Hel62, Ch. VIII, Prop. 7.4 の証明]).

詳しくは [Mor21+, §6] を参照されたい.

参考文献

- [Ben96] Y. Benoist, Actions propres sur les espaces homogènes réductifs. *Ann. of Math. (2)* **144** (1996), 315–347.
- [CM62] E. Calabi and L. Markus, Relativistic space forms. *Ann. of Math. (2)* **75** (1962), 63–76.
- [Hel62] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*. Pure and Applied Mathematics, Vol. XII. Academic Press, New York-London, 1962.
- [Kul81] R. S. Kulkarni, Proper actions and pseudo-Riemannian space forms. *Adv. in Math.* **40** (1981), 10–51.
- [Kob89] T. Kobayashi, Proper action on a homogeneous space of reductive type. *Math. Ann.* **285** (1989), 249–263.

- [Kob92] ———, A necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms of homogeneous spaces of reductive type. *Duke Math. J.* **67** (1992), 653–664.
- [Kob96] ———, Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups. *J. Lie Theory* **6** (1996), 147–163.
- [Kob97] ———, Discontinuous groups and Clifford–Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds. *Algebraic and analytic methods in representation theory (Sønderborg, 1994)*, 99–165, Perspectives in Mathematics, vol. 17, Academic Press, San Diego, CA, 1997.
- [Mor17a] Y. Morita, Homogeneous spaces of non-reductive type that do not model any compact manifold. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **53** (2017), 287–298.
- [Mor17b] ———, A cohomological obstruction to the existence of Clifford–Klein forms. *Selecta Math. (N.S.)* **23** (2017), 1931–1953.
- [Mor21+] ———, Cartan projections of some non-reductive subgroups and proper actions on homogeneous spaces. arXiv:2106.07848, to appear in *Transform. Groups*.
- [Sel60] A. Selberg, On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces. *Contributions to function theory (internat. Colloq. Function Theory, Bombay, 1960)*, 147–164, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.
- [Tho15+] N. Tholozan, Volume and non-existence of compact Clifford–Klein forms. arXiv:1511.09448v2, preprint.
- [Wol62] J. A. Wolf, The Clifford–Klein space forms of indefinite metric. *Ann. of Math. (2)* **75** (1962), 77–80.
- [Zim94] R. J. Zimmer, Discrete groups and non-Riemannian homogeneous spaces. *J. Amer. Math. Soc.* **7** (1994), 159–168.

結合的代数の分割とその微分方程式・量子開放系への応用

神澤 健雄

公立大学法人 山口東京理科大学
工学部 数理情報科学科

1 概要

本稿の主眼は, \mathbb{C}^n 上の線型微分方程式:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) \quad (1)$$

を代数的手法を用いて簡約化し, その手法を量子系のモデルに応用しようという物である. 係数行列 $A(t)$ がパラメータ t に依存している場合, 解が閉じた形式で記述出来ると判明している方程式は非常に限られている. 一般に行列の性質を調べるのに固有値・固有ベクトルが役立つが, n が大きい (特に $n \geq 5$) 場合は固有方程式に対して一般的な解の公式が存在しない為, 固有値・固有ベクトルを求める事は非常に困難である.

そこで我々は異なる方法で (1) を解析する事を考えてみよう. 先ず初めに, (1) の係数行列 $A(t)$ が

$$A(t) = \text{diag}[B_1(t), B_2(t)], \quad B_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C}), B_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$$

というブロック対角行列となっているとしよう ($n_1 + n_2 = n$). この時, 方程式 (1) は

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_1} \end{bmatrix} = B_1(t) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_1} \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{n_1+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = B_2(t) \begin{bmatrix} x_{n_1+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2)$$

という2つの線型微分方程式に分けて考える事が出来る. この時, $n_1, n_2 < n$ であるから, 元の式 (1) を解析するよりも, 分解された式 (2) を個々に調べる方が容易である. 特に n_1 (又は n_2) が 1, 2, 3 の様に小さい数であれば部分空

間上で微分方程式を解析し易く、更に解を閉じた形式で表現出来る可能性がある。

次に、 t に依存しない基底変換 $\mathbf{y} = S\mathbf{x}$ が存在して、(1) の係数行列 $A(t)$ が

$$S^{-1}A(t)S = \text{diag}[B_1(t), B_2(t)]$$

の様にブロック対角化されるとしよう。この場合も、基底変換した系の解析は元の方程式 (1) よりも容易であり、変換後の系で部分解が得られれば、逆変換に依って元の系を調べる事が出来る。

この様に、時間に依存しない基底変換 S に依って (1) の係数行列 $A(t)$ がブロック対角化されれば、高次元の系であっても部分的に調べる事が可能となる。しかし、この様な基底変換 S の存在は自明では無い。そこで次の間を考える：

問題. 係数行列 $A(t)$ をブロック対角化する基底変換行列 S はどのような場合に存在するか。そして、存在するならば S をどの様に構成したら良いか。

この問題に対し、本稿では $A(t)$ の生成する結合的代数 \mathcal{A} に着目する。この \mathcal{A} が「完全可分」という性質を持てば、上述の基底変換が存在する事を確認する。本稿の手法で重要なのが、 \mathcal{A} が完全可分か否かは「効果的手法」、つまり有限回の手続きで判別する事が可能であるという点である。これに拠り、固有方程式を解く事無く基底変換 S の存在を判別出来る。更にある条件を満たせば、基底変換 S を具体的に構成する事が可能である。本稿では Eberly の手法を用い、ブロック対角化された形式を具体的に計算する事を試みる。

これらの手法は量子系の解析にも応用可能である。本稿では適用例を幾つか紹介する。

2 結合的代数

本稿で重要となる結合的代数について簡単に述べる。

\mathcal{A} を体 \mathbb{F} 上の線型空間とする。 \mathcal{A} が \mathbb{F} 上の結合的代数であるとは、双線型な積 $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ について閉じており、任意の $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ に対して結合律: $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$ を満たす時を言う。本稿では結合的代数を単に「代数」と呼ぶ事とし、積は以後 XY の様に略して記述する。代数 \mathcal{A} の次元とは \mathcal{A} の線型空間としての次元を言う。本稿では有限次元の代数のみ扱う事とする。

代数 \mathcal{A} が可換であるとは積 \cdot が可換である時を言う。代数 \mathcal{A} の中で、全ての元と可換な元全体の集合を核心と呼び $\text{ctr}(\mathcal{A})$ で表す。核心は可換な部分代数となる。

非零な代数 \mathcal{A} が単純であるとは、 \mathcal{A} が非自明なイデアル (つまり $\{0\}$ と \mathcal{A} 以外のイデアル) を持たない時を言う。代数的閉体 \mathbb{F} 上の単純代数はある $\ell \in \mathbb{N}$ について $M_\ell(\mathbb{F})$ と同型となる (Corollary 2.4.6 [2])。

$N \in \mathcal{A}$ が冪零であるとは, ある $j \in \mathbb{N}$ が存在して $N^j = O$ (O は \mathcal{A} の加法単位元) となる時を言う. $P \in \mathcal{A}$ が真に冪零であるとは, 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して PA が冪零となる時を言う. 代数 \mathcal{A} が冪零であるとは, ある $j \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\mathcal{A}^j = \{A_1 \cdots A_j \mid A_k \in \mathcal{A} (k = 1, \dots, j)\} = \{O\}$$

となる時を言う. \mathcal{A} が有限次元であれば, \mathcal{A} の冪零 (左/右) イデアル全てを含む様な冪零イデアル \mathcal{N} が一意に存在する (Proposition 4.3 [5]). この冪零イデアル \mathcal{N} を根基と呼び, $\text{rad}\mathcal{A}$ で表す. この根基 $\text{rad}\mathcal{A}$ は真に冪零元全体の集合と一致する (Theorem 4.4 [5]).

非零な代数 \mathcal{A} が $\text{rad}\mathcal{A} = \{O\}$ を満たす時, \mathcal{A} は半単純であると言う. 半単純な代数は本稿の内容で重要であり, 以下の事実が知られている:

定理 1 (Wedderburn の定理, cf. [1]). 以下は同値:

- 代数 \mathcal{A} が半単純.
- \mathcal{A} 自身が単純代数か単純代数の直和:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_s \quad (3)$$

で表現される. この表現は直和の順序を除いて一意である.

本稿では代数の中でも特に線型写像の作る代数を扱うが, そこで重要となるのが不変部分空間である.

$A \in M_n(\mathbb{C})$ に対し $\mathfrak{W} \subset \mathbb{C}^n$ が A -不変部分空間であるとは, $A\mathfrak{W} \subset \mathfrak{W}$ となる時を言う. 更に $T \subset M_n(\mathbb{C})$ に対し $\mathfrak{W} \subset \mathbb{C}^n$ が T -不変部分空間であるとは, 任意の $A \in T$ に対して $A\mathfrak{W} \subset \mathfrak{W}$ となる時を言う. 任意の $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対し $\{0\}$ 及び \mathbb{C}^n は明らかに不変部分空間であり, これらは自明な不変部分空間と呼ばれる. 然しながら我々は代数の分解を議論するに当り自明でない不変部分空間の存在に着目しなければならない. 空でない $T \subset M_n(\mathbb{C})$ が可分であるとは非自明な T -不変部分空間が存在する時を言い, そうでない場合は不可分であると言う. 我々の議論に於いて, 以下の結果は重要である.

定理 2 (Burnside の定理, cf. [10]). $n \geq 2$ の時, $M_n(\mathbb{C})$ の部分であり且つ不可分な代数は $M_n(\mathbb{C})$ 其物のみである.

Burnside の定理抛り, 代数が $\mathcal{A} \subsetneq M_n(\mathbb{C})$, 即ち $\dim \mathcal{A} < n^2$ であれば \mathcal{A} の元に共通の不変部分空間が存在する. 従って, ある基底変換 S が存在して任意の $A \in \mathcal{A}$ は

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \boxed{(n-m) \times (n-m)} & \boxed{(n-m) \times m} \\ & \boxed{m \times m} \end{bmatrix}$$

という形にブロック三角化する事が出来る. 但し m は不変部分空間の次元である. 次節ではこれを更にブロック対角化させる為に, その条件を調べる手法について述べる.

3 代数の完全可分性判定指標

$A \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ を \mathbb{C} 上の m -次元代数とする. 代数 \mathcal{A} が可分且つ半単純であれば, Wedderburn の定理に於いて代数の分解 (3) が $s > 2$ となる様にされる. 従って, ある基底変換 $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ が存在して任意の $A \in \mathcal{A}$ は

$$S^{-1}AS = \text{diag}[B_1(A), \dots, B_s(A)]$$

の様ブロック対角化する事が出来る.

代数 \mathcal{A} が完全可分であるとは, \mathcal{A} が可分且つ半単純である時を言う. 代数の可分性は前述の通り \mathcal{A} の基底を求めた時に $\dim \mathcal{A} < n^2$ である事を確認すれば良い. そこで次に我々は \mathcal{A} が半単純である事を確認しなければならないが, 本節ではそれを効果的に行う手法を紹介する.

3.1 代数の判別式

定理 3 (Dickson の定理, cf. [7]). $P \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ が真に冪零である又は $P = O$ である事と, $\text{tr}PA = 0$ である事は同値.

従って, \mathcal{A} の基底を $B = \{B_k\}_{k=1}^m$ とし,

$$P = \sum_{k=1}^m \pi_k B_k, \quad A = \sum_{k=1}^m \alpha_k B_k$$

とした時, P が真に冪零である事は

$$\text{tr}(PA) = \sum_{j,k=1}^m \pi_j \alpha_k \text{tr}(B_j B_k) = 0$$

が任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して成立する事と同値であり, 即ち

$$\sum_{j=1}^m \pi_j \text{tr}(B_j B_k) = 0 \quad (k = 1, \dots, m)$$

となる事と同値である. 従って,

$$\begin{bmatrix} \text{tr}(B_1 B_1) & \cdots & \text{tr}(B_1 B_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{tr}(B_m B_1) & \cdots & \text{tr}(B_m B_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_m \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

となる事と同値である. $P \neq O$ であれば,

$$\det \begin{bmatrix} \text{tr}(B_1 B_1) & \cdots & \text{tr}(B_1 B_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{tr}(B_m B_1) & \cdots & \text{tr}(B_m B_m) \end{bmatrix} = 0$$

が \mathcal{A} が非零な真に冪零である $P \in \mathcal{A}$ の存在する必要十分条件となる.

此処で, \mathcal{A} の基底 $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k=1}^m$ に対し,

$$\text{disc}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} = \det \begin{bmatrix} \text{tr}(B_1 B_1) & \cdots & \text{tr}(B_1 B_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{tr}(B_m B_1) & \cdots & \text{tr}(B_m B_m) \end{bmatrix}$$

を \mathcal{A} の判別式と言う.

定理 4 (cf. [7]). \mathcal{A} が半単純である事と $\text{disc}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} \neq 0$ は同値.

従って, $\dim \mathcal{A} < n^2$ である事と $\text{disc}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} \neq 0$ である事を確認出来れば, \mathcal{A} が完全可分であると言える.

3.2 標準多項式と ALS 指標

代数の判別式同様, 代数の完全可分性を判別するのに有用なのが標準多項式を用いた手法である.

次数 ℓ の標準多項式 S_ℓ とは

$$S_\ell(x_1, \dots, x_\ell) = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(\ell)}$$

で定義される多項式である. 但し, 和は全ての ℓ 個の置換 σ について取るとする.

この標準多項式について以下の事実が知られている:

定理 5 (cf. [9]). 代数 $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ は $*$ -代数 (即ち $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$) とする. $S_{2p} = 0$ が \mathcal{A} 上で成立する事と, ユニタリ作用素 U が存在して \mathcal{A} に属する行列が最大で $p \times p$ の大きさを持つブロック対角行列に変換される事は同値.

本稿ではこの事実を ALS 指標と呼び, 代数の完全可分性判定に用いる. ALS 指標の特徴は, 代数の判別式と異なりブロック対角化された時の各ブロックの大きさについて言及出来る点である.

4 代数の分割の構成

前節では代数が可分か否かを効果的に判別する手法について述べた. 然しながら, 我々はその分解された具体的な形に多くの場合興味がある. 本節では, ある条件下で具体的に分解された形式を計算する方法について述べる. 本稿では Eberly の手法 [3, 4] を導入する.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ を完全可分な m -次元結合的代数とし, \mathcal{A} は (3) の様に分解されるとする. この時,

$$\text{ctr}(\mathcal{A}) \simeq \text{ctr}(\mathcal{A}_1) \oplus \cdots \oplus \text{ctr}(\mathcal{A}_s)$$

且つ $\mathcal{A}_k = (\text{ctr } \mathcal{A}_k) \mathcal{A}$ である為, \mathcal{A} の分解を構築するには核心の分解を計算すれば十分である.

Eberly の手法を直接適用する為, 我々は核心 $\text{ctr}(\mathcal{A})$ の基底 $\mathcal{B}_Z = \{Z_k\}_{k=1}^{m_z}$ を $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ から選ぶ事が出来るという前提を要求する. 但し \mathbb{F} は代数体 (\mathbb{Q} の有限拡大) とする. Eberly の手法で重要な要素は splitting element と呼ばれる物である. 本稿ではこれを「分割元」と呼ぶ事とする. $Q \in \mathcal{A}$ が分割元であるとは, Q の最小多項式が平方の因数を持たず, その次数が \mathcal{A} の中で最大となる物を言う. Eberly に依ると, 我々のこの状況では必ず最小多項式の次数が $\dim \text{ctr}(\mathcal{A})$ となる様な分割元を $\text{ctr}(\mathcal{A})$ の中に見出す事が出来る (Lemma 3.1 [3], [4, 6]).

μ_Q を分割元 Q の最小多項式とする. 更に Eberly に依ると, μ_Q は互いに素で不可分なモニック多項式 $\psi_1, \dots, \psi_s \in \mathbb{F}[X]$ の積に因数分解する事が出来る. この時多項式 $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{F}[X]$ が存在し, $\deg g_k < \dim \text{ctr}(\mathcal{A})$ 且つ

$$g_k \equiv \delta_{jk} \pmod{\psi_j}$$

を満たす ($j, k = 1, \dots, s$). この g_1, \dots, g_s に関し, $E_k = g_k(Q)$ とし, $\mathcal{A}_k = E_k \mathcal{A}$ とすれば, 分解 (3) を得る事が示されている [3].

以上を纏めると, 以下の手順に依って代数 \mathcal{A} の分割を構成出来る:

手順 1 代数 \mathcal{A} の核心 $\text{ctr}(\mathcal{A})$ の基底 \mathcal{B}_Z を求める. この時, $\mathcal{B}_Z \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ となる様にする事が出来れば次の手順に進む (\mathbb{F} は代数体).

手順 2 $\text{ctr}(\mathcal{A})$ から分割元 Q を求める. これは $Q = \sum_k \mu_k Z_k$ ($\mu_k \in \mathbb{F}$) とする事で見出す事が出来る可能性がある.

手順 3 分割元 Q の \mathbb{F} 上の最小多項式 μ_Q を求める.

手順 4 μ_Q を互いに素で不可分なモニック多項式 $\psi_1, \dots, \psi_s \in \mathbb{F}[X]$ に因数分解する.

手順 5 $\deg g_k < \dim \text{ctr}(\mathcal{A})$ で $g_k \equiv \delta_{jk} \pmod{\psi_j}$ となる様な多項式 g_1, \dots, g_s を求める.

手順 6 $E_k = g_k(Q)$ を計算し $\mathcal{A}_k = E_k \mathcal{A}$ とする事で, 分割 $\mathcal{A} = \bigoplus_{k=1}^s \mathcal{A}_k$ を得る.

5 完全可分性判定指標の応用

5.1 全結合量子ネットワーク

Zhang らは非可換で強い多重対称性を持つ量子開放系の縮退について調べ, 適用例として全結合量子ネットワークについて考察した [12].

Markov 近似の下で開放系は Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad 式 (GKSL 式) で表現される:

$$\dot{\rho}_t = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_t] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N^2-1} \gamma_j \{ [F_j \rho_t, F_j^*] + [F_j, \rho_t F_j^*] \}.$$

基底状態 $|0\rangle$ と励起状態 $|1\rangle, \dots, |N\rangle$ のサイトを持つ $|k\rangle = \left[0, \dots, \underbrace{1}_{(k+1)\text{-th}}, \dots, 0 \right]^T \in \mathbb{C}^{N+1}$ 全結合量子ネットワークモデルのハミルトニアンを

$$\begin{aligned} H &= \varepsilon_g |0\rangle \langle 0| + \varepsilon \sum_{k=1}^N |k\rangle \langle k| + h \sum_{j \neq k} |j\rangle \langle k| \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_g & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & h & \cdots & h \\ 0 & h & \varepsilon & \cdots & h \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & h & h & \cdots & \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

で与え [11, 12], 更に

$$\begin{aligned} F_j^+ &= \mu_j^+ |j\rangle \langle 0| \\ F_j^- &= \mu_j^- |0\rangle \langle j| \end{aligned}$$

とする.

此処では [12] の Figure 1 の様に $N = 6$ の場合について考えよう. $\mu_3^\pm, \mu_6^\pm \neq 0, \mu_j^\pm = 0$ ($j \neq 3, 6$) とする. この時この力学が生成する代数 \mathcal{A} を考えると,

$$\begin{aligned} A_1 &= |0\rangle \langle 0|, & A_2 &= \sum_{k=1}^N |k\rangle \langle k|, & A_3 &= \sum_{j \neq k} |j\rangle \langle k| \\ A_4 &= |3\rangle \langle 0|, & A_5 &= |0\rangle \langle 3|, & A_6 &= |6\rangle \langle 0| \\ A_7 &= |0\rangle \langle 6| \end{aligned}$$

に依って \mathcal{A} は生成され, 更に

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1, & B_2 &= A_2, & B_3 &= A_3 \\ B_4 &= A_4, & B_5 &= A_5, & B_6 &= A_6 \\ B_7 &= A_7, & B_8 &= A_3 A_4, & B_9 &= A_5 A_3 \\ B_{10} &= A_4 A_5, & B_{11} &= A_4 A_7, & B_{12} &= A_6 A_5 \\ B_{13} &= A_6 A_7, & B_{14} &= A_3 A_4 A_5, & B_{15} &= A_4 A_5 A_3 \\ B_{16} &= A_3 A_4 A_7, & B_{17} &= A_6 A_5 A_3 \end{aligned}$$

とした時に, \mathcal{A} の基底として $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k=1}^{17}$ を取れる. この時 $\dim \mathcal{A} = 17$ ($< 6^2$) である為, \mathcal{A} は可分である. 更に, \mathcal{A} の判別式を求めると, $\text{disc}_{\mathcal{B}} \mathcal{A} =$

196608 ($\neq 0$) である為, A は完全可分であると言える. 更に標準多項式について, $S_4 = 0$ は A 上で成り立つとは限らないが, $S_6 = 0$ は A 上で成立する事が確認出来る. 従って, A 内の行列は最大で 3×3 のブロックを持つブロック対角行列にブロック対角化される.

5.2 多層グラフェンモデル

ABA 構造を持つ多層グラフェンについて有効質量モデルを考える. Koshino らに依ると [8], このモデルのハミルトニアンはブロック対角行列に変換する事が可能である.

この事実を, 例として三層グラフェンについて考える. この時ハミルトニアンは

$$H = \begin{bmatrix} H_0 & V & W \\ V^* & H'_0 & V^* \\ W & V & H_0 \end{bmatrix}$$

で与えられる. 但し,

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0 & v\bar{\pi} \\ v\pi & \Delta' \end{bmatrix}, \quad H'_0 = \begin{bmatrix} \Delta' & v\bar{\pi} \\ v\pi & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -v_4\bar{\pi} & v_3\pi \\ \gamma_1 & -v_4\bar{\pi} \end{bmatrix}, \quad W = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \gamma_2 & \\ & \gamma_5 \end{bmatrix},$$

$\pi = \xi p_x + ip_y$ を面内運動量, Δ' を 2 量体サイトと 2 量体でないサイトのエネルギー差, γ_1 は層内のカップリング, 行列 W は隣接する層のカップリングを表す. Koshino と McCann に依ると [8], 基底変換を行う事でハミルトニアン H はブロック対角行列に変換される.

前節迄の手法を用いてブロック対角行列に変換される事を確認してみよう.

ハミルトニアン H は

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \left[\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right], \quad A_2 = \left[\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] \\
 A_3 &= \left[\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix} & & \\ & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right], \quad A_4 = \begin{bmatrix} O & I_2 & \\ & O & \\ & I_2 & O \end{bmatrix} \\
 A_5 &= \begin{bmatrix} O & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \\ & O & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & O \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} O & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \\ & O & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & & O \end{bmatrix} \\
 A_7 &= \begin{bmatrix} O & & \\ I_2 & O & I_2 \\ & & O \end{bmatrix}, \quad A_8 = \begin{bmatrix} O & & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & O & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & & O \end{bmatrix} \\
 A_9 &= \begin{bmatrix} O & & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & O & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ & & O \end{bmatrix}, \quad A_{10} = \begin{bmatrix} & O & \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} & & O \end{bmatrix} \\
 A_{11} &= \begin{bmatrix} & O & \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix} & & O \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
 H &= v\pi A_1 + v\bar{\pi} A_2 + \Delta' A_3 - v_4 \bar{\pi} A_4 + v_3 \pi A_5 + \gamma_1 A_6 \\
 &\quad - \bar{v}_4 \pi A_7 + \bar{\gamma}_1 A_8 + \bar{v}_3 \pi A_9 + \frac{\gamma_2}{2} A_{10} + \frac{\gamma_5}{2} A_{11}
 \end{aligned}$$

と表現する事が出来る.

行列 A_1, \dots, A_{11} から生成される代数 \mathcal{A} を考えると,

$$B_1 = A_1, \dots, B_{11} = A_{11}$$

$$B_{12} = A_1 A_2, B_{13} = A_1 A_3, B_{14} = A_1 A_5, B_{15} = A_1 A_8$$

$$B_{16} = A_1 A_{10}, B_{17} = A_2 A_1, B_{18} = A_2 A_3, B_{19} = A_2 A_{11}$$

$$B_{20} = A_4 A_7$$

とすれば, $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k=1}^{20}$ は \mathcal{A} の基底となる事が判る. 従って $\dim \mathcal{A} = 20 (< 6^2)$ である為, \mathcal{A} は可分である. 此処で \mathcal{A} の判別式を計算すると,

$$\text{disc}_{\mathcal{B}} \mathcal{A} = -262144 (\neq 0)$$

であるから, \mathcal{A} は半単純であり, 従って \mathcal{A} は完全可分であると判る. 更に $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ である事が確認出来るので, ALS 指標を用いると $S_6 = O$ は \mathcal{A} 上で成立するとは限らないが $S_8 = O$ は \mathcal{A} 上で成立する為, ブロック対角化された場合にはブロックの大きさは最大で 4×4 と判る.

次に Eberly の手法を適用する為に \mathcal{A} の核心を求めると,

$$\text{ctr} \mathcal{A} = \{c_1 I_6 + c_2 Z \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C}\}$$

である. 但し,

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & & & & & 1 \\ & 0 & & & & 1 \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ 1 & & & & 0 & \\ & 1 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

である. 核心の基底を求めると $\{I_6, Z\}$ は基底となり, $I_6, Z \in \mathcal{M}_6(\mathbb{F})$ であり且つ $\dim \text{ctr}(\mathcal{A}) = 2$ と判る. 例えば $Q = I_6 + Z$ とすると, Q の最小多項式は

$$\mu_Q(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$$

と因数分解出来るので, Q は分割元である. $\psi_1(x) = x, \psi_2(x) = x-2$ とし, $g_j \equiv \delta_{jk} \pmod{\psi_k}$ となる多項式 g_1, g_2 を求めると,

$$g_1(x) = -\frac{1}{2}x + 1, \quad g_2(x) = \frac{1}{2}x$$

となる.

$$g_1(Q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & & -\frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2} & & & & -\frac{1}{2} \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ -\frac{1}{2} & & & & \frac{1}{2} & \\ & -\frac{1}{2} & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad g_2(Q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2} & & & & \frac{1}{2} \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ \frac{1}{2} & & & & \frac{1}{2} & \\ & \frac{1}{2} & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

は分割された代数 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ の単位元となる. これらの零空間を求め行列 S を

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & -\frac{1}{\sqrt{2}} & & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & & & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

と構成すれば, S はユニタリ行列で行列 A_1, \dots, A_{11} は同時に

$$\begin{bmatrix} \boxed{2 \times 2} & & \\ & & \\ & & \boxed{4 \times 4} \end{bmatrix}$$

という形のブロック対角行列に対角化される.

参考文献

- [1] A. Abian. *Linear associative algebras*. Elsevier, 2014.
- [2] Yu. A. Drozd and V. V. Kirichenko. *Finite Dimensional Algebras*. Springer, 2012.
- [3] W. Eberly. Decomposition of algebras over finite fields and number fields. *Computational Complexity*, 1:183–210, 1991.
- [4] W. Eberly. Decompositions of algebras over \mathbb{R} and \mathbb{C} . *Computational Complexity*, 1:211–234, 1991.
- [5] D. R. Farenick. *Algebras of Linear Transformations*. Springer, 2000.
- [6] Gábor Ivanyos and Lajos Rónyai. Computations in associative and Lie algebras. In *Some tapas of computer algebra*, pages 91–120. Springer, 1999.
- [7] T. Kamizawa. On some algebraic procedure for block-diagonal decompositions of open dynamical systems. *Open Systems & Information Dynamics*, 24(01):1750002, 2017.
- [8] M. Koshino and E. McCann. Landau level spectra and the quantum hall effect of multilayer graphene. *Physical Review B*, 83(16):165443, 2011.
- [9] G. Pastuszak, T. Kamizawa, and A. Jamiołkowski. On a criterion for simultaneous block-diagonalization of normal matrices. *Open Systems & Information Dynamics*, 23(01):1650003, 2016.

- [10] H. Radjavi and P. Rosenthal. *Invariant Subspaces*. Dover Publications, 2003.
- [11] J. Thingna, D. Manzano, and J. Cao. Dynamical signatures of molecular symmetries in nonequilibrium quantum transport. *Scientific reports*, 6(1):28027, 2016.
- [12] Z. Zhang, J. Tindall, J. Mur-Petit, D. Jaksch, and B. Buča. Stationary state degeneracy of open quantum systems with non-abelian symmetries. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 53(21):215304, 2020.

増大作用素のリゾルベントに関する収束定理

千葉大学・社会科学研究院 青山耕治

Koji Aoyama

Graduate School of Social Sciences,

Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H06, 47H09.

Keywords and phrases. 増大作用素, 零点, リゾルベント, 強収束。

概要

文献 [11, 13] で得られた Banach 空間上の増大作用素のリゾルベントに関連する結果を報告する。

1 はじめに

E を Banach 空間, A を E 上の増大作用素, λ を正の実数とする。本稿では, A のリゾルベント $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ に関して二つの話題を取り上げる。

一つ目は, 「 $x \in E, \lambda \rightarrow \infty$ のとき, $J_\lambda x$ が収束するための条件」に関する話題である。本稿の第 3 節では, 先行研究 Bruck [15], Reich [24, 25, 27] および Takahashi-Ueda [32] の結果を紹介し, 主結果 (定理 3.6) とその系を述べ, さらに, その応用例として非拡大写像列の共通不動点問題に関する結果を導く。

次に, 第 4 節では, 二つ目の話題「リゾルベントを使った A の零点の逐次近似法」を取り上げる。特に, 以下で定義される点列 $\{x_n\}$ に注目する。

$$\begin{cases} u, x_1 \in E, \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) J_{\lambda_n} x_n \quad (n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

ここで, $\{\alpha_n\}$ は $[0, 1]$ の数列, $\{\lambda_n\}$ は正の実数列である。第 4 節の主結果 (定理 4.3 および系 4.4) は, ある仮定のもとで点列 $\{x_n\}$ が A の零点に強収束することを主張するもので, その特徴は $\{\lambda_n\}$ の満たすべき条件を先行研究のそれに比べて大きく緩和できたところにある。

2 準備

本稿では, E を実 Banach 空間, $\|\cdot\|$ を E またはその共役空間 E^* のノルム, $\langle x, x^* \rangle$ を $x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値, I を E 上の恒等写像, \mathbb{N} を正の整数の集合とする。また,

E の点列 $\{x_n\}$ が $x \in E$ に収束することを $x_n \rightarrow x$ で表す。

E の双対写像 (duality mapping) を J で表す。つまり, J は E から E^* への集合値写像で, $x \in E$ のとき, $Jx = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$ である。

S_E を E の単位球面, つまり, $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とする。Banach 空間 E が狭義凸 (strictly convex) であるとは, $x, y \in S_E, x \neq y$ ならば $\|x + y\| < 2$ が成り立つときをいう。Banach 空間 E が一様凸 (uniformly convex) であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在して, $x, y \in S_E, \|x - y\| \geq \epsilon$ ならば $\|x + y\| / 2 \leq 1 - \delta$ が成り立つときをいう。 E が一様凸ならば, E は回帰的で狭義凸であることが知られている [30]。

S_E を再び E の単位球面とする。 E のノルム $\|\cdot\|$ が Gâteaux 微分可能であるとは, すべての $x, y \in S$ に対して, 極限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \quad (2.1)$$

が存在するときをいう。このとき, E は滑らか (smooth) であるという。 E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとは, 各 $y \in S$ に対して (2.1) が x に関して一様に収束するときをいう。 E のノルムが一様に Fréchet 微分可能であるとは, (2.1) が $x, y \in S$ に関して一様に収束するときをいう。このとき, E は一様に滑らか (uniformly smooth) であるという。一様に滑らかな Banach 空間は, 回帰的であることが知られている [30]。 E のノルムが Gâteaux 微分可能であることと, 双対写像 J が 1 価であることは同値になることが知られている。また, E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能ならば, J は E の有界集合上で一様連続 (norm-to-weak*) であることが知られている [30]。

C を E の空でない部分集合, T を C から E への写像, $F(T)$ を T の不動点の集合とする。つまり, $F(T) = \{z \in C : z = Tz\}$ である。写像 T が非拡大 (nonexpansive) であるとは, すべての $x, y \in C$ に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう。

C を E の空でない部分集合, K を C の空でない部分集合とし, Q を C から K の上への写像とする。 Q が C から K の上への retraction であるとは, すべての $x \in K$ に対して $Qx = x$ が成り立つときをいう。 Q が sunny であるとは

$$x \in C, \lambda \geq 0, Qx + \lambda(x - Qx) \in C \Rightarrow Q(Qx + \lambda(x - Qx)) = Qx$$

が成り立つときをいう。 K が C の sunny nonexpansive retract であるとは, C から K の上への sunny nonexpansive retraction [23] が存在するときをいう。

A を E から E への集合値写像とする。このとき, A とそのグラフを同一視し, $A \subset E \times E$ と表す。 A の定義域を $D(A)$ で, A の値域を $R(A)$ で, A の零点の集合を $A^{-1}0$ で表す。つまり, $D(A) = \{x \in E : Ax \neq \emptyset\}$, $R(A) = \bigcup_{x \in D(A)} Ax$ および $A^{-1}0 = \{x \in$

$D(A): 0 \in Ax\}$ である。集合値写像 $A \subset E \times E$ が増大 (accretive) 作用素であるとは、 $x, y \in D(A)$, $u \in Ax$ および $v \in Ay$ に対して、 $\langle u - v, j \rangle \geq 0$ となる $j \in J(x - y)$ が存在するときをいう。

註 1. [19, Lemma 1.1] または [34, 補助定理 3.6.1] より、 $A \subset E \times E$ が増大作用素であることと、条件

$$\lambda \geq 0, y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2 \Rightarrow \|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|$$

は同値であることがわかる。

増大作用素と非拡大写像の間には次の関係がある。

補助定理 2.1 ([34, 定理 3.6.4]). E を Banach 空間, C を E の空でない閉凸部分集合, T を C から C への非拡大写像とし、 $A = I - T$ とする。このとき、 A は一価の増大作用素であり、 $C = D(A) \subset \bigcap_{\lambda > 0} R(I + \lambda A)$ が成り立つ。

$A \subset E \times E$ を増大作用素, I を E 上の恒等写像とする。このとき、任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\overline{D(A)} \subset R(I + \lambda A)$$

が成り立つならば、 A は値域条件 (range condition) を満たすという。ここで、 $\overline{D(A)}$ は $D(A)$ の閉包である。増大作用素 A が m -増大 (m -accretive) であるとは、すべての $\lambda > 0$ に対して $R(I + \lambda A) = E$ が成り立つときをいう。

註 2. E を Hilbert 空間とする。このとき、増大作用素 $A \subset E \times E$ は単調 (monotone) 作用素と呼ばれる。単調作用素 A が極大単調 (maximal monotone) であるとは

$$B \subset E \times E \text{ が単調で } A \subset B \text{ ならば } A = B$$

が成り立つときをいう。集合値写像 $A \subset E \times E$ が m -増大であることと、 A が極大単調であることは同値となることが知られている (例えば, [31] を参照)。

$A \subset E \times E$ を増大作用素, I を E 上の恒等写像, λ を正の数とする。このとき、 $(I + \lambda A)^{-1}$ は $R(I + \lambda A)$ から $D(A)$ の上への 1 価写像であることが知られており、写像 $(I + \lambda A)^{-1}$ を A のリゾルベント (resolvent) といい、 J_λ で表す。 J_λ は非拡大であり、 $F(J_\lambda) = A^{-1}0$ となることが知られている [30]。

3 増大作用素のリゾルベントの収束

E を Banach 空間, $A \subset E \times E$ を零点をもつ増大作用素, $\lambda > 0$, J_λ を A のリゾルベント, つまり, $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$, $x \in \bigcap_{\lambda > 0} R(I + \lambda A)$ とする。本節では, どのような条件のもとで, $\lambda \rightarrow \infty$ のとき $J_\lambda x$ が収束するかという問題を扱う。まず, 次の 3.1 でこの問題に関する先行研究を紹介し, 3.2 で主結果とその系を, 3.3 で主結果の応用例を述べる。

3.1 先行研究

[15, Lemma 1] より, Hilbert 空間上の極大単調作用素のリゾルベントに関して, 以下が成り立つことが知られている。

定理 3.1. E を Hilbert 空間, $A \subset E \times E$ を零点をもつ極大単調作用素, $x \in E$ とする。このとき, 極限 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J_\lambda x$ は存在し, その極限は $A^{-1}0$ に属する。

次に, Reich による収束定理を三つ紹介する。Reich [24, 25, 27] は, Banach 空間の m -増大作用素に関して以下の結果を得た。これらはいずれも定理 3.1 の一般化である。

定理 3.2 ([24, Theorem]). E を滑らかで回帰的な Banach 空間, $A \subset E \times E$ を零点をもつ m -増大作用素とし, E の双対写像 J は weakly sequentially continuous, つまり, E の点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束するとき, $\{Jx_n\}$ が Jx に weak* で収束すると仮定する。このとき, 任意の $x \in E$ に対して $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J_\lambda x$ は存在し, その極限は $A^{-1}0$ に属する。

定理 3.3 ([25, Theorem 5.1]). E を滑らかで一様凸な Banach 空間, $A \subset E \times E$ を零点をもつ m -増大作用素とし, E の双対写像 J は 0 で weakly sequentially continuous, つまり, E の点列 $\{x_n\}$ が 0 に弱収束するとき, $\{Jx_n\}$ が 0 に weak* で収束すると仮定する。このとき, 任意の $x \in E$ に対して $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J_\lambda x$ は存在し, その極限は $A^{-1}0$ に属する。

定理 3.4 ([27, Theorem 1]). E を一様に滑らかな Banach 空間, $A \subset E \times E$ を零点をもつ m -増大作用素とする。このとき, 任意の $x \in E$ に対して $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J_\lambda x$ は存在し, その極限は $A^{-1}0$ に属する。

Takahashi-Ueda [32] は, 値域条件を満たす増大作用素に関して次の結果を示した。これは, 定理 3.4 の一般化である。

定理 3.5 ([32, Theorem 1]). E を回帰的な Banach 空間, $A \subset E \times E$ を値域条件を満たす

し零点をもつ増大作用素とし, E のノルムは一様に Gâteaux 微分可能であり, E のすべての弱コンパクトな凸部分集合は非拡大写像に関して不動点性をもつ^{*1}とする。 C を E の閉凸部分集合で, ある $\lambda > 0$ に対して, $C \subset R(I + \lambda A)$ および $J_\lambda(C) \subset C$ が成り立つと仮定する。このとき, 任意の $x \in C$ に対して $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J_\lambda x$ は存在し, その極限は $A^{-1}0$ に属する。

なお, 定理 3.5 については, [34, 定理 4.1.3] も参照されたい。

3.2 主結果

Reich [27] および Takahashi-Ueda [32] に動機づけられ, 文献 [13] では, 次の結果を得た。これは, 定理 3.5 とは別の仮定のもとで, 同様な結論が得られることを示すものである。

定理 3.6 ([13, Theorem 3.1]). E を狭義凸で回帰的な Banach 空間, $A \subset E \times E$ を零点をもつ増大作用素, C を E の空でない閉凸部分集合とする。さらに, E のノルムは一様に Gâteaux 微分可能であり, $J_\eta(C) \subset C$ となる $\eta > 0$ が存在し, 任意の $\lambda > 0$ に対して

$$D(A) \subset R(I + \lambda A) \text{ および } C \subset R(I + \lambda A) \quad (3.1)$$

が成り立つと仮定する。このとき, 各 $x \in C$ に対して $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J_\lambda x$ が存在し, その極限は $A^{-1}0 \cap C$ に属する。さらに, 写像 $Q: C \rightarrow A^{-1}0 \cap C$ を, $x \in C$ に対して $Qx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} J_\lambda x$ で定義すると, 以下が成り立つ。

- 任意の $x \in C$ および $z \in A^{-1}0 \cap C$ に対して $\langle x - Qx, J(z - Qx) \rangle \leq 0$;
- Q は C から $A^{-1}0 \cap C$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

註 3. 文献 [13] において, Theorem 3.1 (上の定理 3.6) の証明に使う Lemma 3.3 の Banach limit の説明が曖昧であるが, 任意の Banach limit に対して Lemma 3.3 の結論が得られる。

定理 3.6 より, 次の系が得られる。

系 3.7 ([13, Corollary 3.5]). E を定理 3.6 と同じとし, $A \subset E \times E$ を零点をもつ m -増大作用素, $x \in E$ とする。このとき, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} J_\lambda x$ が存在し, その極限は $A^{-1}0$ に属する。

^{*1} D が E の弱コンパクトな凸部分集合で, $T: D \rightarrow D$ が非拡大写像ならば, T は不動点をもつ。

また, その極限 w とするとき, 任意の $z \in A^{-1}0$ に対して $\langle x - w, J(z - w) \rangle \leq 0$ が成り立つ。

証明. $C = E$ とすると, 明らかに C は E の閉凸部分集合である. A は m -増大作用素だから, 任意の $\lambda > 0$ に対して $J_\lambda(C) \subset C$ および (3.1) が成り立つ. ゆえに, 定理 3.6 より結論が得られる. \square

定理 3.6 より, 非拡大写像に関する次の系も得られる. これと似た結果が文献 [16, 24, 27, 30] にもある.

系 3.8 ([13, Corollary 3.6]). E を狭義凸で回帰的な Banach 空間とし, E のノルムは一様に Gâteaux 微分可能とする. C を E の空でない閉凸部分集合, $T: C \rightarrow C$ を不動点をもつ非拡大写像, $u \in C$, z_s を $s \in (0, 1)$ に対して $z_s = su + (1 - s)Tz_s$ を満たす C の点とする. このとき, $\lim_{s \downarrow 0} z_s = Qu$ である. ここで, Q は C から $F(T)$ の上への sunny nonexpansive retraction である.

証明. $A = I - T$ とおく. このとき, 補助定理 2.1 より, A は増大作用素であり, 任意の $\lambda > 0$ に対して $C = D(A) \subset R(I + \lambda A)$ が成り立つことがわかる. よって, $J_1(C) \subset C$ であり, 任意の $\lambda > 0$ に対して (3.1) が成り立つ. さらに, 任意の $s \in (0, 1)$ に対して, $t = 1/s - 1$ とおけば, $J_t = (I + tA)^{-1} = z_s$ である. $A^{-1}0 = F(T)$ であり, $t \rightarrow \infty$ のとき $s \downarrow 0$ であるから, 定理 3.6 より結論が得られる. \square

3.3 非拡大写像列の共通不動点問題への応用

ここでは, 系 3.8 を使って, 非拡大写像列の共通不動点問題に関する結果を導く. その前に, 少し準備が必要である.

C を Banach 空間 E の部分集合, $\{S_n\}$ を C から C への写像の列とする. $\{S_n\}$ が強非拡大性をもつ, または, 強非拡大列 (strongly nonexpansive sequence) であるとは, 次の 2 条件が成り立つときをいう [7, 8].

- 各 S_n は非拡大である.
- $\{x_n - y_n\}$ が有界で $\|x_n - y_n\| - \|S_n x_n - S_n y_n\| \rightarrow 0$ となる C の任意の点列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ に対して, $x_n - y_n - (S_n x_n - S_n y_n) \rightarrow 0$ となる.

写像列 $\{S_n\}$ が写像 $T: C \rightarrow C$ について NST 条件 (I) を満たすとは, 次の条件が成り立つときをいう [21].

$F(T) \subset \bigcap_n F(S_n)$ であり, さらに, $\{y_n\}$ が C の有界点列で, $y_n - S_n y_n \rightarrow 0$ ならば, $y_n - T y_n \rightarrow 0$ である。

註 4. 強非拡大性をもつ写像列について詳しくは, 文献 [4, 7, 8, 11, 12, 35, 36] を参照されたい。また, 文献 [1–3, 5, 9, 10] でも, 写像列の強非拡大性を扱っている。

註 5 ([12, Remark 2.4]). $\{S_n\}$ が T について NST 条件 (I) をみたすとき, $F(T) = \bigcap_n F(S_n)$ である。

系 3.8 および [12, Lemma 3.3] を使うと, 強非拡大列に関する次の収束定理が得られる。

定理 3.9 ([13, Theorem 4.1 の一部]). E を狭義凸で回帰的な Banach 空間, C を E の空でない閉凸部分集合, $\{S_n\}$ を C から C への強非拡大性をもつ写像の列, F を $\{S_n\}$ の共通不動点の集合, $\{\alpha_n\}$ を $(0, 1]$ の数列とし, C の点列 $\{x_n\}$ を $u \in C, x_1 \in C$ および任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) S_n x_n$$

で定義する。さらに, E のノルムは一様 Gâteaux 微分可能であり, $F \neq \emptyset, \lim_n \alpha_n = 0, \sum_n \alpha_n = \infty$ であり, $\{S_n\}$ は非拡大写像 $T: C \rightarrow C$ について NST 条件 (I) を満たすと仮定する。このとき, $\{x_n\}$ は $Qu \in F$ に強収束する。ここで, Q は C から F の上への sunny nonexpansive retraction である。

証明. T は非拡大であるから, 任意の $s \in (0, 1)$ に対して, $z_s = s u + (1 - s) T z_s$ を満たす C の点 z_s が存在する。系 3.8 より, $s \downarrow 0$ のとき $z_s \rightarrow Qu$ である。ゆえに, [12, Lemma 3.3] より結論が得られる。□

註 6. [12, Theorem 3.1] の仮定の一つ「 E は非拡大写像に関して不動点性をもつ」, つまり, 「 E の任意の有界閉凸集合 K で定義された非拡大写像 $T: K \rightarrow K$ が不動点をもつ」を, 「 E は狭義凸」に置き換えたものが, 定理 3.9 である。

一様凸な Banach 空間は, 回帰的かつ狭義凸だから, 定理 3.9 から次の系が得られる。

系 3.10 ([12, Corollary 3.4]). E を一様凸な Banach 空間とし, E のノルムは一様 Gâteaux 微分可能であると仮定する。また, $C, \{S_n\}, T, \{\alpha_n\}, u, \{x_n\}$ および Q は定理 3.9 と同じとする。このとき, $\{x_n\}$ は Qu に強収束する。

定理 3.9 および系 3.10 の応用については, [11, Theorem 3.1] および [12, Theorems 4.1, 4.5] を参照されたい。

4 増大作用素の零点の逐次近似

E を Banach 空間, $A \subset E \times E$ を零点をもつ増大作用素とする。本節では, どのような条件のもとで次式 (4.1) で定義される点列 $\{x_n\}$ が A の零点に収束するかという問題を扱う。

$$\begin{cases} u, x_1 \in E, \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) J_{\lambda_n} x_n \quad (n \in \mathbb{N}). \end{cases} \quad (4.1)$$

ここで, $\{\alpha_n\}$ は $[0, 1]$ の数列, $\{\lambda_n\}$ は正の実数列, J_{λ_n} は A のリゾルベント, つまり, $J_{\lambda_n} = (I + \lambda_n A)^{-1}$ である。

増大作用素 A (E が Hilbert 空間の場合は単調作用素 A) の零点の逐次近似では, 次式 (4.2) で定義される近接点法 (proximal point algorithm) と呼ばれるアルゴリズムがよく用いられる。

$$\begin{cases} x_1 \in E, \\ x_{n+1} = J_{\lambda_n} x_n \quad (n \in \mathbb{N}). \end{cases} \quad (4.2)$$

(4.2) により生成される点列 $\{x_n\}$ に関して, 以下のことが知られている。

- ある仮定のもとで, $\{x_n\}$ は A の零点に弱収束する [14, 20, 26, 28]。
- E が Hilbert 空間であったとしても, $\{x_n\}$ は一般には強収束しない [17]。

一方, 本節で注目する (4.1) で生成される点列は, 適切な仮定のもとで強収束することが示される。以下, 4.1 で先行研究を紹介し, 4.2 で主結果とそれに関連する結果を述べる。

4.1 先行研究

ここでは, E をそのノルムが一様に Gâteaux 微分可能な一様凸 Banach 空間とする。

Kamimura-Takahashi [18] の主結果の一つ [18, Theorem 2] より, 直ちに次の定理が得られる。

定理 4.1. $A \subset E \times E$ を零点をもつ m -増大作用素, $\{\alpha_n\}$ を $[0, 1]$ の数列, $\{\lambda_n\}$ を正の数列とする。さらに, $\sum_n \alpha_n = \infty$, $\lim_n \alpha_n = 0$ および $\lim_n \lambda_n = \infty$ を仮定する。 u を E の点, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = u$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) J_{\lambda_n} x_n \quad (4.3)$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は Qu に強収束する。ここで, Q は E から $A^{-1}0$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

Nakajo [22] は, Kamimura-Takahashi [18] とは別の仮定のもとで, (4.1) が強収束することを示した。

定理 4.2 ([22, Theorem 4.1]). $A \subset E \times E$ を値域条件を満たし零点をもつ増大作用素, C を E の空でない閉凸部分集合, $\{\alpha_n\}$ を $[0, 1]$ の数列, $\{\lambda_n\}$ を正の数列とする。さらに, $\sum_n \alpha_n = \infty$, $\lim_n \alpha_n = 0$, $\sum_n |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$, $\inf_n \lambda_n > 0$ および $\sum_n |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$ を仮定する。 u を C の点, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = u$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して (4.3) で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は Qu に強収束する。ここで, Q は C から $A^{-1}0$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

定理 4.1, 定理 4.2 の他に (4.1) を扱った結果として, [6, Theorem 4.3] および [29, Theorem 12] などがある。

4.2 主結果とそれより導かれる結果

4.1 で紹介した定理では, 数列 $\{\lambda_n\}$ が ∞ に発散する, または, ある実数に収束するという条件が仮定されていた。ここでは, $\{\lambda_n\}$ に関するそれらの条件が緩和できること, 具体的には, 「 $\{\lambda_n\}$ が 0 から離れている」という仮定だけで同様な結論が得られることを述べる。

以下, 4.1 と同様に, E をそのノルムが一様に Gâteaux 微分可能な一様凸 Banach 空間とする。

次の定理は, 本節の主結果である。

定理 4.3 ([11, Theorem 3.1]). $A \subset E \times E$ を値域条件を満たし零点をもつ増大作用素, C を E の空でない閉凸部分集合, $\{\alpha_n\}$ を $(0, 1]$ の数列, $\{\lambda_n\}$ を正の数列とする。さらに, $\sum_n \alpha_n = \infty$, $\lim_n \alpha_n = 0$ および $\inf_n \lambda_n > 0$ を仮定する。 u を C の点, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して (4.3) で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は Qu に強収束する。ここで, Q は C から $A^{-1}0$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

m -増大作用素のリゾルベントは, E から E への写像であるから, 定理 4.3 より直ちに, 次の系が得られる。

系 4.4. $E, \{\alpha_n\}, \{\lambda_n\}$ を定理 4.3 と同じとし, $A \subset E \times E$ を零点をもつ m -増大作用素,

u を E の点とし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in E$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して (4.3) で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は Qu に強収束する。ここで, Q は E から $A^{-1}0$ の上への sunny nonexpansive retraction である。

註 7. 定理 4.1 と系 4.4 を比較すると, $\{\alpha_n\}$ についての仮定は定理 4.1 の方が弱く, $\{\lambda_n\}$ についての仮定は系 4.4 の方が弱い。

系 4.4 を使うと, [33] などで議論されている次のような収束定理が得られる。

系 4.5. $E, A, \{\alpha_n\}, \{\lambda_n\}$ および Q を系 4.4 と同じとする。 u を E の点とし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in E$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = J_{\lambda_n}(\alpha_n u + (1 - \alpha_n)x_n)$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は Qu に強収束する。

証明. $y_n = \alpha_n u + (1 - \alpha_n)x_n$ とおくと, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$y_{n+1} = \alpha_{n+1} u + (1 - \alpha_{n+1})x_{n+1} = \alpha_{n+1} u + (1 - \alpha_{n+1})J_{\lambda_n} y_n$$

となる。よって, 系 4.4 より, $y_n \rightarrow Qu$ である。一方, 仮定より, $x_n - y_n \rightarrow 0$ であるから, $x_n \rightarrow Qu$ が示せた。 \square

系 4.4 のこの他の応用については, [11, Corollary 4.2] を参照されたい。

謝辞

この度「第 62 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム」での講演の機会を与えて頂き感謝申し上げます。特に, 同シンポジウムの委員の先生方および会場責任者の先生方に御礼申し上げます。

参考文献

- [1] K. Aoyama, *Asymptotic fixed points of sequences of quasi-nonexpansive type mappings*, Banach and function spaces III (ISBFS 2009), 2011, pp. 343–350.
- [2] ———, *Viscosity approximation method for quasinonexpansive mappings with contraction-like mappings*, Nihonkai Math. J. **27** (2016), 168–180.

- [3] ———, *Uniformly nonexpansive sequences*, Linear Nonlinear Anal. **3** (2017), 179–187.
- [4] K. Aoyama and Y. Kimura, *Strong convergence theorems for strongly nonexpansive sequences*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 7537–7545.
- [5] K. Aoyama, Y. Kimura, and F. Kohsaka, *Strong convergence theorems for strongly relatively nonexpansive sequences and applications*, J. Nonlinear Anal. Optim. **3** (2012), 67–77.
- [6] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 2350–2360.
- [7] ———, *On a strongly nonexpansive sequence in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 471–489.
- [8] ———, *Strongly nonexpansive sequences and their applications in Banach spaces*, Fixed point theory and its applications, 2008, pp. 1–18.
- [9] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:95, 13.
- [10] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.
- [11] K. Aoyama and M. Toyoda, *Approximation of zeros of accretive operators in a Banach space*, Israel J. Math. **220** (2017), 803–816.
- [12] ———, *Approximation of common fixed points of strongly nonexpansive sequences in a Banach space*, J. Fixed Point Theory Appl. **21** (2019), Art. 35, 16.
- [13] ———, *Approximation of zeros of an accretive operator and fixed points of nonexpansive mappings in a Banach space*, Linear Nonlinear Anal. **6** (2020), 303–313.
- [14] H. Brézis and P.-L. Lions, *Produits infinis de résolvantes*, Israel J. Math. **29** (1978), 329–345.
- [15] R. E. Bruck Jr., *A strongly convergent iterative solution of $0 \in U(x)$ for a maximal monotone operator U in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **48** (1974), 114–126.

- [16] K. Goebel and S. Reich, *Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 83, Marcel Dekker, Inc., New York, 1984.
- [17] O. Güler, *On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization*, SIAM J. Control Optim. **29** (1991), 403–419.
- [18] S. Kamimura, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for maximal monotone operators in a Banach space*, Set-Valued Anal. **12** (2004), 417–429.
- [19] T. Kato, *Nonlinear semigroups and evolution equations*, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 508–520.
- [20] B. Martinet, *Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives*, Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle **4** (1970), 154–158.
- [21] K. Nakajo, K. Shimoji, and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 11–34.
- [22] K. Nakajo, *Strong convergence to zeros of accretive operators in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **7** (2006), 71–81.
- [23] S. Reich, *Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **44** (1973), 57–70.
- [24] ———, *Approximating zeros of accretive operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1975), 381–384.
- [25] ———, *Extension problems for accretive sets in Banach spaces*, J. Functional Analysis **26** (1977), 378–395.
- [26] ———, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.
- [27] ———, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980), 287–292.
- [28] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optimization **14** (1976), 877–898.
- [29] S. Saejung, *Halpern's iteration in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **73** (2010), 3431–3439.

- [30] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000. Fixed point theory and its applications.
- [31] ———, *Introduction to nonlinear and convex analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.
- [32] W. Takahashi and Y. Ueda, *On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators*, J. Math. Anal. Appl. **104** (1984), 546–553.
- [33] H.-K. Xu, *A regularization method for the proximal point algorithm*, J. Global Optim. **36** (2006), 115–125.
- [34] 高橋渉, 非線形関数解析学 - 不動点定理とその周辺 (現代数学ゼミナール), 近代科学社, 1988.
- [35] 青山耕治, 強非拡大写像列について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1667** (2009), 28–38.
- [36] ———, 強非拡大性をもつ写像列の不動点近似について, 京都大学数理解析研究所講究録 **2250** (2023).

関数空間上の等距離写像と関連する問題

三浦 毅 (新潟大学) *

1 背景

$(M, \|\cdot\|_M), (N, \|\cdot\|_N)$ を実または複素ノルム空間とする. 写像 $T: M \rightarrow N$ が

$$\|T(f) - T(g)\|_N = \|f - g\|_M \quad (\forall f, g \in M)$$

をみたすとき, T を (M から N への) 等距離写像という. 特に $N = M$ であるとき, T を M 上の等距離写像という. 上記の意味で距離を変えない写像 T で, さらに「線形」なものを等距離写像と呼ぶ方が一般的かも知れないが, この講演においては「線形性を仮定せず」に等距離写像を考察することにご注意いただきたい. もしも $T: M \rightarrow N$ が「線形」な等距離写像であれば, T は次の意味でノルムを保存する: $\|T(f)\|_N = \|f\|_M$ ($\forall f \in M$). しかし線形とは限らない等距離写像は, ノルムを保存するとは限らない.

$C_{\mathbb{R}}(K)$ によりコンパクト Hausdorff 空間 K 上の実数値連続関数全体を表す. このとき $C_{\mathbb{R}}(K)$ は $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in K} |f(x)|$ をそのノルムとして Banach 空間となる. 1932 年に Banach [1, Theorem 3 in Chapter XI] は, $C_{\mathbb{R}}(X)$ から $C_{\mathbb{R}}(Y)$ への全射等距離写像を特徴付けた. ここで X, Y はともにコンパクト距離空間である. この結果において Banach は「線形性」を仮定していないが, 線形性が (本質的に) 導かれることを示している. より一般には, Mazur and Ulam [15] による次の結果が知られている.

定理 (Mazur and Ulam [15]). M, N を実または複素ノルム空間とする. $T: M \rightarrow N$ が全射等距離写像ならば, T はアフィンである. つまり $T - T(0): M \rightarrow N$ は実線形である.

Stone [22] は Banach [1] の定理における「 X, Y の距離付け可能性」を仮定せずに, 任意のコンパクト Hausdorff 空間 X, Y に対して類似の結果が成り立つことを示した. ここでも Stone は等距離写像の「線形性」を仮定せずに $C_{\mathbb{R}}(X)$ から $C_{\mathbb{R}}(Y)$ への全射等距離写像を特徴付けているが, 次の主張を “The Banach–Stone Theorem” として引用する研究者は少なくない ([8, Theorem 8 in Chapter V] 参照). ここで $C(X)$ により, コンパクト Hausdorff 空間 X 上で定義された複素数値連続関数全体のなす Banach 空間を表す. また, 以下では \mathbb{T} により複素平面の単位円周 $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ を表す.

定理 (The Banach–Stone Theorem). 全射複素線形等距離写像 $T: C(X) \rightarrow C(Y)$ に対して, 連続関数

* 本研究は JSPS 科研費 JP20K03650 の助成を受けたものである.

$u: Y \rightarrow \mathbb{T}$ と同相写像 $\phi: Y \rightarrow X$ が存在して

$$T(f)(y) = u(y)f(\phi(y)) \quad (\forall f \in C(Y))$$

が成り立つ.

The Banach–Stone Theorem では, 等距離写像 T の「全射性」を仮定している. したがって Mazur–Ulam の定理より $T - Tf(0)$ は「実線形」となる. それにも関わらず T の「複素線形性」を仮定することは, あまりにも不自然に感じられる. 一方で「全射でない」等距離写像は, 線形とは程遠いことを表す具体例も知られている.

例 1. \mathbb{R} を絶対値 $|\cdot|$ を距離とする距離空間とし, \mathbb{R}^2 を $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ を距離とする距離空間とする. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $T(x) = (x, \sin x)$, ($x \in \mathbb{R}$) により定義する. このとき

$$\|T(x) - T(y)\| = \max\{|x - y|, |\sin x - \sin y|\} = |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

が成り立つので, $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ は等距離写像である. 一方で T は全射でもアフィンでもないことが分かる.

The Banach–Stone Theorem は, 連続関数のなす Banach 空間 $C(X), C(Y)$ の間の全射複素線形等距離写像の構造が解明されている. 等距離写像が底空間 X, Y の同相写像を誘導することは特筆すべき現象である. 実際 The Banach–Stone Theorem は, Banach 空間 $C(X), C(Y)$ の距離構造が保存されれば, X, Y の位相構造も保存されなければならないことを主張している. つまり Banach 空間 $C(K)$ の距離構造は, K の位相構造よりも強い, と言うことができる. このように Banach 空間の間の等距離写像を調べることにより, Banach 空間が有する構造が他の構造にどのように影響を及ぼすのかを知ることができる. そのため, 等距離写像の研究は連続関数空間だけでなく, 様々な Banach 空間に対して行われている.

2 正則関数のなす Banach 空間上の全射等距離写像

正則関数の研究は, それ自身興味深いものであるが, 正則関数のなす Banach 空間上の等距離写像の研究も活発に行われている. その一例として, Hardy 空間上の等距離写像の研究結果を紹介したい. \mathbb{D} を複素平面の単位開円板とし, $H(\mathbb{D})$ を \mathbb{D} 上の正則関数全体のなす複素線形空間とする. Hardy 空間 H^p は次で定義される:

$$H^p = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_p = \sup_{0 < r < 1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right]^{1/p} < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$H^\infty = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty \right\}.$$

1960 年に deLeeuw, Rudin and Wermer は, Hardy 空間 H^1 及び H^∞ 上の全射複素線形等距離写像の構造を決定している.

定理 (deLeeuw, Rudin and Wermer [7]). (i) T が $(H^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 上の全射複素線形等距離写像とする. このとき $\alpha \in \mathbb{T}$ および等角写像 $\phi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ が存在して, 任意の $f \in H^\infty$ と $z \in \mathbb{D}$ に対して

$$T(f)(z) = \alpha f(\phi(z))$$

が成り立つ. 逆に, 上の形で与えられる T は, H^∞ 上の全射複素線形等距離写像である.

(ii) T を $(H^1, \|\cdot\|_1)$ 上の全射複素線形等距離写像とする. このとき $\alpha \in \mathbb{T}$ および等角写像 $\phi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ が存在して, 任意の $f \in H^1$ と $z \in \mathbb{D}$ に対して

$$T(f)(z) = \alpha \phi'(z) f(\phi(z))$$

が成り立つ. 逆に, 上の形で与えられる T は, H^1 上の全射複素線形等距離写像である.

注意 1. X をコンパクト Hausdorff 空間とし, $C(X)$ を X 上で定義された複素数値連続関数全体のなす可換 Banach 環とする: ここで可換 Banach 環をおおまかに述べると, Banach 空間に可換な積が定義され, さらにすべての要素 f, g に対してノルム $\|\cdot\|$ が $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$ をみたすもの, と言うことができる. $C(X)$ の閉部分多元環 A が定数関数 1 を含み, 異なる任意の 2 点 $x, y \in X$ に対して $f(x) \neq f(y)$ をみたす $f \in A$ が存在するとき, A を X 上の関数環という. H^∞ は, Gelfand 変換を通して, 極大イデアル空間上の関数環と同一視することができる. したがって, deLeeuw, Rudin and Wermer [7] の H^∞ 上の全射複素線形等距離写像に関する結果は, 1959 年に Nagasawa [20] が示した, 関数環上の全射複素線形等距離写像を完全に決定した定理の特別な場合, ということができる.

$1 \leq p < \infty, p \neq 2$ のとき, H^p 上の複素線形等距離写像は, 1964 年に Forelli によって決定されている. Forelli [10] は全射性を仮定せずに, H^p 上の複素線形等距離写像の構造を解明しているが, ここでは特に全射の場合の結果について言及する.

定理 (Forelli [10]). p を $1 \leq p < \infty, p \neq 2$ をみたす実数とし, T を $(H^p, \|\cdot\|_p)$ 上の全射複素線形等距離写像とする. このとき $\alpha \in \mathbb{T}$ および等角写像 $\phi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ が存在して, 任意の $f \in H^p$ と $z \in \mathbb{D}$ に対して

$$T(f)(z) = \alpha (\phi'(z))^{1/p} f(\phi(z))$$

が成り立つ. 逆に, 上の形で与えられる T は, H^p 上の複素線形等距離写像である.

$H(\mathbb{D})$ の関数 f に対して, その導関数 f' が Hardy 空間 H^1 に属するとき, たとえば Duren [9, Theorem 3.11] により, f は単位閉円板 \mathbb{D} に連続的に拡張可能であることが知られている. したがって, このような f に対しては $\|f\|_\infty$ は well defined である. 1985 年に Novinger and Oberlin [21] は, $H(\mathbb{D})$ の部分空間

$$\mathcal{S}^p = \{f \in H(\mathbb{D}) : f' \in H^p\} \quad (1 \leq p < \infty)$$

に対して, 次のノルムに関する Banach 空間 $(\mathcal{S}^p, \|\cdot\|_\sigma)$ と $(\mathcal{S}^p, \|\cdot\|_\Sigma)$ 上の複素線形等距離写像の構造を決定した:

$$\|f\|_\sigma = |f(0)| + \|f'\|_p, \quad \|f\|_\Sigma = \|f\|_\infty + \|f'\|_p \quad (f \in \mathcal{S}^p).$$

Novinger and Oberlin [21] は全射性を仮定せずに複素線形等距離写像を決定しているが、ここでも全射の場合について述べることにする。

定理 (Novinger and Oberlin [21]). p を $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$ をみたす実数とする。

- (i) T が $(S^p, \|\cdot\|_\sigma)$ 上の全射複素線形等距離写像ならば, $c \in \mathbb{T}$ 及び等角写像 $\phi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ が存在して, 任意の $f \in S^p$ と $z \in \mathbb{D}$ に対して

$$T(f)(z) = cf(0) + \int_{[0,z]} (\phi'(\zeta))^{1/p} f'(\phi(\zeta)) d\zeta$$

が成り立つ. ここで $[0, z]$ は 2 点 $0, z$ を結ぶ直線である. 逆に, 上の形で与えられる T は $(S^p, \|\cdot\|_\sigma)$ 上の全射複素線形等距離写像である.

- (ii) T が $(S^p, \|\cdot\|_\Sigma)$ 上の全射複素線形等距離写像ならば $c \in \mathbb{T}$ 及び等角写像 $\phi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ が存在して, 任意の $f \in S^p$ と $z \in \mathbb{D}$ に対して

$$T(f)(z) = cf(\phi(z))$$

が成り立つ. 逆に, 上の形の T は $(S^p, \|\cdot\|_\Sigma)$ 上の全射複素線形等距離写像である.

Novinger and Oberlin [21] の定理では, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$ をみたす実数 p に対して S^p が定義され, $(S^p, \|\cdot\|_\sigma)$ および $(S^p, \|\cdot\|_\Sigma)$ 上の複素線形等距離写像が決定されている. しかしながら S^∞ も自然に定義され, $(S^\infty, \|\cdot\|_\sigma)$ および $(S^\infty, \|\cdot\|_\Sigma)$ も Banach 空間となることから, 次の問題は自然に思われる.

問題. $S^\infty = \{f \in H(\mathbb{D}) : f' \in H^\infty\}$ と定める. $(S^\infty, \|\cdot\|_\sigma)$ および $(S^\infty, \|\cdot\|_\Sigma)$ 上の複素線形等距離写像を決定せよ.

この問題に対して, 等距離写像に全射性を仮定することで, 部分的回答が得られた. ただし Novinger and Oberlin [21] と異なり, 等距離写像の複素線形性は仮定しない. 以下でその結果と証明の概略について述べる.

3 S^∞ 上の全射等距離写像

以下では $S^\infty = \{f \in H(\mathbb{D}) : f' \in H^\infty\}$ とする. このとき S^∞ は $H(\mathbb{D})$ の複素線形部分空間となる. $f \in S^\infty$ に対して

$$\|f\|_\sigma = |f(0)| + \|f'\|_\infty, \quad \|f\|_C = \sup_{z \in \mathbb{D}} (|f(z)| + |f'(z)|), \quad \|f\|_\Sigma = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

と定める. ここで $g \in H(\mathbb{D})$ に対して $\|g\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |g(z)|$ である. Novinger and Oberlin [21] は $\|\cdot\|_\sigma$ および $\|\cdot\|_\Sigma$ に関する S^p 上の等距離写像を考察した. 一方で Cambern [4] は, 閉区間 $[0, 1]$ 上の連続微分可能な複素関数の全体 $C^1([0, 1])$ に対して, $\|\cdot\|_C$ に関する全射複素線形等距離写像を決定している. $\|\cdot\|_C$ と $\|\cdot\|_\Sigma$ は非常に似た形で定義されているが, その微妙な違いが等距離写像にどのような違いを与えるか, に興味があり, S^∞ 上の等距離写像において考察した. その結果, S^∞ 上の全射等距離写像について以下の結果が得られた.

定理 1 (M. and Niwa [17]). T を $(\mathcal{S}^\infty, \|\cdot\|_\sigma)$ 上の全射等距離写像とする. このとき $c_0, c_1, \lambda \in \mathbb{T}$ 及び $a \in \mathbb{D}$ が存在して, 次のいずれかひとつが成り立つ.

$$T(f)(z) = T(0)(z) + c_0 f(0) + \int_{[0,z]} c_1 f' \left(\lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}\zeta} \right) d\zeta \quad (\forall f \in \mathcal{S}^\infty, z \in \mathbb{D}) \quad \text{or}$$

$$T(f)(z) = T(0)(z) + c_0 \overline{f(0)} + \int_{[0,z]} c_1 f' \left(\lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}\zeta} \right) d\zeta \quad (\forall f \in \mathcal{S}^\infty, z \in \mathbb{D}) \quad \text{or}$$

$$T(f)(z) = T(0)(z) + c_0 f(0) + \int_{[0,z]} c_1 \overline{f' \left(\lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}\zeta} \right)} d\zeta \quad (\forall f \in \mathcal{S}^\infty, z \in \mathbb{D}) \quad \text{or}$$

$$T(f)(z) = T(0)(z) + c_0 \overline{f(0)} + \int_{[0,z]} c_1 \overline{f' \left(\lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}\zeta} \right)} d\zeta \quad (\forall f \in \mathcal{S}^\infty, z \in \mathbb{D})$$

逆に, 上の形で与えられる T は, $(\mathcal{S}^\infty, \|\cdot\|_\sigma)$ 上の全射等距離写像である.

定理 2 (M. and Niwa [17]). T を $(\mathcal{S}^\infty, \|\cdot\|_\Sigma)$ あるいは $(\mathcal{S}^\infty, \|\cdot\|_C)$ 上の全射等距離写像とする. このとき $c, \lambda \in \mathbb{T}$ が存在して, 次のいずれか一方が成り立つ.

$$T(f)(z) = T(0)(z) + cf(\lambda z) \quad (\forall f \in \mathcal{S}^\infty, z \in \mathbb{D}) \quad \text{or}$$

$$T(f)(z) = T(0)(z) + \overline{cf(\bar{\lambda}z)} \quad (\forall f \in \mathcal{S}^\infty, z \in \mathbb{D})$$

逆に, 上の形で与えられる T は, $(\mathcal{S}^\infty, \|\cdot\|_\Sigma)$ および $(\mathcal{S}^\infty, \|\cdot\|_C)$ 上の全射等距離写像である.

証明の概略. 定理 1, 2 の証明のアイディアは本質的に同じである. 詳細は [17] をご覧いただきたい. まず Mazur-Ulam の定理 [15] より, $T - T(0)$ は全射実線形等距離写像となる. $f' \in H^\infty$ のゲルファント変換を \hat{f}' で表し, ∂_{H^∞} を H^∞ のシロフ境界とする. $f \in \mathcal{S}^\infty$ は \mathbb{D} 上に連続的に拡張可能であり, その拡張は一意的である. 関数 $f \in \mathcal{S}^\infty$ の \mathbb{D} への連続拡張も f で表す. このとき次が成り立つことが示される.

$$\begin{aligned} \|f\|_\Sigma &= \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| + \sup_{\zeta \in \mathbb{D}} |f'(\zeta)| = \sup_{z \in \mathbb{T}} |f(z)| + \sup_{\zeta \in \partial_{H^\infty}} |\hat{f}'(\zeta)| \\ &= \sup_{(z,w,\zeta) \in \mathbb{T}^2 \times \partial_{H^\infty}} |f(z) + w\hat{f}'(\zeta)|. \end{aligned}$$

そこで $U: \mathcal{S}^\infty \rightarrow C(\mathbb{T}^2 \times \partial_{H^\infty})$ を

$$U(f)(z, w, \zeta) = f(z) + w\hat{f}'(\zeta) \quad (\forall f \in \mathcal{S}^\infty, (z, w, \zeta) \in \mathbb{T}^2 \times \partial_{H^\infty})$$

により定め, $B = U(\mathcal{S}^\infty)$ とおけば, U を \mathcal{S}^∞ から B への全射複素線形等距離写像とみなせる. このようにして $(\mathcal{S}^\infty, \|\cdot\|_\Sigma)$ を $(C(\mathbb{T}^2 \times \partial_{H^\infty}), \|\cdot\|_\infty)$ に埋め込むことが出来る. 同様の議論により, $(\mathcal{S}^\infty, \|\cdot\|_\sigma)$ は $(C(\{0\} \times \mathbb{T} \times \partial_{H^\infty}), \|\cdot\|_\infty)$ に埋め込まれることが示される. 一方で $(\mathcal{S}^\infty, \|\cdot\|_C)$ は $(C(\mathcal{D} \times \mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ に埋め込まれる. ただし $\mathcal{D} = \{(\zeta, \zeta) : \zeta \in \partial_{H^\infty}\}$ である (このことを示すためには, 若干の議論が必要である). 以上により, コンパクト Hausdorff 空間 X が存在して, \mathcal{S}^∞ は $C(X)$ に埋め込まれることが示された.

$V = UTU^{-1}$ とおけば, V は B 上の全射実線形等距離写像となる. $\text{ext}(B_1^*)$ を B の双対空間 B^* の閉単位球 B_1^* の端点全体の集合とする. Banach–Stone の定理の証明に端点を決定する方法が知られているが, 実線形等距離写像に対してもそれと類似の手法を適用することが出来る. 筆者には $\text{ext}(B_1^*)$ を完全に決定することは出来ていないが, 筑波大学の川村一宏先生のアイデアを用いることで次を示すことが出来た.

$$V_*(\{\lambda\delta_x : \lambda \in \mathbb{T}, x \in X\}) = \{\lambda\delta_x : \lambda \in \mathbb{T}, x \in X\} \quad (1)$$

ただし $V_*: B^* \rightarrow B^*$ は

$$V_*(\eta)(a) = \text{Re } \eta(V(a)) - i\text{Re } \eta(V(ia)) \quad (\forall \eta \in B^*, a \in B)$$

により定められる全射実線形等距離写像であり, $\delta_x: B \rightarrow \mathbb{C}$ は $\delta_x(g) = g(x)$ ($g \in B$) により定まる点値汎関数である. (1) により V は荷重合成作用素とその複素共役により表示されることが分かる. $T = U^{-1}VU$ なので T の形は定まるが, そこには変換 U を用いることにより導入された変数 w, ζ などが含まれる. これらは T の形には本来影響を及ぼさないはずであるから, これらの変数は除去出来ることが期待される. 実際それが可能であり, その結果として定理 2 の表示を得る. 定理 1 の表示を得るために, 関数環上の全射実線形等距離写像の構造定理 [13] を用いている. \square

4 Tingley 問題および Mazur–Ulam property

1987 年に Tingley [25] は, 等距離写像に関する次の問題を提起した.

問題. A, B を Banach 空間とし, S_A, S_B をそれぞれ A, B の単位球面とする. 任意の全射等距離写像 $\Delta: S_A \rightarrow S_B$ に対して, $T|_{S_A} = \Delta$ をみたす全射等距離写像 $T: A \rightarrow B$ が存在するか.

この問題は Tingley 問題と呼ばれ現在でも活発な研究がなされているが, 完全な解決はなされていない (少なくとも, 講演者は完全解決されたことを知らない). 実際, 2次元の Banach 空間に対する Tingley 問題は, 2022 年に Banach [2] によって肯定的に解かれたが, 3次元以上の Banach 空間に対する Tingley 問題は, 肯定的な結果も反例も知られていないようである.

具体的な Banach 空間に対する Tingley 問題は, 数多くの肯定的結果が知られている. Tingley 問題に関する一般的な結果も含め, この問題に対する日本人数学者の貢献は重要であり, Hatori [12], Hatori, Oi and Shindo Togashi [14], Mori [18], Tanaka [23, 24] などが知られている.

定義 1. X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし, $C_0(X)$ により X 上で定義された複素数値連続関数で無限遠点で 0 になるもの全体を表す. このとき $C_0(X)$ は通常の各点での演算と最大値ノルム $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ ($f \in C_0(X)$) によって可換 Banach 環となる. A を $C_0(X)$ の閉部分多元環とする. A の関数は X に共通零点をもたず, 任意の異なる点 $x, y \in X$ に対して $f(x) \neq f(y)$ をみたす $f \in A$ が存在するとき, A を **uniformly closed function algebra on X** と呼ぶ.

- 例 2.** (i) X をコンパクト Hausdorff 空間とする. $C(X)$ は uniformly closed function algebra on X である. より一般に, X 上の関数環は定数関数 1 を含む uniformly closed function algebra on X である.
- (ii) \mathbb{D} を複素平面の単位開円板とし, $\overline{\mathbb{D}}$ を \mathbb{D} の閉包とする. $C(\overline{\mathbb{D}})$ の関数で, \mathbb{D} 上で正則なものの全体を $A(\overline{\mathbb{D}})$ とする. このとき $A(\overline{\mathbb{D}})$ は $\overline{\mathbb{D}}$ 上の関数環である.
- (iii) $B = \{f|_{\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}} : f \in A(\overline{\mathbb{D}}) \text{ with } f(0) = 0\}$ は局所コンパクト Hausdorff 空間 $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$ 上の uniformly closed function algebra である. このとき B は定数関数 1 をもたないので, 関数環ではない.

2021 年に Hatori, Oi and Shindo Togashi [14] は, 関数環に対する Tingley 問題を考察し, それを肯定的に解決した. それとほぼ同時期かつ独立に, 講演者は Wang [27] の手法をもとにした証明方法により, uniformly closed function algebras に対する Tingley 問題が肯定的であることを示した.

定理 3 (Cueto-Avellaneda, Hirota, M. and Peralta [5]). A, B をそれぞれ局所コンパクト Hausdorff 空間 X, Y 上の uniformly closed function algebras とする. このとき A, B に対して Tingley 問題は肯定的である. つまり S_A, S_B を A, B の単位球面とすると, 任意の全射等距離写像 $\Delta: S_A \rightarrow S_B$ に対して, $T|_{S_A} = \Delta$ をみたす全射実線形等距離写像 $T: A \rightarrow B$ が存在する.

Hatori, Oi and Shindo Togashi [14] は関数環の単位球面の極大凸集合の性質から Tingley 問題に取り組んでいるのに対して, 定理 3 の証明には極大凸集合が表面的には用いられていない. この意味で定理 3 の証明方法は初等的で理解しやすいが, 洗練されているとは言えない. しかしながら, uniformly closed function algebras は関数環を真に含むことから, 定理 3 は [14] の拡張となっている. 特に関数環における定数関数 1 の存在は uniformly closed function algebras と決定的に異なり, この違いだけで問題の困難さが大きく変わることがある.

Uniformly closed function algebras は積の構造をもつ. 積は非常に強い情報を与えることがあるが, Tingley 問題に関して言えば, uniformly closed function algebras の積は本質的ではないことが期待できる. そこで積の構造をもつとは限らない uniformly closed function algebras の類似物が必要となる. それが以下で定義される extremely C-regular spaces である.

定義 2. X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ とする. $C_0(X, \mathbb{K})$ により X 上で定義され \mathbb{K} に値をとる連続関数で無限遠点において 0 になるものの全体を表す. $C_0(X, \mathbb{C})$ を単に $C_0(X)$ と書く. $C_0(X, \mathbb{K})$ は各点での演算と最大値ノルム $\|\cdot\|_\infty$ によって \mathbb{K} 上の Banach 空間となる. $C_0(X, \mathbb{K})$ の閉部分空間 A が **extremely C-regular** であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ と任意の $x_0 \in \text{Ch}(A)$ および x_0 の任意の開近傍 $O \subset X$ に対して, $f(x_0) = 1 = \|f\|_\infty$ かつ任意の $x \in X \setminus O$ に対して $|f(x)| < \epsilon$ をみたす $f \in A$ が存在することである. ここで $\text{Ch}(A)$ は A の Choquet 境界である: $x \in X$ が $\text{Ch}(A)$ に属するとは, $\delta_x(f) = f(x)$ ($f \in A$) により定義される有界線形汎関数 $\delta_x: A \rightarrow \mathbb{K}$ が, A の双対空間の閉単位球の端点に属することである.

Extremely C-regular spaces に対する Tingley 問題は, 後に述べるように, さらに強い形で肯定的に解決されている. ここでは extremely C-regular spaces に付随する Banach 空間に対する Tingley 問題に関する結

果を述べる.

定理 4 (Cabezas, Cueto-Avellande, Enami, M. and Peralta [3]). X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし, B を $C_0(X)$ の extremely C-regular subspace A と \mathbb{C} の ℓ^1 直和空間とする. つまり

$$B = \{(f, z) : f \in A, z \in \mathbb{C}\}, \quad \|(f, z)\|_B = \|f\|_\infty + |z| \quad ((f, z) \in B)$$

である. B の単位球面を S_B とする. このとき任意の全射等距離写像 $\Delta: S_B \rightarrow S_B$ に対して $T|_{S_B} = \Delta$ をみたす全射実線形等距離写像 $T: B \rightarrow B$ が存在する.

定理 4 では, extremely C-regular space A と \mathbb{C} の ℓ^1 直和である Banach 空間 B に対する Tingley 問題を肯定的に解決した. この空間 B は extremely C-regular space A と本質的に変わらないように見えるかも知れないが, 極めて重要な Banach 空間を含んでいる.

例 3. 次の Banach 空間は, 定理 4 の条件をみたす Banach 空間と等距離同型である.

- (i) $B = S^\infty$ とおき, $c \in \mathbb{D}$ を任意に固定し, $\|f\|_B = \|f'\|_\infty + |f(c)|$ とする.
- (ii) A を円板環とする. つまり A は $H(\mathbb{D})$ の関数で, さらに単位閉円板 \mathbb{D} まで連続的に拡張可能なもの全体である. $B = \{f \in H(\mathbb{D}) : f' \in A\}$ とおき, 任意に固定した $c \in \mathbb{D}$ に対して $\|f\|_B = \|f'\|_\infty + |f(c)|$ とする.
- (iii) 単位閉区間 $[0, 1]$ 上の複素数値 Lipschitz 連続関数の全体を B とし, $L(f)$ を $f \in B$ の Lipschitz 定数とする. $c \in [0, 1]$ を任意に固定し $\|f\|_B = L(f) + |f(c)|$ とする.
- (iv) $[0, 1]$ 上で定義された連続微分可能な複素数値関数全体を B とする. 任意に $c \in [0, 1]$ を取り固定し, $\|f\|_B = \|f'\|_\infty + |f(c)|$ とする.

Tingley 問題に関連して, Mazur-Ulam property と呼ばれる概念が Cheng and Dong [6] により導入され, 現在では Tingley 問題と同等またはそれ以上に活発な研究がなされている.

定義 3. 実 Banach 空間 B が **Mazur-Ulam property** を有するとは, 任意の実 Banach 空間 E と任意の全射等距離写像 $\Delta: S_B \rightarrow S_E$ に対して, $T|_{S_B} = \Delta$ をみたす全射実線形等距離写像 $T: B \rightarrow E$ が存在することである.

Hatori [11] は Mazur-Ulam property を精密化し, complex Mazur-Ulam property の概念を導入した. これらの概念は混同され用いられてきたようであるが, Hatori による complex Mazur-Ulam property の導入により明確に区別されることとなった.

定義 4. 複素 Banach 空間 B が **complex Mazur-Ulam property** を有するとは, 任意の複素 Banach 空間 E と任意の全射等距離写像 $\Delta: S_B \rightarrow S_E$ に対して, $T|_{S_B} = \Delta$ をみたす全射実線形等距離写像 $T: B \rightarrow E$ が存在することである.

複素 Banach 空間を実 Banach 空間とみなして Mazur-Ulam property を有することが示されれば, complex

Mazur-Ulam property を有することは自明である。しかし complex Mazur-Ulam property を有する複素 Banach 空間を実 Banach 空間とみなし、Mazur-Ulam property を有するのかを講演者は知らない。

2022 年に Hatori [11] は関数環は complex Mazur-Ulam property を有することを示した。[11] では複素 Banach 空間が complex Mazur-Ulam property を有するための十分条件が与えられ、関数環はその条件をみたすことが示されている。[3] では、定理 4 の条件をみたす Banach 空間は、 $A = \mathbb{C}$ の場合を除けば、[11] で与えられた十分条件の一つをみたさないことが示されている。

2020 年に Mori and Ozawa [19] は、単位的 C^* -環は Mazur-Ulam property を有することを示している。Wang and Liu [26] は 2022 年に、局所コンパクト Hausdorff 空間 X に対して $C_0(X, \mathbb{C})$ は complex Mazur-Ulam property を有することを示した。2023 年に Hatori [12] は、 $C_0(X, \mathbb{R})$ の extremely C -regular subspace A は Mazur-Ulam property を有することと、 $C_0(X, \mathbb{C})$ の \mathbb{C} -linear, extremely C -regular subspace A は complex Mazur-Ulam property を有することを示した。[16] では上記定理の比較的短く初等的証明が与えられている。

定理 5 (Hatori [12], M. [16]). $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ とし、 X を局所コンパクト Hausdorff 空間とする。 A を \mathbb{K} 上の Banach 空間 $C_0(X, \mathbb{K})$ の extremely C -regular subspace とし、 E を \mathbb{K} 上の Banach 空間とする。 S_A, S_E をそれぞれ A, E の単位球面とすると、任意の全射等距離写像 $\Delta: S_A \rightarrow S_E$ に対して、 $T|_{S_A} = \Delta$ をみたす全射実線形等距離写像 $T: A \rightarrow E$ が存在する。

問題. $C_0(X, \mathbb{C})$ の extremely C -regular, \mathbb{R} -linear subspace は Mazur-Ulam property を有するか。

参考文献

- [1] S. Banach, Theory of linear operations, Translated by F. Jellet, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2009.
- [2] T. Banach, *Every 2-dimensional Banach space has the Mazur–Ulam property*, Linear Algebra Appl. **632** (2022), 268–280.
- [3] D. Cabezas, M. Cueto-Avellaneda, Y. Enami, T. Miura and A.M. Peralta, *Tingley’s problem for complex Banach spaces which do not satisfy the Hausdorff distance condition*, to appear.
- [4] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math. **25** (1964-1965), 217–225.
- [5] M. Cueto-Avellaneda, D. Hirota, T. Miura and A.M. Peralta, *Exploring new solutions to Tingley’s problem for function algebras*, Quaest. Math. **46** (2023), 1315–1346.
- [6] L. Cheng and Y. Dong, *On a generalized Mazur-Ulam question: extension of isometries between unit spheres of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **377** (2011), 464–470.
- [7] K. deLeeuw, W. Rudin and J. Wermer, *The isometries of some function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 694–698.
- [8] N. Dunford and J.T. Schwartz, Linear Operators. Part I, A Wiley-Interscience Publication. John

- Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.
- [9] P.L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 38 Academic Press, New York-London, 1970.
 - [10] F. Forelli, *The isometries of H^p* , *Canad. J. Math.* **16** (1964), 721–728.
 - [11] O. Hatori, *The Mazur-Ulam property for uniform algebras*, *Studia Math.* **265** (2022), 227–239.
 - [12] O. Hatori, *The Mazur-Ulam property for a Banach space which satisfies a separation condition*, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B93** (2023), 29–82.
 - [13] O. Hatori and T. Miura, *Real linear isometries between function algebras. II*, *Cent. Eur. J. Math.* **11** (2013), 1838–1842.
 - [14] O. Hatori, S. Oi and R. Shindo Togashi, *Tingley’s problems on uniform algebras*, *J. Math. Anal. Appl.* **503** (2021), 125346.
 - [15] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformations isométriques d’espaces vectoriels normés*, *C. R. Acad. Sci. Paris* **194** (1932), 946–948.
 - [16] T. Miura, *A proof of the complex Mazur-Ulam property for extremely C -regular subspace of $C_0(X)$* , preprint.
 - [17] T. Miura and N. Niwa, *Surjective isometries on a Banach space of analytic functions with bounded derivatives*, *Acta Sci. Math.* **89** (2023), 109–145.
 - [18] M. Mori, *Tingley’s problem through the facial structure of operator algebras*, *J. Math. Anal. Appl.* **466** (2018), 1281–1298.
 - [19] M. Mori and N. Ozawa, *Mankiewicz’s theorem and the Mazur-Ulam property for C^* -algebras*, *Studia Math.* **250** (2020), 265–281.
 - [20] M. Nagasawa, *Isomorphisms between commutative Banach algebras with an application to rings of analytic functions*, *Kôdai Math. Sem. Rep.* **11** (1959), 182–188.
 - [21] W.P. Novinger and D.M. Oberlin, *Linear isometries of some normed spaces of analytic functions*, *Canad. J. Math.* **37** (1985), 62–74.
 - [22] M.H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **41** (1937), 375–481.
 - [23] R. Tanaka, *A further property of spherical isometries*, *Bull. Aust. Math. Soc.* **90** (2014), 304–310.
 - [24] R. Tanaka, *The solution of Tingley’s problem for the operator norm unit sphere of complex $n \times n$ matrices*, *Linear Algebra Appl.* **494** (2016), 274–285.
 - [25] D. Tingley, *Isometries of the unit sphere*, *Geom. Dedicata* **22** (1987), 371–378.
 - [26] R. Wang and Y. Niu, *The Mazur-Ulam property for abelian C^* -algebras*, *Studia Math.* **266** (2) (2022), 193–207.
 - [27] R.S. Wang, *Isometries between the unit spheres of $C_0(\Omega)$ type spaces*, *Acta Math. Sci. (English Ed.)* **14**, no. 1 (1994), 82–89.

The Reciprocal Kirchberg Algebras

Taro Sogabe

July 7, 2023

1 Introduction

1.1 C*-algebras

Let H be (infinite dimensional) separable Hilbert space, and let $\mathbb{B}(H)$ be the algebra consisting of all bounded linear operators acting on H . The C*-algebras are the subalgebras of $\mathbb{B}(H)$ which are closed under the operator norm topology and taking the adjoint, and the easy examples of C*-algebras are the algebra of compact operators:

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) := \mathbb{B}(\mathbb{C}^n), \quad \mathbb{K} := \{x \in \mathbb{B}(H) \mid x : H \rightarrow H \text{ compact operator}\}.$$

Another example is the algebra of continuous functions

$$C(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ continuous}\},$$

where X is a compact Hausdorff space. For a base point $* \in X$, we write

$$C_0(X, *) := \{f \in C(X) \mid f(*) = 0\}.$$

For 1-dimensional sphere $X = S^1$ (i.e, the circle), we write $S := C_0(S^1, *) = C_0(0, 1)$ and one has $C_0(S^i, *) \cong S^{\otimes i}$ for the i -dimensional sphere. The tensor product $C(X) \otimes A$ is identified with the algebra $C(X, A)$ of A -valued function on X . If X is a finite set $\{1, 2, \dots, n\}$, one can understand $C(X)$ as a diagonal subalgebra of the $n \times n$ matrix algebra:

$$C(X) = \mathbb{C}^{\oplus n} \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{C}).$$

To understand the structure of a C*-algebra, some special elements, which are called projections, unitaries and partial isometries, are often important. For the algebra $\mathbb{B}(H)$, a projection $p \in \mathbb{B}(H)$ corresponds to the orthogonal projection $p : H \rightarrow \text{Im}(p)$ onto the closed subspace $\text{Im}(p) \subset H$ (i.e., the bounded linear operator p satisfying $p = p^* = p^2$). The partial isometry $v \in \mathbb{B}(H)$ is the operator $v : H \rightarrow H$ such that vv^* and v^*v are projections, and if $vv^* = v^*v = \text{id}_H$ (i.e., $v : H \rightarrow H$ is a unitary operator), v is called a unitary.

Here are examples of C*-algebras generated by isometries satisfying some relations:

$$\mathcal{O}_{n+1} := C^*\{S_1, \dots, S_n \mid S_i^* S_j = \delta_{i,j} \text{id}, S_1 S_1^* + \dots + S_{n+1} S_{n+1}^* = \text{id}\},$$

$$\mathcal{O}_\infty := C^*\{S_1, S_2, S_3, \dots \mid S_i^* S_j = \delta_{i,j} \text{id}\}.$$

The above algebras are called the Cuntz algebras which are very important examples of simple classifiable C*-algebras. The word “classifiable C*-algebras” means a certain class of C*-algebras for which one has nice invariants to classify them, and the most major invariants are now called K-groups and KK-groups.

1.2 K-groups of C*-algebras

In homotopy theory, one has a cohomology theory $H^*(X, \mathbb{Z})$ which gives a tool to understand topological space X algebraically, and K-theory provides a similar tool to understand C*-algebras.

The K-theory is a functor from the category of C*-algebras to category of Abel groups. In other words, for two C*-algebras A, B and a *-homomorphism $A \xrightarrow{\varphi} B$, one obtains a morphisms between following Abel groups

$$K_0(A) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(B), \quad K_1(A) \xrightarrow{K_1(\varphi)} K_1(B).$$

The group $K_0(A)$ (resp. $K_1(A)$) can be understood as a group of certain equivalence classes of the projections (resp. unitaries) of A or $A \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C}), A \otimes \mathbb{K}$. More generally, i-th K-group is defined by $K_i(A) := K_0(S^{\otimes i} \otimes A)$ and the Bott periodicity shows

$$K_{\text{even}}(A) = K_0(A), \quad K_{\text{odd}}(A) = K_1(A).$$

The *-homomorphism φ sends a projection p to the projection

$$\varphi(p) = \varphi(p)^2 = \varphi(p^2) = \varphi(p)^* = \varphi(p^*)$$

and it provides a well-defined group homomorphism

$$K_0(\varphi) : K_0(A) \ni [p]_0 \mapsto [\varphi(p)]_0 \in K_0(B).$$

One can define $K_1(\varphi)$ similarly. If φ is an isomorphism, it induces isomorphisms of K-groups

$$K_*(\varphi) : K_*(A) \cong K_*(B),$$

and one can use the K-groups as an invariant to classify C*-algebras.

The projections $p \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ are classified by their ranks and one has an isomorphism

$$K_0(\mathbb{C}) = K_0(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) = K_0(\mathbb{K}) \ni [p]_0 - [q]_0 \mapsto \text{rank } p - \text{rank } q \in \mathbb{Z}.$$

Since the rank n diagonal unitary matrices are homotopic to the identity matrix $1_{\mathbb{M}_n(\mathbb{C})}$ in the unitary group $U(n)$, the group $U(n)$ is path connected and this implies

$$K_1(\mathbb{C}) = K_1(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) = K_1(\mathbb{K}) = 0.$$

For other examples, the K-groups of the Cuntz algebras are well-known and they are as follows:

$$K_0(\mathcal{O}_{n+1}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad K_0(\mathcal{O}_\infty) = \mathbb{Z}, \quad K_1(\mathcal{O}_{n+1}) = K_1(\mathcal{O}_\infty) = 0.$$

Thus, $\{\mathcal{O}_n\}_{n=2}^\infty$ are mutually non isomorphic and distinguished by their K-groups.

K-theory has a certain homotopy invariance property. Let $\text{Hom}(A, B)$ be the set of $*$ -homomorphisms from A to B which has the point-wise norm topology (i.e., $\varphi_i \rightarrow \varphi$ if $\varphi_i(a) - \varphi(a) \rightarrow 0$ in B for any $a \in A$). If two homomorphisms φ_1 and φ_2 are homotopic in the topological space $\text{Hom}(A, B)$, one has $K_*(\varphi_1) = K_*(\varphi_2)$, and thus there is a map

$$\text{Hom}(A, B)/\sim_{\text{homotopy}} \ni [\varphi] \mapsto (K_0(\varphi), K_1(\varphi)) \in \bigoplus_{i=0,1} \text{Hom}(K_i(A), K_i(B)).$$

This provides a tool to understand the morphisms of C^* -algebras from algebraic topological view point, and this picture is generalized to the notion of Kasparov's KK-groups.

1.3 Morphisms of C^* -algebras and KK-groups

The KK-group $KK(A, B)$ is the group of (homotopy equivalence classes of) Kasparov modules ([3]). The Kasparov modules can be understood as the generalized $*$ -homomorphisms from A to B , and there is a canonical map

$$\text{Hom}(A, B)/\sim_{\text{homotopy}} \ni [\varphi] \mapsto KK(\varphi) \in KK(A, B)$$

by which one can understand the morphisms of C^* -algebras. There is a natural map

$$KK(A, B) \ni KK(\varphi) \mapsto (K_0(\varphi), K_1(\varphi)) \in \bigoplus_{i=0,1} \text{Hom}(K_i(A), K_i(B))$$

and if A and B are in some nice class of C^* -algebras (UCT C^* -algebras), then the above map gives the following exact sequence (UCT)

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=0,1} \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(K_i(A), K_{i+1}(B)) \rightarrow KK(A, B) \rightarrow \bigoplus_{i=0,1} \text{Hom}(K_i(A), K_i(B)) \rightarrow 0.$$

The group $KK(A, B)$ is commutative and admits the composition called the Kasparov product

$$\hat{\otimes} : KK(A, B) \times KK(B, C) \ni (KK(\varphi), KK(\theta)) \mapsto KK(\theta \circ \varphi) \in KK(A, C).$$

Two C*-algebras A and B are said to be KK-equivalent $A \sim_{KK} B$, if there is an element $\alpha \in KK(A, B)$, $\beta \in KK(B, A)$ with

$$\alpha \hat{\otimes} \beta = KK(\text{id}_A), \quad \beta \hat{\otimes} \alpha = KK(\text{id}_B),$$

and, for the UCT C*-algebras, it is known that $A \sim_{KK} B$ if and only if $K_*(A) \cong K_*(B)$. For two isomorphic C*-algebras A and B with the isomorphism $\varphi : A \cong B$, $KK(\varphi)$ and $KK(\varphi^{-1})$ gives the KK-equivalence relation $A \sim_{KK} B$, but conversely the KK-equivalence does not imply $A \cong B$ in general.

We give some examples of KK-groups. It is well-known that the trivial C*-algebra \mathbb{C} and the infinite Cuntz algebra \mathcal{O}_∞ are KK-equivalent with the following KK-group

$$KK(\mathbb{C}, \mathcal{O}_\infty) \cong \text{Hom}(K_0(\mathbb{C}), K_0(\mathcal{O}_\infty)) = \mathbb{Z},$$

and the unital map

$$u_{\mathcal{O}_\infty} : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}_\infty$$

gives a KK-equivalence $KK(u_{\mathcal{O}_\infty}) \in KK(\mathbb{C}, \mathcal{O}_\infty)$. More generally, the map

$$\text{id}_A \otimes u_{\mathcal{O}_\infty} : A \rightarrow A \otimes \mathcal{O}_\infty$$

induces $A \sim_{KK} A \otimes \mathcal{O}_\infty$. There is an important class of C*-algebras, so called Kirchberg algebras, for which KK-equivalence implies the isomorphism, and then above KK-equivalence implies the \mathcal{O}_∞ -absorption for the Kirchberg algebras

$$A \cong A \otimes \mathcal{O}_\infty.$$

2 Homotopy theory for Kirchberg algebras

2.1 Homotopy groups of automorphism groups

The Kirchberg algebras are important simple C*-algebras which can be classified via KK-equivalence. Surprisingly, if two Kirchberg algebras A, B are KK-equivalent, then one has $A \otimes \mathbb{K} \cong B \otimes \mathbb{K}$ by the celebrated Kirchberg–Phillips theorem. This, in particular, implies two stable UCT Kirchberg algebras are isomorphic if they have the same K-groups. The Cuntz algebras $\mathcal{O}_\infty, \mathcal{O}_n$ are typical examples of the Kirchberg algebras, and one has

$$\mathcal{O}_n \cong \mathcal{O}_n \otimes \mathcal{O}_\infty, \quad (\mathcal{O}_\infty \otimes \mathbb{K})^{\otimes 2} \cong \mathcal{O}_\infty \otimes \mathbb{K}.$$

In this classification theorem, the following theorem plays a key role:

Theorem 2.1 (Kirchberg–Phillips). *For two stable Kirchberg algebras A, B , if two non-zero *-homomorphisms $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ satisfying $KK(\varphi) = KK(\psi) \in KK(A, B)$, then φ and ψ are homotopic in $\text{Hom}(A, B)$. In other words, the following map is injective:*

$$\text{Hom}_{\text{non-zero}}(A, B) / \sim_{\text{homotopy}} \ni [\varphi] \mapsto KK(\varphi) \in KK(A, B).$$

In the homotopy theory, the 0-th homotopy group of a topological space X is the set of homotopy equivalence classes of the points of X :

$$\pi_0(X) = X / \sim_{\text{homotopy}},$$

and the above theorem suggests that the homotopy groups $\pi_0(\text{Hom}_{\text{non-zero}}(A, B))$ or $\pi_0(\text{Aut}(A))$ might be computed by $KK(A, B)$ or $KK(A, A)$. The i -th homotopy group $\pi_i(\text{Aut}(A))$ is the set of homotopy equivalence classes of base point preserving continuous maps from the pointed i -dimensional sphere $(S^i, *)$ to $(\text{Aut}(A), \text{id}_A)$ with respect to the base point preserving homotopy

$$\pi_i(\text{Aut}(A)) := \text{Map}((S^i, *), (\text{Aut}(A), \text{id}_A)) / \sim_{\text{homotopy}}.$$

Every continuous map

$$\alpha : S^i \ni x \mapsto \alpha_x \in \text{Aut}(A)$$

gives the following $*$ -homomorphism

$$\alpha : A \ni a \mapsto [S^i \ni x \mapsto \alpha_x(a) \in A] \in C(S^i, A)$$

which gives an element $KK(\alpha) \in KK(A, C(S^i) \otimes A)$. Let $l : S^i \rightarrow \{\text{id}_A\} \subset \text{Aut}(A)$ be the constant map. For $\alpha \in \text{Map}((S^i, *), (\text{Aut}(A), \text{id}_A))$, the difference

$$KK(\alpha) - KK(l) \in KK(A, C(S^i) \otimes A)$$

lies in the kernel of the evaluation map

$$KK(A, C(S^i) \otimes A) \rightarrow KK(A, A)$$

that maps $KK(\alpha) - KK(l)$ to

$$KK(\alpha_*) - KK(l_*) = KK(\text{id}_A) - KK(\text{id}_A) = 0.$$

This evaluation map is given by putting the following splitting short exact sequence into the functor $KK(A, -)$

$$0 \rightarrow C_0(S^i, *) \otimes A \rightarrow C(S^i) \otimes A \rightarrow A \rightarrow 0,$$

where the right map is the evaluation at the base point $* \in S^i$

$$C(S^i, A) \ni f(-) \mapsto f(*) \in A.$$

Now we have

$$KK(\alpha) - KK(l) \in KK(A, C_0(S^i) \otimes A) = KK(A, S^{\otimes i} \otimes A).$$

Theorem 2.2 ([1]). *For a stable Kirchberg algebra A , the i -th homotopy group $\pi_i(\text{Aut}(A))$, $i \geq 1$ is computed by the isomorphism*

$$\pi_i(\text{Aut}(A)) \ni [\alpha] \mapsto KK(\alpha) - KK(l) \in KK(A, S^{\otimes i} A).$$

Thus, the technique of Kirchberg–Phillips theorem enable us to access to the homotopy theory of the automorphism groups. The word “stable” means that $A \cong A \otimes \mathbb{K}$, and the stable Kirchberg algebras are not unital algebras. To compute the homotopy groups for unital Kirchberg algebra, we need the mapping cone algebra of the unital map

$$u_A : \mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda 1_A \in A$$

which is discussed in the next section.

2.2 $\pi_i(\text{Aut}(A))$ for unital Kirchberg algebras

For a $*$ -homomorphism $\varphi : A \rightarrow B$, there is a mapping cone algebra defined by

$$\text{Cone}(\varphi) := \{(b(t), a) \in (C_0(0, 1] \otimes B) \oplus A \mid b(1) = \varphi(a)\},$$

and the following sequence is called the mapping cone (Puppe) sequence

$$\text{Cone}(\varphi) \ni (b(t), a) \mapsto a \in A \xrightarrow{\varphi} B.$$

This induces a long exact sequence

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow K_0(\text{Cone}(\varphi)) \rightarrow K_0(A) \rightarrow K_0(B) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow K_1(\text{Cone}(\varphi)) \rightarrow K_1(A) \rightarrow K_1(B) \rightarrow K_0(\text{Cone}(\varphi)) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

For a unital C^* -algebra A with unital map $u_A : \mathbb{C} \rightarrow A$, the algebra $\text{Cone}(u_A)$ is identified with

$$\text{Cone}(u_A) = C_A := \{a(t) \in C_0(0, 1] \otimes A \mid a(1) \in \mathbb{C}1_A\},$$

and we obtain the exact sequence

$$0 \rightarrow K_1(A) \rightarrow K_0(C_A) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow K_0(A) \rightarrow K_1(C_A) \rightarrow 0.$$

M. Dadarlat gives a formula to compute the homotopy groups of the automorphism groups of unital Kirchberg algebras.

Theorem 2.3 ([1]). *For a unital Kirchberg algebra A , one has*

$$\pi_i(\text{Aut}(A)) \cong KK(C_A, S^{\otimes i+1} \otimes A), \quad i \geq 1.$$

We give some examples of K -groups of the mapping cone exact sequence and the homotopy groups.

Example 2.4. *For $A = \mathcal{O}_\infty$, the map*

$$\mathbb{Z} = K_0(\mathbb{C}) \rightarrow K_0(\mathcal{O}_\infty)$$

is isomorphism which implies $K_(C_{\mathcal{O}_\infty}) = 0$. Thus, the UCT exact sequence shows $\pi_i(\text{Aut}(\mathcal{O}_\infty)) = 0$.*

Example 2.5. For $A = \mathcal{O}_{n+1}$, the exact sequence

$$K_0(C_{\mathcal{O}_{n+1}}) \rightarrow K_0(\mathbb{C}) \rightarrow K_0(\mathcal{O}_{n+1})$$

is identified with $\mathbb{Z} \xrightarrow{-n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, and we obtain

$$\pi_{\text{even}}(\text{Aut}(\mathcal{O}_{n+1})) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \pi_{\text{odd}}(\text{Aut}(\mathcal{O}_{n+1})) = 0.$$

Example 2.6. For $A = \mathcal{O}_{\infty} \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, the exact sequence

$$K_0(\mathbb{C}) \rightarrow K_0(\mathcal{O}_{\infty} \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})) \rightarrow K_1(C_{\mathcal{O}_{\infty} \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})})$$

is identified with $\mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, thus one has

$$\pi_i(\text{Aut}(\mathcal{O}_{\infty} \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))) \cong \pi_i(\text{Aut}(\mathcal{O}_{n+1})).$$

Two algebras \mathcal{O}_{n+1} and $\mathcal{O}_{\infty} \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ are completely different Kirchberg algebras, thus it might be expected that their automorphism groups would be different. So the third example is interesting, and we will introduce a property called reciprocity to give a conceptual understanding of and a generalization of the isomorphism

$$\pi_i(\text{Aut}(\mathcal{O}_{\infty} \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))) \cong \pi_i(\text{Aut}(\mathcal{O}_{n+1})).$$

3 Reciprocity

Using a duality for KK-theory, we will introduce the reciprocity for a pair of unital Kirchberg algebras.

3.1 Spanier–Whitehead duality

Recall that the KK-group has the Kasparov product. This allows us to understand $KK(A, B)$ as a set of morphisms from A to B in a certain category of C^* -algebras. Then, we have a duality for the morphism $KK(-, -)$ defined via the unit co-unit adjunction.

Definition 3.1 ([2]). *Two C^* -algebras $A, D = D(A)$ are Spanier–Whitehead K -dual if there are two elements (unit, co-unit)*

$$\mu \in KK(\mathbb{C}, A \otimes D(A)), \quad \nu \in KK(D(A) \otimes A, \mathbb{C})$$

satisfying the unit co-unit adjunction formula:

$$\mu \otimes KK(\text{id}_A) \in KK(\mathbb{C} \otimes A, (A \otimes D) \otimes A), \quad KK(\text{id}_A) \otimes \nu \in KK(A \otimes (D \otimes A), A \otimes \mathbb{C}),$$

$$KK(\text{id}_D) \otimes \mu \in KK(D \otimes \mathbb{C}, D \otimes (A \otimes D)), \quad \nu \otimes KK(\text{id}_D) \in KK((D \otimes A) \otimes D, \mathbb{C} \otimes D),$$

$$(\mu \otimes KK(\text{id}_A)) \hat{\otimes} (KK(\text{id}_A) \otimes \nu) = KK(\text{id}_A),$$

$$(KK(\text{id}_D) \otimes \mu) \hat{\otimes} (\nu \otimes KK(\text{id}_D)) = KK(\text{id}_D).$$

Proposition 3.2. *One has the following isomorphisms:*

$$KK(A, B) \cong KK(\mathbb{C}, B \otimes D(A)) \cong KK(D(B), D(A)).$$

If one has a morphism $A \rightarrow B \in KK(A, B)$, this proposition implies that there is a dual morphism $D(A) \leftarrow D(B) \in KK(D(B), D(A))$. So, for a given sequence $A \rightarrow B \rightarrow C$, the duality provides a dual sequence $D(A) \leftarrow D(B) \leftarrow D(C)$ in a non-canonical way. We obtain the following examples of dual algebras.

Example 3.3. $D(\mathbb{C}) \sim_{KK} \mathbb{C}$, $D(S) \sim_{KK} S$

Example 3.4. $D(\mathcal{O}_n) \sim_{KK} S\mathcal{O}_n$, $D(S\mathcal{O}_n) \sim_{KK} \mathcal{O}_n$

If a UCT C^* -algebra A has finitely generated K -groups, then A is KK -equivalent to the following algebra

$$A \sim_{KK} \mathbb{C}^{\oplus a} \oplus S^{\oplus b} \oplus \mathcal{O}_n^{\oplus c} \oplus (S \otimes \mathcal{O}_m)^{\oplus d} \oplus \dots$$

and $D(A)$ is given by

$$D(A) \sim_{KK} \mathbb{C}^{\oplus a} \oplus S^{\oplus b} \oplus (S \otimes \mathcal{O}_n)^{\oplus c} \oplus \mathcal{O}_m^{\oplus d} \oplus \dots$$

3.2 Reciprocity

Definition 3.5 ([4]). *Let A and B be unital Kirchberg algebras with finitely generated K -groups, and let $C_A := \text{Cone}(u_A)$ denote the mapping cone algebra. Then, A and B are said to be reciprocal, if*

$$A \sim_{KK} D(C_B), \quad B \sim_{KK} D(C_A).$$

Remark 3.6. \mathcal{O}_{n+1} and $\mathcal{O}_\infty \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ are reciprocal Kirchberg algebras.

Remark 3.7. *Combining Thm. 2.3 with Prop. 3.2, one has*

$$\pi_i(\text{Aut}(A)) \cong K_{i+1}(A \otimes D(C_A)).$$

If A and B are reciprocal, one has $A \otimes D(C_A) \sim_{KK} D(C_B) \otimes B$ and

$$K_{i+1}(A \otimes D(C_A)) \cong K_{i+1}(B \otimes D(C_B))$$

which implies $\pi_i(\text{Aut}(A)) \cong \pi_i(\text{Aut}(B))$.

Remark 3.8. *The reciprocity is understood as a duality between the mapping cone sequence*

$$C_A \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow A, \quad B \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow C_B$$

In other words, $B \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow C_B$ gives a dual sequence $D(C_A) \leftarrow D(\mathbb{C}) \leftarrow D(A)$

Now Rem. 3.7 gives a conceptual understanding of the reason why \mathcal{O}_{n+1} and $\mathcal{O}_\infty \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ have the same homotopy groups of their automorphism groups. Thanks to elementary homotopy theory, this remark suggests that the automorphism groups of the reciprocal Kirchberg algebras share the same homotopy theoretic properties. In particular, we may expect that the bundles of A and the bundles of B are related in some sense.

Theorem 3.9 ([4]). *Let X be a finite CW complex, and let A, B be UCT C^* -algebras with finitely generated K -groups. Then, the following hold.*

1. *For any unital Kirchberg algebra A with finitely generated K -groups, there uniquely exists a unital Kirchberg algebra B with finitely generated K -groups such that B is reciprocal to A .*

2. *For the reciprocal algebras A and B , $[1_A]_0 \in \text{Tor}(K_0(A))$ if and only if $[1_B]_0 \notin \text{Tor}(K_0(B))$. In particular, the reciprocal algebras are always non-isomorphic $A \not\cong B$. Moreover, they are not KK -equivalent $A \not\sim_{KK} B$.*

3. *One has $\pi_i(\text{Aut}(A)) \cong \pi_i(\text{Aut}(B))$ for every $i \geq 0$ if and only if either $A = B$ or A and B are reciprocal.* 4. *There is a natural bijection*

$$R_{A,B} : \{A\text{-bundles}/X\} / \sim_{\text{isom}} \ni [\mathcal{A}] \mapsto [\mathcal{B}] \in \{B\text{-bundles}/X\} / \sim_{\text{isom}}$$

between the sets of isomorphism classes of the bundles of A and B .

Remark 3.10. *The proof of statements 1. and 3. are depend on the assumption of finite generation of K -groups, and they are proved by combinatorial arguments. For example, we use the proposition stated below.*

Proposition 3.11. *For a finitely generated Abel group G with $g_i \in G$ ($i = 1, 2$) satisfying $G/\langle g_1 \rangle \cong G/\langle g_2 \rangle$, one has a isomorphism $\theta : G \rightarrow G$ with $\theta(g_1) = g_2$.*

Remark 3.12. *The above proposition fails for non-finitely generated groups (e.g., $G = \mathbb{Z}^{\oplus \infty}$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus \infty}$). Also the statement 3. in the above theorem fails if we drop the assumption of finite generation of K -groups. For example, $A = \mathcal{O}_2$ and $B = \mathcal{O}_\infty \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{\otimes \infty}$ have the same homotopy groups of automorphism groups for every $n \in \mathbb{N}$. Thus, we have many solutions (A, B) to the equation $\pi_i(\text{Aut}(A)) = \pi_i(\text{Aut}(B))$. This happens because the K -group*

$$K_0(\mathcal{O}_\infty \otimes \mathbb{M}_n^{\otimes \infty}) = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$$

is not finitely generated. If we assume the finitely generatedness then there is a unique non-trivial solution $(A, B) = (\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_\infty)$.

The picture in Rem. 3.8 is a key idea to obtain the statement 4. in the above theorem. Here, the bundle \mathcal{A} in the statement 4. is a locally trivial fiber bundles

over the topological space X whose fiber is A and the structure group is $\text{Aut}(A)$. One can understand \mathcal{A} as a kind of family of C^* -algebras $\{\mathcal{A}_x\}_{x \in X}$ with $\mathcal{A}_x \cong A$. Then, we have a family of the mapping cone sequence

$$\{C_{\mathcal{A}_x} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}_x\}_{x \in X}$$

In [4], we show “the Spanier–Whitehead duality for the bundles”, and this duality provides another family

$$\{\mathcal{B}_x \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow C_{\mathcal{B}_x}\}_{x \in X}$$

which gives us the bundle \mathcal{B} whose fiber is isomorphic to $B \cong \mathcal{B}_x$.

References

- [1] M. Dadarlat, The homotopy groups of the automorphism groups of Kirchberg algebras, *J. Noncommut. Geom.* 1 (2007), 113–139.
- [2] J. Kaminker and C. Schochet, Spanier–Whitehead K -duality for C^* -algebras, *Journal of Topology and Analysis*, Vol. 11, No. 01, 21–52 (2019).
- [3] G. G. Kasparov, Equivariant KK -theory and the Novikov conjecture, *Invent. Math.*, 91 (1) : 147–201, 1988.
- [4] T. Sogabe, The Reciprocal Kirchberg Algebras, arXiv:2204.11199.

正規分布の平均-分散の同時検定と 条件付き Wishart 分布

井上 公人 (西日本工業大学工学部)*

1 はじめに

統計上の標本データに対して変換群の作用を考える場合, 推定や検定などの決定問題の結果が変換に依らないようにするために, 統計量は変換に関して不変であるものが用いられる ([6, 7, 9]). 例えばデータが実数値で表される n 個の観測量からなる場合, データ内の置換に関して不変な決定を行うには統計量が観測量の対称式である必要がある. ここでデータに対して置換群より大きい $n-1$ 次の直交群の作用を考えると, その不変な統計量として残るものは平均と分散およびそれらの関数のみになる (命題 2.1). さらに観測値の空間である実数全体の集合に定数倍と平行移動からなるアフィン群の対角作用を考えたときに, 直交群の軌道全体に単純推移的に作用することがわかる. これにより平均と分散の組をアフィン群に値を持つ統計量とみなすことができ, データに正規分布を仮定する場合は2つのパラメータの同時推定量となる. ところで正規分布に限ってもそのパラメータの推論に関する研究は現在まで続いているが, 平均に対する推論と分散に対する推論は通常別々に論じられる (cf. [6, 7]).

そこで本稿では上記の観点から, 正規分布の検定の問題をパラメータ空間をアフィン群とみなした平均-分散の同時検定として記述する. この中で平均-分散の同時密度関数をアフィン群上の積分公式から導出し, χ^2 分布, t 分布, F 分布などが含まれることを確認する. ここで導出した密度関数は条件付きの Wishart 分布とみなすことができる. Wishart 分布は対称錐や等質錐上でも定義され ([1, 3]), Lorentz 錐に関しても統計的問題が議論されている ([2, 4]). 本論の方法の類推もこれらの錐上で考えられる可能性があるが, ここでは Lorentz 錐で行った計算を報告する.

2 平均-分散の同時検定

2.1 データ空間と統計量

$n \geq 2, r \geq 1$ に対し, E_n を以下の行列の集合とする.

$$E_n = E_{n,r} := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(r+1) \times n}; \text{rank } x = r+1 \right\}.$$

*Inoue Hiroto, e-mail: hinoue@nishitech.ac.jp

$\Omega = \text{Sym}_{r+1}^+(\mathbb{R})$ を $r+1$ 次 の 正 定 値 対 称 行 列 全 体 の な す 錐 と し, そ の 部 分 集 合 Ω_n を 次 で 定 め る.

$$\Omega_n = \{\mathbf{w} = (w_{ij}) \in \Omega; w_{r+1,r+1} = n\}, \quad \mathbf{e} = I_{r+1}.$$

写像 $\mathcal{Q}: E_n \rightarrow \Omega_n$ を 次 で 定 め る.

$$\mathcal{Q}(x) := xx^T \quad (x \in E_n).$$

一般線形群 $\text{GL}_r(\mathbb{R})$ の 上 三 角 行 列 か ら な る 部 分 群 を T と し, 群 $G_0 := T \times \mathbb{R}^r$ を 次 で 定 め る.

$$(s, t) \cdot (a, b) := (sa, sb + t) \quad ((s, t), (a, b) \in T \times \mathbb{R}^r).$$

2 つ の 作 用 $G_0 \curvearrowright E_n, G_0 \curvearrowright \Omega_n$ を, $h = (s, t)$ に 対 し 行 列 の 積

$$(s, t)x := \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (s, t)\mathbf{w} := \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{w} \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \quad (x \in E_n, \mathbf{w} \in \Omega_n)$$

で 定 め る. 作 用 $G_0 \curvearrowright \Omega_n$ は 単 純 推 移 的 で あり, 写 像 $\mathcal{Q}: E_n \rightarrow \Omega_n$ は G_0 -同変である;

$$\mathcal{Q}(gx) = g\mathcal{Q}(x) \quad (g \in G_0, x \in E_n).$$

これより任意の $x \in E_n$ は 次 の 形 に 一 意 的 に 表 さ れ る (QR 分 解);

$$x = gu, \quad g \in G_0, \quad u \in \mathcal{Q}^{-1}(ne). \quad (1)$$

こ の と き の g を $R(x)$ で 表 す. 写 像 $R: E_n \rightarrow G_0$ は G_0 -同変である;

$$R(hx) = hR(x), \quad h \in G_0. \quad (2)$$

命題 2.1 (平均, 分散共分散行列). $x \in E_n$ に 対 し て, $R(x) = (s_x, \bar{x})$ と なる. こ こ で

$$s_x s_x^T = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k x_k^T - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^T, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad (3)$$

Proof. $x = R(x)u$ の とき, $\mathcal{Q}(x) = nR(x)e = n(s, t)e$ と なる の で, 両 辺 を 比 較 し て (3) が 得 ら れ る. \square

補足 2.1. E_n は n 個 の \mathbb{R}^r 値 データ の 空間 であり, 式 (3) は データ の 分散 共 分散 行 列 と 平均 の 式 である. 特 に $r = 1$ の 場合, s_x は 標準 偏差 である. 式 (2) は 平均 と 分散 共 分散 の アファイン 変換 $x \mapsto ax + b$ に 対 す る 変換 則 を 意味 す る.

2.2 アファイン群 G_0 上 の 体積 要素

以下, $\Gamma(x)$ は ガンマ 関数 と す る. ま た $r = 1$ の と き 積 $\prod_{i=2}^r (\cdots), \prod_{i < j}^r (\cdots)$ は 1 と す る.

$g = (s, t) \in G_0$ に 対 し て 次 の 記号 を 定 め る.

$$|g| := \det g = s_{11} \cdots s_{rr},$$

$$\delta(g) := \prod_{i=1}^r s_{ii}^{-(r-i+1)} = |g|^{-(r+1)} \prod_{i=1}^r s_{ii}^i,$$

$$\Delta_G(g) := \delta(g) \prod_{i=1}^r s_{ii}^{i-1} = \prod_{i=1}^r s_{ii}^{-(r-2i+2)} = |g|^{-(r+1)} \prod_{i=1}^r s_{ii}^{2i-1}.$$

また $\mathbf{w} = (s, t)\mathbf{e} \in \Omega$ に対し

$$\Delta_k(\mathbf{w}) := \det(x_{ij})_{k \leq i, j \leq n} = s_{kk}^2 s_{k+1, k+1}^2 \cdots s_{rr}^2.$$

を定めると,

$$\Delta_G(g) = \Delta_1(\mathbf{w})^{-\frac{1}{2}r} \prod_{i=2}^r \Delta_i(\mathbf{w}) \quad (g = (s, t))$$

となる. $E_n \cong \mathbb{R}^{rn}$ 上の体積要素 dx を次で定める.

$$dx := \prod_{i=1}^r \prod_{k=1}^n dx_{ik}, \quad x = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{r1} & \cdots & x_{rn} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

G_0 の作用に対して次が成り立つ.

$$d(hx) = |h|^n dx \quad (h \in G_0).$$

また G_0 上の体積要素 $d\mu(g)$ を次で定める.

$$d\mu(g) := \delta(g) \prod_{i=1}^r s_{ii}^{-1} ds_{ii} \prod_{i < j} ds_{ij} \prod_{i=1}^r dt_i, \quad g = (s, t).$$

$d\mu(g)$ は G_0 の左 Haar 測度であり, 次の変換則が成り立つ.

$$d\mu(h_1 g h_2) = \Delta_G(h_2) d\mu(g) \quad (h_1, h_2 \in G_0),$$

$$d\mu(g^{-1}) = \Delta_G(g)^{-1} d\mu(g).$$

命題 2.2. 式 (1) の変数関係のもとで次が成り立つ.

$$dx = |g|^n d\mu(g) du = \left(\prod_{i=1}^r s_{ii}^{n-1-r} ds_{ii} \right) \left(\prod_{i < j} ds_{ij} \right) \left(\prod_{i=1}^r dt_i \right) du. \quad (4)$$

ここで du は $\mathcal{Q}^{-1}(ne)$ の体積要素で次をみます.

$$\int_{\mathcal{Q}^{-1}(ne)} du = \frac{\sqrt{2\pi}^{-rn}}{c_n}, \quad c_n = \frac{1}{2^r} \binom{n}{2}^{-\frac{1}{2}rn} \sqrt{\pi}^{\frac{1}{2}r(r+1)} \prod_{i=1}^r \Gamma\left(\frac{1}{2}(n-i)\right). \quad (5)$$

Proof. (5) の証明: 式 (4) より

$$\begin{aligned} \int_{E_n} e^{-\frac{1}{2}\text{tr}Q(x) + \frac{1}{2}n} dx &= \int_{G_0} e^{-\frac{1}{2}n\text{tr}(he) + \frac{1}{2}n} |h|^n d\mu(h) \int_{\mathcal{Q}^{-1}(ne)} du \\ &= \int_{G_0} \left(\prod_{i=1}^r e^{-\frac{1}{2}n s_{ii}^2 s_{ii}^{n-1-(r-i+1)}} ds_{ii} \right) \left(\prod_{i < j} e^{-\frac{1}{2}n |s_{ij}|^2} ds_{ij} \right) \left(\prod_{i=1}^r e^{-\frac{1}{2}n |t_i|^2} dt_i \right) \int_{\mathcal{Q}^{-1}(ne)} du \end{aligned}$$

ここで $\int_0^\infty e^{-ms^2} s^a ds = \frac{1}{2} m^{-\frac{a+1}{2}} \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)$ より

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}^{-rn} &= \prod_{i=1}^r \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2}\right)^{-\frac{1}{2}(n-r+i-1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}(n-r+i-1)\right) \right\} \sqrt{2\pi/n}^{\frac{1}{2}r(r+1)} \int_{Q^{-1}(ne)} du \\ &= \frac{1}{2^r} \left(\frac{n}{2}\right)^{-\frac{1}{2}r(n-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2})} \left\{ \prod_{i=1}^r \Gamma\left(\frac{1}{2}(n-i)\right) \right\} \sqrt{2\pi/n}^{\frac{1}{2}r(r+1)} \int_{Q^{-1}(ne)} du \\ &= c_n \int_{Q^{-1}(ne)} du. \end{aligned}$$

□

2.3 E_n, G_0 上の確率分布と密度関数

E_n 上の確率変数 \mathbf{X} の密度関数を $f_{\mathbf{X}}(x)$, G_0 上の確率変数 \mathbf{G} の密度関数を $\Phi_{\mathbf{G}}(g)$ と書く;

$$P(\mathbf{X} \in \mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U} \subset E_n} f_{\mathbf{X}}(x) dx, \quad P(\mathbf{G} \in \mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V} \subset G_0} \Phi_{\mathbf{G}}(g) d\mu(g).$$

E_n 上の確率変数 \mathbf{X} に対して, $R(\mathbf{X})$ の周辺密度関数は次で与えられる.

$$\Phi_{R(\mathbf{X})}(g) = |g|^n \int_{Q^{-1}(ne)} f_{\mathbf{X}}(gu) du.$$

G_0 上の確率変数 \mathbf{G} の平均 $E[\mathbf{G}] \in G_0$ を次で定義する.

$$E[\mathbf{G}]e = \int_{G_0} (he) \Phi_{\mathbf{G}}(h) d\mu(h).$$

このとき E_n 上の確率変数 \mathbf{X} に対して

$$E[R(\mathbf{X})]e = \frac{1}{n} \int_{E_n} Q(x) f_{\mathbf{X}}(x) dx.$$

となる.

命題 2.3. G_0 上の確率変数 \mathbf{G} と $h \in G_0$ に対して

$$E[h\mathbf{G}] = hE[\mathbf{G}].$$

2.4 正規分布から誘導される G_0 上の分布

\mathbf{X} が E_n 上の確率変数で

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{X}_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_i \sim N(t, ss^T) \quad \text{i.i.d.}, \quad g = (s, t) \in G_0$$

のとき, すなわち密度関数が

$$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{-rn}} e^{-\frac{1}{2} \text{tr} Q(g^{-1}x) + \frac{1}{2}n} |g|^{-n} \quad (x \in E_n)$$

となるとき, $\mathbf{X} \sim N(t, ss^T)^n$ と書く. 定義から $h = (s, t) \in G_0$, $\mathbf{Z} \sim N(0, I_r)^n$ に対して $h\mathbf{Z} \sim N(t, ss^T)^n$ となる. またこのとき,

$$E[R(h\mathbf{Z})]\mathbf{e} = h \int_{E_n} \begin{pmatrix} \overline{xx^T} & \bar{x} \\ \bar{x}^T & 1 \end{pmatrix} f_n(x) dx = h \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = h\mathbf{e}$$

である. よって $E[R(h\mathbf{Z})] = h = (s, t)$ となる.

命題 2.4. $\mathbf{X} \sim N(0, I_r)^n$ のとき, $\Phi_{R(\mathbf{X})}(h)$ は次で与えられる.

$$\Phi_{R(\mathbf{X})}(h) = \Phi_n(h) := \frac{1}{c_n} e^{-\frac{1}{2}n \operatorname{tr}(h\mathbf{e}) + \frac{1}{2}n|h|^n} \quad (6)$$

命題 2.5. $\mathbf{X} \sim N(0, I_r)^n$, $\mathbf{Y} \sim N(0, I_r)^m$ のとき, $\Phi_{R(\mathbf{X})^{-1}R(\mathbf{Y})}(h)$ は次で与えられる.

$$\Phi_{R(\mathbf{X})^{-1}R(\mathbf{Y})}(h) = \Phi_{n,m}(h) := \frac{c_{n+m}}{c_n c_m} |h|^m \Delta_1(\mathbf{w})^{-\frac{1}{2}(n+m-r)} \left(\prod_{i=2}^r \Delta_i(\mathbf{w}) \right)^{-1}. \quad (7)$$

ここで $\mathbf{w} \in \Omega_1$ を次で定める.

$$\mathbf{w} = \frac{n}{n+m}\mathbf{e} + \frac{m}{n+m}h\mathbf{e}.$$

Proof. 密度関数の合成積を考えて

$$\Phi_{R(\mathbf{X})^{-1}R(\mathbf{Y})}(h) = \int_{G_0} \Phi_n(g) \Phi_m(gh) d\mu(g).$$

ここで各 $h \in G_0$ に対し $k \in G_0$ で

$$k\mathbf{e} = \frac{n}{n+m}\mathbf{e} + \frac{m}{n+m}h\mathbf{e}$$

となるものをとると

$$\Phi_n(g) \Phi_m(gh) = \frac{c_{n+m}}{c_n c_m} |h|^m |k|^{-(n+m)} \Phi_{n+m}(gk)$$

となる. また左 Haar 測度 $d\mu(g)$ の変換則より

$$\int_{G_0} \Phi_{n+m}(gk) d\mu(g) = \Delta_G(k^{-1}) \int_{G_0} \Phi_{n+m}(g) d\mu(g) = \Delta_G(k)^{-1}.$$

従って

$$\begin{aligned} \Phi_{R(\mathbf{X})^{-1}R(\mathbf{Y})}(h) &= \frac{c_{n+m}}{c_n c_m} |h|^m |k|^{-(n+m)} \Delta_G(k)^{-1} \\ &= \frac{c_{n+m}}{c_n c_m} |h|^m \Delta_1(k\mathbf{e})^{-\frac{1}{2}(n+m-r)} \left(\prod_{i=2}^r \Delta_i(k\mathbf{e}) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

□

補足 2.2. 後述するように $R(\mathbf{X})$ の従う分布 (6) を条件付き Wishart 分布とみなすと, 式 (7) はその G_0 上の比の密度関数となる. これは Wishart 行列の対称錐上の比の密度関数 ([8], §13) とは異なるものである.

2.5 $r = 1$ の場合の周辺分布

$G_0 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ 上の確率変数 $\mathbf{G} = (S, T)$ に対して S, T の密度関数を $\Phi_S(s), \Phi_T(t)$ と書けば, これらは周辺密度関数として

$$\Phi_S(s) = \int_{\mathbb{R}} \Phi_{\mathbf{G}}(s, t) s^{-2} dt, \quad \Phi_T(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \Phi_{\mathbf{G}}(s, t) s^{-2} ds$$

で与えられる. 以下, $\mathbf{X} \sim N(0, 1)^n, \mathbf{Y} \sim N(0, 1)^m$ とし,

$$R(\mathbf{X}) = (S_{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{X}}), \quad R(\mathbf{Y}) = (S_{\mathbf{Y}}, \bar{\mathbf{Y}})$$

とおく. 式 (6), (7) で $r = 1$ のときは $h = (s, t) \in G_0$ に対して

$$\Phi_{R(\mathbf{X})}(h) = \Phi_n(h) = \frac{1}{c_n} e^{-\frac{1}{2}n(s^2+t^2)} s^n, \quad c_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{n}{2}\right)^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right),$$

$$\Phi_{R(\mathbf{X})^{-1}R(\mathbf{Y})}(h) = \Phi_{n,m}(h) = \frac{c_{n+m}}{c_n c_m} s^m \left(\frac{n}{n+m} + \frac{m}{n+m} s^2 + \frac{nm}{(n+m)^2} t^2 \right)^{-\frac{n+m-1}{2}}$$

となる. これらの周辺密度関数として以下が導出される.

系 2.1. $R(\mathbf{X}) = (S_{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{X}})$ について次が成り立つ.

$$\Phi_{S_{\mathbf{X}}}(s) = \frac{\sqrt{2\pi/n}}{c_n} e^{-\frac{1}{2}ns^2} s^{n-2},$$

$$\Phi_{\bar{\mathbf{X}}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi/n}} e^{-\frac{1}{2}nt^2}.$$

これより $nS_{\mathbf{X}}^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布 χ_{n-1}^2 に, $\sqrt{n}\bar{\mathbf{X}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

系 2.2. $R(\mathbf{X})^{-1} = (S_{\mathbf{X}}^{-1}, -S_{\mathbf{X}}^{-1}\bar{\mathbf{X}})$ について次が成り立つ.

$$\Phi_{S_{\mathbf{X}}^{-1}}(s) = \frac{\sqrt{\pi/n}}{c_n} e^{-\frac{n}{2s^2}} s^{-n},$$

$$\Phi_{S_{\mathbf{X}}^{-1}\bar{\mathbf{X}}}(t) = \frac{1}{B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)} (1+t^2)^{-\frac{n}{2}}.$$

これより $(nS_{\mathbf{X}}^2)^{-1}$ は自由度 $n-1$ の逆 χ^2 分布に, $\sqrt{n-1}S_{\mathbf{X}}^{-1}\bar{\mathbf{X}}$ は自由度 $n-1$ の t 分布 t_{n-1} に従う.

系 2.3. $R(\mathbf{X})^{-1}R(\mathbf{Y}) = (S_{\mathbf{X}}^{-1}S_{\mathbf{Y}}, S_{\mathbf{X}}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{X}}))$ について次が成り立つ.

$$\Phi_{S_{\mathbf{X}}^{-1}S_{\mathbf{Y}}}(s) = \frac{2n^{\frac{n-1}{2}} m^{\frac{m-1}{2}}}{B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{m-1}{2}\right)} s^{m-2} \left(\frac{1}{n+ms^2} \right)^{\frac{n+m-1}{2}},$$

$$\Phi_{S_{\mathbf{X}}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{X}})}(t) = \frac{1}{B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{m}{n+m} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{m}{n+m} t^2 \right)^{-\frac{n}{2}}.$$

これより $S_{\mathbf{X}}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{X}})$ は自由度 $n-1$ の t 分布 t_{n-1} に, $\frac{m(n-1)}{n(m-1)} S_{\mathbf{X}}^{-2} S_{\mathbf{Y}}^2$ は自由度対 $(n-1, m-1)$ の F 分布 F_{n-1}^{m-1} に従う.

2.6 正規分布の平均-分散の同時検定

2.6.1 1つの正規母集団の母数に関する検定

正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ の母数 μ, σ に関する同時検定として, 帰無仮説

$$H_0 : \mu = \mu_0, \sigma = \sigma_0$$

を有意水準 $0 \leq \alpha \leq 1$ で検定することを考える. 大きさ n の標本データを E_n 上の確率変数 $\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)^n$ とみなし,

$$R(\mathbf{X}) = (S_{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{X}}), \quad h = (\sigma, \mu), \quad h_0 = (\sigma_0, \mu_0) \in G_0$$

とおく. これにより帰無仮説は $H_0 : h_0^{-1}h = (1, 0)$ と書ける.

検定方式 検定統計量 U を

$$U = R(h_0^{-1}\mathbf{X}) = h_0^{-1}R(\mathbf{X}) = \left(\frac{S_{\mathbf{X}}}{\sigma_0}, \frac{\bar{\mathbf{X}} - \mu_0}{\sigma_0} \right) \in G_0$$

で定める. H_0 を仮定すると, 密度関数は $\Phi_U(g) = \Phi_n(g)$ である. 受容域 (棄却域の余集合) として, G_0 における単位元の近傍 \mathcal{V} で,

$$1 - \alpha = \int_{\mathcal{V}} \Phi_n(g) d\mu(g)$$

を満たすものをとる. U の実現値 u に対して, $u \in \mathcal{V}$ なら H_0 を受容し, $u \notin \mathcal{V}$ なら H_0 を棄却する. \mathcal{V} のとり方によって次の検定となる. ただし $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ を $(1, 0) \in G_0$ の近傍とする.

- $\mathcal{V} = \mathbb{R}_+ \times \mathcal{J}$ の場合は, 母分散 σ^2 が既知のときの母平均 μ に関する z 検定
- $\mathcal{V} = \mathcal{I} \times \mathbb{R}$ の場合は, 母分散 σ^2 に関する χ^2 検定
- $\mathcal{V} = (\mathbb{R}_+ \times \mathcal{J})^{-1} := \{h \in G_0; h^{-1} \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{J}\}$ の場合は,

$$U \in (\mathbb{R}_+ \times \mathcal{J})^{-1} \Leftrightarrow U^{-1} \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{J} \Leftrightarrow -\frac{\bar{\mathbf{X}} - \mu_0}{S_{\mathbf{X}}} \in \mathcal{J}$$

であるので, 母分散 σ^2 が未知のときの母平均 μ に関する t 検定となる.

確率空間	$G_0 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}	\mathbb{R}
統計量	$U = h_0^{-1}R(\mathbf{X})$	$\sigma_0^{-1}S_{\mathbf{X}}$	$\sigma_0^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)$	$-S_{\mathbf{X}}^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)$
分布	条件付き Wishart Φ_n	χ_{n-1}^2	$N(0, 1)$	t_{n-1}
帰無仮説 H_0	$h_0^{-1}h = (1, 0)$	$\sigma = \sigma_0$	$\mu = \mu_0$ (σ_0 既知)	$\mu = \mu_0$ (σ_0 未知)
受容域 \mathcal{V}	$(1, 0)$ の近傍 $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$	$\mathcal{I} \times \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+ \times \mathcal{J}$	$(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{J})^{-1}$

2.6.2 2つの正規母集団を比較する検定

2つの正規母集団 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ の母数に関する同時検定として、帰無仮説

$$H_0 : \mu_x = \mu_y, \sigma_x = \sigma_y$$

を有意水準 α で検定することを考える. それぞれの母集団からの標本データを確率変数 $\mathbf{X} \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)^n$, $\mathbf{Y} \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)^m$ ($n, m \geq 2$) とみなし,

$$R(\mathbf{X}) = (S_{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{X}}), \quad R(\mathbf{Y}) = (S_{\mathbf{Y}}, \bar{\mathbf{Y}}), \quad h_x = (\sigma_x, \mu_x), \quad h_y = (\sigma_y, \mu_y) \in G_0$$

とおく. これにより帰無仮説は $H_0 : h_x^{-1}h_y = (1, 0)$ と書ける.

検定方式 検定統計量 U を

$$U = R(\mathbf{X})^{-1}R(\mathbf{Y}) = \left(\frac{S_{\mathbf{Y}}}{S_{\mathbf{X}}}, \frac{\bar{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{X}}}{S_{\mathbf{X}}} \right)$$

で定める. H_0 を仮定すると, 密度関数は $\Phi_U(g) = \Phi_{n,m}(g)$ である. 受容域として, G_0 における単位元の近傍 \mathcal{V} で,

$$1 - \alpha = \int_{\mathcal{V}} \Phi_{n,m}(g) d\mu(g)$$

を満たすものをとる. \mathcal{V} のとり方によって次の検定となる.

- $\mathcal{V} = \mathbb{R}_+ \times \mathcal{J}$ の場合は, 母平均の差 $\mu_x - \mu_y$ に関する t 検定
- $\mathcal{V} = \mathcal{I} \times \mathbb{R}$ の場合は, 母分散の比 σ_x/σ_y に関する F 検定

確率空間	$G_0 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}
統計量	$U = R(\mathbf{X})^{-1}R(\mathbf{Y})$	$S_{\mathbf{X}}^{-1}S_{\mathbf{Y}}$	$S_{\mathbf{X}}^{-1}(\bar{\mathbf{Y}} - \bar{\mathbf{X}})$
分布	$\Phi_{n,m}$	F_{n-1}^{m-1}	t_{n-1}
帰無仮説 H_0	$h_x^{-1}h_y = (1, 0)$	$\sigma_x = \sigma_y$	$\mu_x = \mu_y$
受容域 \mathcal{V}	$(1, 0)$ の近傍 $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$	$\mathcal{I} \times \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+ \times \mathcal{J}$

補足 2.3. 母平均の差 $\mu_x - \mu_y$ に関する検定統計量としては

$$T = \frac{\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{Y}}}{\sqrt{\frac{1}{n}S_{\mathbf{X}}^2 + \frac{1}{m}S_{\mathbf{Y}}^2}}$$

の方がよく用いられる. これは Welch の t 検定とよばれる.

3 Lorentz 錐 Λ_4 での類推

密度関数 $\phi_n(g)$ は $\Omega = \text{Sym}_{r+1}^+(\mathbb{R})$ 上の Wishart 分布の密度関数を $G_0 \cong \Omega_n \subset \Omega$ に制限した条件付き分布とみなせる. 以下では Lorentz 錐 Λ_4 上で定義される Wishart 分布に対して, その条件付き分布を考え. 前節の類似を考える.

3.1 対称錐上の Wishart 分布

V を単純な Euclidean Jordan 代数, E を N 次元の Euclid 空間とする. $\phi: V \rightarrow \text{End}(E)$ を Jordan 代数 V の E 上の自己随伴表現, すなわち次が成り立つ写像であるとする.

$$\phi(xy) = \frac{1}{2}(\phi(x)\phi(y) + \phi(y)\phi(x)) \quad (x, y \in V),$$

$$(\phi(x)u, v)_E = (u, \phi(x)v)_E \quad (x \in V, u, v \in E).$$

$q: E \rightarrow \text{End}(E)^*$ を次で定まる写像とする.

$$q: \xi \mapsto \{A \mapsto (A\xi | \xi)_E \quad (A \in \text{End}(E))\}.$$

$\phi^*: \text{End}(E)^* \rightarrow V^*$ を ϕ の随伴写像とし, ϕ に対応する 2 次形式 $Q: E \rightarrow V$ を次で定義する.

$$Q: E \xrightarrow{q} \text{End}(E)^* \xrightarrow{\phi^*} V^* \xrightarrow{\sim} V.$$

これは次の等式が成り立つことと同値である.

$$(y, Q(u))_V = (\phi(y)u, u)_E \quad (y \in V, u \in E).$$

$\mathbf{X} \sim N(0, I_E)$ が E 上の正規分布に従う確率変数であるとき, $Q(\mathbf{X})$ の従う分布が V に付随する対称錐上の Wishart 分布である.

3.1.1 $V = \text{Sym}_r(\mathbb{R})$ の場合

$E = \mathbb{R}^{r \times k}$, $V = \text{Sym}_r(\mathbb{R})$, $\phi(x)\xi = x\xi$ ととると $Q: \mathbb{R}^{r \times k} \rightarrow \text{Sym}_r(\mathbb{R})$ は $Q(\xi) = \xi\xi^T$ となる. このとき $\mathbf{X} \sim N(0, I_E)$ に対して $Q(\mathbf{X})$ は Wishart 分布に従う実対称行列である.

3.1.2 Lorentz 錐 Λ_4 の場合

W を \mathbb{R} 上のベクトル空間で, $B(\cdot, \cdot)$ を W の対称 2 次形式とする. ベクトル空間 $V = \mathbb{R} \times W$ に次の積を定める.

$$(\lambda, u)(\mu, v) = (\lambda\mu + B(u, v), \lambda v + \mu u).$$

このとき V は単純な Euclidean Jordan 代数であり, 付随する対称錐 $\Omega = \text{Int}\{x^2; x \in V\}$ を Lorentz 錐という. $x = (\lambda, u) \in V$ に対して, tr と \det が次で定義される.

$$\text{tr } x = 2\lambda, \quad \det x = \lambda^2 - B(u, u).$$

以下, $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ とする. V の基底 (Jordan 枠) を次のようにとる.

$$c_1 = \left(\frac{1}{2}; 0, 0, \frac{1}{2}\right), \quad c_2 = \left(\frac{1}{2}; 0, 0, -\frac{1}{2}\right), \quad d_1 = (0; 1, 0, 0), \quad d_2 = (0; 0, 1, 0).$$

Jordan 代数 V の $E = \mathbb{R}^{4 \times n}$ 上の表現 $\phi: V \rightarrow \text{End}(E)$ を次で定める ([5]).

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 0 & q_2 \\ q_1 & p_2 & -q_2 & 0 \\ 0 & -q_2 & p_1 & q_1 \\ q_2 & 0 & q_1 & p_2 \end{pmatrix}, \quad x = \mathcal{E} \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ q_2 \\ p_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E} = (c_1, d_1, d_2, c_2).$$

命題 3.1. ϕ に対応する二次形式 $Q: E \rightarrow V$ は次で与えられる.

$$Q(x) = \mathcal{E} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{u}_4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{pmatrix} \in E. \quad (8)$$

Proof. $Q(u)$ と任意の $y \in V$ を

$$Q(x) = \mathcal{E} \begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}, \quad y = \mathcal{E} \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ q_2 \\ p_2 \end{bmatrix} \in V$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned} \text{tr}(yQ(x)) &= (\phi(y)x, x)_E \\ &\Leftrightarrow [p_1, q_1, q_2, p_2] \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 0 & q_2 \\ q_1 & p_2 & -q_2 & 0 \\ 0 & -q_2 & p_1 & q_1 \\ q_2 & 0 & q_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

これより (8) が導かれる. □

3.2 データ空間と統計量

記号は 3.1.2 節の通りとする. $n \geq 3$ に対し, E_n を以下の行列の集合とする.

$$E_n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times n}; \text{rank } x = 3 \right\}.$$

Ω の部分集合 Ω_n を次で定める.

$$\Omega_n = \left\{ \mathbf{w} = \mathcal{E} \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ q_2 \\ p_2 \end{bmatrix} \in \Omega; p_2 = n \right\}, \quad \mathbf{e} = c_1 + c_2.$$

群 $G_0 := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ の 2 つの作用 $G_0 \curvearrowright E_n, G_0 \curvearrowright \Omega_n$ を, $h = (s, t)$ に対し行列の積

$$(s, t)x := \begin{pmatrix} s & & & t_1 \\ & 1 & & \\ & & s & t_2 \\ & & & 1 \end{pmatrix} x, \quad (s, t)\mathcal{E} \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ q_2 \\ n \end{bmatrix} := \mathcal{E} \begin{pmatrix} s^2 & 2st_2 & 2st_1 & t_1^2 + t_2^2 \\ & s & 0 & t_2 \\ & & s & t_1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ q_2 \\ n \end{bmatrix}$$

($x \in E_n, \mathbf{w} \in \Omega_n$) で定める. 作用 $G_0 \curvearrowright \Omega_n$ は単純推移的であり, 制限写像 $Q = Q|_{E_n}: E_n \rightarrow \Omega_n$ は G_0 -同変であることがわかる;

$$Q(gx) = gQ(x) \quad (g \in G_0, x \in E_n).$$

これより任意の $x \in E_n$ は次の形に一意的に表される.

$$x = gu, \quad g \in G_0, \quad u \in Q^{-1}(ne). \quad (9)$$

このときの g を $R(x)$ で表す. 写像 $R: E_n \rightarrow G_0$ は G_0 -同変写像となる;

$$R(hx) = hR(x), \quad h \in G_0. \quad (10)$$

命題 3.2. $x \in E_n$ に対して, $R(x) = (s, t)$ は次をみたま.

$$s = (\det Q(x))^{1/2} = \sqrt{s_{x_1}^2 + s_{x_2}^2}, \quad t = (\bar{x}_1, \bar{x}_2). \quad (11)$$

ここで $s_{x_i}^2$ と \bar{x}_i はそれぞれ $\{x_{ij}\}_{j=1}^n$ の分散と平均である.

4 補足

4.1 統計的決定論

統計的推定, 検定, 回帰分析などの問題は, 推測の良さを測るための損失関数を導入しそれを最小化する問題として論じられる. これは統計的決定論とよばれ, 以下の枠組みで定義される ([6, 7, 9]).

1. 標本空間 \mathcal{X} , 行動空間 A
2. 母数空間 Θ と \mathcal{X} 上の確率分布族 $\{P_\theta; \theta \in \Theta\}$
3. 損失関数 $L: \Theta \times A \rightarrow [0, \infty)$

関数 $\delta: \mathcal{X} \rightarrow A$ を観測から行動を決める決定関数という. このとき, リスク関数

$$R(\theta, \delta) := E[L(\theta, \delta(X))] = \int_{\mathcal{X}} L(\theta, \delta(X)) P_\theta(dx).$$

をより小さくするような決定関数 δ を求めることを統計的決定問題という. δ には不偏性や変換群に対する共変性 (同変性) などの付加条件が課される場合がある.

例 4.1 (パラメータの点推定). 点推定は観測からパラメータの推測値を与えることなので, 行動空間は $A = \Theta$ であり, 決定関数 $\delta: \mathcal{X} \rightarrow \Theta$ は推定統計量とよばれる. $\Theta = \mathbb{R}^n$ のときは損失関数として 2 乗誤差 $L(\theta, d) = \|d - \theta\|^2$ をとることが多い. 本稿での $R: E_n \rightarrow G_0$ は正規分布のパラメータ (σ, μ) の不偏かつ共変な推定統計量である.

例 4.2 (仮説検定). 仮説検定は観測から帰無仮説 H_0 を受容する ($d = 0$) か棄却する ($d = 1$) かのどちらかを行動として選ぶことなので, 行動空間は $A = \{0, 1\}$ となる. このとき $\delta^{-1}(0) \subset \mathcal{X}$ が標本空間での受容域となる. またリスク関数の値 $R(0, \delta)$, $R(1, \delta)$ はそれぞれ第 1 種, 第 2 種の誤りに相当する. §2.6 では δ を以下のように定めたことになる.

$$\delta: \mathcal{X} = E_n \xrightarrow{h_0^{-1}R} \Theta = G_0 \xrightarrow{\chi} \{0, 1\}, \quad \chi(h) = \begin{cases} 0 & (h \in \mathcal{V}), \\ 1 & (h \notin \mathcal{V}). \end{cases}$$

参考文献

- [1] S. A. Andersson and G. G. Wojnar. Wishart Distributions on Homogeneous Cones. *Journal of Theoretical Probability*, 17(4):781–818, 10 2004.
- [2] E. Ben-David. Maximal invariants for Lorentz-Wishart models. *Journal of Geometry and Physics*, 69:31–39, 2013.
- [3] J. Faraut and A. Korányi. *Analysis on symmetric cones*. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, Oxford University Press, 1994.
- [4] P. Feinsilver, J. Kocik, and M. Giering. Canonical variables and analysis on $so(n, 2)$. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(11):2367, mar 2001.
- [5] S. T. Jensen. Covariance Hypotheses Which are Linear in Both the Covariance and the Inverse Covariance. *The Annals of Statistics*, 16(1):302 – 322, 1988.
- [6] E. L. Lehmann and G. Casella. *Theory of point estimation*. Springer texts in statistics. Springer, 2nd edition, 1998.
- [7] E. L. Lehmann and J. P. Romano. *Testing statistical hypotheses*. Springer texts in statistics. Springer, 4th edition, 2022.
- [8] 竹村彰通. 多変量推測統計の基礎. 共立出版, 1991.
- [9] 鍋谷清治. 数理統計学. 共立出版, 1978.

「正規分布の平均-分散の同時検定と条件付き Wishart 分布」の正誤表

- 2.2 節

(誤) $\Delta_k(\mathbf{w}) := \det(x_{ij})_{k \leq i, j \leq n}$

(正) $\Delta_k(\mathbf{w}) := \det(w_{ij})_{k \leq i, j \leq r}$

- 2.4 節

(誤) $E[R(h\mathbf{Z})]\mathbf{e} = h \int_{E_n} \begin{pmatrix} \overline{xx^T} & \bar{x} \\ \bar{x}^T & 1 \end{pmatrix} f_n(x) dx$

(正) $E[R(h\mathbf{Z})]\mathbf{e} = h \int_{E_n} \mathcal{Q}(x) f_n(x) dx$