第 61 回実函数論・函数解析学
合同シンポジウム
講演集

期日：2022 年 8 月 29 日（月）〜 8 月 31 日（水）
会場：日本大学 理工学部駿河台校舎

まえがき

本講演集は，2022 年 8 月 29 日 (月) から 8 月 31 日 (水) までの 3 日間にわたり，日本大学理工学部駿河台校舎で開催された第 61 回実函数論・函数解析学合同シンポジウムの講演集です．

本シンポジウムの開催のために多くの方々にご協力をいただきましたが，関係者各位のご尽力によって，講演者の方々の素晴らしい論文を本講演集で発表することができました．各グループの責任者の方々，講演者の皆様，本シンポジウム参加者の皆様方に深く感謝いたします．

なお，本シンポジウムの講演会場の運営，および講演集の作成には，下記の科学研究費補助金の援助を受けています．

基盤研究 (C)（代表 河邊 淳）研究課題番号：20K03695
「非線形積分の収束定理の精密化と非線形積分が定める関数空間の
位相的性質の解明」

河邊 淳　（信州大学・工学部）
武村 一雄　（日本大学・理工学部）
織田 寛　（拓殖大学・工学部）

第 61 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム
プログラム

期日：2022 年 8 月 29 日 (月) 14:00 〜 8 月 31 日 (水) 13:00

会場：日本大学理工学部駿河台校舎 タワースコラ S301

https://www.cst.nihon-u.ac.jp/campus/surugadai/laschola/

8 月 29 日（月）

14:00–15:00：林 拓磨（大阪大学大学院・情報科学研究科）

"Twisted D-modules over Dedekind schemes"

15:15–16:15：横田 智巳（東京理科大学・理学部数学科）

"Analysis of degenerate chemotaxis systems with/without logistic source"

8 月 30 日（火）

9:30–10:30：加藤 孝盛（佐賀大学・理工学部数理部門）

"Unconditional well-posedness for fifth order KdV type equations on the torus"

10:45–11:45：平良 晃一（立命館大学・理工学部数理科学科）

"Self-adjointness and Feynman propagator in Quantum Field Theory"

14:00–15:00：泉池 耕平（山口大学・教育学部数学研究科）

"2 変数ハーディ空間の不変部分空間"

15:15–16:15：阿部 敏一（茨城大学・理工学研究科）

"代数的中点と平均"

16:30 –17:30：森 迪也（理化学研究所）

“Lattice isomorphisms between projection lattices of von Neumann algebras”

8 月 31 日（水）

9:30 –10:30：田中 亮太朗（東京理科大学・教養教育研究院）

“バナッハ空間の非線形分類: Birkhoff-James 直交性の視点から”

10:45 –11:45：野ヶ山 徹（中央大学・理工学部数学科）

“Bourgain-Morrey 空間について”

12:00 –13:00：示野 信一（関西学院大学・理学部）

“Dunkl 調和多項式とその周辺”

※ COVID-19 感染予防のため，今回は懇親会はなしとさせていただきます.

代表者：河邊 淳（信州大学・工学部）
武村 一雄（日本大学・理工学部）
織田 寛（拓殖大学・工学部）

目次

Twisted D-modules over Dedekind schemes*

Takuma Hayashi †

概要

筆者は [13] において Fabian Januszewski 氏 (Paderborn 大学) と共に一般の基礎概型上の平滑概型に対して捻じれ D 加群の一般論を構築した．これは Alexander Beilinson 氏, Bernstein 氏, 柏原正樹氏, 及び谷崎俊之氏らの標数 0 の体上の平滑代数多様体に対する捻じれ D 加群の理論 ([1], [15], [2], [16]) の一般化になっている．また, 同プレプリントではこの理論, 特に捻じれ D 加群の閉埋め込みに関する順像関手を使って $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 加群の可換環上のモデルを構成した．本稿では Paderborn 大学の Fabian Januszewski 氏との共同研究である [13] に基づいて一般の基礎概型上の捻じれ D 加群の理論, 特に一般の基礎概型上の捻じれ D 加群の閉埋め込みに関する順像関手の定義と基本的な結果を紹介する．また, [11] に基づき, 基礎概型が Dedekind である場合に順像関手によって得られる捻じれ D 加群の大域化 (大域切断加群の相対版) の構造についてわかっていることを述べる．

1　記号一覧と仮定

本稿で使う記号と仮定をまとめておく．

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$ をそれぞれ整数環, 複素数体とする．
- 環 A 上の左加群, 右加群の圏をそれぞれ A-mod, A-$\mathrm{mod}_{\mathrm{r}}$ と書く．
- 環の層 $\mathcal{A}$ 上の左加群, 右加群の圏をそれぞれ $\mathcal{A}$-mod, $\mathcal{A}$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{r}}$ と書く．
- 位相空間 X 上の層 $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{M}$ の大域切断全体の集合を $\Gamma(X, \mathcal{M})$ と書く．
- 概型 X に対して X の構造層を $\mathcal{O}_X$ と書く．$\mathcal{O}_X^\times$ を単元のなす $\mathcal{O}_X$ の部分層とする．
- 概型上の線束 $\mathcal{L}$ に対してその双対を $\mathcal{L}^\vee$ と書く．
- 概型の平滑射 $X \to S$ に対して X 上の S ベクトル場の層を $\Theta_{X/S}$ と書く．また, X 上の S 標準束を $\omega_{X/S}$ と書く．$S = \operatorname{Spec} F$ (F は体) のときは各々を $\Theta_{X/F}$, $\omega_{X/F}$ と書く．
- フィルター加群の層 $(\mathcal{M}, F_\bullet\mathcal{M})$ に付随する次数付き加群の層を $\mathrm{gr}_F\,\mathcal{M}$ と書く．また, 各整数 p に対して $\mathrm{gr}_F\,\mathcal{M}$ の p 次の部分を $\mathrm{gr}^p\,\mathcal{M}$ と書く．ただし特定の整数 p を強調するつもりがない場合は $\mathrm{gr}_F^\bullet\,\mathcal{M}$ と書く．
- 断りがない限り本稿のフィルター加群の層 $(\mathcal{M}, F_\bullet\mathcal{M})$ はすべて正であると仮定する．つまり, p が負の整数のとき $F_p\mathcal{M}$ は零層であるものとする．

* 本研究は日本学術振興会・特別研究員奨励費 (課題番号：21J00023) の助成を受けたものである．
† 大阪大学大学院情報科学研究科 hayashi-t@ist.osaka-u.ac.jp

2 捻じれ D 加群とは?

まず初めに古典的な (捻じれ) D 加群がどういうものかについて手短に説明する.

X を平滑複素代数多様体とする. $\mathcal{O}_X$ を積により $\mathcal{O}_X$ の $\mathbb{C}$ 線形作用素とみなす. このとき $\mathcal{O}_X$ と $\Theta_{X/\mathbb{C}}$ が生成する $\mathbb{C}$ 線形作用素の層のことを微分作用素の層と呼び, $\mathcal{D}_X$ と書く.

例 2.1. $X = \mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[t]$ とする. このとき $\mathcal{D}_X$ は左 $\mathcal{O}_X$ 加群として

$$\mathcal{D}_X = \oplus_{n\geq 0}\mathcal{O}_X\frac{d^n}{dt^n}$$

と表すことができる. $\mathcal{D}_X$ の環構造は右辺の標準的な環構造と一致する.

D 加群とは言葉の通り, $\mathcal{D}_X$ という環の層の上の加群のことである. では今回接頭語についている「捻じれ」とはどういう意味か? 答えは作用すべき環の層を「捻じる」という意味である.

例 2.2. $\mathcal{L}$ を X 上の線束とする. このとき $\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}^\vee$ は

$$(\varphi\otimes P\otimes\psi)(\varphi'\otimes P'\otimes\psi') = \varphi\otimes P\langle\psi,\varphi'\rangle P'\otimes\psi'$$

により $\mathbb{C}$ 代数の層になる. ここで $\langle -,-\rangle$ は $\mathcal{L}^\vee$ と $\mathcal{L}$ の標準的なペアリングである. 上の式を見ると間に $\langle\psi,\varphi'\rangle$ という関数が入ることに注意したい. $\mathcal{L}$ は線束であるから, $\langle\psi,\varphi'\rangle$ (実際には φ や ψ) は局所的に無視することができる. しかし相異なる局所自明化の間の変換を計算してみると一方の自明化上の局所ベクトル場 $\partial\in\Theta_{X/\mathbb{C}}$ はもう一方の局所自明化上では $\partial - f\in\Theta_{X/\mathbb{C}}\oplus\mathcal{O}_X$ (f は $\mathcal{O}_X$ のある局所切断) という形の式で表示されてしまうことがわかる. さらにこの計算から $H^2(X,\Omega^{\geq 1}_{X/\mathbb{C}})$ の元が得られることがわかる. ここで $\Omega^{\geq 1}_{X/\mathbb{C}}$ は de Rham 複体 $\Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}$ の 0 次の項を零層に置き換えたものである. このコホモロジー類は $d\log[\mathcal{L}]$ と表すことができる. $d\log$ と $[\mathcal{L}]$ について説明しよう. まず, 次数 1 の部分が $\mathcal{O}_X^\times$ で他の次数の部分がすべて自明な Abel 群である複体を $\mathcal{O}_X^\times[-1]$ と書く. また, $\Omega^{\geq 1}_{X/\mathbb{C}}$ を加法により Abel 群の複体とみなす. このとき $f\mapsto\frac{df}{f}$ は Abel 群の複体の射 $d\log:\mathcal{O}_X^\times[-1]\to\Omega^{\geq 1}_{X/\mathbb{C}}$ を定める. この射は log 微分と呼ばれている. また, この射が誘導する Abel 群の準同型 $H^1(X,\mathcal{O}_X^\times)\to H^2(X,\Omega^{\geq 1}_{X/\mathbb{C}})$ を同じく $d\log$ と書く. $[\mathcal{L}]$ は $\mathcal{L}$ の定める $H^1(X,\mathcal{O}_X^\times)$ の元である.

より一般に, $\mathcal{D}_X$ 内の $\Theta_{X/\mathbb{C}}$ の交換子を局所的に $\Theta_{X/\mathbb{C}}$ の 2 余輪体によって捩じってそれらを貼り合わせて得られる代数の層のことを捻じれ微分作用素の層または tdo と呼ぶ. tdo とは英語で捻じれ微分作用素の層を意味する sheaf of twisted differential operators のうち sheaf of を除いて頭文字をとった略称である. 「$\Theta_{X/\mathbb{C}}$ の交換子を $\Theta_{X/\mathbb{C}}$ の 2 余輪体によって捩じる」というのは $\Theta_{X/\mathbb{C}}$ の 2 余輪体 c に対して $\Theta_{X/\mathbb{C}}\oplus\mathcal{O}_X$ を値に持つ新しい交換子 $[-,-]_c$ を

$$[\partial,\partial']_c = [\partial,\partial'] + c(\partial,\partial')$$

により定めることを意味する. ここで ∂,∂' は $\Theta_{X/\mathbb{C}}$ の局所切断, $[\partial,\partial']$ はベクトル場の通常の意味での交換子, つまり

$$[\partial,\partial'] = \partial\partial' - \partial'\partial$$

である.

なお, 上述の例の場合は「局所自明」と言われる状況で, 局所的に定まる 2 余輪体自体は自明になる. ただしそれらをつなげる 1 余鎖が一般には非自明になっている. 捻じれ微分作用素の層の方で言い換えれば, 局所

的には $\mathcal{D}_X$ と同型だが, その貼り合わせ方が非自明で, その $\mathcal{D}_X$ の局所的な変換関数が $H^2(X, \Omega^{\geq 1}_{X/\mathbb{C}})$ の元を定めると言っている. つまり上の例では貼り合わせ方に捻じれがあるというわけである. [1] の捻じれ微分作用素の層の定義はむしろ「$\mathcal{D}_X$ を局所的に貼り合わせた層」であったのだが, 後になって [15], [2] で一般化されたようである.

3 動機

捻じれ D 加群とは捻じれ微分作用素の層の上の加群のことである. これらの概念は [1] において導入された. その主な目的は自明とは限らない無限小指標を持つ複素半単純 Lie 環の表現または Harish-Chandra 加群と (部分) 旗多様体を結びつけることにあった (いわゆる Beilinson-Bernstein 対応). その後, 捻じれ微分作用素の層に関する一般論 (特に捻じれ微分作用素の層の関手的操作) について [15], [2] で調べられた. D 加群の順像や逆像などの関手的操作は [5] や [14] などにまとめられている. 捻じれ D 加群の場合の基本的な関手的操作の定義といくつかの基本的な結果は (ホロノミー加群と呼ばれるある強い有限性を持つ捻じれ D 加群のクラスの場合に) [16] にまとめられている[*1]. 実際に捻じれ D 加群に対して標準的に定義されるいくつかの関手の基本性質を証明したい場合には [5] や [14] に書かれいている議論を捻じれ D 加群の言葉に直せばよい.

捻じれ微分作用素の層及び捻じれ D 加群の一般論の表現論における恩恵として例えば次のような結果が知られている:

定理 3.1 ([17] Theorem 5.1, Corollary 5.5)**.** *G を連結実半単純代数群, θ を G の Cartan 対合, K を G の θ による固定部分群の単位成分とする. K の極大トーラス T を 1 つとり, H を T に付随する G の基本 Cartan 部分群とする. H, K, G の複素化をそれぞれ $H_{\mathbb{C}}$, $K_{\mathbb{C}}$, $G_{\mathbb{C}}$ と書く. Q' を $H_{\mathbb{C}}$ を含む $G_{\mathbb{C}}$ の θ 安定放物型部分群とし, $\bar{Q}'$ をその複素共役とする. u を $K_{\mathbb{C}} \cap \bar{Q}'$ の冪単根基の次元とする. $\mathcal{L}$ を Q' に付随するコホモロジー誘導関手 ([18] (5.3a)) とする. $i' : K_{\mathbb{C}}/(K_{\mathbb{C}} \cap \bar{Q}') \hookrightarrow G_{\mathbb{C}}/\bar{Q}'$ を $\bar{Q}'$ に付随する軌道射とする. θ 安定という仮定からこれは閉埋め込みであることに注意する. $\mathcal{A}'$ を $G_{\mathbb{C}}/\bar{Q}'$ 上の $G_{\mathbb{C}}$ 同変捻じれ微分作用素の層, $\mathcal{M}'$ を $K_{\mathbb{C}}/(K_{\mathbb{C}} \cap \bar{Q}')$ 上の $K_{\mathbb{C}}$ 同変 $(i')^{\cdot}\mathcal{A}'$ 接続, M' を $\mathcal{M}'$ の $\bar{Q}' \cap K_{\mathbb{C}}$ におけるファイバーとする. このとき Harish-Chandra 加群のある同型写像*

$$H^p(G_{\mathbb{C}}/\bar{Q}', i'_+\mathcal{M}') \cong \mathcal{L}_{u-p}(M')$$

が存在する. ここで i'_+ は捻じれ D 加群の順像関手である.

論文としては上述の引用のとおりだが, 1987 年前後にはこの結果は専門家にはよく知られていたようである. 特別な場合として次のような結果が得られる:

系 3.2. *G, θ, K, T, H, $H_{\mathbb{C}}$, $K_{\mathbb{C}}$, $G_{\mathbb{C}}$, Q', $\bar{Q}'$, i', $\mathcal{A}'$ を定理 3.1 のものとする. $\mathfrak{q}$ を Q' の Lie 環とする. $\mathcal{L}'$ を $K_{\mathbb{C}}/(K_{\mathbb{C}} \cap \bar{Q}')$ 上の線束で $K_{\mathbb{C}}$ 同変 $(i')^{\cdot}\mathcal{A}$ 接続の構造が与えられているとする. λ を $\mathcal{L}'$ の $\bar{Q}' \cap K_{\mathbb{C}}$ におけるファイバーとする. このとき Harish-Chandra 加群の同型写像*

$$\Gamma(G_{\mathbb{C}}/\bar{Q}', i'_+\mathcal{L}') \cong A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$$

が存在する.

[*1] [16] でホロノミー加群だけを考えていたのはホロノミー加群の「双対性」を使って新たな順像・逆像関手を扱おうとしたためである. [16] では双対性を使わない方の関手も定義されており, こちらはホロノミーとは限らない一般の捻じれ D 加群に対してそのまま定義 (やいくつかの基本的な結果) を拡張できる.

$A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 加群とは離散系列表現を含むある特別な表現であり, Lie 群の表現論だけでなく保型表現論においても重要な役割を持つ表現である, とだけここでは述べておくことにする.

ところで, 2010 年代になって保型表現論に関連して Harish-Chandra 加群の数論的構造 (有理構造や整構造) が注目されるようになった. Michael Harris 氏は上述の幾何的な構成を真似ることで離散系列表現の代数体上のモデルを構成することを提案した ([9], [10]). 数論的な立場からは $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 加群をより小さい環上で定義したいところである. ここでは, $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 加群の代数体上の構造が数論に応用を持つならより精密な構造である整構造を持てば整数論でもより強い結果が期待できるだろうと理解してもらえればよい. Harris 氏のアイデアを踏まえたうえでさらに環上の表現を作ろうと思った場合には環上の捻じれ D 加群の理論が欲しいところである. そこで, Fabian Januszewski 氏と私は一般の基礎概型を底とする捻じれ D 加群の理論を [13] 1 – 4 節において構築した. この応用として, 上述の幾何的構成を概型上でやり直すことで $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 加群の概型上のモデルの幾何的な構成を得た ([13] Corollary 6.2.3).

本稿ではまず捻じれ微分作用素の層に関する諸定義と基礎的な結果を簡単にまとめる. その後, $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 加群の幾何的構成の中核を担う捻じれ D 加群の閉埋め込みに付随する順像関手の定義と基礎的な性質について紹介したい. その後, 閉埋め込みによる順像で得られた捻じれ D 加群およびその大域化の構造について最近分かったことを説明する.

4　捻じれ微分作用素の層

2, 3 節でも述べたように捻じれ D 加群とは捻じれ微分作用素の層上の加群である. 従って, 捻じれ D 加群を定義するには捻じれ微分作用素の層を定式化する必要がある. また, 捻じれ D 加群の関手的操作を定義するにはまず捻じれ微分作用素の層の関手的操作が必要である. 結論を言えば, [15], [2] にある捻じれ微分作用素の層の定義を微修正することで [15], [2] にある捻じれ微分作用素の層の理論を一般の底概型上の捻じれ微分作用素の層の理論に (少なくとも形式的には) ほぼそのまま拡張することができるということを [13] で確認した. 捻じれ微分作用素の層のことをすべて書こうとすると長くなってしまうのでここでは後の説明に必要な内容について結論だけを簡単にまとめることにした. もう少し詳しい解説としては [12] を挙げておく. 正確なことは [13] の 1 節を参照してもらいたい.

$x : X \to S$ を概型の平滑射とする.

定義 4.1 ([13] Definition 1.1.4)**.** X 上の包括的擬可換フィルター代数の層 $\mathcal{A}$ と $x^{-1}\mathcal{O}_S$ 準同型 $i : \mathcal{O}_X \to \mathcal{A}$ が X 上の捻じれ微分作用素の層であるとは次の条件を満たすことである:

(i) i は $F_0\mathcal{A}$ への同型である.

(ii) 自然な射 $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X} \mathrm{gr}^1 \mathcal{A} \to \mathrm{gr}\,\mathcal{A}$ が同型である.

(iii) $e \mapsto [e, -]$ により定まる射 $\sigma : \mathrm{gr}^1 \mathcal{A} \to \Theta_{X/S}$ は同型である.

X 上の捻じれ微分作用素の層のなす圏を $\mathrm{TDO}_{X/S}$ と書く.

例 4.2 ([15] Proposition 2.3.2, [2] 2.1.2. Lemma)**.** $S = \mathrm{Spec}\, F$ (F は標数 0 の体) とする. このとき [15] Definition 2.3.3, [2] 2.1.1. Definition の意味での捻じれ微分作用素の層は最大 D フィルターにより定義 4.1 の意味で捻じれ微分作用素の層になる. なお, [15] 及び [2] にある捻じれ微分作用素の層を定義 4.1 の意味での捻じれ微分作用素の層にするようなフィルターは一意であり, その意味で定義 4.1 は [15] 及び [2] の捻じれ微分作用素の層の定義の一般化になっている.

注意 4.3 ([15] 2.4–2.6 節, [2] 2.1.4. Lemma, 2.1.6. Lemma, [13] Theorem 1.2.28, Corollary 1.3.15)**.** 定義 4.1 (または [15] Definition 2.3.3, [2] 2.1.1. Definition) は 2 節で説明した定義とは一見大きく異なる．しかし両者の捻じれ微分作用素の層のフィルターの 1 次以下の部分を観察すると S が標数 0 の体のスペクトラムの場合には 2 つの定義が実は同じ対象を定めているということがわかる．

例 4.4 ([3] Example 4.5, Proposition 4.6, Corollary 4.7)**.** ある正整数 n が存在して $n\mathcal{O}_X$ が自明になるとする．このとき $\mathcal{O}_X$ の PD 微分作用素の層は自然に捻じれ微分作用素の層をなす．

例 4.5. X を S 上のアファイン直線 $\mathbb{A}^1_S$ とし, この座標関数を t で表す．このとき $\oplus_{n\geq 0}\mathcal{O}_X\frac{d^n}{dt^n}$ には $\mathcal{O}_X$ と $\frac{d}{dt}$ で生成されかつ標準的な関係式が成り立つように捻じれ微分作用素の層の構造を定めることができる．

例 4.6 ([13] Example 1.1.6)**.** $\mathcal{A}$ が捻じれ微分作用素の層のとき $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ は自然な捻じれ微分作用素の層の構造を持つ．

例 4.7 ([13] Example 1.1.7)**.** $\mathcal{A}$ を捻じれ微分作用素の層, $\mathcal{L}$ を X 上の線束とする．このとき例 2.2 と同様にして $\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}^\vee$ に捻じれ微分作用素の層の構造が定まる．

定理 4.8 ([13] Theorem 1.3.35, Proposition 1.3.41, Lemma 3.6.5, Lemma 3.8.10)**.** $f:X\to Y$ を S 上の平滑概型の間の射とする．

(1) ある自然な関手 $f^{\cdot}:\mathrm{TDO}_{Y/S}\to\mathrm{TDO}_{X/S}$ が定義できる．

(2) Y 上の各捻じれ微分作用素の層 $\mathcal{A}$ に対して $\mathcal{A}_{X\to Y}\coloneqq\mathcal{O}_X\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}f^{-1}\mathcal{A}$ には (忠実とは限らない) 標準的な $f^{\cdot}\mathcal{A}$ の右 $f^{-1}\mathcal{A}$ 線形左作用が入る．$\mathcal{A}_{X\to Y}$ は移行双加群と呼ばれることがある．

(3) $f=i$ が埋め込みであるとき, $\mathcal{A}_{X\to Y}$ は左 $i^{\cdot}\mathcal{A}$ 加群として局所自由である．

(4) Y 上の捻じれ微分作用素の層 $\mathcal{A}$ に対してある自然な同型

$$f^{\cdot}((\omega_{Y/S}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\omega_{Y/S}^\vee)^{\mathrm{op}})\cong(\omega_{X/S}\otimes_{\mathcal{O}_X}f^{\cdot}\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_X}\omega_{X/S}^\vee)^{\mathrm{op}}$$

が存在する．

移行双加群は次の節で重要な役割を果たす．

捻じれ D 加群の理論では状況に応じて左加群を考える場合と右加群を考える場合がある．(4) の同型は捻じれ D 加群の関手性を扱う際に現れる．

5 捻じれ D 加群の順像

この節では一般の基礎概型 S 上の平滑概型の捻じれ D 加群の順像関手を導入し, その基本性質について説明する．ただしここでは閉埋め込みの場合のみを論じる (理由は後述)．以下述べる内容は [16] にある関手の定義に基づいて [14] の議論を一般の底概型上の捻じれ D 加群の議論に書き換えたものである．ここで扱う話題については底が複素数体 (または標数 0 の体) のスペクトラムの場合の議論がそのまま一般の底概型の場合でも成立するため, 最初から底を一般の概型にして議論を進めることにした．

$i:Y\to X$ を F 上の平滑概型の閉埋め込みとする．また, $\mathcal{A}$ を X 上の捻じれ微分作用素の層とする．何か

良い関手 $i_+ : i^{\cdot}\mathcal{A}\text{-mod} \to \mathcal{A}\text{-mod}$ を定義したい. 以下のような図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
i^{\cdot}\mathcal{A}\text{-mod} \arrow[rr, dashed, "i_+"] \arrow[d, "\omega_{Y/S}\otimes_{\mathcal{O}_Y} -"'] & & \mathcal{A}\text{-mod} \arrow[d, "\omega_{X/S}\otimes_{\mathcal{O}_X} -"] \\
\omega_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} i^{\cdot}\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/S}^{\vee}\text{-mod} \arrow[d, "\wr"'] & & \omega_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{X/S}^{\vee}\text{-mod} \arrow[d, "\wr"] \\
i^{\cdot}((\omega_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{X/S}^{\vee})^{\mathrm{op}})\text{-mod}_{\mathrm{r}} \arrow[rr, dashed, "i_+"] & & (\omega_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{X/S}^{\vee})^{\mathrm{op}}\text{-mod}_{\mathrm{r}} .
\end{tikzcd}$$

図式について説明する. 左 $i^{\cdot}\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{M}$ に対して $\omega_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ には, $\omega_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ の $\omega_{X/S}$ と捻じれ微分作用素の層 $\omega_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{X/S}^{\vee}$ の $\omega_{X/S}^{\vee}$ の標準的なペアリングをとって縮約し, $\mathcal{A}$ を $\mathcal{M}$ に作用させることで左 $\omega_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{X/S}^{\vee}$ 加群の構造が定まる. これが右上の矢印 (関手) である. 左上も同様である. 右下の関手は反環をとる操作による左加群と右加群の言い換えである. 左下の圏同型は定理 4.8 (4) から従う. この図式から, 左加群の順像を定義するには右加群の順像を定義すればよいことがわかる.

$\mathcal{M}$ を右 $i^{\cdot}\mathcal{A}$ 加群とする. 順像により右 $\mathcal{A}$ 加群を得るためには右 $i^{-1}\mathcal{A}$ 加群があればよい. しかし少なくとも環の層の準同型 $i^{-1}\mathcal{A} \to i^{\cdot}\mathcal{A}$ で標準的かつ簡単なものはないように思う.

前節で移行双加群と呼ばれる $(i^{\cdot}\mathcal{A}, i^{-1}\mathcal{A})$ 双加群 $\mathcal{A}_{Y\to X}$ を定義したことを思い出そう. 双加群の一般論から $\mathcal{M} \otimes_{i^{\cdot}\mathcal{A}} \mathcal{A}_{Y\to X}$ には右 $i^{-1}\mathcal{A}$ 加群の構造が自然に定まる. この右 $i^{-1}\mathcal{A}$ 加群 $\mathcal{M} \otimes_{i^{\cdot}\mathcal{A}} \mathcal{A}_{Y\to X}$ を i で押し出すことで右 $\mathcal{A}$ 加群 $i_*(\mathcal{M} \otimes_{i^{\cdot}\mathcal{A}} \mathcal{A}_{Y\to X})$ を得る. これを $i_+\mathcal{M}$ と書く. このようにして関手

$$i_+ = i_*(- \otimes_{i^{\cdot}\mathcal{A}} \mathcal{A}_{Y\to X}) : i^{\cdot}\mathcal{A}\text{-mod}_{\mathrm{r}} \to \mathcal{A}\text{-mod}_{\mathrm{r}}$$

を得る. この操作を捻じれ D 加群の順像と呼ぶ. 左加群ではなく右加群を考えたかった理由は移行双加群 $\mathcal{A}_{Y\to X}$ が $(i^{\cdot}\mathcal{A}, i^{-1}\mathcal{A})$ 双加群だからである. これにより上の図式に戻ると左加群の順像

$$i_+ : i^{\cdot}\mathcal{A}\text{-mod} \to \mathcal{A}\text{-mod}$$

も得られる. 左加群の順像 i_+ の定義を具体的に書き下してみると標準線束及びその双対とテンソル積を途中でとることになるわけだが, それらの操作は実は 1 つにまとめることができる. というのも,

$$\mathcal{A}_{X\leftarrow Y} = \omega_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\omega_{X/S}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{X/S})_{Y\to X} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_X} i^{-1}\omega_{X/S}^{\vee}$$

とすると, $\mathcal{A}_{X\leftarrow Y}$ には $(i^{-1}\mathcal{A}, i^{\cdot}\mathcal{A})$ 双加群の構造が入り, $i_+ \cong i_*(\mathcal{A}_{X\leftarrow Y} \otimes_{i^{\cdot}\mathcal{A}} -)$ であることが証明できる. ここで左辺の i_+ は上の図式を使って定義される左 $\mathcal{A}$ 加群の順像関手である.

次に i_+ の基本的な結果を少しだけ紹介したい. まず代数幾何において基本的な対象である準連接層の定義を復習しておく:

定義 5.1 ([7] (5.1.3)). $\mathcal{R}$ を X 上の (可換とは限らない) 環の層とする. 右 $\mathcal{R}$ 加群 $\mathcal{M}$ が準連接であるとはある開被覆 $X = \cup_{\lambda} U_{\lambda}$ が存在して各 λ ごとに完全列

$$\mathcal{F}_{\lambda,1} \to \mathcal{F}_{\lambda,2} \to \mathcal{M}|_{U_{\lambda}} \to 0$$

であって $\mathcal{F}_{\lambda,1}$ 及び $\mathcal{F}_{\lambda,2}$ が自由右 $\mathcal{R}|_{U_{\lambda}}$ 加群であるようなものが存在することである.

捻じれ D 加群の準連接性を論じるうえでは次の結果は重要である:

命題 5.2 ([13] Proposition 2.2.2). $\mathcal{M}$ を右 $\mathcal{A}$ 加群とする. このとき次は同値である:

(a) $\mathcal{M}$ は右 $\mathcal{A}$ 加群として準連接である.

(b) 構造射 $\mathcal{O}_X \to \mathcal{A}$ による制限により $\mathcal{M}$ を右 $\mathcal{O}_X$ 加群とみなす. このとき $\mathcal{M}$ は右 $\mathcal{O}_X$ 加群として準連接である.

このような事情からか D 加群の教科書では上の命題の条件 (b) を D 加群の準連接性の定義として採用することが多いようである. この命題の系を 1 つ紹介しておく:

系 5.3. $\mathcal{A}\text{-mod}_{\mathrm{r,qc}}$ は $\mathcal{A}\text{-mod}_{\mathrm{r}}$ における余極限及び有限極限で閉じる.

圏論の言葉に慣れていない場合は有限極限を「核と有限直積」と読み替えてもよい. 同様に余極限のことは「余核と (有限とは限らない) 直和」と読み替えてもよい. この主張は対応する $\mathcal{O}_X$ 加群の場合の結果及び上述の 2 つ準連接性の同値性からすぐに従う. 準連接加群について基本的な結果をもう 1 つだけ紹介しておこう:

補題 5.4 ([13] Lemma 2.2.3)**.** X 及び S がアファインであるとする. $A = \Gamma(X, \mathcal{A})$ とおく. このとき

$$\Gamma(X, -) : \mathcal{A}\text{-mod}_{\mathrm{r,qc}} \to A\text{-mod}_{\mathrm{r}}$$

は準逆を持つ. 特に $\mathcal{A}\text{-mod}_{\mathrm{r,qc}}$ と $A\text{-mod}_{\mathrm{r}}$ は圏同値である.

$\mathcal{O}_X$ 加群の場合に類似の結果がよく知られている. その場合の準逆を直接計算により $A\text{-mod}_{\mathrm{r}} \to \mathcal{A}\text{-mod}_{\mathrm{r,qc}}$ に持ち上げることでこの補題は証明される. この結果はすぐあとで使われる.

では本題に入ろう.

定理 5.5 ([13] Theorem 3.8.12 (1))**.** i_+ は有限極限, 余極限, 及び準連接加群を保つ.

証明について説明しよう. まず i が閉埋め込みなので i_* は (準連接とは限らない) 加群の層の極限も余極限も保つ. $- \otimes_{i^\cdot \mathcal{A}} \mathcal{A}_{Y \to X}$ は明らかに余極限を保つ. また定理 4.8 (4) により有限極限も保つ. よって i_+ は有限極限, 余極限を保つ. 後半はもう少し難しい. まず主張が S 及び X について局所的なので S, X はアファインであると仮定してよい. このとき, i は閉埋め込みだったから Y もアファインである. さて, $\mathcal{M}$ を準連接右 $i^\cdot \mathcal{A}$ 加群とする. このとき補題 5.4 から右 $i^\cdot \mathcal{A}$ 加群の完全列

$$\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{M} \to 0$$

で $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ が自由であるようなものが存在する. i_+ は完全関手だったから

$$i_+\mathcal{F}_1 \to i_+\mathcal{F}_2 \to i_+\mathcal{M} \to 0$$

も完全である. 準連接性は余極限で閉じるので $\mathcal{M}$ は自由であると仮定してよい. さらに, i_+ は直和を保つので $\mathcal{M} = i^\cdot \mathcal{A}$ としてよい. 従って $i_*\mathcal{A}_{Y \to X}$ が右 $\mathcal{O}_X$ 加群として準連接であるかを確かめればよい. $F_\bullet \mathcal{A}_{Y \to X} \coloneqq i^* F_\bullet \mathcal{A}$ とする. このとき $F_\bullet \mathcal{A}_{Y \to X}$ が $\mathcal{A}_{Y \to X}$ の $(\mathcal{O}_Y, i^{-1}\mathcal{O}_X)$ 加群としての包括的フィルターになっていることが容易に証明できる. これを押し出して $F_\bullet i_* \mathcal{A}_{Y \to X} \coloneqq i_* F_\bullet \mathcal{A}_{Y \to X}$ とする. このとき i_* の完全性から

$$\mathrm{gr}_F^\bullet\, i_*\mathcal{A}_{Y \to X} \cong i_* i^* \operatorname{Sym}_{\mathcal{O}_X} \Theta_{X/S}$$

がわかる. 特に $\operatorname{Sym}_{\mathcal{O}_X} \Theta_{X/S}$ の可換性から, $\mathrm{gr}_F^\bullet\, i_*\mathcal{A}_{Y \to X}$ に誘導される左右の $\mathcal{O}_X$ 加群の構造は一致し, 特に $\mathrm{gr}_F^\bullet\, i_*\mathcal{A}_{Y \to X}$ は右 $\mathcal{O}_X$ 加群として準連接であることがわかる. あとは帰納法を使って各非負整数 p に対して $F_p i_* \mathcal{A}_{Y \to X}$ が右 $\mathcal{O}_X$ 加群として準連接であるとわかる. また i_* はフィルター余極限 (順極限) を保つので

$i_*\mathcal{A}_{Y\to X}$ のフィルター $F_\bullet i_*\mathcal{A}_{Y\to X}$ は包括的である．以上より $i_*\mathcal{A}_{Y\to X}$ は右 $\mathcal{O}_X$ 加群として準連接であることが従う．

最後に閉埋め込みだけを考えた理由を説明したい．定義を見てわかる通り，捻じれ D 加群の順像は層の通常の順像と比べて難しい．その結果，特に合成との相性が悪い．というのも，仮に一般の平滑代数多様体の射に対しても順像を同様に定義したとしよう．$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を平滑代数多様体の射，$\mathcal{A}$ を Z 上の捻じれ微分作用素の層とすれば $g_+ \circ f_+ \cong (g \circ f)_+$ という同型は望みたいところだろう．しかし $g_+ \circ f_+$ 側では 2 つの双加群が現れてしまう．右辺と同型を示すためには 2 つをまとめたいところだが，2 つの双加群の間に f_* が挟まっているので簡単にはまとめられない．というわけで f_* とテンソル積のある種の交換則である射影公式を使おうということになるのだが，よく知られているように射影公式は導来圏のレベルではある程度成り立つが，Abel 圏のレベルではほとんど成り立たない．そのような理由から捻じれ D 加群の関手的操作を行う際は通常導来圏を考える．しかし閉埋め込みの場合に限定すると上で述べた議論から捻じれ D 加群の順像はアーベル圏の完全関手に制限することができてしまう．また，本稿では定理 3.1 及びこの定理の底を一般化したものにのみ興味がある．これらの事情を理由として，本稿では一般の場合の順像については立ち入らず，閉埋め込みの場合の順像のみを考えることにしたのである．

なお，それなら導来圏を考えればうまくいくのかと言われると，少なくとも適切な有限性のもとではうまくいく，というのが回答になる．というのも，そもそも移行双加群が大きいため，射影公式を成立させるために通常課される仮定が今回は満たされないのである．従って射影公式が欲しい形で成り立つかどうかについては新しく議論する必要がある．それを実際にやったものとしては [14] Proposition 1.5.21 の証明やその一般化である [13] Lemma 3.8.33 がある．これらの帰結として (適切な有限性のもとでは) 順像と合成の整合性 $g_+ \circ f_+ \simeq (g \circ f)_+$ が導来圏では成り立つことことが実際にわかる ([14] Proposition 1.5.21, [13] Theorem 3.8.34).

6 捻じれ D 加群の大域化

この節では大域化について手短に説明したい．系 3.2 に見られるように，複素代数多様体上の捻じれ D 加群から表現を得ようとした場合に最も簡単な方法は大域切断全体の加群をとることである．これをここでは大域化と呼ぶ．では底概型が一般の場合はどうすればよいか? $x : X \to S$ を概型の平滑射，$\mathcal{M}$ を底を S とする X 上の捻じれ D 加群とする．S が可換環 k のスペクトラムの場合，k 加群の圏と $\operatorname{Spec} k$ 上の準連接 $\mathcal{O}_S$ 加群の圏の圏同値を踏まえれば $\Gamma(X, \mathcal{M})$ を大域化としたいところだろう．もっとも，今 $\mathcal{M}$ や x にきちんとした仮定をつけていないので準連接性は担保されないが．

では S が一般の場合はどうだろう?

定義 6.1. $x_*\mathcal{M}$ を $\mathcal{M}$ の大域化と呼ぶ．

先ほどの k 加群の圏と $\operatorname{Spec} k$ 上の準連接 $\mathcal{O}_S$ 加群の圏の圏同値がないのだから，単に $\mathcal{O}_S$ 加群のところで止めることにする，というのが上述の定義である．なお，定理 3.1 や前節の最後の注意を踏まえれば導来関手まで考えたほうが自然かもしれないがそれは本稿の目的とはずれるのでやはりここでは導来関手の話題には立ち入らないことにする．

7 Dedekind 概型上の捻じれ D 加群の順像の大域化の構造

最後に, ある種の Dedekind 概型上の捻じれ D 加群の大域化の有限性について論じて本稿を終わりにしたい. 念のため Dedekind 概型の定義を思い出しておこう:

定義 7.1 ([6] (7.13) 節)**.** 1 次元以下の Nother 整正則概型のことを Dedekind 概型と呼ぶ.

容易にわかる通り, 整概型が Dedekind であることは任意のアファイン開部分集合が Dedekind 整域のスペクトラムであることと同値である. 代数体の整数環 ($\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\right]$) あるいはその局所化のスペクトラムが Dedekind 概型の典型的な例である. この例を見るに代数的整数論などの文脈では Dedekind 整域や Dedekind 概型は 1 次元であると仮定することが多いかもしれないが, 今回はその仮定は不要なので特に仮定しないことにする. つまりこの定義では体のスペクトラムも Dedekind 概型とみなしているというわけである.

以下 S を Dedekind 概型, $i : Y \hookrightarrow X$ を S 上の平滑概型の閉埋め込み, $\mathcal{A}$ を X 上の捻じれ微分作用素の層, $\mathcal{V}$ を右 $i^{\cdot}\mathcal{A}$ 加群とする. さらに次を仮定する:

(i) 構造射 $x : X \to S$ は準コンパクトである.
(ii) 構造射 $y : Y \to S$ は固有である.
(iii) Y は整である.
(iv) $\mathcal{V}$ は $\mathcal{O}_Y$ 加群として連接かつ捻じれ自由である.

3 つ目の仮定は現実的には $\mathcal{V}$ は $\mathcal{O}_Y$ 加群として有限局所自由と仮定するのが妥当だろう.

定理 7.2 ([11] Theorem 1.1)**.** $x_* i_+ \mathcal{V}$ の包括的フィルター $G_\bullet x_* i_+ \mathcal{V}$ であって各整数 p に対して $\mathrm{gr}^p\, x_* i_+ \mathcal{V}$ が $\mathcal{O}_S$ 上有限局所自由なものが存在する.

Mittag-Leffler 条件に関する標準的な議論から次が言える:

系 7.3 ([11] Corollary 1.3)**.** S がアファインであると仮定する. S の座標環を k と書く. このとき $\Gamma(X, i_+ \mathcal{V})$ は k 加群として射影的である.

この系により, k が 1 次元のとき $\Gamma(X, i_+ \mathcal{V})$ は (零加群でない限り) k の商体上の加群からは来ないと言える. 特に, [13] で構成した $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 加群の 1 次元 Dedekind 環 k 上のモデル (3 節参照) は k の商体上の捻じれ D 加群または Harish-Chandra 加群からは来ないことがわかる. つまり我々の捻じれ D 加群は本質的に新しい表現のモデルを作り出していると言える.

では証明について簡単に述べたい. 基本的な方針は大域化 $x_* i_+ \mathcal{V}$ を考える前に $i_+ \mathcal{V}$ で対応する結果を与えることである. 5 節で $F_\bullet \mathcal{A}_{Y \to X}$ というフィルターを定義したことを思い出そう. 各整数 p に対して $G_p \mathcal{A}_{Y \to X} \subset \mathcal{A}_{Y \to X}$ を $F_p \mathcal{A}_{Y \to X}$ が生成する左 $i^{\cdot}\mathcal{A}$ 部分加群と定義する. このとき $G_p \mathcal{A}_{Y \to X}$ は右 $i^{-1}\mathcal{O}_X$ 部分加群にもなっている. そこで,

$$
\begin{aligned}
G_\bullet i_+ \mathcal{V} &\coloneqq i_* (\mathcal{V} \otimes_{i^{\cdot}\mathcal{A}} G_\bullet \mathcal{A}_{Y \to X}) \\
G_\bullet x_* i_+ \mathcal{V} &\coloneqq x_* G_\bullet i_+ \mathcal{V} = y_* G_\bullet (\mathcal{V} \otimes_{i^{\cdot}\mathcal{A}} \mathcal{A}_{Y \to X}).
\end{aligned}
$$

とおく. これらはそれぞれ $i_+ \mathcal{V}$, $x_* i_+ \mathcal{V}$ の包括的フィルターになっている. また, 次の自然な同型が存在する:

$$
\mathrm{gr}_G^\bullet\, i_+ \mathcal{V} \cong i_* (\mathcal{V} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathrm{Sym}^\bullet_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}_{X/Y}).
$$

ここで $\mathcal{N}_{X/Y}$ は埋め込み i に関する法束である．この構成及び同型は複素数体上の場合には [4], [19] などで知られていた．

というわけで X 上の層のレベルでの構造がわかったのでそれを S の方に落とし込みたい．ひとまず上の同型をそのまま大域化してしまおう．つまり

$$x_* \operatorname{gr}^\bullet_G i_+\mathcal{V} \cong y_*(\mathcal{V} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \operatorname{Sym}^\bullet_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}_{X/Y})$$

という同型を考える．各整数 p に対して $\mathcal{V} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \operatorname{Sym}^p_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}_{X/Y}$ は捻じれ自由かつ連接であることに注意する．従って [7] Proposition (7.4.5) 及び [8] Thèoréme (3.2.1) より $x_* \operatorname{gr}^p_G i_+\mathcal{V}$ も捻じれ自由かつ連接である．なお, [7] Proposition (7.4.5) を使うには y が支配的であるという仮定が必要だった．この仮定は

(i) Y は整なので空でない．

(ii) y が平滑なので開写像である．

(iii) S は整なので既約である．

ということから満たされることがわかる．

本来調べたかったのは $\operatorname{gr}^p_G x_* i_+\mathcal{V}$ であった．というわけでこれを上で論じた $x_* \operatorname{gr}^p_G i_+\mathcal{V}$ と結び付けよう．方法は単純である．任意の整数 p に対して標準的な単射

$$\operatorname{gr}^p_G x_* i_+\mathcal{V} \hookrightarrow x_* \operatorname{gr}^p_G i_+\mathcal{V}$$

がある．これを使って両者を比較したい．ただしこれは複素数体上のときでさえ一般的には同型になるとは限らないので注意が必要である．従って性質だけを落とし込む．$x_* \operatorname{gr}^p_G i_+\mathcal{V}$ が捻じれ自由なのでその部分加群 $\operatorname{gr}^p_G x_* i_+\mathcal{V}$ も捻じれ自由である．同様に $\operatorname{gr}^p_G x_* i_+\mathcal{V}$ が連接であることを言いたい．そのためには $\operatorname{gr}^p_G x_* i_+\mathcal{V}$ が準連接であることがわかればよい．x は準コンパクトかつ準分離なので, 各フィルター $G_p i_+\mathcal{V}$ が準連接でさえあればよい．この証明は 2 通りある．1 つは i_+ が準連接加群を保つことの証明を $G_p i_+$ に置き換えてやり直すこと．もう 1 つは $\operatorname{gr}^p_G i_+\mathcal{V}$ が準連接であることを示して帰納法で $G_p i_+\mathcal{V}$ の準連接性を証明すること．$\operatorname{gr}^p_G i_+\mathcal{V}$ が準連接であることは前述の $\operatorname{gr}^\bullet_G i_+\mathcal{V}$ の計算からわかる．

以上により $\operatorname{gr}^p_G x_* i_+\mathcal{V}$ が $\mathcal{O}_S$ 加群として連接かつ捻じれ自由であるとわかった．S は Dedekind 概型だったから $\operatorname{gr}^p_G x_* i_+\mathcal{V}$ は有限局所自由である ([6] Proposition B.89 (4)).

参考文献

[1] A. Beĭlinson and J. Bernstein. Localisation de $\mathfrak{g}$-modules. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 292(1):15–18, 1981.

[2] A. Beilinson and J. Bernstein. A proof of Jantzen conjectures. In *I. M. Gel'fand Seminar*, volume 16 of *Adv. Soviet Math.*, pages 1–50. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[3] P. Berthelot and A. Ogus. *Notes on crystalline cohomology.* Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1978.

[4] F. V. Bien. *$\mathscr{D}$-modules and spherical representations*, volume 39 of *Mathematical Notes.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[5] A. Borel, P.-P. Grivel, B. Kaup, A. Haefliger, B. Malgrange, and F. Ehlers. *Algebraic D-modules*, volume 2 of *Perspectives in Mathematics.* Academic Press, Inc., Boston, MA, 1987.

[6] U. Görtz and T. Wedhorn. *Algebraic geometry I. Schemes.* Springer Studium Mathematik—Master. Springer Spektrum, Wiesbaden, second edition, [2020] ©2020. With examples and exercises.

[7] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (4):228, 1960.

[8] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (11):167, 1961.

[9] M. Harris. Beilinson-Bernstein localization over $\mathbb{Q}$ and periods of automorphic forms. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (9):2000–2053, 2013.

[10] M. Harris. Beilinson-Bernstein localization over $\mathbb{Q}$ and periods of automorphic forms: erratum. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (3):957–960, 2020.

[11] T. Hayashi. Filtrations on the globalization of twisted D-modules over Dedekind schemes, 2022. arXiv:2205.07539.

[12] T. Hayashi. Sheaves of twisted differential operators over schemes. To appear. Proceedings of Algebraic Lie Theory and Representation Theory (2022).

[13] T. Hayashi and F. Januszewski. Families of twisted $\mathcal{D}$-modules and arithmetic models of Harish-Chandra modules, 2018. arXiv:1808.10709.

[14] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki. *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, volume 236 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008. Translated from the 1995 Japanese edition by Takeuchi.

[15] M. Kashiwara. Representation theory and D-modules on flag varieties. *Astérisque*, (173-174):9, 55–109, 1989. Orbites unipotentes et représentations, III.

[16] M. Kashiwara and T. Tanisaki. Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras with negative level. II. Nonintegral case. *Duke Math. J.*, 84(3):771–813, 1996.

[17] S. N. Kitchen. Cohomology of standard modules on partial flag varieties. *Represent. Theory*, 16:317–344, 2012.

[18] A. W. Knapp and D. A. Vogan, Jr. *Cohomological induction and unitary representations*, volume 45 of *Princeton Mathematical Series.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[19] Y. Oshima. On the restriction of Zuckerman's derived functor modules $A_q(\lambda)$ to reductive subgroups. *Amer. J. Math.*, 137(4):1099–1138, 2015.

Analysis of degenerate chemotaxis systems with/without logistic source

Tomomi Yokota* (Tokyo University of Science)
(This is a joint work with Yuya Tanaka (Tokyo University of Science).)

1. Introduction

In this report we analyze finite-time blow-up (it will be called *blow-up* for short throughout this report) in quasilinear *degenerate* parabolic–elliptic chemotaxis systems with/without logistic source,

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m - \chi \nabla \cdot (u^\alpha \nabla v) + \lambda u - \mu u^\kappa, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ 0 = \Delta v - \overline{M_\ell}(t) + u^\ell, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \nabla u^m \cdot \nu = \nabla v \cdot \nu = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

with

$$\overline{M_\ell}(t) := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u^\ell(x,t)\, dx,$$

where

$$\Omega := B_R(0) \subset \mathbb{R}^n \ (n \in \mathbb{N})$$

is a ball with some $R > 0$; $m \ge 1$, $\chi > 0$, $\alpha \ge 1$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\kappa \ge 1$ and $\ell > 0$; ν is the outward normal vector to $\partial\Omega$; $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ is nonnegative, radially symmetric and nonincreasing with respect to $|x|$.

Recalling methods in some previous works, we proved finite-time blow-up by deriving the inequality

$$\phi'(t) \ge C\phi^{\alpha+\ell}(t)$$

with some $C > 0$, where ϕ is a moment-type functional. However, since the system (1.1) has the degenerate diffusion term Δu^m and possibly the initial data vanishing on some open subset of Ω, we deal with the system (1.1) in a framework of weak solutions, and thereby we cannot directly obtain the inequality $\phi'(t) \ge C\phi^{\alpha+\ell}(t)$. Hence we will derive an integral inequality of ϕ to show finite-time blow-up. To this end, we define *moment solutions* to the system (1.1).

The purpose of this report is to establish finite-time blow-up to the system (1.1). Before we state the main theorem, we define *moment solutions*, *maximal moment solutions* and *blow-up* for (1.1), and so we introduce two symbols w and ϕ as follows. For a pair

*Partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP22J11193.
E-mail: yokota@rs.tus.ac.jp

(u,v) of nonnegative and radially symmetric functions, we regard (u,v) as $(u(r,t),v(r,t))$ with $r:=|x|$ if necessary. Given $s_0\in(0,R^n)$ and $\gamma\in(-\infty,1)$, we set

$$w(s,t):=\int_0^{s^{\frac{1}{n}}}\rho^{n-1}u(\rho,t)\,d\rho\quad\text{for } s\in[0,R^n]\text{ and } t\ge 0$$

and we define the moment-type functional ϕ as

$$\phi(t):=\int_0^{s_0}s^{-\gamma}(s_0-s)w(s,t)\,ds\quad\text{for } t\ge 0.$$

Definition 1.1 (moment solutions)**.** Let $T\in(0,\infty]$. A pair (u,v) of nonnegative and radially symmetric functions defined on $\Omega\times(0,T)$ is called a *moment solution* of (1.1) on $[0,T)$ if

(i) $u\in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,T);L^\infty(\Omega))$ and,
$u^m\in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ if $T<\infty$; $u^m\in L^2_{\mathrm{loc}}([0,T);H^1(\Omega))$ if $T=\infty$,

(ii) $v\in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,T);H^1(\Omega))$,

(iii) $u\in C^0_{\mathrm{w-}\star}([0,T);L^\infty(\Omega))$,

(iv) for all $\varphi\in L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ with $\operatorname{supp}\varphi(x,\cdot)\subset[0,T)$ for a.a. $x\in\Omega$,

$$\int_0^T\int_\Omega(\nabla u^m\cdot\nabla\varphi-\chi u^\alpha\nabla v\cdot\nabla\varphi-(\lambda u-\mu u^\kappa)\varphi-u\varphi_t)\,dxdt=\int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)\,dx,$$
$$\int_0^T\int_\Omega\nabla v\cdot\nabla\varphi\,dxdt+\int_0^T\left(\overline{M_\ell}(t)\int_\Omega\varphi\,dx\right)dt-\int_0^T\int_\Omega u^\ell\varphi\,dxdt=0,$$

(v) (u,v) satisfies the following moment inequality:

$$\phi(t)-\phi(0)\ge K\int_0^t\phi^{\alpha+\ell}(\tau)\,d\tau\quad\text{for all } t\in(0,T)\tag{1.2}$$

for some constant $K=K(R,m,\chi,\alpha,\mu,\kappa,\ell,\gamma,s_0)>0$.

We next define *maximal moment solutions*, which are guaranteed by Zorn's lemma as in the proof of [**4**, Lemma 2.4].

Definition 1.2 (maximal moment solutions)**.** Define the set $\mathcal{S}$ as

$$\mathcal{S}:=\{(T,u,v)\mid T\in(0,\infty],\ (u,v)\text{ is a moment solution of (1.1) on }[0,T)\},$$

which is not empty by Proposition 2.1, with the order relation $\preceq$ given by

$$(T_1,u_1,v_1)\preceq(T_2,u_2,v_2)\ :\Longleftrightarrow\ T_1\le T_2,\ u_2|_{(0,T_1)}=u_1,\ v_2|_{(0,T_1)}=v_1.$$

Then Zorn's lemma assures some maximal element $(T_{\max},u,v)\in\mathcal{S}$, and (u,v) is called a *maximal moment solution* of (1.1) on $[0,T_{\max})$.

Definition 1.3 (blow-up)**.** Let (u, v) be a maximal moment solution of (1.1) on $[0, T_{\max})$. If u satisfies

$$\limsup_{t \nearrow T_{\max}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty,$$

then we say that (u, v) *blows up* at $T_{\max}$.

Now the main theorem reads as follows.

Theorem 1.4. *Let $n \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $\chi > 0$, $\alpha \geq 1$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\kappa \geq 1$ and $\ell > 0$. Assume that*

$$\alpha + \ell > \max \left\{ m + \frac{2}{n}\kappa, \kappa \right\}. \tag{1.3}$$

Then for all $M_0 > 0$ there exist $\eta_0 \in (0, M_0)$ and $r_\star \in (0, R)$ which satisfy the following property: *If*

$$u_0 \in L^\infty(\Omega), \quad u_0 \geq 0 \tag{1.4}$$

and

$$u_0 \text{ is radially symmetric, nonincreasing with respect to } |x| \tag{1.5}$$

as well as

$$\int_\Omega u_0(x)\,dx = M_0 \quad \text{and} \quad \int_{B_{r_\star}(0)} u_0(x)\,dx \geq M_0 - \eta_0, \tag{1.6}$$

then a maximal moment solution of (1.1) *on* $[0, T_{\max})$ *blows up at* $T_{\max} < \infty$.

Remark 1.5. The parameter values appearing in Theorem 1.4 are basically the same as in [**5**, Theorem 1.2], where finite-time blow-up has been obtained for the nondegenerate system. In particular, the condition (1.3) coincides with that in [**5**] in the case that $m \geq 1$ and $\alpha \geq 1$.

2. Local existence of moment solutions

The goal of this section is to show local existence of moment solutions to (1.1) as in the following key proposition, which plays an important role in the proof of blow-up.

Proposition 2.1 (local existence of moment solutions)**.** *Let $n \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $\chi > 0$, $\alpha \geq 1$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\kappa \geq 1$ and $\ell > 0$. Assume that* (1.3) *is satisfied. Then for all $M_0 > 0$ there exist $\eta_0 \in (0, M_0)$ and $r_\star \in (0, R)$ which satisfy the following property*: *If u_0 satisfies* (1.4)–(1.6)*, then there exists $T > 0$ such that* (1.1) *admits a moment solution (u, v) on $[0, T)$, i.e.,* (1.1) *has a weak solution (u, v) satisfying the moment inequality* (1.2)*.*

The key to the proof of blow-up is to construct the moment inequality (1.2), which is usually shown via the corresponding differential inequality as in [**1, 5, 7**]. However, we cannot derive it for *weak* solutions of (1.1) due to the lack of the smoothness. Therefore we will obtain it for approximate *smooth* solutions, denoted by u_ε with parameter $\varepsilon > 0$. Here the maximal existence time T_ε depends on ε, and so there is a possibility that T_ε vanishes in the passage to the limit as $\varepsilon \to 0$. This explains the reason for proving *uniform* lower bound of T_ε in Section 2.1.

2.1. Lower bound of existence time for approximate solutions

We recall that the system (1.1) includes the degenerate diffusion term Δu^m. Hence, in order to compensate for the lack of regularity of solutions to (1.1), we consider the following approximate problem:

$$\begin{cases} (u_\varepsilon)_t = \Delta(u_\varepsilon+\varepsilon)^m - \chi\nabla\cdot(u_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\alpha-1}\nabla v_\varepsilon) + \lambda u_\varepsilon - \mu u_\varepsilon^\kappa, & x\in\Omega,\ t>0,\\ 0 = \Delta v_\varepsilon - \overline{M_{\ell,\varepsilon}}(t) + u_\varepsilon^\ell, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \nabla u_\varepsilon\cdot\nu = \nabla v_\varepsilon\cdot\nu = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ u_\varepsilon(x,0) = u_{0\varepsilon}(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

where $\varepsilon\in(0,1)$ and

$$\overline{M_{\ell,\varepsilon}}(t) := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_\varepsilon^\ell(x,t)\,dx$$

as well as $u_{0\varepsilon}\in C^\infty(\overline{\Omega})$ is given by $u_{0\varepsilon} := (\rho_\varepsilon * \overline{u_0})|_{\overline{\Omega}}$, where

$$\overline{u_0}(x) := \begin{cases} u_0(x) & \text{if } x\in\Omega,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

and $\rho_\varepsilon\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ is the mollifier defined as $\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\rho(y)\,dy\right)^{-1}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, where

$$\rho(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{if } |x|<1,\\ 0 & \text{if } |x|\ge 1.\end{cases}$$

Then ρ_ε satisfies that $0\le\rho_\varepsilon\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\rho_\varepsilon\subset\overline{B_\varepsilon(0)}$, $\int_{\mathbb{R}^n}\rho_\varepsilon(x)\,dx = 1$. We know that ρ_ε is nonnegative, radially symmetric and nonincreasing with respect to $|x|$. Additionally, if u_0 is nonnegative, radially symmetric and nonincreasing with respect to $|x|$, then so is $u_{0\varepsilon}$ from the definition of $u_{0\varepsilon}$.

We first recall a well-known result about local existence of classical solutions to (2.1). The proof is based on a standard fixed point argument (see e.g. [**8**]).

Lemma 2.2. *Let $\varepsilon\in(0,1)$ and let $m\ge1$, $\chi>0$, $\alpha\ge1$, $\lambda>0$, $\mu>0$, $\kappa\ge1$ and $\ell>0$. Then there exist $T_\varepsilon\in(0,\infty]$ and a unique classical solution $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ of (2.1) satisfying*

$$\begin{cases} u_\varepsilon\in C^0(\overline{\Omega}\times[0,T_\varepsilon))\cap C^{2,1}(\overline{\Omega}\times(0,T_\varepsilon)),\\ v_\varepsilon\in\bigcap_{q>n}C^0([0,T_\varepsilon);W^{1,q}(\Omega))\cap C^{2,0}(\overline{\Omega}\times(0,T_\varepsilon)).\end{cases}$$

Moreover, u_ε and v_ε are nonnegative and radially symmetric.

In the following let $(u_\varepsilon,v_\varepsilon)$ be the solution of (2.1) on $[0,T_\varepsilon)$ as in Lemma 2.2. Next, in order to guarantee that the existence time T_ε does not vanish after the passage to the limit as $\varepsilon\to0$, we confirm uniform lower bound of T_ε, that is, we find $T_0\in(0,\infty)$ such that for any $\varepsilon\in(0,1)$,

$$T_0\le T_\varepsilon \quad\text{and}\quad \|u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\le K_0 \quad\text{for all } t\in[0,T_0), \tag{2.2}$$

where $K_0 > 0$ is a constant independent of ε. Before we prove (2.2), we show the following lemma. The proof is based on that of [**3**, Lemma 2.4]. However, there are two differences from the literature. One is that the first equation in (2.1) has the logistic source, and the other is that the second equation in (2.1) is elliptic. So we give a full proof for confirmation.

Lemma 2.3. *Let $m \geq 1$, $\chi > 0$, $\alpha \geq 1$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\kappa \geq 1$, $\ell > 0$ and*

$$p > \max\left\{1, m - 2(\alpha+\ell) + 1, \frac{n}{2}(\alpha + \ell - m)\right\}.$$

Then there exists $T_p \in (0, \infty]$ such that for any $\varepsilon \in (0,1)$,

$$T_p \leq T_\varepsilon \quad \text{and} \quad \|u_\varepsilon(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} \leq (\|u_0\|_{L^p(\Omega)} + |\Omega|^{\frac{1}{p}})^p + 1 \quad \text{for all } t \in [0, T_p). \tag{2.3}$$

Proof. The proof is similar to that of [**3**, Lemma 2.4]. We put

$$\tau_\varepsilon := \sup\{\tau \in (0, T_\varepsilon) \mid \|u_\varepsilon(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} \leq c_1 \quad \text{for all } t \in (0,\tau)\}$$

with $c_1 := (\|u_0\|_{L^p(\Omega)} + |\Omega|^{\frac{1}{p}})^p + 1$. Noting that $u_\varepsilon \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, T_\varepsilon)) \subset C^0([0,T_\varepsilon); L^p(\Omega))$, we see that $\tau_\varepsilon > 0$. It suffices to consider the cases that $\tau_\varepsilon = T_\varepsilon = \infty$ and that $\tau_\varepsilon < T_\varepsilon$ with

$$\|u_\varepsilon(\cdot,\tau_\varepsilon)\|^p_{L^p(\Omega)} = c_1. \tag{2.4}$$

In the case that $\tau_\varepsilon = T_\varepsilon = \infty$, by the definition of τ_ε we have $\|u_\varepsilon(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} \leq c_1$ for all $t \in (0,\infty)$, which implies that $T_p = \infty$.

In the case that $\tau_\varepsilon < T_\varepsilon$ with (2.4), from the first equation in (2.1), we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\cdot\frac{d}{dt}\|u_\varepsilon+\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega)} &= -m(p-1)\int_\Omega (u_\varepsilon+\varepsilon)^{p+m-3}|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx \\
&\quad + (p-1)\chi\int_\Omega u_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{p+\alpha-3}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla v_\varepsilon\,dx \\
&\quad + \lambda\int_\Omega u_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{p-1}\,dx - \mu\int_\Omega u_\varepsilon^\kappa(u_\varepsilon+\varepsilon)^{p-1}\,dx \\
&\leq -\frac{4m(p-1)}{(m+p-1)^2}\|\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{p+m-1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + (p-1)\chi\int_\Omega \nabla\left(\int_0^{u_\varepsilon}\xi(\xi+\varepsilon)^{p+\alpha-3}\,d\xi\right)\cdot\nabla v_\varepsilon\,dx \\
&\quad + \lambda\int_\Omega u_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{p-1}\,dx \\
&=: -I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}\tag{2.5}$$

for all $t \in (0,\tau_\varepsilon)$. Thanks to the second equation in (2.1), it follows that

$$\begin{aligned}
I_2 &= -(p-1)\chi\int_\Omega\left(\int_0^{u_\varepsilon}\xi(\xi+\varepsilon)^{p+\alpha-3}\,d\xi\right)\Delta v_\varepsilon\,dx \\
&\leq (p-1)\chi\int_\Omega\left(\int_0^{u_\varepsilon}\xi(\xi+\varepsilon)^{p+\alpha-3}\,d\xi\right)u_\varepsilon^\ell\,dx \\
&\leq \frac{(p-1)\chi}{p+\alpha-1}\int_\Omega(u_\varepsilon+\varepsilon)^{p+\alpha+\ell-1}\,dx
\end{aligned}\tag{2.6}$$

for all $t \in (0,\tau_\varepsilon)$. We now set $\beta := \left(\frac{p+m-1}{2p} - \frac{p+m-1}{2(p+\alpha+\ell-1)}\right) / \left(\frac{p+m-1}{2p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)$. Taking $p > \max\left\{1, m-2(\alpha+\ell)+1, \frac{n}{2}(\alpha+\ell-m)\right\}$, we see that $\beta \in (0,1)$ and $\frac{2(p+\alpha+\ell-1)}{p+m-1} > 1$. Thus, applying the Gagliardo–Nirenberg inequality, we see that

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u_\varepsilon+\varepsilon)^{p+\alpha+\ell-1}\,dx &= \|(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{p+m-1}{2}}\|_{L^{\frac{2(p+\alpha+\ell-1)}{p+m-1}}(\Omega)}^{\frac{2(p+\alpha+\ell-1)}{p+m-1}} \\
&\le c_2 \|(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{p+m-1}{2}}\|_{L^{\frac{2p}{p+m-1}}(\Omega)}^{(1-\beta)\frac{2(p+\alpha+\ell-1)}{p+m-1}} \|\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{p+m-1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}^{\beta\frac{2(p+\alpha+\ell-1)}{p+m-1}} \\
&\quad + c_3 \|(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{p+m-1}{2}}\|_{L^{\frac{2p}{p+m-1}}(\Omega)}^{\frac{2(p+\alpha+\ell-1)}{p+m-1}}
\end{aligned}$$

for all $t \in (0,\tau_\varepsilon)$ with some $c_2 = c_2(\Omega,m,\alpha,\ell) > 0$ and $c_3 = c_3(\Omega,m,\alpha,\ell) > 0$. Moreover, we note that $\frac{\beta(p+\alpha+\ell-1)}{p+m-1} < 1$. Combining the above inequality with (2.6) and using Young's inequality, we have that

$$I_2 \le I_1 + c_4 \left\{ \|(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{p+m-1}{2}}\|_{L^{\frac{2p}{p+m-1}}(\Omega)}^{(1-\beta)\frac{2(p+\alpha+\ell-1)}{p+m-1}} \right\}^\theta + c_5 \|(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{p+m-1}{2}}\|_{L^{\frac{2p}{p+m-1}}(\Omega)}^{\frac{2(p+\alpha+\ell-1)}{p+m-1}} \tag{2.7}$$

for all $t \in (0,\tau_\varepsilon)$, where $\theta := \left(1 - \frac{\beta(p+\alpha+\ell-1)}{p+m-1}\right)^{-1}$,

$$c_4 := \frac{1}{\theta}\left[\left(\frac{\beta(p+\alpha+\ell-1)}{p+m-1}\right)^{\frac{\beta(p+\alpha+\ell-1)}{p+m-1}} \cdot \frac{(p-1)\chi}{p+\alpha-1} c_2\right]^\theta, \quad c_5 := \frac{(p-1)\chi}{p+\alpha-1} c_3.$$

The inequalities (2.5) and (2.7) yields

$$\frac{d}{dt}\|u_\varepsilon+\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}^p \le p\left(c_4\|u_\varepsilon+\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}^{(1-\beta)(p+\alpha+\ell-1)\theta} + c_5\|u_\varepsilon+\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}^{p+\alpha+\ell-1} + \lambda\|u_\varepsilon+\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}^p\right)$$

for all $t \in (0,\tau_\varepsilon)$. Here the definition of τ_ε implies that for any $t \in (0,\tau_\varepsilon)$,

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t)+\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \le \|u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} + |\Omega|^{\frac{1}{p}} \le c_1^{\frac{1}{p}} + |\Omega|^{\frac{1}{p}} =: C_p,$$

and hence we have

$$\frac{d}{dt}\|u_\varepsilon+\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}^p \le p\left(c_4 C_p^{(1-\beta)(p+\alpha+\ell-1)\theta} + c_5 C_p^{p+\alpha+\ell-1} + \lambda C_p^p\right) =: \widetilde{C}_p \tag{2.8}$$

for all $t \in (0,\tau_\varepsilon)$. Integrating (2.8) over $(0,\tau_\varepsilon)$, we obtain that

$$\|u_\varepsilon(\cdot,\tau_\varepsilon)+\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}^p - \|u_{0\varepsilon}+\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}^p \le \widetilde{C}_p\tau_\varepsilon.$$

Aided by $\|u_{0\varepsilon}+\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}^p \le (\|u_{0\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)} + |\Omega|^{\frac{1}{p}})^p \le (\|u_0\|_{L^p(\Omega)} + |\Omega|^{\frac{1}{p}})^p$ and $\varepsilon > 0$, we see from (2.4) that

$$c_1 - (\|u_0\|_{L^p(\Omega)} + |\Omega|^{\frac{1}{p}})^p \le \widetilde{C}_p\tau_\varepsilon,$$

which together with the definition of c_1 implies that

$$\frac{1}{\widetilde{C}_p} \le \tau_\varepsilon.$$

Consequently, we attain (2.3) with $T_p = \frac{1}{\widetilde{C}_p}$. □

Next, we give an interval ensuring L^∞-estimate for u_ε uniformly with respect to ε.

Lemma 2.4. *Let $m \geq 1$, $\chi > 0$, $\alpha \geq 1$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\kappa \geq 1$ and $\ell > 0$. Then there exist $T_0 \in (0,\infty)$ and $K_0 = K_0(|\Omega|, \|u_0\|_{L^{p_0}(\Omega)}, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, m, \chi, \alpha, \lambda, \mu, \kappa, \ell) > 0$ with some large constant $p_0 = p_0(m, \alpha, \ell) > 1$ such that for any $\varepsilon \in (0,1)$,*

$$T_0 \leq T_\varepsilon \quad \text{and} \quad \|u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_0 \quad \text{for all } t \in (0, T_0). \tag{2.9}$$

Proof. By making use of Lemma 2.3 in conjunction with the Moser iteration (see [**6**, Lemma A.1]) we can arrive at (2.9). □

2.2. Convergence of approximate solutions

We first show some estimates for approximate solutions u_ε.

Lemma 2.5. *Let $m \geq 1$, $\chi > 0$, $\alpha \geq 1$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\kappa \geq 1$ and $\ell > 0$. Moreover, assume that there exist $T_0 \in (0,\infty)$ and $K_0 > 0$ such that for any $\varepsilon \in (0,1)$,*

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K_0 \quad \text{for all } t \in (0, T_0). \tag{2.10}$$

Then there exists $C = C(|\Omega|, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, m, \chi, \alpha, \lambda, \ell, T_0, K_0) > 0$ such that

$$\|\nabla(u_\varepsilon + \varepsilon)^m\|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} \leq C.$$

Proof. Multiplying the first equation in (2.1) by u_ε and integrating it over Ω, we have

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \leq &-\frac{4m}{(m+1)^2}\|\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ \chi\int_\Omega u_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\alpha-1}\nabla v_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon\,dx + \lambda\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned} \tag{2.11}$$

for all $t \in (0,T_0)$. By a computation as in (2.6), it follows from (2.10) that

$$\chi\int_\Omega u_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\alpha-1}\nabla v_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon\,dx \leq \frac{\chi}{\alpha+1}\int_\Omega (u_\varepsilon+\varepsilon)^{\alpha+\ell+1}\,dx \leq \frac{\chi}{\alpha+1}(K_0+1)^{\alpha+\ell+1}|\Omega|.$$

Combining this inequality with (2.11) and integrating it over $(0,T_0)$, we obtain

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_\varepsilon(\cdot,T_0)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u_{0\varepsilon}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq &-\frac{4m}{(m+1)^2}\|\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} \\ &+ \frac{\chi}{\alpha+1}(K_0+1)^{\alpha+\ell+1}|\Omega|T_0 + \lambda\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))}.\end{aligned}$$

Hence, noting $\|u_{0\varepsilon}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$ and (2.10), we can show that

$$\|\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} \leq c_1,$$

where $c_1 := \frac{(m+1)^2}{4m}\left(\frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\chi}{\alpha+1}(K_0+1)^{\alpha+\ell+1}|\Omega|T_0 + \lambda K_0^2|\Omega|T_0\right) > 0$. This entails

$$\begin{aligned}\|\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^m\|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} &= \frac{4m^2}{(m+1)^2}\|(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m-1}{2}}\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} \\ &\leq \frac{4m^2}{(m+1)^2}(K_0+1)^{m-1}c_1\end{aligned}$$

for any $\varepsilon \in (0,1)$, which implies the end of the proof. □

We next prove the following lemma. The proof is based on [**2**, Lemma 5.2].

Lemma 2.6. *Let $m \ge 1$, $\chi > 0$, $\alpha \ge 1$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\kappa \ge 1$ and $\ell > 0$. Moreover, assume that there exist $T_0 \in (0,\infty)$ and $K_0 > 0$ such that (2.10) holds for any $\varepsilon \in (0,1)$. Then there exists $C = C(|\Omega|, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, m, \chi, \alpha, \lambda, \mu, \kappa, \ell, T_0, K_0) > 0$ such that*

$$\left\| \sqrt{t} \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^m \right\|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} + \sup_{t\in(0,T_0)} \|\sqrt{t}\nabla u_\varepsilon^m(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \le C.$$

Proof. Multiplying the first equation in (2.1) by $\frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon+\varepsilon)^m$ and integrating it, we have

$$\begin{aligned}
&\frac{4m}{(m+1)^2}\left\|\frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\le -\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\|\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^m\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad - \frac{2m}{m+1}\int_\Omega \nabla(u_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\alpha-1})\cdot\nabla v_\varepsilon (u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m-1}{2}}\frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\,dx \\
&\quad + \frac{2m}{m+1}\int_\Omega u_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\alpha-1}\Delta v_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m-1}{2}}\frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\,dx \\
&\quad + \int_\Omega \lambda u_\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon+\varepsilon)^m\,dx - \int_\Omega \mu u_\varepsilon^\kappa\frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon+\varepsilon)^m\,dx
\end{aligned}$$

for all $t\in(0,T_0)$. Due to Young's inequality, we infer that

$$\begin{aligned}
&-\frac{2m}{m+1}\int_\Omega \nabla(u_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\alpha-1})\cdot\nabla v_\varepsilon (u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m-1}{2}}\frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\,dx \\
&\quad + \frac{2m}{m+1}\int_\Omega u_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\alpha-1}\Delta v_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m-1}{2}}\frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\,dx \\
&\quad\le m\int_\Omega \left(\left|\nabla(u_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\alpha-1})\cdot\nabla v_\varepsilon\right|^2 + \left|u_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\alpha-1}\Delta v_\varepsilon\right|^2\right)(u_\varepsilon+\varepsilon)^{m-1}\,dx \\
&\qquad + \frac{2m}{(m+1)^2}\left\|\frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\right\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Thus it follows that

$$\begin{aligned}
&\frac{2m}{(m+1)^2}\left\|\frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\|\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^m\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad\le m\int_\Omega \left(\left|\nabla(u_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\alpha-1})\cdot\nabla v_\varepsilon\right|^2 + \left|u_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\alpha-1}\Delta v_\varepsilon\right|^2\right)(u_\varepsilon+\varepsilon)^{m-1}\,dx \\
&\qquad + \lambda m\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(\int_0^{u_\varepsilon}\xi(\xi+\varepsilon)^{m-1}\,d\xi\right)dx - \mu m\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(\int_0^{u_\varepsilon}\xi^\kappa(\xi+\varepsilon)^{m-1}\,d\xi\right)dx
\end{aligned} \tag{2.12}$$

for all $t\in(0,T_0)$. Noticing that (2.10) and the elliptic regularity theory applied to the second equation in (2.1) lead to the inequality $\|v_\varepsilon(\cdot,t)\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le c_1(p,K_0)$ for all $p>1$ and

$t \in (0, T_0)$, we have from the Sobolev embedding theorem that $\|\nabla v_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le c_2(p, K_0)$ for all $t \in (0,T_0)$, and hence establish that

$$
\begin{aligned}
&m\int_\Omega \left|\nabla(u_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\alpha-1})\cdot\nabla v_\varepsilon\right|^2 (u_\varepsilon+\varepsilon)^{m-1}\,dx\\
&\le m\alpha^2\int_\Omega \left|(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\alpha-1}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla v_\varepsilon\right|^2 (u_\varepsilon+\varepsilon)^{m-1}\,dx\\
&= \frac{4m\alpha^2}{(m+1)^2}\int_\Omega \left|(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\alpha-1}\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\cdot\nabla v_\varepsilon\right|^2 dx\\
&\le c_3\|\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

for all $t \in (0,T_0)$, where $c_3 := \frac{4m\alpha^2}{(m+1)^2}(K_0+1)^{2(\alpha-1)}c_2^2$. On the other hand, in light of the second equation in (2.1) and (2.10), we see that

$$
|\Delta v_\varepsilon| = \left|\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_\varepsilon^\ell\,dx - u_\varepsilon^\ell\right| \le \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_\Omega u_\varepsilon^\ell\,dx\right) + u_\varepsilon^\ell \le 2K_0^\ell,
$$

which implies that

$$
m\int_\Omega \left|u_\varepsilon(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\alpha-1}\Delta v_\varepsilon\right|^2 (u_\varepsilon+\varepsilon)^{m-1}\,dx \le 4mK_0^{2\ell+2}(K_0+1)^{m+2\alpha-3}|\Omega| =: c_4 \qquad (2.14)
$$

for all $t \in (0,T_0)$. A combination of (2.13) and (2.14) with (2.12) yields

$$
\begin{aligned}
&\frac{2m}{(m+1)^2}\left\|\frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\|\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^m\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\le c_3\|\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)} + c_4 + \lambda m\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(\int_0^{u_\varepsilon}\xi(\xi+\varepsilon)^{m-1}\,d\xi\right)dx\\
&\quad - \mu m\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(\int_0^{u_\varepsilon}\xi^\kappa(\xi+\varepsilon)^{m-1}\,d\xi\right)dx \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

for all $t \in (0,T_0)$. Multiplying (2.15) by t and changing the variable t with s, we integrate it over $(0,t)$ to obtain that

$$
\begin{aligned}
&\frac{2m}{(m+1)^2}\left\|\sqrt{s}\frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\right\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} + \frac{1}{2}t\|\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^m\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\le \frac{1}{2}\|\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^m\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} + c_3\|\sqrt{s}\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} + c_4 t\\
&\quad + \lambda mt\int_\Omega\left(\int_0^{u_\varepsilon}\xi(\xi+\varepsilon)^{m-1}\,d\xi\right)dx + \mu m\int_0^t\left[\int_\Omega\left(\int_0^{u_\varepsilon}\xi^\kappa(\xi+\varepsilon)^{m-1}\,d\xi\right)dx\right]dt.
\end{aligned}
$$

Here, as in the proof of Lemma 2.5, we see that

$$
\|\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{m+1}{2}}\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} \le c_5 \quad\text{and}\quad \|\nabla(u_\varepsilon+\varepsilon)^m\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} \le c_6
$$

for all $t \in (0, T_0)$ with some $c_5 = c_5(|\Omega|, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, m, \chi, \alpha, \lambda, \ell, T_0, K_0) > 0$ and $c_6 = c_6(|\Omega|, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, m, \chi, \alpha, \lambda, \ell, T_0, K_0) > 0$. Therefore, observing from (2.10) that

$$\int_\Omega \left(\int_0^{u_\varepsilon} \xi(\xi+\varepsilon)^{m-1}\, d\xi \right) dx \le \frac{1}{m+1} \int_\Omega (u_\varepsilon + \varepsilon)^{m+1}\, dx \le \frac{1}{m+1}(K_0+1)^{m+1}|\Omega|$$

and similarly

$$\int_0^t \left[\int_\Omega \left(\int_0^{u_\varepsilon} \xi^\kappa(\xi+\varepsilon)^{m-1}\, d\xi \right) dx \right] dt \le \frac{1}{m+\kappa}(K_0+1)^{m+\kappa}|\Omega| T_0,$$

we can show that

$$\frac{2m}{(m+1)^2} \left\| \sqrt{s} \frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon + \varepsilon)^{\frac{m+1}{2}} \right\|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega))} + \frac{1}{2} t \|\nabla (u_\varepsilon+\varepsilon)^m\|^2_{L^2(\Omega)} \le c_7$$

for all $t \in (0, T_0)$, where c_7 is given by $c_7 := \frac{1}{2}c_6 + c_3 c_5 T_0 + c_4 T_0 + \frac{\lambda m}{m+1}(K_0+1)^{m+1}|\Omega| T_0 + \frac{\mu m}{m+\kappa}(K_0+1)^{m+\kappa}|\Omega| T_0$. Thus we have that

$$\frac{2m}{(m+1)^2} \left\| \sqrt{s} \frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon + \varepsilon)^{\frac{m+1}{2}} \right\|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} + \frac{1}{2} \sup_{t \in (0,T_0)} \|\sqrt{t} \nabla (u_\varepsilon+\varepsilon)^m\|^2_{L^2(\Omega)} \le c_7.$$

From this inequality it follows that for any $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}
&\left\| \sqrt{t} \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon^m \right\|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} + \sup_{t \in (0,T_0)} \|\sqrt{t} \nabla u_\varepsilon^m(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad \le \left\| \sqrt{s} \frac{\partial}{\partial t}(u_\varepsilon + \varepsilon)^{\frac{m+1}{2}} \right\|^2_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega))} + \sup_{t \in (0,T_0)} \|\sqrt{t} \nabla (u_\varepsilon+\varepsilon)^m\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad \le \left(\frac{(m+1)^2}{2m} + 2 \right) c_7,
\end{aligned}$$

which concludes the proof. □

Finally we shall establish convergence of approximate solutions $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$.

Lemma 2.7. *Let $m \ge 1$, $\chi > 0$, $\alpha \ge 1$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\kappa \ge 1$ and $\ell > 0$. Moreover, assume that there exist $T_0 \in (0,\infty)$ and $K_0 > 0$ such that (2.10) holds for any $\varepsilon \in (0,1)$. Then there exist subsequences $\{u_{\varepsilon_k}\}$, $\{v_{\varepsilon_k}\}$ ($\varepsilon_k \to 0$ as $k \to \infty$) and nonnegative functions u, v such that*

- $u \in L^\infty(0,T_0;L^\infty(\Omega))$, $u^m \in L^2(0,T_0;H^1(\Omega))$,
- $v \in L^\infty(0,T_0;W^{1,\infty}(\Omega))$,

and as $k \to \infty$,

$$u_{\varepsilon_k} \to u \quad \text{weakly}^\star \text{ in } L^\infty(0,T_0;L^\infty(\Omega)), \tag{2.16}$$

$$u_{\varepsilon_k} \to u \quad \text{strongly in } C^0([\delta,T_0];L^p(\Omega)) \quad \text{for all } \delta \in (0,T_0) \text{ and } p \in [1,\infty), \tag{2.17}$$

$$\nabla(u_{\varepsilon_k}+\varepsilon)^m \to \nabla u^m \quad \text{weakly in } L^2(0,T_0;L^2(\Omega)), \tag{2.18}$$

$$\nabla v_{\varepsilon_k} \to \nabla v \quad \text{weakly}^\star \text{ in } L^\infty(0,T_0;L^\infty(\Omega)). \tag{2.19}$$

Proof. Applying the elliptic regularity theory to the second equation in (2.1), from (2.10) and the Sobolev embedding theorem we obtain $c_1 > 0$ and $c_2 > 0$ such that

$$\|v_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le c_1 \quad \text{and} \quad \|\nabla v_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le c_2$$

for all $t \in (0,T_0)$. Therefore we can show that there exist a subsequence $\{v_{\varepsilon_k}\}$ and a function $v \in L^\infty(0,T_0;W^{1,\infty}(\Omega))$ satisfying (2.19). Moreover, thanks to Lemmas 2.5 and 2.6, as in the proof of [**2**, Lemma 5.3] we can extract a subsequence $\{u_{\varepsilon_k}\}$ and a function $u \in L^\infty(0,T_0;L^\infty(\Omega))$ with $u^m \in L^2(0,T_0;H^1(\Omega))$ such that (2.16)–(2.18) holds. □

2.3. Moment inequality for approximate solutions

In this subsection we derive the moment inequality for $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$. To this end, introducing $r := |x|$, we denote by $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = (u_\varepsilon(r,t), v_\varepsilon(r,t))$ the radially symmetric local solution of (2.1) on $[0,T_\varepsilon)$. Moreover, we define the function w_ε and the moment-type functional ϕ_ε for the approximate solution u_ε as

$$w_\varepsilon(s,t) := \int_0^{s^{\frac{1}{n}}} \rho^{n-1} u_\varepsilon(\rho,t)\,d\rho \quad \text{for } s \in [0,R^n] \text{ and } t \in [0,T_\varepsilon)$$

and

$$\phi_\varepsilon(t) := \int_0^{s_0} s^{-\gamma}(s_0 - s) w_\varepsilon(s,t)\,ds \quad \text{for } t \in [0,T_\varepsilon).$$

Here we know that $\phi_\varepsilon \in C^0([0,T_\varepsilon)) \cap C^1((0,T_\varepsilon))$.

Now we state the following lemma on the moment inequality for approximate solutions.

Proposition 2.8. *Let $n \in \mathbb{N}$, $m \ge 1$, $\chi > 0$, $\alpha \ge 1$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\kappa \ge 1$ and $\ell > 0$. Assume that* (1.3) *is satisfied. Then for all $M_0 > 0$ there exist $\eta_0 \in (0,M_0)$ and $r_\star \in (0,R)$ which satisfy the following property*: *If u_0 satisfies* (1.4)–(1.6)*, then there exist $T_0 \in (0,\infty)$ and $K_0 > 0$ such that* (2.9) *holds. Moreover, one can find $K = K(R,m,\chi,\alpha,\mu,\kappa,\ell) > 0$ and $\varepsilon_0 \in (0,1)$ such that for any $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$,*

$$\phi_\varepsilon(t) - \phi_\varepsilon(0) \ge K \int_0^t \phi_\varepsilon^{\alpha+\ell}(\tau)\,d\tau \tag{2.20}$$

for all $t \in (0,T_0)$.

As to the proof of Proposition 2.8, we apply arguments of [**5**, Lemmas 3.4–3.10] to the approximate solution. To this end, we first confirm that u_ε is nonincreasing with respect to $|x|$.

Lemma 2.9. *Assume that u_0 satisfies* (1.4)*. Then for any $\varepsilon \in (0,1)$,*

$$(u_\varepsilon)_r(r,t) \le 0$$

for all $r \in (0,R)$ and $t \in (0,T_\varepsilon)$, that is,

$$(w_\varepsilon)_{ss} \le 0$$

for all $s \in (0,R^n)$ and $t \in (0,T_\varepsilon)$.

Proof. By virtue of (1.4) and the definition of $u_{0\varepsilon}$, we see that $u_{0\varepsilon}$ is also nonincreasing with respect to $|x|$. Therefore the claim can be proved by an argument similar to that in the proof of [**7**, Lemma 2.2]. $\square$

In the proof of [**5**, Lemma 3.4] we know that [**5**, Lemmas 3.2 and 3.3] have been used with the assumption such that $u_{0\varepsilon}$ fulfills $\int_\Omega u_{0\varepsilon} = M_0$. However, in our case this may not be satisfied. Indeed, since $\int_\Omega u_{0\varepsilon} \le \int_\Omega u_0 = M_0$ and $u_{0\varepsilon} \to u_0$ in $L^1(\Omega)$ as $\varepsilon \to 0$, we can pick $\xi_0 > 0$ so small and find some $\varepsilon_0 \in (0,1)$ such that for any $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$M_0 - \xi_0 \le \int_\Omega u_{0\varepsilon} \le M_0. \tag{2.21}$$

Moreover, in order to prove Proposition 2.8, we need to use arguments similar to those in the proofs of these lemmas. Thus we should give minor changes to [**5**, Lemmas 3.2 and 3.3]. In the following, we fix ξ_0 and take ε_0 such that (2.21) holds. Furthermore, let $T_0 \in (0,\infty)$ and $K_0 > 0$ fulfill (2.9) and we define the set S_{ϕ_ε} as

$$S_{\phi_\varepsilon} := \left\{ t \in (0, T_0) \;\middle|\; \phi_\varepsilon(t) \ge \frac{M_0 - \xi_0 - s_0}{(1-\gamma)(2-\gamma)\omega_n} s_0^{2-\gamma} \right\}. \tag{2.22}$$

The following two lemmas (see Lemmas 2.10 and 2.11) are able to be proved with minor changes in the proofs of [**5**, Lemmas 3.2 and 3.3], respectively.

Lemma 2.10. *Assume that u_0 satisfies (1.4) and let $s_0 \in (0, R^n)$ and $\gamma \in (-\infty, 1)$. Then for any $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,*

$$w_\varepsilon\left(\frac{s_0}{2}, t\right) \ge \frac{M_0 - \delta_0}{\omega_n} \quad \textit{for all } t \in S_{\phi_\varepsilon},$$

where $\delta_0 := \frac{4(\xi_0 + s_0)}{2^\gamma(3-\gamma)}$.

Proof. The proof of this lemma is based on that of [**7**, Lemma 3.1]. We only consider the case that $M_0 > \delta_0$. Assuming that there exists $t \in S_{\phi_\varepsilon}$ such that

$$w_\varepsilon\left(\frac{s_0}{2}, t\right) < \frac{M_0 - \delta_0}{\omega_n},$$

we will derive a contradiction. Thanks to the monotonicity of $w_\varepsilon(\cdot, t)$, we see that $w_\varepsilon(s,t) < \frac{M_0-\delta_0}{\omega_n}$ for all $s \in \left(0, \frac{s_0}{2}\right)$. Moreover, the definition of w_ε and (2.21) yield that $w_\varepsilon(s,t) \le \frac{M_0}{\omega_n}$ for all $s \in (0, R^n)$. Thus we obtain that

$$\begin{aligned}
\phi_\varepsilon(t) &< \frac{M_0 - \delta_0}{\omega_n} \int_0^{\frac{s_0}{2}} s^{-\gamma}(s_0 - s)\, ds + \frac{M_0}{\omega_n} \int_{\frac{s_0}{2}}^{s_0} s^{-\gamma}(s_0 - s)\, ds \\
&= \frac{M_0}{\omega_n} \int_0^{s_0} s^{-\gamma}(s_0 - s)\, ds - \frac{\delta_0}{\omega_n} \int_0^{\frac{s_0}{2}} s^{-\gamma}(s_0 - s)\, ds \\
&= \frac{M_0}{(1-\gamma)(2-\gamma)\omega_n} s_0^{2-\gamma} - \frac{2^\gamma(3-\gamma)\delta_0}{4(1-\gamma)(2-\gamma)\omega_n} s_0^{2-\gamma} \\
&= \frac{M_0 - \xi_0 - s_0}{(1-\gamma)(2-\gamma)\omega_n} s_0^{2-\gamma}.
\end{aligned}$$

By virtue of the definition of S_{ϕ_ε}, this inequality leads to the contradiction. Thus we complete the proof. $\square$

We next establish the estimate for $\overline{M_{\ell,\varepsilon}}(t)$.

Lemma 2.11. *Assume that* u_0 *satisfies* (1.4) *and let* $s_0 \in \left(0, \frac{R^n}{4}\right]$ *and* $\gamma \in (-\infty, 1)$. *Then for any* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$\overline{M_{\ell,\varepsilon}}(t) \leq L + \frac{1}{2s} \int_0^s \left[n(w_\varepsilon)_s(\sigma,t)\right]^\ell d\sigma \quad \textit{for all } s \in (0, s_0) \textit{ and } t \in S_{\phi_\varepsilon}, \tag{2.23}$$

where $L := \left(\frac{2n\delta_0}{\omega_n s_0}\right)^\ell$.

Proof. The proof is similar to that of [**7**, Lemma 3.2]. By means of Lemma 2.10, we have that $w_\varepsilon\left(\frac{s_0}{2}, t\right) \geq \frac{M_0 - \delta_0}{\omega_n}$ for all $t \in S_{\phi_\varepsilon}$. Moreover, we recall that $w_\varepsilon(s,t) \leq \frac{M_0}{\omega_n}$ for all $s \in (0, R^n)$ and $t \in S_{\phi_\varepsilon}$. Therefore it follows that $\frac{w_\varepsilon(s_0,t) - w_\varepsilon\left(\frac{s_0}{2},t\right)}{\frac{s_0}{2}} \leq \frac{2\delta_0}{\omega_n s_0}$. On the other hand, aided by Lemma 2.9, we can observe from the concavity of $w(\cdot,t)$ that $\frac{w_\varepsilon(s_0,t) - w_\varepsilon\left(\frac{s_0}{2},t\right)}{\frac{s_0}{2}} \geq (w_\varepsilon)_s(s_0,t) \geq (w_\varepsilon)_s(s,t)$ for all $s \in (s_0, R^n)$. Hence we infer that

$$(w_\varepsilon)_s(s,t) \leq \frac{2\delta_0}{\omega_n s_0} \tag{2.24}$$

for all $s \in (s_0, R^n)$. Now we note that

$$\overline{M_{\ell,\varepsilon}}(t) = \frac{1}{R^n} \int_0^{s_0} \left[n(w_\varepsilon)_s(\sigma,t)\right]^\ell d\sigma + \frac{n^\ell}{R^n} \int_{s_0}^{R^n} \left[(w_\varepsilon)_s(\sigma,t)\right]^\ell d\sigma. \tag{2.25}$$

As to the second term on the right-hand side of (2.25), the relation (2.24) and $\ell > 0$ imply

$$\frac{n^\ell}{R^n} \int_{s_0}^{R^n} \left[(w_\varepsilon)_s(\sigma,t)\right]^\ell d\sigma \leq \frac{R^n - s_0}{R^n} \cdot \left(\frac{2n\delta_0}{\omega_n s_0}\right)^\ell \leq \left(\frac{2n\delta_0}{\omega_n s_0}\right)^\ell = L. \tag{2.26}$$

Regarding the first term on the right-hand side of (2.25), we see that

$$\frac{1}{R^n} \int_0^{s_0} \left[n(w_\varepsilon)_s(\sigma,t)\right]^\ell d\sigma = \frac{1}{R^n} \int_0^{s} \left[n(w_\varepsilon)_s(\sigma,t)\right]^\ell d\sigma + \frac{1}{R^n} \int_s^{s_0} \left[n(w_\varepsilon)_s(\sigma,t)\right]^\ell d\sigma$$

for all $s \in (0, s_0)$. Invoking that $(w_\varepsilon)_s(\cdot,t)$ is nonincreasing, we derive that

$$\int_0^{s} \left[n(w_\varepsilon)_s(\sigma,t)\right]^\ell d\sigma \geq s\left[n(w_\varepsilon)_s(s,t)\right]^\ell, \quad \frac{1}{R^n} \int_s^{s_0} \left[n(w_\varepsilon)_s(\sigma,t)\right]^\ell d\sigma \leq \frac{s_0}{R^n}\left[n(w_\varepsilon)_s(s,t)\right]^\ell$$

for all $s \in (0, s_0)$. These two inequalities ensure that

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R^n} \int_0^{s_0} \left[n(w_\varepsilon)_s(\sigma,t)\right]^\ell d\sigma &\leq \frac{1}{R^n} \int_0^{s} \left[n(w_\varepsilon)_s(\sigma,t)\right]^\ell d\sigma + \frac{s_0}{R^n}\left[n(w_\varepsilon)_s(s,t)\right]^\ell \\
&\leq \frac{1}{R^n} \int_0^{s} \left[n(w_\varepsilon)_s(\sigma,t)\right]^\ell d\sigma + \frac{s_0}{R^n s} \int_0^{s} \left[n(w_\varepsilon)_s(\sigma,t)\right]^\ell d\sigma
\end{aligned}$$

for all $s \in (0, s_0)$. In light of $s_0 \in \left(0, \frac{R^n}{4}\right]$, we can estimate that $\frac{1}{R^n} \leq \frac{1}{4s}$ and $\frac{s_0}{R^n s} \leq \frac{1}{4s}$ for all $s \in (0, s_0)$, which lead to obtain

$$\frac{1}{R^n} \int_0^{s_0} \left[n(w_\varepsilon)_s(\sigma,t)\right]^\ell d\sigma \leq \frac{1}{2s} \int_0^{s} \left[n(w_\varepsilon)_s(\sigma,t)\right]^\ell d\sigma \tag{2.27}$$

for all $s \in (0, s_0)$. A combination of (2.26) and (2.27) with (2.25) yields (2.23). □

Now we prove Proposition 2.8.

Proof of Proposition 2.8. We first show (2.20). By means of Lemma 2.4, for any initial data u_0 with the properties (1.4) and (1.5), we can find $T_0 \in (0,\infty)$ and $K_0 > 0$ satisfying (2.9). Now let $\xi_0 > 0$ and $\varepsilon_0 \in (0,1)$ fulfill (2.21). In view of Lemmas 2.9–2.11, we see from an argument similar to that in the proof of [**5**, Lemma 3.4] that

$$\begin{aligned}\phi_\varepsilon'(t) \geq\ & \frac{n^\ell}{2}\int_0^{s_0} s^{1-\gamma}(s_0-s)\left(n(w_\varepsilon)_s+\varepsilon\right)^{\alpha-1}(w_\varepsilon)_s^{\ell+1}\,ds \\ & - L\int_0^{s_0} s^{1-\gamma}(s_0-s)\left(n(w_\varepsilon)_s+\varepsilon\right)^{\alpha-1}(w_\varepsilon)_s\,ds \\ & + mn^2\int_0^{s_0} s^{2-\frac{2}{n}-\gamma}(s_0-s)\left(n(w_\varepsilon)_s+\varepsilon\right)^{m-1}(w_\varepsilon)_{ss}\,ds \\ & - n^{\kappa-1}\mu\int_0^{s_0} s^{-\gamma}(s_0-s)\left\{\int_0^{s}(w_\varepsilon)_s^\kappa\,d\sigma\right\}ds \end{aligned} \tag{2.28}$$

for all $s_0 \in \left(0, \frac{R^n}{4}\right]$ and $t \in S_{\phi_\varepsilon}$. Since we can apply [**5**, Lemmas 3.5–3.10] with S_ϕ replaced by S_{ϕ_ε} to (2.28), there are $\gamma \in (-\infty,1)$ and $c_1 = c_1(R,m,\chi,\alpha,\mu,\kappa,\ell,\gamma) > 0$ as well as $c_2 = c_2(R,m,\chi,\alpha,\mu,\kappa,\ell,\gamma) > 0$ such that

$$\phi_\varepsilon'(t) \geq c_1 s_0^{-(3-\gamma)(\alpha+\ell-1)}\phi_\varepsilon^{\alpha+\ell}(t) - c_2 s_0^{3-\gamma-\frac{2}{n}\cdot\frac{\alpha+\ell}{\alpha+\ell-m}} \tag{2.29}$$

for all $s_0 \in \left(0, \frac{R^n}{4}\right]$ and $t \in S_{\phi_\varepsilon}$. Here we note from [**5**, Remark 3.1] that c_1 and c_2 are independent of ε. We fix $s_0 > 0$ such that

$$s_0 \leq \min\left\{\frac{R^n}{4}, \frac{M_0-\xi_0}{2}\right\} \tag{2.30}$$

and

$$s_0^{(\alpha+\ell)\left(1-\frac{1}{\alpha+\ell-m}\right)} \leq \frac{c_1}{2c_2}\left(\frac{M_0-\xi_0}{2(1-\gamma)(2-\gamma)\omega_n}\right)^{\alpha+\ell}. \tag{2.31}$$

We additionally pick $\eta_0 \in \left(0, \frac{s_0}{4}\right)$ so small and take $s_\star \in (0,s_0)$ satisfying

$$\frac{M_0-\xi_0-\eta_0}{\omega_n}\int_{s_\star}^{s_0} s^{-\gamma}(s_0-s)\,ds > \frac{M_0-\xi_0-s_0}{(1-\gamma)(2-\gamma)\omega_n}s_0^{2-\gamma}.$$

Moreover, in the following we suppose that u_0 fulfills (1.4)–(1.6) with $r_\star := s_\star^{\frac{1}{n}}$. In order to derive (2.20), we define the set

$$\widetilde{S}_\varepsilon := \left\{\tau \in (0,T_0)\ \middle|\ \phi_\varepsilon(t) > \frac{M_0-\xi_0-s_0}{(1-\gamma)(2-\gamma)\omega_n}s_0^{2-\gamma} \quad \text{for all } t \in [0,\tau]\right\}.$$

Here we can see that $\widetilde{S}_\varepsilon \neq \emptyset$ for sufficiently small ε. Indeed, from the second condition of (1.6) and $u_{0\varepsilon} \to u_0$ in $L^1(\Omega)$ as $\varepsilon \to 0$, we observe that $\int_{B_{r_\star}(0)} u_{0\varepsilon}\,dx \geq M_0 - \xi_0 - \eta_0$ for all

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. This inequality yields that $w_\varepsilon(s,0) \ge w_\varepsilon(s_\star,0) \ge \frac{M_0-\xi_0-\eta_0}{\omega_n}$ for all $s \in (s_\star, s_0)$. Hence we obtain that

$$\phi_\varepsilon(0) \ge \int_{s_\star}^{s_0} s^{-\gamma}(s_0-s)w_\varepsilon(s,0)\,ds > \frac{M_0-\xi_0-s_0}{(1-\gamma)(2-\gamma)\omega_n} s_0^{2-\gamma},$$

which together with the continuity of ϕ_ε implies that $\widetilde{S}_\varepsilon$ is not empty for any $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Now let $\widetilde{T}_\varepsilon := \sup \widetilde{S}_\varepsilon \in (0, T_0]$. Then from (2.22) we can confirm that $(0, \widetilde{T}_\varepsilon) \subset S_{\phi_\varepsilon}$. Thanks to (2.29)–(2.31), as in the proof of [**5**, Theorem 1.2], we have

$$\phi_\varepsilon'(t) \ge \frac{c_1}{2} s_0^{-(3-\gamma)(\alpha+\ell-1)} \phi_\varepsilon^{\alpha+\ell}(t) > 0$$

for all $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ and $t \in (0,\widetilde{T}_\varepsilon)$. This ensures that $\widetilde{T}_\varepsilon = T_0$. Choosing an arbitrary $t \in (0,T_0)$ and integrating the above inequality over $(0,t)$, we attain (2.20). $\square$

2.4. Proof of Proposition 2.1

We establish local existence of moment solutions to the system (1.1) by virtue of the passage to the limit as $\varepsilon \to 0$ in (2.20).

Proof of Proposition 2.1. Let $M_0 > 0$ and let $\eta_0 \in (0, M_0)$ and $r_\star \in (0,R)$ given by Proposition 2.8. Also, we pick u_0 fulfilling (1.4)–(1.6). Then, thanks to Lemma 2.2 and Proposition 2.8, we can obtain the approximate solution $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ of (2.1) and find $T_0 \in (0,\infty)$ and $K_0 > 0$ such that (2.9) holds, and we have

$$\phi_\varepsilon(t) - \phi_\varepsilon(0) \ge K \int_0^t \phi_\varepsilon^{\alpha+\ell}(\tau)\,d\tau \tag{2.32}$$

for all $t \in (0,T_0)$ with some $K > 0$. By virtue of (2.9), we can apply Lemma 2.7. Hence there exist $\{u_{\varepsilon_k}\}$, $\{v_{\varepsilon_k}\}$ ($\varepsilon_k \to 0$ as $k \to \infty$) and nonnegative functions u, v such that $(u,v) = \lim_{k\to\infty}(u_{\varepsilon_k}, v_{\varepsilon_k})$ satisfies (i), (ii) and (iv) in Definition 1.1. We next show (iii) in Definition 1.1. Let us pick $\psi \in L^1(\Omega)$. Then for all $\xi > 0$ there is $\psi_0 \in C_{\mathrm{c}}(\Omega)$ such that

$$\|\psi - \psi_0\|_{L^1(\Omega)} < \xi. \tag{2.33}$$

Moreover, noting from (2.17) that $u \in C^0([\delta, T_0]; L^1(\Omega))$ for all $\delta \in (0,T_0)$, we see that for all $t_0 > 0$,

$$\int_\Omega u(\cdot,t)\psi_0\,dx \to \int_\Omega u(\cdot.t_0)\psi_0\,dx \quad \text{as } t \to t_0, \tag{2.34}$$

and from (2.16) it follows that

$$\|u\|_{L^\infty(0,T_0;L^\infty(\Omega))} \le \liminf_{k\to\infty} \|u_{\varepsilon_k}\|_{L^\infty(0,T_0;L^\infty(\Omega))} < \infty. \tag{2.35}$$

In light of (2.33)–(2.35) we can confirm that $u \in C^0_{\mathrm{w}-\star}((0,T_0); L^\infty(\Omega))$. Furthermore, by relying on the fact that $u_{\varepsilon_k} \in C^0(\overline{\Omega} \times [0,T_0))$ and $u_{\varepsilon_k} \to u_0$ in $L^1(\Omega)$ as $k \to \infty$, it follows that $u \in C^0_{\mathrm{w}-\star}([0,T_0); L^\infty(\Omega))$, that is, (iii) holds. Next we make sure that the moment inequality (1.2) holds. Invoking $u_{0\varepsilon_k} \to u_0$ in $L^1(\Omega)$ as $k \to \infty$, we see that $\phi_{\varepsilon_k}(0) \to \phi(0) \quad$ as $k \to \infty$. Furthermore, due to (2.17) it follows that $u_{\varepsilon_k} \to u$ in $C^0((0,T_0];L^1(\Omega))$ as $k \to \infty$, which ensures that

$$\phi_{\varepsilon_k}(t) \to \phi(t) \quad \text{as } k \to \infty$$

for all $t \in (0,T_0)$. Additionally, noticing that $w_{\varepsilon_k}(s,t) \le \frac{K_0|\Omega|}{\omega_n}$, we can observe that

$$\phi_{\varepsilon_k}^{\alpha+\ell}(t) \le \left(\frac{K_0|\Omega|}{(1-\gamma)(2-\gamma)\omega_n} s_0^{2-\gamma} \right)^{\alpha+\ell}$$

for all $t \in (0,T_0)$. In view of the Lebesgue dominated convergence theorem, we infer that

$$\int_0^t \phi_{\varepsilon_k}^{\alpha+\ell}(\tau)\,d\tau \to \int_0^t \phi^{\alpha+\ell}(\tau)\,d\tau \quad \text{as } k \to \infty$$

for all $t \in (0,T_0)$, and so letting $k \to \infty$ in (2.32), we see that (v) in Definition 1.1 holds. This implies the end of the proof. □

3. Finite-time blow-up

In this section we prove finite-time blow-up of maximal moment solutions to (1.1). Before proceeding to the proof, we confirm the following equivalence.

Lemma 3.1. *Let $T \in (0,\infty)$. Assume that a pair (u,v) of nonnegative functions defined on $\Omega \times (0,T)$ satisfies*

$$u \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega)), \quad u^m, v \in L^2(0,T;H^1(\Omega)), \quad u \in C^0_{\mathrm{w}-\star}([0,T);L^\infty(\Omega)). \tag{3.1}$$

Then the following two conditions are equivalent.

(a) *For all $\varphi \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ with $\operatorname{supp}\varphi(x,\cdot) \subset [0,T)$ for a.a. $x \in \Omega$,*

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla u^m \cdot \nabla\varphi - \chi u^\alpha \nabla v \cdot \nabla \varphi - (\lambda u - \mu u^\kappa)\varphi - u\varphi_t)\,dxdt = \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)\,dx,$$
$$\int_0^T \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi\,dxdt + \int_0^T \left(\overline{M_\ell}(t) \int_\Omega \varphi\,dx \right) dt - \int_0^T \int_\Omega u^\ell \varphi\,dxdt = 0;$$

(b) *$u_t \in L^2(0,T;(H^1(\Omega))^\star)$, and for all $\psi \in H^1(\Omega)$,*

$$\int_\Omega u_t\psi\,dx = -\int_\Omega (\nabla u^m \cdot \nabla\psi - \chi u^\alpha \nabla v \cdot \nabla\psi - (\lambda u - \mu u^\kappa)\psi)\,dx, \tag{3.2}$$
$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\psi\,dx + \overline{M_\ell}(t)\int_\Omega \psi\,dx - \int_\Omega u^\ell\psi\,dx = 0 \tag{3.3}$$

for a.a. $t \in [0,T)$ with $u(\cdot,0) = u_0$.

Proof. Let (u,v) satisfy (a). Then, (3.1) implies that for all $\varphi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\overline{\Omega}\times(0,T))$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T\int_\Omega u\varphi_t\,dxdt\right| &\le \left|\int_0^T\int_\Omega (\nabla u^m - \chi u^\alpha\nabla v)\cdot\nabla\varphi\,dxdt\right| + \left|\int_0^T\int_\Omega (\lambda u-\mu u^\kappa)\varphi\,dxdt\right| \\ &\le \Big[\|\nabla u^m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \chi\|u\|^\alpha_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\|\nabla v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\quad + (\lambda\|u\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} + \mu\|u\|^\kappa_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))})|\Omega|^{\frac12}T^{\frac12}\Big]\|\varphi\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))},\end{aligned}$$

which implies that $u_t \in L^2(0,T;(H^1(\Omega))^\star)$. Also, choosing φ in (a) as $\varphi = \widetilde{\varphi}\cdot\psi$ with $\widetilde{\varphi}\in C^0_{\mathrm{c}}([0,T))$ and $\psi\in H^1(\Omega)$, we have

$$\begin{aligned}&\int_0^T\left[\int_\Omega(\nabla u^m\cdot\nabla\psi - \chi u^\alpha\nabla v\cdot\nabla\psi - (\lambda u-\mu u^\kappa)\psi)\,dx\right]\widetilde{\varphi}\,dt \\ &= \int_0^T\left[\int_\Omega u\psi\,dx\right]\widetilde{\varphi}_t\,dt + \int_\Omega u_0\psi\,dx\cdot\widetilde{\varphi}(0).\end{aligned}$$

By taking $\widetilde{\varphi}$ with $\widetilde{\varphi}(0)=0$, this yields (3.2). Moreover, from this identity and (3.2) we can confirm that $\int_\Omega u(\cdot,0)\psi\,dx = \int_\Omega u_0\psi\,dx$ for all $\psi\in H^1(\Omega)$, which entails that $u(\cdot,0)=u_0$. Similarly, (3.3) can be obtained. Thus (b) holds. Conversely, if (b) is satisfied, then for a.a. $t\in[0,T)$, $u_t = \Delta u^m - \chi\nabla\cdot(u^\alpha\nabla v)+\lambda u-\mu u^\kappa$ and $0=\Delta v-\overline{M_\ell}(t)+u^\ell$ in $(H^1(\Omega))^\star$, and thereby from these identities together with (3.1) and $u_t\in L^2(0,T;(H^1(\Omega))^\star)$, we infer that (a) holds. □

We finally prove Theorem 1.4.

Proof of Theorem 1.4. Let $M_0>0$ and let $\eta_0\in(0,M_0)$ and $r_\star\in(0,R)$ given by Proposition 2.8. We pick u_0 as in (1.4)–(1.6). From Proposition 2.1 and Definition 1.2, there is a maximal moment solution (u,v) of (1.1) on $[0,T_{\max})$. We first show that $T_{\max}<\infty$ by contradiction. To this end, we assume that $T_{\max}=\infty$. Then we have

$$\phi(t)-\phi(0)\ge K\int_0^t\phi^{\alpha+\ell}(\tau)\,d\tau \tag{3.4}$$

for all $t\in(0,\infty)$ with some $K>0$, and put the function Φ as

$$\Phi(t) := \int_0^t\phi^{\alpha+\ell}(\tau)\,d\tau + \frac{\phi(0)}{K}\quad\text{for } t\in(0,\infty).$$

Also, we infer that ϕ is bounded on $[0,T')$ for all $T'<\infty$ and continuous on $[0,\infty)$ because u belongs to $L^\infty_{\mathrm{loc}}(0,\infty;L^\infty(\Omega))$ and $C^0_{\mathrm{w}-\star}([0,\infty);L^\infty(\Omega))$ due to (i) and (iii). Hence we note that $\Phi\in C^0([0,\infty))\cap C^1((0,\infty))$. From (3.4) we obtain that

$$\Phi'(t)\ge K^{\alpha+\ell}\Phi^{\alpha+\ell}(t)\quad\text{for all } t\in(0,\infty),$$

and thereby we can derive that $-\frac{1}{(\alpha+\ell-1)\Phi^{\alpha+\ell-1}(t)}+\frac{1}{(\alpha+\ell-1)\Phi^{\alpha+\ell-1}(0)}\ge K^{\alpha+\ell}t$ for all $t\in(0,\infty)$. Thus it follows that $t\le\frac{1}{(\alpha+\ell-1)K^{\alpha+\ell}\Phi^{\alpha+\ell-1}(0)}$ for all $t\in(0,\infty)$, which is a contradiction. Therefore we see that $T_{\max}<\infty$.

Next, we prove that

$$\limsup_{t \nearrow T_{\max}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty \tag{3.5}$$

by contradiction. To this end, we assume that $\limsup_{t \nearrow T_{\max}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, that is, $u \in L^\infty(0,T_{\max};L^\infty(\Omega))$. By this assumption and (i)–(iv) in Definition 1.1, it follows that (3.1) and (a) in Lemma 3.1 with $T = T_{\max}$ hold. Hence, noting from (b) in Lemma 3.1 that $u_t \in L^2(0,T_{\max};(H^1(\Omega))^\star)$, we have $\|u(\cdot,t) - u(\cdot,s)\|_{(H^1(\Omega))^\star} \le \|u_t\|_{L^2(0,T_{\max};(H^1(\Omega))^\star)} |t-s|^{\frac{1}{2}}$ for all $t,s \in [0,T_{\max})$, so that u is uniformly continuous on $[0,T_{\max})$ in $(H^1(\Omega))^\star$. This continuity provides $\widetilde{u}_{T_{\max}} \in (H^1(\Omega))^\star$ such that

$$\widetilde{u}_{T_{\max}} = \lim_{t \nearrow T_{\max}} u(\cdot,t) \quad \text{in } (H^1(\Omega))^\star.$$

Moreover, the condition (iii) in Definition 1.1 with $T = T_{\max}$ guarantees that $\widetilde{u}_{T_{\max}} \in L^\infty(\Omega)$. Indeed, by virtue of the condition (iii) in Definition 1.1 and the assumption $\limsup_{t \nearrow T_{\max}} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, we see that there exist $\{t_n\} \subset [0,T_{\max})$ and $g \in L^\infty(\Omega)$ such that $t_n \nearrow T_{\max}$ and $u(\cdot,t_n) \to g$ weakly* in $L^\infty(\Omega)$ as $n \to \infty$. Since we observe that $u(\cdot,t_n) \to \widetilde{u}_{T_{\max}}$ in $(H^1(\Omega))^\star$ as $n \to \infty$, it follows that $g = \widetilde{u}_{T_{\max}}$ in $(H^1(\Omega))^\star$. Noting that $L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^\star \subset (H^1(\Omega))^\star$, we arrive at the desired fact that $\widetilde{u}_{T_{\max}} \in L^\infty(\Omega)$. Choosing the initial data as $\widetilde{u}_{T_{\max}}$, by an argument similar to those in the proofs of Lemmas 2.3–2.7, we can find $T_1 > 0$ and construct a weak solution $(\widetilde{u},\widetilde{v})$ on $[T_{\max},T_{\max}+T_1)$. Now, we put

$$(\overline{u},\overline{v}) := \begin{cases} (u,v) & \text{for a.a. } t \in [0,T_{\max}), \\ (\widetilde{u},\widetilde{v}) & \text{for a.a. } t \in [T_{\max},T_{\max}+T_1), \end{cases}$$

and confirm that $(\overline{u},\overline{v})$ is a weak solution of (1.1) on $[0,T_{\max}+T_1)$. The definition of $\widetilde{u}_{T_{\max}}$ implies that $\int_\Omega u(\cdot,t)\psi_0\,dx \to \int_\Omega \widetilde{u}_{T_{\max}}\psi_0\,dx$ as $t \nearrow T_{\max}$ for all $\psi_0 \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega)$, and $u \in L^\infty(0,T_{\max};L^\infty(\Omega))$, and hence we see that $u \in C^0_{\mathrm{w}-\star}([0,T_{\max}];L^\infty(\Omega))$. On the other hand, the condition corresponding to (iii) in Definition 1.1 says that $\widetilde{u} \in C^0_{\mathrm{w}-\star}([T_{\max},T_{\max}+T_1);L^\infty(\Omega))$. Consequently, we deduce that

$$\overline{u} \in C^0_{\mathrm{w}-\star}([0,T_{\max}+T_1);L^\infty(\Omega)). \tag{3.6}$$

Recalling that $u_t \in L^2(0,T_{\max};(H^1(\Omega))^\star)$ and $\widetilde{u}_t \in L^2([T_{\max},T_{\max}+T_1);(H^1(\Omega))^\star)$ with $\widetilde{u}(\cdot,T_{\max}) = \widetilde{u}_{T_{\max}}$, we can show that $\overline{u}_t \in L^2([0,T_{\max}+T_1);(H^1(\Omega))^\star)$. Indeed, it follows from (3.6) that for any $\varphi \in H^1([0,T_{\max}+T_1);H^1(\Omega))$,

$$\begin{aligned}
&-\int_0^{T_{\max}+T_1} \langle \overline{u}(\cdot,t),\varphi_t(\cdot,t)\rangle_{(H^1(\Omega))^\star,H^1(\Omega)}\,dt \\
&= -\int_0^{T_{\max}}\int_\Omega u\varphi_t\,dxdt - \int_{T_{\max}}^{T_{\max}+T_1}\int_\Omega \widetilde{u}\varphi_t\,dxdt \\
&= \int_\Omega \overline{u}(\cdot,T_{\max})\varphi(\cdot,T_{\max})\,dx + \int_0^{T_{\max}} \langle u_t(\cdot,t),\varphi(\cdot,t)\rangle_{(H^1(\Omega))^\star,H^1(\Omega)}\,dt \\
&\quad - \int_\Omega \overline{u}(\cdot,T_{\max})\varphi(\cdot,T_{\max})\,dx + \int_{T_{\max}}^{T_{\max}+T_1} \langle \widetilde{u}_t(\cdot,t),\varphi(\cdot,t)\rangle_{(H^1(\Omega))^\star,H^1(\Omega)}\,dt \\
&= \int_0^{T_{\max}+T_1} \langle g(\cdot,t),\varphi(\cdot,t)\rangle_{(H^1(\Omega))^\star,H^1(\Omega)}\,dt,
\end{aligned}$$

where

$$g := \begin{cases} u_t & \text{for a.a. } t \in [0, T_{\max}), \\ \widetilde{u}_t & \text{for a.a. } t \in [T_{\max}, T_{\max} + T_1), \end{cases}$$

which means that $\overline{u}_t = g \in L^2([0, T_{\max} + T_1); (H^1(\Omega))^\star)$. Moreover, since (u, v) and $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ satisfy (3.2), (3.3) for a.a. $t \in [0, T_{\max})$ and for a.a. $t \in [T_{\max}, T_{\max} + T_1)$, respectively, $(\overline{u}, \overline{v})$ fulfills (3.2), (3.3) for a.a. $t \in [0, T_{\max} + T_1)$, and hence, by means of Lemma 3.1, $(\overline{u}, \overline{v})$ is a weak solution of (1.1) on $[0, T_{\max} + T_1)$. We shall show that the weak solution $(\overline{u}, \overline{v})$ fulfills the moment inequality on $[0, T_{\max} + \sigma_1)$ with some $\sigma_1 > 0$. For this purpose, defining $\overline{w}$ and $\overline{\phi}$ as

$$\overline{w}(s, t) := \int_0^{s^{\frac{1}{n}}} \rho^{n-1} \overline{u}(\rho, t)\, d\rho \quad \text{for } s \in [0, R^n] \text{ and } t \in [0, T_{\max} + T_1)$$

and

$$\overline{\phi}(t) := \int_0^{s_0} s^{-\gamma}(s_0 - s)\overline{w}(s, t)\, ds \quad \text{for } t \in [0, T_{\max} + T_1),$$

we have only to prove that there exists $\overline{K} > 0$ such that

$$\overline{\phi}(t) - \overline{\phi}(0) \geq \overline{K} \int_0^t \overline{\phi}^{\alpha+\ell}(\tau)\, d\tau \quad \text{for all } t \in [0, T_{\max} + \sigma_1). \tag{3.7}$$

We know that

$$\phi(t) - \phi(0) \geq K \int_0^t \phi^{\alpha+\ell}(\tau)\, d\tau \quad \text{for all } t \in [0, T_{\max}). \tag{3.8}$$

In order to construct the moment inequality beyond $T_{\max}$, we make sure that

$$\overline{\phi}(T_{\max}) - \overline{\phi}(0) \geq K \int_0^{T_{\max}} \overline{\phi}^{\alpha+\ell}(\tau)\, d\tau. \tag{3.9}$$

To this end, we confirm that $\overline{\phi} \in C^0([0, T_{\max} + T_1))$. Letting $t \to t_0 \in [0, T_{\max} + T_1)$ and noting from (3.6) that for any $s \in (0, R]$, $\overline{w}(s, \cdot)$ is continuous on $[0, T_{\max} + T_1)$ and $s^{-\gamma}(s_0 - s)\overline{w}(s, t) \leq c_1 s^{-\gamma}(s_0 - s)$ with some $c_1 > 0$, we see from the Lebesgue dominated convergence theorem that $\overline{\phi}(t) \to \overline{\phi}(t_0)$, and so $\overline{\phi} \in C^0([0, T_{\max}+T_1))$. Thus the inequality (3.9) is derived by the passage to the limit in (3.8) as $t \nearrow T_{\max}$. Next, by setting

$$\varepsilon_K := \frac{K}{2} \int_0^{T_{\max}} \overline{\phi}^{\alpha+\ell}(\tau)\, d\tau > 0, \tag{3.10}$$

the continuity of $\overline{\phi}$ and $\int_0^t \overline{\phi}^{\alpha+\ell}(\tau)\, d\tau$ at $t = T_{\max}$ provides $\sigma_1 \in (0, T_1)$ such that for all $t \in [T_{\max}, T_{\max} + \sigma_1)$,

$$\left| \overline{\phi}(t) - \frac{K}{2} \int_0^t \overline{\phi}^{\alpha+\ell}(\tau)\, d\tau - \left(\overline{\phi}(T_{\max}) - \frac{K}{2} \int_0^{T_{\max}} \overline{\phi}^{\alpha+\ell}(\tau)\, d\tau \right) \right| \leq \varepsilon_K,$$

which together with (3.10) implies

$$\overline{\phi}(t) - \frac{K}{2}\int_0^t \overline{\phi}^{\alpha+\ell}(\tau)\,d\tau \geq \overline{\phi}(T_{\max}) - K\int_0^{T_{\max}} \overline{\phi}^{\alpha+\ell}(\tau)\,d\tau \geq \overline{\phi}(0)$$

for all $t \in [T_{\max}, T_{\max} + \sigma_1)$, that is,

$$\overline{\phi}(t) - \overline{\phi}(0) \geq \frac{K}{2}\int_0^t \overline{\phi}^{\alpha+\ell}(\tau)\,d\tau \quad \text{for all } t \in [T_{\max}, T_{\max} + \sigma_1). \tag{3.11}$$

On the other hand, in light of (3.8), (u, v) satisfies that

$$\phi(t) - \phi(0) \geq \frac{K}{2}\int_0^t \phi^{\alpha+\ell}(\tau)\,d\tau \quad \text{for all } t \in [0, T_{\max}).$$

Noting that $\overline{\phi} = \phi$ on $[0, T_{\max})$ and combining this inequality and (3.11), we obtain the moment inequality (3.7) on $[0, T_{\max} + \sigma_1)$ with $\overline{K} = \frac{K}{2}$, which contradicts the definition of maximal moment solutions. Therefore we conclude that the maximal moment solution (u, v) of (1.1) on $[0, T_{\max})$ satisfies (3.5). □

References

[1] M. Fuest, Approaching optimality in blow-up results for Keller–Segel systems with logistic-type dampening, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, **28** (2021), Paper No. 16, 17pp.

[2] S. Ishida and T. Yokota, Global existence of weak solutions to quasilinear degenerate Keller–Segel systems of parabolic–parabolic type, *J. Differential Equations*, **252** (2012), 1421–1440.

[3] S. Ishida and T. Yokota, Blow-up in finite or infinite time for quasilinear degenerate Keller–Segel systems of parabolic–parabolic type, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, **18** (2013), 2569–2596.

[4] J. Lankeit, Locally bounded global solutions to a chemotaxis consumption model with singular sensitivity and nonlinear diffusion, *J. Differential Equations*, **262** (2017), 4052–4084.

[5] Y. Tanaka, Boundedness and finite-time blow-up in a quasilinear parabolic–elliptic chemotaxis system with logistic source and nonlinear production, *J. Math. Anal. Appl.*, **506** (2022), Paper No. 125654, 29 pp.

[6] Y. Tao and M. Winkler, Boundedness in a quasilinear parabolic–parabolic Keller–Segel system with subcritical sensitivity, *J. Differential Equations*, **252** (2012), 692–715.

[7] M. Winkler, A critical blow-up exponent in a chemotaxis system with nonlinear signal production, *Nonlinearity*, **31** (2018), 2031–2056.

[8] M. Winkler and K. C. Djie, Boundedness and finite-time collapse in a chemotaxis system with volume-filling effect, *Nonlinear Anal.*, **72** (2010), 1044–1064.

Unconditional well-posedness for fifth order KdV type equations on the torus

佐賀大学　理工学部　加藤孝盛

1　序文

本原稿の内容は, 津川光太郎氏 (中央大学) との共同研究に基づくものである. 本原稿では, 次の 1 次元トーラス $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上の 5 次 KdV 型方程式を扱う.

$$\partial_t u + \partial_x^5 u + 10\gamma\partial_x(u^3) + \alpha\partial_x(\partial_x u)^2 + \beta\partial_x(u\partial_x^2 u) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}. \tag{1.1}$$

ここで $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, 未知関数 $u = u(t,x)$ は実数値関数とする. 初期値を

$$u(0,x) = \varphi(x) \in H^s(\mathbb{T}) \tag{1.2}$$

で与えたとき, 初期値問題 (1.1)–(1.2) の適切性 (解の存在, 一意性及び初期値に対する連続依存性) について考察する. ここで $H^s(\mathbb{T})$ は次のノルムを持つ Sobolev 空間.

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{T})} = \|\langle k\rangle^s(\mathcal{F}_x f)(k)\|_{l^2}.$$

ここで $\langle a\rangle := (1+|a|^2)^{1/2}$ とした. 特に $s \in \mathbb{R}$ は正則性 (滑らかさ) を表す指数であることに注意する. 初期値問題の適切性は非線形偏微分方程式の研究において最も基本的な問題と位置づけられ, 応用上も最低限必要な条件である. ある制限された時間区間で適切性が成り立つことを時間局所適切性といい, 任意の時間区間で適切性が従うことを時間大域的適切性という.

(1.1) 及びその一般化

$$\partial_t u + \partial_x^5 u + 10\gamma\partial_x(u^3) + \alpha\partial_x(\partial_x u)^2 + \beta\partial_x(u\partial_x^2 u) + \mu\partial_x^3 u + \nu\partial_x(u^2) = 0 \quad (\mu,\nu\in\mathbb{R}) \tag{1.3}$$

は, water-wave 方程式の長波近似により導出される. また

$$E_0(u(t)) := \int_{\mathbb{T}} u(t,x)\,dx, \quad E_1(u(t)) := \int_{\mathbb{T}} u^2(t,x)\,dx$$
$$H(u(t)) := \int_{\mathbb{T}} (\partial_x u)^2(t,x) + 5\gamma u^4(t,x) - \beta u(t,x)(\partial_x u)^2(t,x)\,dx$$

とおく. ここで $\int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ とした. 形式的には (1.1)–(1.2) の解 $u(t)$ は $E_0(u(t)) = E_0(\varphi)$ を満たすため, $E_0(u(t))$ は保存量となる. $\alpha = \beta/2$ のとき, $E_1(u(t))$ 及び

$H(u(t))$ も (1.1) の流れに関して保存する. 実際, $\alpha=\beta/2$ を仮定する. 十分滑らかな関数 u,v に対して

$$H'(u)v=\lim_{h\to 0}\frac{H(u+hv)-H(u)}{h}=\big(\partial_x^4 u+10\gamma u^3+\frac{\beta}{2}(\partial_x u)^2+\beta(u\partial_x^2 u),v\big)_{L^2}$$
$$=:(\operatorname{grad} H(u),v)_{L^2}.$$

$\alpha=\beta/2$ のとき, (1.1) は $\partial_t u=-\partial_x \operatorname{grad} H(u)$ と表すことができる. この表現を用いると, 十分滑らかな (1.1) の解 u に対して

$$\frac{d}{dt}H(u)=(\operatorname{grad} H(u),\partial_t u)_{L^2}=(\operatorname{grad} H(u),-\partial_x \operatorname{grad} H(u))=0$$

が従う. これより, $H(u)$ が保存することが分かる. また $(\alpha,\beta,\gamma)=(\pm 5,\pm 10,1)$ とした方程式

$$\partial_t u+\partial_x^5 u+10\partial_x(u^3)\pm 5\partial_x(\partial_x u)^2\pm 10\partial_x(u\partial_x^2 u)=0 \tag{1.4}$$

は可積分系であり, Lax が提唱した KdV 階層に属する. KdV 階層とは, 可積分系の無限個の方程式から成るもので, その第 1 方程式が KdV 方程式

$$\partial_t u+\partial_x^3 u\pm 3\partial_x(u^2)=0$$

であり, 第 2 方程式が (1.4) である. これらの方程式は無限個の保存量を共有し, 非常に高い対称性を持つ. 本原稿では, 可積分系とは限らない (1.1) に対して, この方程式が持つ代数的な構造を反映した手法を構築することにより, 初期値問題 (1.1)–(1.2) の適切性を示すことが目的である. またより強い特異性を持つ非線形相互作用を扱うことにより, 方程式が持つ固有の性質を見出すために, より低い正則性 (より小さい s) での適切性を考察する.

2 非線形分散型方程式の適切性理論

(1.1) は KdV 方程式や非線形 Schrödinger 方程式に代表される非線形分散型方程式の一つである. 非線形分散型方程式の解析は, 線形化方程式の解が持つ分散性と非線形性のバランスにより決定するため, 個別の方程式に対する解析が必要になる. 本章では, (1.1) と密接な関係を持つ次の KdV 方程式の初期値問題を例にとり, 非線形分散型方程式の適切性理論について述べる.

$$\partial_t u+\partial_x^3 u=3\partial_x(u^2)\quad (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T},\qquad u(0,x)=\varphi(x)\in H^s(\mathbb{T}). \tag{2.1}$$

まず, 以下で用いる記号を準備する. $i<j$ となる $i,j\in\mathbb{N}$ に対して, $k_{i,i+1,\dots,j}:=k_i+k_{i+1}+\cdots+k_j$. 2π の周期を持つ関数 f と $\mathbb{Z}$ 上で定義される関数 g に対して, Fourier 変換と Fourier 逆変換を次のように定義する.

$$(\mathcal{F}_x f)(k):=\hat{f}(k):=\int_{\mathbb{T}}e^{-ikx}f(x)\,dx,\qquad (\mathcal{F}_k^{-1}g)(x):=\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{ikx}g(k).$$

このとき, 次が従う.

$$f = \mathcal{F}_k^{-1}(\mathcal{F}_x f), \quad \|f\|_{L^2} := \Big(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2\Big)^{1/2}.$$

(2.1) の線形化方程式の解は $u(t) = e^{-t\partial_x^3}\varphi$ と表せる. ここで $e^{-t\partial_x^3}$ は $e^{-t\partial_x^3}\psi = \mathcal{F}_k^{-1}[e^{itk^3}\hat{\psi}(k)]$ $(\psi \in H^s(\mathbb{T}))$ で定義され, (2.1) の発展作用素という. $|e^{itk^3}| = 1$ から $e^{-t\partial_x^3}$ は $H^s(\mathbb{T})$ 上のユニタリー作用素となるため, (2.1) の線形化方程式の解は, 放物型方程式のような解が初期値よりも十分滑らかになるという強い平滑化効果を持たない. このため, 微分を含む非線形項から生じる特異性を制御することは困難となる. これを微分の損失という. ただし, 分散型方程式も高周波部分で激しく振動することから, 放物型方程式ほど強くないがある種の平滑化効果を持つ. 特に $x \in \mathbb{R}$ のとき, 時空間ノルムを用いることで (2.1) の線形化方程式の解に対する次の Kato 型の平滑化効果が得られる.

$$\big\|\partial_x\,(e^{-t\partial_x^3}\varphi)\big\|_{L_x^\infty(\mathbb{R}:L_t^2(\mathbb{R}))} \le C\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

この評価は, $x \in \mathbb{R}$ のとき, 線形化方程式の解が空間遠方にすばやく散らばるという性質から従う. 一方で, $x \in \mathbb{T}$ では線形化方程式の解は周期的なふるまいをするため, 上式のような平滑化効果は成立しないため, 微分の損失をどのように解消するかが問題となる. 非線形分散型方程式の解の構成法として, 逐次近似法とエネルギー法という二つの手法が軸をなす. 前者は解を構成する関数空間の完備性, 後者はコンパクト性を用いる. 最初に (2.1) の適切性を解明したのは, エネルギー法による Bona-Smith([2]) の結果で, 彼らは $H^s(\mathbb{T})$, $s > 3/2$ において (2.1) の時間局所適切性を示した. ここで $s > 3/2$ は Sobolev の埋め込み $\|\partial_x u\|_{L^\infty} \le C\|u\|_{H^s}$ が成り立つための条件であり, この結果では線形化方程式が持つ分散構造を利用をしておらず, 正則性の高いクラスでの適切性しか得られていない. そこで積極的に分散構造を反映した手法として開発されたのが, Bourgain([3]) の Fourier 制限法と Babin-Ilyin-Titi([1]) の normal form 法である. これらの手法の構築により, 線形化方程式の解が持つ分散構造と非線形項が持つ幾何学的構造を同時に扱うことを可能となり, 非線形分散型方程式の適切性理論は大きな発展を遂げる. 上述の二つの手法は, 共に逐次近似法を基礎とする. まず (2.1) に対して逐次近似法の概要を説明する. Duhamel の原理より, (2.1) は次の積分方程式に書き換えれる.

$$u(t) = e^{-t\partial_x^3}\varphi + \int_0^t e^{-(t-t')\partial_x^3} 3\partial_x(u^2)(t')\,dt' =: \Phi(u)(t). \tag{2.2}$$

ここで

$$u_1(t) = e^{-t\partial_x^3}\varphi, \quad u_{n+1}(t) = \Phi(u_n)(t) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により, 関数列 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ を定める. 解を構成する関数空間 X を適当な Bnanach 空間に設定し, $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ が X 上の Cauchy 列であることから, その極限関数 $u \in X$ が (2.2) の解となることを示す手法を逐次近似法という. 上で構成した u_n を逐次近似の n 次近似とよぶ. 逐次近似法は, 方程式を線形化方程式の解のまわりで冪級数展開することに相当するが, (2.1) のように微分の損失を持つ共鳴部分が存在すれば, それは破綻する. この場合, 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して, 逐次近似法を適用することができない. ここで共鳴部分とは, 線形部分の周波数成分と非線形項のそれとが

ちょうどつりあい振動項が相殺され, 何の平滑化効果も得られれない非線形相互作用のことである. この問題を解決した Bourgain([3]) である. Bourgain は, 保存則 $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{T}} \varphi(x)\,dx$ を用いることにより, (2.1) の微分の損失を持つ共鳴部分を相殺することに成功した. 以下, その詳細と共鳴部分の厳密な定義を述べる.

$$\mathcal{F}_x[fg](k) = (\hat{f} * \hat{g})(k) = \sum_{k=k_{1,2}} \hat{f}(k_1)\,\hat{g}(k_2)$$

に注意すると, (2.1) の解 u は各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\partial_t \hat{u}(t,k) - ik^3 \hat{u}(t,k) = \sum_{k=k_{1,2}} 3ik_{1,2}\,\hat{u}(t,k_1)\hat{u}(t,k_2) \tag{2.3}$$

を満たす. ここで $v(t) := e^{t\partial_x^3} u(t) = \mathcal{F}_k^{-1}[e^{-itk^3}\hat{u}(t,k)]$ とおく. v は (2.1) の発展作用素による引き戻し, ある種の座標変換を意味する. (2.3) を v を用いて書き換えると

$$\partial_t \hat{v}(t,k) = \sum_{k=k_{1,2}} e^{t\Phi^{(2)}}\, 3ik_{1,2}\,\hat{v}(t,k_1)\,\hat{v}(t,k_2). \tag{2.4}$$

ここで各 $N \in \mathbb{N}$ に対して振動項 $\Phi^{(N)}$ を次で定義する.

$$\Phi^{(N)} := \Phi^{(N)}(k_1,\dots,k_N) := -i\Big\{(k_{1,2,\dots,N})^3 - \sum_{j=1}^{N} k_j^3\Big\}.$$

$\Phi^{(N)} = 0$ となる非線形相互作用と共鳴部分といい, $\Phi^{(N)} \neq 0$ となる非線形相互作用を非共鳴部分という. $\Phi^{(2)} = -3ik_1k_2k_{1,2}$ と因数分解することができるため, 共鳴部分は $k_1k_2k_{1,2} = 0$ のときのみ生じる. このとき, (2.3) の右辺は

$$6\,\hat{u}(t,0)\,ik\hat{u}(t,k) = \mathcal{F}_x\big[6\int_{\mathbb{T}} u(t)\,dx\,\partial_x u(t)\big](k)$$

と表せ, (2.1) の共鳴部分は $\displaystyle 6\int_{\mathbb{T}} u(t,x)\,dx\,\partial_x u$ となる. ここで保存則 $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{T}} \varphi(x)\,dx = E_0(\varphi)$ を用いると, 共鳴部分は $6E_0(\varphi)\partial_x u$ と変形でき, 線形部分に吸収することができる. よって (2.1) を

$$\partial_t u + \partial_x^3 u - 6E_0(\varphi)\partial_x u = 6\big(u - \int_{\mathbb{T}} u\,dx\big)\partial_x u \tag{2.5}$$

を書き換えることにより, 非線形項から微分の損失をもつ共鳴部分をとり除くことができる. (なお, 上の変形は (2.1) の解 $u \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{T}))$, $s \geq 0$ に対して正当化することができる.) また周波数が離散であることに注意すると, 非共鳴部分では $|\Phi^{(N)}| \geq 1$ となる. 振動項 $|\Phi^{(N)}|$ が大きいと平滑化効果を期待でき, それは Bourgain([3]) で考案した Fourier 制限法により可能となる. Fourier 制限法の鍵は, 解を構成する関数空間を $X^{s,b}$ 空間とよばれる Banach 空間に設定することにある. (2.1) に対する $X^{s,b}$ 空間は, 方程式の線形部分から定まる次のノルムを持つ空間である.

$$\|u\|_{X^{s,b}} := \|e^{t\partial_x^3}u\|_{H_t^b H_x^s} = \big\|\langle k\rangle^s \langle \tau - k^3\rangle^b \mathcal{F}_{t,x}[u](\tau,k)\big\|_{L_\tau^2 l_k^2} \quad (s,b \in \mathbb{R}).$$

ここで線形化方程式の解は, 超関数の意味で $\mathcal{F}_{t,x}[e^{-t\partial_x^3}\varphi](\tau,k)=\delta(\tau-k^3)\hat{\varphi}(k)$ と表せ, その台は $\{\tau=k^3\}$ となることに注意する. 非共鳴部分は $\{\tau=k^3\}$ から離れた部分に現れる非線形相互作用に相当し, そこでは振動項が大きくなるため, $X^{s,b}$ 空間を利用することにより, 平滑化効果が得られる. これにより, (2.5) が持つ 1 階の微分の損失を回復することができ, (2.5) の解を線形化方程式の解の摂動とみなすことで, 逐次近似法より, $H^s(\mathbb{T})$, $s\geq 0$ での時間局所的適切性が Bourgain([3]) により示された. また $L^2(\mathbb{T})$ ノルムが保存することを用いて, $L^2(\mathbb{T})$ での時間大域的適切性が得られる. この結果は, Kenig-Ponce-Vega [7] により $s\geq -1/2$ まで拡張された. $s<-1/2$ では (2.5) に対して逐次近似法が機能しないため, その意味で Kenig らの結果は最良といえる. ここで, Fourier 制限法で構成される解は積分方程式 (2.2) の解であり, 超関数の枠組みでは定義できない非線形項を $X^{s,b}$ 空間により正当化されることを注意する.

次に Babin らによって [1] で提唱された normal form 法を (2.5) を例にして説明する. ただし簡単のため, $E_0(\varphi)=0$ と仮定とする. $s\geq 0$ とする. (2.5) の解 $u\in C([-T,T]:H^s(\mathbb{T}))$ に対して, $v=e^{t\partial_x^3}u$ と定めると, 各 $k\in\mathbb{Z}$ に対して $\hat{v}(t,k)$ は,

$$\partial_t\hat{v}(t,k)=\sum_{k=k_{1,2},\,\Phi^{(2)}\neq 0} e^{t\Phi^{(2)}}\,3ik_{1,2}\,\hat{v}(t,k_1)\hat{v}(t,k_2) \tag{2.6}$$

を満たす. ここで $\Phi^{(2)}=-3ik_1k_2k_{1,2}\neq 0$ ならば, 等式

$$e^{t\Phi^{(2)}}=\frac{1}{\Phi^{(2)}}\,\partial_t e^{t\Phi^{(2)}}$$

が従う. $\dfrac{3ik_{1,2}}{\Phi^{(2)}}=-\dfrac{1}{k_1k_2}$ に注意して, (2.6) を時間に関して部分積分すると, 各 $k\in\mathbb{Z}$ に対して $\mathcal{D}'_t$ の意味で次が成立する.

$$\begin{aligned}\partial_t\hat{v}(t,k)&=\frac{\partial}{\partial t}\Big\{\sum_{k=k_{1,2},\,\Phi^{(2)}\neq 0} e^{t\Phi^{(2)}}\big(-\frac{1}{k_1k_2}\big)\,\hat{v}(t,k_1)\hat{v}(t,k_2)\Big\}\\&\quad+\sum_{k=k_{1,2},\,\Phi^{(2)}\neq 0} e^{t\Phi^{(2)}}\,\frac{2}{k_1k_2}\,\hat{v}(t,k_1)\,\partial_t\hat{v}(t,k_2).\end{aligned} \tag{2.7}$$

(2.7) の右辺の第 1 項では, 時間微分と可算和が $\mathcal{D}'_t$ の意味で交換できること, 第 2 項では k_1 と k_2 が対称であることを用いた. (2.7) の右辺の第 2 項の $\partial_t\hat{v}(t,k_2)$ に (2.6) を代入すると, 第 2 項は次のように変形できる.

$$\sum_{\Gamma_k^{(3)}} e^{t\Phi^{(3)}}\,6i\frac{1}{k_1}\,\prod_{i=1}^{3}\hat{v}(t,k_i) \tag{2.8}$$

ここで $\Gamma_k^{(3)}=\{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}^3: k=k_{1,2,3},\ k_1k_2k_3k_{2,3}k_{1,2,3}\neq 0\}$ とした. (2.8) には微分の損失がなく, 非共鳴部分が持つ微分の損失は相殺された. この手法を normal form 法という. また $\Phi^{(3)}=-3ik_{1,2}k_{2,3}k_{3,1}$ と表せるため, (2.8) の共鳴部分は $k_{1,2}k_{1,3}=0$ に限られる. これより (2.8) の共鳴部分は, $12i\,\dfrac{1}{k}\,|\hat{v}(t,k)|^2\hat{v}(t,k)$ となり, $H^s(\mathbb{T})$, $s\geq -1/2$ で評価することができる. ($s<-1/2$ で逐次近似法が機能しないのは, この共鳴部分による.) このことに注意し, Babin ら

は (2.8) にもう一度 normal form 法を適用することにより, $H^s(\mathbb{T})$, $s \geq 0$ での適切性と無条件一意性を示した．Fourier 制限法による結果では, $C([-T,T] : H^s(\mathbb{T}))$ に埋め込まれる関数空間での一意性しか得ていないが, Babin らは解が属する最も自然な空間である $C([-T,T] : H^s(\mathbb{T}))$ 全体での一意性を示している．これを無条件一意性といい, 一意性が解の構成法に依らないことを示唆している．適切性と無条件一意性が同時に成り立つことを unoconditional well-poseness といい, この概念を提唱したのは加藤敏夫先生 ([5]) である．また $s < 0$ では (2.1) の非線形項 $\partial_x(u^2)$ を超関数の意味で定義できないため, 無条件一意性の意味ではこの結果が最良といえる．

(2.5) に対して 1 回の normal form 法で回復できる微分は高々 1 階であることに注意する．実際, 微分の損失は他の周波数成分よりの 1 つの周波数成分だけが十分大きいのときにのみ生じる．(最も大きい周波数成分が 2 つ以上ある場合は, 微分を分配することができ, 微分の損失は生じない.) 例えば (2.6) において, $|k_2| > 4|k_1|$ かつ $k_1 \neq 0$ という非線形相互作用を考える．$|k_1| \geq 1$ であることに注意すると

$$|\Phi^{(2)}(k_1,k_2)| \geq C|k_1||k_2|^2 \geq C|k_2|^2$$

が従う．これより, (2.6) を部分積分すると, $1/\Phi^{(2)}$ から 2 階の微分を回復し, $\partial_t \hat{v}$ が 1 階の微分の損失をもつため, あわせて 1 階の微分を回復する．これは線形項の微分階数と非線形項のそれとの差で決まり, 5 次 KdV 方程式 (1.1) に対しても 1 回の normal form 法で回復できる微分は高々 1 階であることを注意しておく．

3　5 次型 KdV 方程式の既存の結果と主結果

本章では, 初期値問題 (1.1)–(1.2) の適切性に関する既存の結果と我々の主結果を述べる．問題は, (1.1) の 2 次の非線形項が持つ 3 階の微分の損失をどのように回復するかにある．微分の損失を共鳴部分は, (2.1) では逐次近似法の 2 次近似にしか現れなかったが, (1.1) では 2 次, 3 次及び 4 次近似という高次近似に現れるため, その取り扱いが難しい．また非共鳴部分であっても, 通常の Fourier 制限法で回復できる微分は高々 2 階であり, (1.1) には適用できない．最初にこの問題を回避したのは, エネルギー法による Kwon([10]) の結果である．ただし, エネルギー法においても以下の問題が発生する．十分滑らかな (1.1) の解 u に対し

$$\frac{d}{dt}\|\partial_x^k u\|_{L^2}^2 \leq \left|\lambda(k)\int_{\mathbb{T}} \partial_x u\,(\partial_x^{k+1}u)^2\,dx\right| + C\|\partial_x^3 u\|_{L^\infty}\|\partial_x^k u\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^\infty}\|\partial_x^k u\|_{L^2}^2$$

が従う．ここで $\lambda(k) = 2\alpha + \beta(k+1/2)$ とした．この評価で現れた $\lambda(k)\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \partial_x u\,(\partial_x^{k+1}u)^2\,dx$ を $\|u\|_{H^k}$ $(k \in \mathbb{N})$ を使って上から評価することができないため, エネルギー法の軸となるエネルギー不等式が得られない．この問題を回避するため, Kwon は通常のエネルギーに補正項として $-\dfrac{\lambda(k)}{15}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} u\,(\partial_x^{k-1}u)^2\,dx$ を加え修正エネルギーを構成した．この補正項を加えることで, 問題となる $\lambda(k)\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \partial_x u\,(\partial_x^{k+1}u)^2\,dx$ を相殺することができ, エネルギー不等式を得ることで (1.1)–(1.2) の時間局所適切性を示した．また Kwak([9]) は Kwon が構築した修正エネルギーを基礎とし, Ionescu-Kenig-Tataru が [4] で提唱した short time $X^{s,b}$ 空間を利用することで平滑化効果を獲

得し, $\alpha = \beta/2$ の条件下で, $H^s(\mathbb{T})$, $s \geq 2$ において (1.1)–(1.2) の時間局所適切性を導いた. またエネルギー空間 $H^2(\mathbb{T})$ における時間大域的適切性も示した.

我々は, (1.1) の持つ対称性などの代数的構造を積極的に利用することで, 高次近似に現れる微分の損失を持つ共鳴部分を相殺することに成功し, 逐次近似法を適用することにより, 次の結果を得た.

定理 3.1 $s \geq 1$ とする. このとき, 任意の $\varphi \in H^s(\mathbb{T})$ に対して, ある $T = T(\|\varphi\|_{H^s}) > 0$ が存在し, (1.1)–(1.2) の解 $u \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{T}))$ が一意に存在する. また解写像 $H^s(\mathbb{T}) \ni \varphi \mapsto u \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{T}))$ が定義でき, 連続となる.

定理 3.1 は無条件一意性が成立することをいっている. また $H^s(\mathbb{T})$, $s < 1$ では (1.1) の非線形項を超関数の意味で定義することができないため, 定理 3.1 は無条件一意性の意味で最良の結果といえる. この観点から, この結果と KdV 方程式に対する Babin らの結果 ([1]) は対応しているといえる. またこの証明で用いた保存量は $E_0(u) = \displaystyle\int_{\mathbb{T}} u\,dx$ のみである. そのため, $E_0(u)$ を保存量にもつ (1.1) の一般化である (1.3) に対しても, 定理 3.1 と同様の結果が得られる.

また (1.1) が L^2- 劣臨界な方程式であることに注意し, 保存量 $E_1(u)$ と $H(u)$ を用いることで次が直ちに従う.

系 3.2 $\alpha = \beta/2$ とする. このとき, 任意の $\varphi \in H^2(\mathbb{T})$ に対して, 定理 3.1 で得た解を $(-\infty, \infty)$ 上に延長することができる.

4 定理 3.1 の証明の概要

以下, 定理 3.1 の証明の概要を述べる. 逐次近似の 2 次から 4 次近似までに現れる微分の損失を持つ共鳴部分を相殺し, 非共鳴部分には normal form 法を適用することで, 平滑化効果を得る. ただし, 1 回の normal form 法で回復できる微分は高々 1 階であるため, この手法を 3 回繰り返す必要がある. 以下, $s \geq 1$ とし, $u \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{T}))$ を (1.1)–(1.2) の解とする. Duhamel の原理により, (1.1)–(1.2) を次の積分方程式に書き換える.

$$u(t) = e^{-t\partial_x^5}\varphi + \int_0^t e^{-(t-t')\partial_x^5}\{-10\gamma\partial_x(u^3) - \alpha\partial_x(\partial_x u)^2 - \beta\partial_x(u\partial_x^2 u)\}(t')\,dt'. \tag{4.1}$$

(4.1) の右辺の第 2 項の u に線形化方程式の解 $e^{-t\partial_x^5}\varphi$ を代入することで, 逐次近似法の 2 次近似に現れる微分の損失を共鳴部分が

$$-\beta\int_{\mathbb{T}} u\,dx\,\partial_x^3 u - 30\gamma\int_{\mathbb{T}} u^2\,dx\,\partial_x u \tag{4.2}$$

と書けることが分かる. この項を取り除いた非共鳴部分に normal form 法を適用し, 方程式を変形すると, 2 階の微分の損失を持つ 3 次の非線形項が現れる. この項に含まれる微分の損失を持つ共鳴部分を相殺しなければならないが, 方程式が持つ対称性により局在化され

$$\frac{\beta^2}{5}\Big\{\int_{\mathbb{T}} u^2\,dx - \Big(\int_{\mathbb{T}} u\,dx\Big)^2\Big\}\partial_x u \tag{4.3}$$

と具体的に表すことができる. 残りの2階の微分の損失を持つ非共鳴部分に normal form 法を適用すると, 1階の微分の損失を持つ共鳴部分が現れると思われたが, 方程式の対称性により相殺することが分かる. (このような高次近似に現れる共鳴部分の相殺方法の詳細は, 後述する.) 明示的に表示した共鳴部分 (4.2) と (4.3) を以下のようにして相殺する. 保存則 $\int_{\mathbb{T}} u\,dx = \int_{\mathbb{T}} \varphi\,dx = E_0(\varphi)$ を用いて, 共鳴部分 $-\beta \int_{\mathbb{T}} u\,dx\,\partial_x^3 u$ を $-\beta E_0(\varphi)\partial_x^3 u$ に書き換えれることに注意し, (1.1) を次のように変形する.

$$\partial_t u + \partial_x^5 u + \beta E_0(\varphi)\partial_x^3 u = J_1(u) + J_2(u) + J_3(u) + K(u)\partial_x u. \tag{4.4}$$

ここで

$$\begin{aligned}
J_1(u) &= -30\gamma\big(u^2 - \int_{\mathbb{T}} u^2\,dx\big)\partial_x u,\\
J_2(u) &= -\alpha\partial_x(\partial_x u)^2 - \beta\partial_x\big\{(u - \int_{\mathbb{T}} u\,dx)\partial_x^2 u\big\},\\
J_3(u) &= -\frac{\beta^2}{5}\Big\{\int_{\mathbb{T}} u^2\,dx - \big(\int u\,dx\big)^2\Big\}\partial_x u,\\
K(u) &= -\big(30\gamma - \frac{\beta^2}{5}\big)\int_{\mathbb{T}} u^2\,dx - \frac{\beta^2}{5}E_0^2(\varphi).
\end{aligned}$$

上の議論より, (4.4) が持つ微分の損失を持つ共鳴部分は $K(u)\partial_x u$ のみである. ここで $K(u)$ は $x \in \mathbb{T}$ に依存しないことに注意する. 可逆な変数変換

$$C([-T,T]:H^s(\mathbb{T})) \ni u(t,x) \mapsto u\big(t, x - \int_0^t K(u)(t')\,dt'\big) =: \tilde{u}(t,x) \in C([-T,T]:H^s(\mathbb{T})) \tag{4.5}$$

により, (4.4) は

$$\partial_t \tilde{u} + \partial_x^5 \tilde{u} + \beta E_0(\varphi)\partial_x^3 \tilde{u} = J_1(\tilde{u}) + J_2(\tilde{u}) + J_3(\tilde{u}) \tag{4.6}$$

に変形することができ, 完全に微分の損失を持つ共鳴部分を相殺することができる. よって (4.6) に normal form 法を 3 回適用することができ, この変形によって現れるすべて非線形項は微分の損失を持たない. そのため Sobolev の埋め込みのみを用いて, $s \geq 1$ で非線形項を評価することができ, 適切性と無条件一意性を同時に得ることができる.

共鳴部分 $K(u)\partial_x u$ は, $E_1(u) = \int_{\mathbb{T}} u^2\,dx$ が保存すること用いると, 線形部分に吸収することができる. この場合, 変数変換 (4.5) を用いて方程式を書き換える必要はない. ただし, $E_1(u)$ が保存することを厳密に示すためには, 係数に $\alpha = \beta/2$ という制限がつき, (1.1) の解 u が $u \in C([-T,T]:H^s(\mathbb{T}))$, $s \geq 3/2$ を満たす必要があることを注意しておく.

以下, 逐次近似法の高次近似に現れる微分の損失を共鳴部分の相殺について述べる. まずに $J_2(\tilde{u})$ に normal form 法を適用することで現れる微分の損失を持つ共鳴部分と $J_3(\tilde{u})$ が相殺することを示す. 改めて $\tilde{u}$ を u と書く. $s \geq 1$ とし, $u \in C([-T,T]:H^s(\mathbb{T}))$ は (4.6)–(1.2) の解と

する．本質的な議論は変わらないため, $\alpha=\beta/2$, $\gamma=0$ 及び $E_0(\varphi)=0$ を仮定する．このとき, $v:=e^{t\partial_x^5}u=\mathcal{F}_k^{-1}[e^{itk^5}\hat{u}(t,k)]$ とおくと, $\hat{v}$ は各 $k\in\mathbb{Z}$ に対して次を満たす.

$$\partial_t\hat{v}(t,k)=\sum_{k=k_{1,2},\,\Phi^{(2)}\neq0}e^{t\Phi^{(2)}}\frac{\beta}{4}ik_{1,2}(k_1^2+k_2^2+k_{1,2}^2)\prod_{i=1}^{2}\hat{v}(t,k_i). \tag{4.7}$$

各 $N\in\mathbb{N}$ に対して振動項 $\Phi^{(N)}$ を

$$\Phi^{(N)}:=\Phi^{(N)}(k_1,\dots,k_N):=i\big\{k_{1,\dots,N}^5-\sum_{i=1}^{N}k_i^5\big\}$$

と定めると,

$$\Phi^{(2)}=\frac{5}{2}ik_1k_2k_{1,2}(k_1^2+k_2^2+k_{1,2}^2), \tag{4.8}$$

$$\Phi^{(3)}=\frac{5}{2}ik_{1,2}k_{2,3}k_{3,1}(k_{1,2}^2+k_{2,3}^2+k_{3,1}^2) \tag{4.9}$$

が従う．ただし, $N\geq4$ では $\Phi^{(N)}$ は自明な因数分解を持たないことに注意する．ここで

$$q_1^{(2)}:=q_1^{(2)}(k_1,k_2):=ik_{1,2}(k_1^2+k_2^2+k_{1,2}^2),$$
$$\Gamma_k^{(2)}:=\{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2:k=k_{1,2},\ k_1k_2k_{1,2}\neq0\}$$

とおくと, (4.7) は

$$\partial_t\hat{v}(t,k)=\sum_{\Gamma_k^{(2)}}e^{t\Phi^{(2)}}\frac{\beta}{4}q_1^{(2)}\prod_{i=1}^{2}\hat{v}(t,k_i) \tag{4.10}$$

と書ける．(4.8) より $\dfrac{q_1^{(2)}}{\Phi^{(2)}}=\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{k_1k_2}$ が従うことに注意して, (4.10) に normal form 法を適用すると, 各 $k\in\mathbb{Z}$ に対して $\mathcal{D}_t'$ の意味で次が成立する.

$$\partial_t\hat{v}(t,k)=\sum_{\Gamma_k^{(2)}}e^{t\Phi^{(2)}}\frac{\beta}{10}\frac{1}{k_1k_2}\prod_{i=1}^{2}\hat{v}(t,k_i)+\sum_{\Gamma_k^{(2)}}e^{t\Phi^{(2)}}\Big(-\frac{\beta}{5}\frac{1}{k_1k_2}\Big)\hat{v}(t,k_1)\partial_t\hat{v}(t,k_2).$$

上式の右辺の第 2 項の $\partial_t\hat{v}$ に (4.10) を代入すると, この項は

$$\mathcal{N}_1^{(3)}:=\sum_{\Gamma_k^{(3)}}e^{t\Phi^{(3)}}\Big(-\frac{\beta^2}{10}i\Big)\frac{k_3^2+k_2k_3+k_2^2}{k_1}\prod_{i=1}^{3}\hat{v}(t,k_i)$$

と変形できる．ここで, $\Gamma_k^{(3)}:=\{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{Z}^3:k=k_{1,2,3},\ k_1k_2k_3k_{2,3}k_{1,2,3}\neq0\}$. $\mathcal{N}_1^{(3)}$ において微分の損失が生じる場合のみを扱う．k_2 と k_3 が対称であることに注意すると, $\mathcal{N}_1^{(3)}$ において微分の損失を持つ非線形相互作用は,

$$\mathcal{N}_2^{(3)}:=\sum_{\tilde{\Gamma}_k^{(3)}}e^{t\Phi^{(3)}}\Big(-\frac{\beta^2}{5}i\Big)\frac{k_3^2+k_2k_3+k_2^2}{k_1}\prod_{i=1}^{3}\hat{v}(t,k_i)$$

と表せる. ここで $\tilde{\Gamma}_k^{(3)} := \{(k_1,k_2,k_3) \in \Gamma_k^{(3)} : |k_3| > 16\max\{|k_1|,|k_2|\}\}$ とした. $\tilde{\Gamma}_k^{(3)}$ を次のように分解する.

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma}_k^{(3)} = R_k^{(3)} \cup N_k^{(3)},\\
&R_k^{(3)} := \{(k_1,k_2,k_3) \in \tilde{\Gamma}_k^{(3)} : k_{1,2} = 0\}, \qquad N_k^{(3)} := \{(k_1,k_2,k_3) \in \tilde{\Gamma}_k^{(3)} : k_{1,2} \neq 0\}.
\end{aligned}
$$

(4.9) に注意すると, $\mathcal{N}_2^{(3)}$ の共鳴部分, つまり $\mathcal{N}_1^{(3)}$ の微分の損失を持つ共鳴部分は,

$$
\mathcal{R}^{(3)} := \sum_{R_k^{(3)}} \big(-\frac{\beta^2}{5}i\big)\,\frac{k_3^2+k_2k_3+k_2^2}{k_1}\prod_{i=1}^{3}\hat{v}(t,k_i)
$$

と表せる. $R_k^{(3)}$ が k_1 と k_2 に関して対称であることに注意すると, $\mathcal{R}^{(3)}$ を次のように変形できる.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}^{(3)} &= \sum_{R_k^{(3)}} \big(-\frac{\beta^2}{10}i\big)\big\{\frac{k_3^2+k_2k_3+k_2^2}{k_1} + \frac{k_3^2+k_1k_3+k_1^2}{k_2}\big\}\prod_{i=1}^{3}\hat{v}(t,k_i)\\
&= \sum_{R_k^{(3)}} \big(-\frac{\beta^2}{10}i\big)\big\{\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}k_3^2 + \frac{k_1^2+k_2^2}{k_1k_2}k_3 + \frac{k_1^3+k_2^3}{k_1k_2}\big\}\prod_{i=1}^{3}\hat{v}(t,k_i).
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

$(k_1,k_2,k_3) \in R_k^{(3)}$ であれば, $k_1+k_2=0$ かつ $k=k_3$ であるため, (4.11) より

$$
\mathcal{R}^{(3)} = \frac{\beta^2}{5}\sum_{k_1\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\,16|k_1|<|k|} |\hat{v}(t,k_1)|^2\, ik\hat{v}(t,k)
$$

が成り立つ. 一方で,

$$
\mathcal{F}_x[e^{t\partial_x^5}J_3(u)(t)](k) = -\frac{\beta^2}{5}\sum_{k_1\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\hat{v}(t,k_1)|^2\, ik\hat{v}(t,k)
$$

と書けることに注意すると,

$$
\mathcal{R}^{(3)} + \mathcal{F}_x[e^{t\partial_x^5}J_3(u)(t)](k) = -\frac{\beta^2}{5}\sum_{k_1\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\,16|k_1|\geq|k|} |\hat{v}(t,k_1)|^2\, ik\hat{v}(t,k)
$$

が従う. この項は共鳴部分であるが, $s \geq 1/2$ で評価することができ, 微分の損失を持つ共鳴部分は相殺されていることが分かる.

次に 2 階の微分の損失を持つ非共鳴部分

$$
\mathcal{N}_3^{(3)} := \sum_{N_k^{(3)}} e^{t\Phi^{(3)}}\big(-\frac{\beta^2}{5}i\big)\,\frac{k_3^2+k_2k_3+k_2^2}{k_1}\prod_{i=1}^{3}\hat{v}(t,k_i)
$$

に normal form 法を適用して現れる非線形相互作用に微分の損失を持つ共鳴部分が存在しないことを示す. $N_k^{(3)} = \{(k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}^3 : k = k_{1,2,3},\ k_1k_2k_{1,2} \neq 0,\ |k_3| > 16\max\{|k_1|,|k_2|\}\}$ と表せ, k_1 と k_2 に関して対称となる.

$$
q_2^{(3)}(k_1,k_2,k_3) := -\frac{\beta^2}{10}i\big(\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}k_3^2 + \frac{k_1^2+k_2^2}{k_1k_2}k_3 + \frac{k_1^3+k_2^3}{k_1k_2}\big)
$$

とおくと, (4.11) と同様にして $\mathcal{N}_3^{(3)}$ を次のように書き換えることができる.

$$\mathcal{N}_3^{(3)} = \sum_{N_k^{(3)}} e^{t\Phi^{(3)}}\, q_2^{(3)}(k_1,k_2,k_3) \prod_{i=1}^{3} \hat{v}(t,k_i)$$

$q_2^{(3)}(k_1,k_2,k_3) = q_2^{(3)}(k_2,k_1,k_3)$ と $q_1^{(2)}(k_1,k_2) = q_1^{(2)}(k_2,k_1)$ が従うことに注意すると, $\mathcal{N}_3^{(3)}$ に normal form 法を適用して現れる微分の損失を持つ非線形相互作用は,

$$\mathcal{N}^{(4)} := \sum_{\tilde{\Gamma}_k^{(4)}} e^{t\Phi^{(4)}} \Big(-2\,\frac{q_2^{(3)}}{\Phi^{(3)}} \Big)(k_1,k_2,k_{3,4}) q_1^{(2)}(k_3,k_4) \prod_{i=1}^{4} \hat{v}(t,k_i)$$

と表せる. ここで

$$\tilde{\Gamma}_k^{(4)} := \{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in\mathbb{Z}^4 : k = k_{1,2,3,4},\ |k_4| > 4^3 \max_{i=1,2,3}\{|k_i|\},\ k_1k_2k_3k_{1,2}\neq 0\}.$$

$\Phi^{(4)}$ は自明な因数分解を持たないため, 共鳴部分と非共鳴部分を厳密に求めることは困難である. そこで次の等式が成り立つことに注意する.

$$\begin{aligned}\Phi^{(4)}(k_1,k_2,k_3,k_4) &= \Phi^{(3)}(k_{1,2},k_3,k_4) + \Phi^{(2)}(k_1,k_2)\\ &= \frac{5}{2} i k_{1,2,3}k_{1,2,4}k_{3,4}(k_{1,2,3}^2 + k_{1,2,4}^2 + k_{3,4}^2) + \frac{5}{2} i k_1k_2k_{1,2}(k_1^2+k_2^2+k_{1,2}^2).\end{aligned}$$

$(k_1,k_2,k_3,k_4)\in\tilde{\Gamma}_k^{(4)}$ かつ $k_{1,2,3}\neq 0$ であれば, 上の等式から

$$|\Phi^{(4)}(k_1,k_2,k_3,k_4)| \geq |\Phi^{(3)}(k_{1,2},k_3,k_4)| - |\Phi^{(2)}(k_3,k_4)| \geq C|k_{1,2,3}||k_4|^4 \geq C|k_4|^4$$

が従うため, norma form 法により 1 階の微分の損失を回復することができる.

$$R_k^{(4)} := \{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in\tilde{\Gamma}_k^{(4)} : k_{1,2,3} = 0\}$$

とおくと, 上の考察より $\mathcal{N}^{(4)}$ の共鳴部分を

$$\mathcal{R}^{(4)} := \sum_{R_k^{(4)}} e^{t\Phi^{(4)}} \Big(-2\,\frac{q_2^{(3)}}{\Phi^{(3)}} \Big)(k_1,k_2,k_{3,4}) q_1^{(2)}(k_3,k_4) \prod_{i=1}^{4} \hat{v}(t,k_i)$$

とみなすことができる. ここで $(k_1,k_2,k_3,k_4)\in\tilde{\Gamma}_k^{(4)}$ のとき, $k_1k_2k_3k_{1,2}\neq 0$ であるが, $k_{1,3}k_{2,3}\neq 0$ とは限らないため, $\tilde{\Gamma}_k^{(4)}$ は k_1,k_2,k_3 に関して対称とはいえない. 一方で $(k_1,k_2,k_3,k_4)\in R_k^{(4)}$ のとき, $k_{1,2,3}=0$ から $k_{1,3} = -k_2 \neq 0$ かつ $k_{2,3} = -k_1 \neq 0$ が従うため, $R_k^{(4)}$ は k_1,k_2,k_3 に関して対称であることがいえる. この対称性を用いると

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{(4)} = -\frac{2}{3}\sum_{R_k^{(4)}} e^{t\Phi^{(4)}} \Big\{ &\frac{q_2^{(3)}}{\Phi^{(3)}}(k_1,k_2,k_{3,4}) q_1^{(2)}(k_3,k_4) + \frac{q_2^{(3)}}{\Phi^{(3)}}(k_2,k_3,k_{1,4}) q_1^{(2)}(k_1,k_4)\\ &+ \frac{q_2^{(3)}}{\Phi^{(3)}}(k_1,k_3,k_{2,4}) q_1^{(2)}(k_2,k_4) \Big\} \prod_{i=1}^{4} \hat{v}(t,k_i)\end{aligned}$$

が成り立ち, 対称性に注意して計算すると, $\mathcal{R}^{(4)}$ には微分の損失が存在しないことが示せる. 詳細については, [6] の命題 5.5 を参照してもらいたい.

最後に 3 回の normal form 法を適用することによって現れる微分の損失を持たない非線形項の評価について注意を与える. 最近, Kishimoto([8]) により, normal form 法により現れる微分の損失を非線形項を統一的に評価できる手法が構築された. ただしこの手法は, m 次の非線形項を持つ非線形分散型方程式に対し, $X^{s,b}$ 空間を利用した多重線形評価

$$\|N(u)\|_{X^{s,-1/2}} \leq C\|u\|_{X^{s,1/2}}^m \tag{4.12}$$

がある $s \in \mathbb{R}$ で成立することに大きく起因すると思われる. 例えば, (2.1) は (4.12) を満たす $s \in \mathbb{R}$ が存在し, Kishimoto の手法を適用することができる. 一方で, 強い特異性のもつ非線形項を有する (1.1) は, 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して (4.12) が成立しないため, Kishimoto の手法の枠組みからは外れると思われる. そのため, (1.1) では normal form 法により現れる各非線形項に対し, 個別の評価を与える必要がある.

参考文献

[1] A. Babin, A. Ilyin and E. Titi, *On the regularization mechanism for the periodic Korteweg-de Vries equation*, Comm. Pire Appl. Math. **64** (2011), no. 5, 591–648.

[2] J. L. Bona and R. Smith, *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **278** (1975), no. 1287, 555–601.

[3] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and its applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV equation*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), no. 3, 209–262.

[4] A. D. Ionescu, C. E. Kenig and D. Tataru, *Global well-poesdeness for the KP-I initial value problem in the energy space*, Invent. Math. **173** (2008), no. 2, 265–304.

[5] T. Kato, *On nonlinear Schödinger equations. II. H^s-solutions and unconditional well-posedness*, J. Anal. Math. **67** (1995), 281–306.

[6] T. K. Kato, *Unconditional well-posedness of fifth order KdV type equations with periodic boundary condition*, RIMS Kokyuroku Bessastu B70 (2018), 105–129.

[7] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *A bilinear estimates with applications to the KdV equation*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 2, 573–603.

[8] N. Kishimoto, *Unconditional uniqueness of solutions for nonlinear dispersive equations*, arXiv:math/1911.04349v3 [math. AP].

[9] C. Kwak, *Local well-posedness for the fifth order KdV equations on* $\mathbb{T}$, J. Differential Equations **260** (2016), no. 10, 7683–7737.

[10] S. Kwon, *On the fifth-order KdV equation: Local well-posedness and lac of uniform continuity of the solution map*, J. Differential Equations **245** (2008), no. 9, 2627–2659.

Self-adjointness and Feynman propagator in Quantum Field Theory

平良　晃一　(立命館大学理工学部）*

1　序

本稿では，楕円型でないような微分作用素のスペクトル理論及びその数理物理学への応用について述べる．この研究の一部は学習院大学の中村周教授との共同研究に基づく．

1.1　背景

微分作用素（より一般の線形作用素）のスペクトル理論は，行列の固有値の理論の無限次元への自然な一般化であり，様々な分野と密接に関係する一大理論である．特に微分作用素が楕円型である場合，$\mathbb{R}^n$ 上の Laplacian$-\Delta$ や Schrödinger 作用素 $-\Delta+V(x)$，より一般に Riemann 多様体上の Laplacian$-\Delta_g$ については量子力学との関わりから様々な研究がなされている（例えば [25] や [36] を見よ）．一方で，波動方程式に現れる d'Alembertian $\Box$ などの楕円型でない微分作用素に対するスペクトル理論は，物理的に直接的な意味が見出せない，数学的に厳密な扱いが難しい，という理由から少し前まではほとんど研究が行われていなかった．

一方近年になって，楕円型でないような微分作用素のスペクトル理論が活発に研究されるようになってきた．例えば d'Alembertian のスペクトル理論の数理物理学，特に場の量子論の文脈で（[7]，[8]）曲がった時空上の Feynman propagator の構成への応用が提唱された．実際物理の文献では，時空が曲がっていない Minkowski 空間上において Feynman propagator はこのようにして定義される．時空が曲がっている場合にも，この手法が有効であるということが [7]，[8] における主張である．それ以前にも，物理の文献 [26] 等において d'Alembertian のスペクトル理論が暗に用いられていた．

それ以外にも，楕円型でない微分作用素（より一般に擬微分作用素）のスペクトル理論は様々な文脈で調べられている：

- エルゴード理論への応用（[10]，[34]）：Anosov 力学系の指数的混合性を示すために Anosov ベクトル場のスペクトル理論が用いられている．ただし，ここで用いられたスペクトル理論は通常の L^2 空間のスペクトル理論とは少し異なるものである．

- 外向波のモデル（[3]，[5]）：近年 [5] にて，外向波のモデルとして 0 階の非楕円型擬微分作用素が現れる方程式が提唱された．その方程式の定性的な性質を調べるのに擬微分作用素のスペクトル理論が有効である．

*e-mail:ktaira@fc.ritsumei.ac.jp

- 表現論におけるスペクトル理論 ([18]) : 対称空間 G/H を不連続部分群 Γ で割った局所対称空間 $\Gamma\backslash G/H$ を考える．自然に入る計量が Riemannian でない場合に Laplacian のスペクトル理論を調べると，Riemannian である場合と比べて変わった性質を持つことが知られている．実際 [18] において，ある局所対称空間に関して不連続部分群 Γ の変形に対して不変な L^2 固有値が無限個存在することが証明された．

1.2 数学的な問題

そこで多様体 M 上の（擬）微分作用素 P のスペクトル論において自然に現れる，数学的な問題を考えてみよう．ここで，P は L^2 空間 $L^2(M)$ 上の対称作用素である，つまり全ての $u, w \in C_c^\infty(M)$ に対して $(u, Pw)_{L^2(M)} = (Pu, w)_{L^2(M)}$ が成り立つとする．

問題 1.1. *(i)* P は $C_c^\infty(M)$ 上本質的自己共役（§2 の定義 *2.3*）になるか？つまり，P の自己共役拡張は唯 1 つに定まるか？
(ii) P の自己共役拡大のスペクトルはどのような構造をしているか？特に離散スペクトル，連続スペクトルはいつ現れるか？
(iii) g を M 上の *Lorentz* 計量，$\Box_g$ を *Laplacian* とするときにスペクトル理論を用いて *Feynaman propagator* が定義できるか？

定義していない用語などは次章以降で説明する．

1.3 困難

微分作用素 P が楕円型，特に Riemmann 多様体上の Laplacian $P = -\Delta_g$ である場合には，問題 1.1 の $(i), (ii)$ はある程度簡単に調べられる．当然だが，より詳細なことを調べようとすると楕円型の場合にも難しい部分は多々現れ，これに関して未解決な問題も多数ある．しかし以下のような粗い情報は一般論を用いて比較的簡単に調べられる．

事実 1.2. (M, g) を *Riemann* 多様体上とし，$P = -\Delta_g$ とする．
(i) (M, g) が測地的に完備（*Hopf-Rinow* の定理により測地距離に関して距離空間として完備であることと同値）であれば P は $C_c^\infty(M)$ 上本質的自己共役である（*[11]*）．特に M が境界を持たないコンパクト多様体であれば，P は $C_c^\infty(M)$ 上本質的自己共役である．
(ii) M が境界を持たないコンパクト多様体であれば，P の唯 1 つの自己共役拡張は離散スペクトルのみを持ち，その重複度は有限である（例えば *[36, Theorem 14.7]* を見よ）．一方で (M, g) が *Euclid* 空間や双曲空間である場合には，P のスペクトルは連続スペクトルのみからなる．*Euclid* 空間の場合にはスペクトルは $[0, \infty)$ になり，双曲空間の場合には n を次元とすればスペクトルは $[\frac{(n-1)^2}{4}, \infty)$ となる．

注意 1.3. (ii) の前半と似た主張として，$\mathbb{R}^n$ 内の滑らかな境界をもつ有界領域 Ω 上の *Dirichlet (*もしくは *Neumann) Laplacian* は離散スペクトルのみを持ちその重複度は有限である，というものが知られている．例えば $(0, 2\pi)$ 上で *Dirichlet Laplacian* を考えるとスペクトルは $\{n^2\}_{n=1}^\infty$ となり，各固有値の重複度は 1 である．

以下の例では，P は $C_c^\infty(M)$ 上本質的自己共役であるので，その唯 1 つの自己共役拡大のスペクトルについて考える．

例 1.4 (Euclid 空間)**.** $\mathbb{R}^n$ 上の通常の *Laplacian* $P = -\Delta = -\sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$ を考える．このとき，フーリエ変換を通して P は掛け算作用素 $|\xi|^2$ とユニタリ同値であるので，P のスペ

クトルは

$$[0, \infty)$$

であって，連続的になる．一方で，P に L^2-固有関数は存在しない．実際，ある $z \in \mathbb{C}$ に対して $Pu = zu$ が成り立つような $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ は定数関数 0 しか存在しない．

例 1.5 (トーラス). n 次元平坦トーラス $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ 上の *Laplacian* は $\mathbb{R}^n$ の通常の座標を用いて

$$P = -\Delta = -\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2$$

と書くことができる．トーラス上の関数が $\mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{Z}^n$ 不変な（つまり，周期的な）関数と同一視できることを思い出すと，

$$u_m(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{im\cdot x} \quad (m \in \mathbb{Z}^n)$$

は P の固有値 $|m|^2$ に対する固有関数になることが簡単に証明できる．一方で，*Parseval* の等式からこれらは $L^2(\mathbb{T}^n)$ の正規直交基底になることがわかるので，P のスペクトルは

$$\{|m|^2 \mid m \in \mathbb{Z}^n\}$$

から成り，離散的かつ重複度が有限である．

例 1.6 (球面). $n-1$ 次元球面 $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ に $\mathbb{R}^n$ から誘導された自然な *Riemann* 計量 g を入れ，対応する *Laplacian* $P = -\Delta_g$ を考える．(例えば，$n = 3$ のときは $x = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$（$0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$）という座標を導入すると，この座標に関して

$$P = -\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2$$

と書ける.）このとき，P の固有値は

$$\{k(n+k-2) \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

という離散的な値をとり，重複度は有限である．更に対応する固有関数は球面調和関数から成る．

一方で，P が楕円型でない場合には本質的自己共役性に関する主張 (i) すら高度に非自明な問題である．実際，事実 1.2 の (i) や (ii) の前半の主張の証明は P の以下の楕円型正則性に強く依存する：M を境界を持たないコンパクト多様体で $H^2(M)$ を 2 階の Sobolev 空間とすると，

$$u \in L^2(M) \text{ かつ } Pu \in L^2(M) \Rightarrow u \in H^2(M).$$

他にも自己共役性の理論，スペクトル理論の多くは楕円性（関数解析の言葉を使えば正値性）に基づいており，これらの理論を P が楕円型でない場合に適用することはできない．

そこで楕円型でない作用素に対して問題 1.1 を調べるには，新しい手法の開発が必要になる．次章以降で，これらの問題についての詳細，近年の進展及び著者により得られた結果について解説する．

2　本質的自己共役性

この章では,（擬）微分作用素の本質的自己共役性の問題 1.1(i) について考えていく.

2.1　本質的自己共役性の定義

まず，線形作用素の本質的自己共役性や関連する概念について復習する．詳しくは Reed-Simon の本 [25] の I 巻第 8 章を見よ．

まず，$\mathcal{H}$ を複素 Hilbert 空間として，その上の内積を $(,)$ と表す．P が $\mathcal{H}$ 上の線形作用素であるとは，$\mathcal{H}$ の線形部分空間 $D(P)$ があって，$P : D(P) \to \mathcal{H}$ が線形写像となることであった．$D(P)$ を P の定義域といい，$D(P)$ が $\mathcal{H}$ で稠密であるとき，P は稠密に定義された（線形）作用素であるという．更に，P が稠密に定義された作用素であるとき，P の共役作用素と呼ばれる線形作用素 P^* を以下のように定義する：まず，P^* の定義域を

$$D(P^*) = \{u \in \mathcal{H} \mid \exists w \in \mathcal{H} \text{ s.t. } \forall v \in D(P),\ (u, Pv) = (w, v)\}$$

で定める．そこで，$u \in D(P^*)$ に対して $P^*u = w$（w は $D(P^*)$ の定義に現れる $\mathcal{H}$ の元）と定義する．更に，線形作用素 P_1, P_2 に対して，P_2 が P_1 の拡大であるとは，$D(P_1) \subset D(P_2)$ が成り立ちかつ $u \in D(P_1)$ に対して $P_1u = P_2u$ が成り立つことをいう．

定義 2.1 (対称作用素)**.** P を稠密に定義された作用素とする．P が対称作用素であるとは，P^* が P の拡大になっていることをいう．このとき特に，全ての $u, w \in D(P)$ に対して

$$(u, Pw) = (Pu, w)$$

が成り立つ．

$\mathcal{H}$ が有限次元であれば，対称作用素 P はあるユニタリ行列 U を用いて対角化できる，別の言い方をすれば P の固有ベクトルからなる $\mathcal{H}$ の正規直交基底 $u_1, \ldots, u_n$ と対応する固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が存在して $UPU^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ と書ける．つまり，$\mathcal{H}$ を P の固有ベクトルを用いて分解（スペクトル分解）できるのである．

しかし $\mathcal{H}$ が無限次元である場合には，P が対称であるというだけでスペクトル分解できるとは限らない．そこで，ある種の完全性の条件を課した自己共役作用素を定義しよう．

定義 2.2 (自己共役作用素)**.** 対称作用素 P が自己共役であるとは，$D(P) = D(P^*)$ が成り立つことをいう．

このとき，有限次元の場合の自然な一般化として，自己共役作用素 P はスペクトル分解できることが知られている（[25, Theorem VIII.5]）．ただし連続スペクトルが現れることもあり，定式化が複雑になるのでここでは詳しく述べない．

実際に微分作用素等を扱う際には，より小さな定義域で作用素を考え，その拡張としての自己共役作用素を扱う方が便利なことが多い．そこで，以下のような定義を導入する．

定義 2.3 (本質的自己共役性)**.** 対称作用素 P は，自己共役になるような P の拡大が唯 1 つであるとき本質的自己共役であるという．

注意 2.4. これは P の作用素としての閉包が自己共役になることと同値である．

更に本質的自己共役性の特徴づけとして，以下の定理が知られている．

定理 2.5. *[25, Corollary after Theorem XIII.3]* P を対称作用素とする．このとき，P が本質的自己共役であることと

$$\mathrm{Ker}\ (P^* \pm i) = \{0\}$$

となることは同値である．

2.2 微分作用素の本質的自己共役性

前節では，本質的自己共役性の抽象的な定義について述べたので，この節では微分作用素という具体的な対象に対して本質的自己共役性の意味を考えてみる．結論を端的に言えば，微分作用素が本質的自己共役になるのは P にとっての「境界」が現れないことに相当する．

P を多様体 M 上の（関数に作用する）微分作用素とする.（あるいは密度関数 $d\mu$ を1つ固定して）Hilibert 空間を $\mathcal{H} = L^2(M)$ と定める．P は $C_c^\infty(M)$ 上対称である，つまり

$$(u, Pv)_{L^2(M)} = (Pu, v)_{L^2(M)}$$

が全ての $u, v \in C_c^\infty(M)$ に対して成り立つと仮定する．例えば，$L^2(M)$ を Riemann 計量 g から誘導された L^2 空間とし，対応する Laplacian$P = -\Delta_g$ を考えると Gauss の発散定理から P は $C_c^\infty(M)$ 上対称になる．これ以降，**微分作用素 P が本質的自己共役であるとは，$C_c^\infty(M)$ を定義域とみて本質的自己共役である**こととする．更に，M が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるときには言及しない限り，$L^2(M)$ は Lebesgue 測度から誘導された通常の L^2 空間を考えることとする．Riemann 計量や Lorentz 計量を考えているときには，密度関数は計量から誘導されたもののみ扱う．更に計量 g に対し，Δ_g あるいは $\Box_g$ は局所座標 x を用いて $\sqrt{|\det g|}^{-1} \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}(\sqrt{|\det g|} g^{ij} \partial_{x_j})$ で与えられる微分作用素とする．計量が Riemmann 計量である場合には Δ_g で表し，そうでない場合には $\Box_g$ で表す場合が多い．

まず，本質的自己共役であるような微分作用素の例を与えよう．

例 2.6. *(i)* $M = \mathbb{R}^n$ とし，$V(x)$ を有界実数値関数として，$P = -\Delta + V(x)$ は本質的自己共役である．ただし，$V(x)$ は掛け算作用素とみなす.
(ii) $M = \mathbb{R}^n$ とすると，$P = -\Delta + |x|^2$ は本質的自己共役である．これを調和振動子の *Schrödinger* 作用素と呼ぶ.
(iii) $c \in \mathbb{R}$，$n \geq 3$ かつ $M = \mathbb{R}^n$ とし，$P = -\Delta + c/|x|$ とおくと P は本質的自己共役である．$c/|x|$ を *Coulomb* ポテンシャルという.
(iv) $M = \mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$，$g = (dx_1^2 + \ldots + dx_n^2)/x_n^2$ とおいて，*Riemann* 多様体 (M, g) を双曲空間という．双曲空間上は測地的に完備であるため，事実 *1.2* からその *Laplacian* は本質的自己共役である．より一般に，*Riemann* 対称空間上の *Laplacian* は本質的自己共役である.

自己共役作用素の定義や本質的自己共役性の判定条件（定理2.5）を思い出すと，本質的自己共役性を判定するには，定義域を $C_c^\infty(M)$ とした線形作用素 P の共役作用素 P^* について調べることが重要であることがわかる．しかし P^* の定義は抽象的かつ直感的にわかりにくいので，P^* の定義域を超関数の理論を用いて書き直そう.

$\mathcal{D}'(M)$ を M 上の Schwartz 超関数全体の集合とし，$L^2(M)$ を定義した密度関数 $d\mu$ に関して $C_c^\infty(M)$ に反線形写像として作用しているとする．つまり，$u \in L^2(M)$ を超関数 $\mathcal{D}'(M)$ の要素としてみなすとき，$\varphi \in C_c^\infty(M)$ への作用 (u, φ) は $(u, \varphi) := (u, \varphi)_{L^2(M)}$ で与えられ，一般的な $\mathcal{D}'(M)$ の元の作用はこの自然な拡張であるとする．このとき，微分作用素 P の $\mathcal{D}'(M)$ への作用を

$$(Pu, \varphi) := (u, P\varphi) \quad u \in \mathcal{D}'(M),\ \varphi \in C_c^\infty(M)$$

と定める.

補題 2.7. $u \in L^2(M)$ とする．このとき，$u \in D(P^*)$ であることと超関数の意味で $Pu \in L^2(M)$ が成り立つことは同値である．特に，$\mathrm{Ker}\,(P^* \pm i) = \{0\}$ であることと $(P \pm i)u = 0$ を満たす超関数解 $u \in \mathcal{D}'(M)$ が定数関数 0 のみであることは同値である.

証明．今，定義域は $D(P) = C_c^\infty(M)$ を考えていることを思い出そう．定義から $u \in D(P^*)$ であることと，ある $w \in L^2(M)$ が存在して全ての $v \in C_c^\infty(M)$ に対して

$$(u, Pv)_{L^2(M)} = (w, v)_{L^2(M)} \tag{2.1}$$

が成り立つことは同値である．P の超関数への作用の定義を思い出すと，$(u, Pv)_{L^2(M)} = (u, Pv) = (Pu, v)$ であるため，等式 (2.1) は

$$(Pu, v) = (w, v)$$

が成り立つことと同値である．これは超関数の意味で $Pu = w$ が成り立つことを意味しており，$w \in L^2(M)$ だったので $Pu \in L^2(M)$ が従う．

逆に $Pu \in L^2(M)$ であれば，再び P の超関数への作用の定義から $(u, Pv) = (Pu, v)$ が全ての $v \in C_c^\infty(M)$ について成り立つ．そこで $w := Pu \in L^2(M)$ とおけば，これは (2.1) を意味しているので $u \in D(P^*)$ が成り立つことがわかる．

□

この補題からもし P が本質的自己共役であると仮定すると，超関数の意味で $Pu, Pv \in L^2(M)$ を満たす全ての $u, v \in L^2(M)$ に対して

$$(u, Pv)_{L^2(M)} = (Pu, v)_{L^2(M)} \tag{2.2}$$

が成り立つことがわかる．そこで，微積分学の基本定理あるいは Green の定理を思い出せば本質的自己共役でない例は簡単に見つけることができる．例えば区間 $M = (0, 1)$ 上で微分作用素 $P = -i\partial_x$ を考えると，微積分学の基本定理から境界項が現れ，その影響で (2.2) を満たさないような関数 $u, v \in D(P^*)$ の例は簡単に作れる（例えば $u(x) = x$ かつ $v(x) = 1$ とおけばよい）．つまり境界値があるような空間で微分作用素を考えると，境界条件項が現れる関係で本質的自己共役性が崩れるのである：

例 2.8. $M \subset \mathbb{R}^n$ を滑らかな境界を持つような有界領域とする．このとき，$P = -\Delta$ は本質的自己共役ではない．実際，(2.2) を満たさないような関数 $u, v \in D(P^*)$ の例は沢山作ることができる．また，P が *Dirichlet Laplacian* 及び *Neumann Laplacian* という相異なる自己共役拡大を少なくとも 2 つ持つことからも，本質的自己共役でないことが証明できる．

$\mathbb{R}^n$ のような多様体は境界を持たないが，考える計量によっては $\mathbb{R}^n$ の無限遠点が境界のような役割を果たすことがある．例えば $(0, 1)$ と $\mathbb{R}$ が微分同相であることを用いて，$\mathbb{R}$ に $(0, 1)$ の Euclid 計量から誘導された計量を入れると，対応する Laplacian が本質的自己共役でないことが例 2.8 から分かる．このことから，微分作用素 P にとっての「境界」とは多様体 M のみで決まるわけではなく，P と M の組み合わせ，あるいは P の M 全体の大域的な挙動によって決まることがわかる．

最後に，少し変わった例を紹介しよう．

例 2.9. $\mathbb{R}^n$ から 1 点を除いた多様体 $M := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ と通常の *Euclid* 計量を考える．このとき，*Laplacian* $P = -\Delta$ は $C_c^\infty(M)$ 上本質的自己共役であることは $n \geq 4$ と同値である *[25, after Theorem X.11]*．これは事実 *1.2* と矛盾しない．実際，$\mathbb{R}^n$ 上で原点を通る直線（測地線）は M 上完備な測地線にならない．あるいは，M 内の閉集合 $\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid |x| \leq 1\}$ がコンパクトにならないことから，距離空間として完備でないことがわかる．特に $n \leq 3$ の場合を考えると,「測地的に完備であれば *Laplacian* は本質的自己共役である」という主張は正しいが，その逆は正しくないことがわかる．

2.3 楕円型でない微分作用素

事実1.2で見たように，境界がないコンパクトRiemann多様体上のLaplacianは本質的自己共役になる．この事実は微分作用素が楕円型でない場合，例えばRiemann計量をLorentz計量に変えた場合にも成り立つか，と考えるのは自然である．以下の例にあるように，これは全く正しくない．

例 2.10. *[4, 33]* 1次元トーラス $\mathbb{T}$ 上の作用素 $P = -\partial_x(\sin x \partial_x)$ を考える．このとき，P は本質的自己共役ではない．

例 2.11. *[33, §1]* 2次元トーラス $\mathbb{T}^2$ 上の *Lorentz* 計量を $g = 2dx_1dx_2 + (\sin x_1)dx_2^2$ と定義する．このとき，*Laplacian* は $P = -\Box_g = \partial_{x_1}(\sin x_1 \partial_{x_1}) - 2\partial_{x_1}\partial_{x_2}$ となる．すると，P は本質的自己共役ではない．これは例 *2.10* の場合の非本質自己共役性を用いれば直ちに証明できる．

それどころか最近になって，2次元トーラス $\mathbb{T}^2$ ではLaplacianが本質的自己共役になるようなLorentz計量は非常に少ないことが証明された：

例 2.12. *[4]* 2次元トーラス $\mathbb{T}^2$ 上の *generic* な *Lorentz* 計量に対して，対応する *Laplacian* は本質的自己共役ではない．

では楕円型でない場合に，本質的自己共役性の障害となるものは何だろうか．楕円型作用素とそうでない作用素の最も大きな違いは，作用素の持つ**正則性**（関数の微分可能性を上げる性質）である．正則性とは例えば，以下のいずれか性質を指す：

- ある $\varepsilon > 0$ があって $D(P^*) \subset H^\varepsilon(M)$ あるいは $D(P^*) \subset H^\varepsilon_{loc}(M)$ が成り立つこと．ただし，$H^\varepsilon(M)$ はSobolev空間であり，$\varepsilon > 0$ が大きければ大きいほど P の持つ正則性は高いと考える；

- ある $\lambda \in \mathbb{C}$ と $\varepsilon > 0$ に対して，$u \in L^2(M)$ が超関数の意味で $Pu = \lambda u$ を満たせば $u \in H^\varepsilon(M)$，あるいは $H^\varepsilon_{loc}(M)$ が成り立つこと．

例2.10の作用素 $P = -\partial_x(\sin x\partial_x)$ について言えば，これは $x = 0, \pi$ で楕円型ではない．これらの点の周りの正則性の欠如から前節の最後に述べた「境界」を生み，それが P の本質的自己共役性を崩すのである．

例 2.13. 再び1次元トーラス $\mathbb{T}$ 上の作用素 $P = -\partial_x(\sin x\partial_x)$ を考える．このとき，全ての $\delta > 0$ に対して $D(P^*) \subset H^{\frac{1}{2}-\delta}(\mathbb{T})$ が成り立つ *[33, §6.2]* が，$D(P^*) \setminus H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}) \neq \emptyset$ である（$0 < x < \pi$ で1であり，それ以外で0になる関数を考えればよい）．つまり，$\frac{1}{2}$ 階以上の正則性は期待できない．*[33]* では，$u \in D(P^*) \setminus H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T})$ となるような関数の存在を用いて（厳密には，この条件だけでは不十分である）P が本質的自己共役にならないことを証明している．

正則性の欠如が必ずしも本質的自己共役性を崩すとは限らない（後の注意2.16）が，これらの間には非常に深い関係性がある．特に逆の関係，つまり P にある程度正則性があれば本質的自己共役性である，という主張は正しい：

補題 2.14. (*i*) $M = \mathbb{R}^n$ とし，P を係数の1階までの導関数が有界である対称な2階の微分作用素とする．もし $D(P^*) \subset H^1(\mathbb{R}^n)$ が成り立てば P は本質的自己共役である．ただし，$H^1(\mathbb{R}^n)$ は1階の *Sobolev* 空間を表す．
(*ii*) M はコンパクトで境界を持たない多様体とし，P を対称な2階の微分作用素とする．もし $D(P^*) \subset H^1(M)$ が成り立てば P は本質的自己共役である．ただし，$H^1(M)$ は1階の *Sobolev* 空間を表す．

注意 2.15. 実用上は,「超関数の意味で $Pu \pm u = 0$ を満たす $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に関して $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ」というより弱い主張を証明すれば十分であり，この手の主張の方が使いやすいことが多い（*[22, 23, 24]*）．この補題は正則性が本質的自己共役性を保証する，ということを説明するために便宜的に導入したものである．

注意 2.16. これは正則性から本質的自己共役性が言える，という趣旨の補題だが，この逆は言えない．つまり，本質的自己共役だが正則性が成り立たないような微分作用素は存在する．例えば 2 次元トーラス $\mathbb{T}^2$ 上 *d'AlembertianP* $= \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2$ を考えると，*Fourier* 展開定理を用いれば P が本質的自己共役であることは簡単に証明できる．一方，$a_n = (1+|n|)^{-\frac{1}{2}}(1+\log(1+|n|))^{-1}$ かつ $u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i(x_1-x_2)n}$ とおく．すると $u \in L^2(\mathbb{T}^2)$ かつ $Pu = 0 \in L^2(\mathbb{T}^2)$ であるが，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても $u \notin H^\varepsilon(\mathbb{T}^2)$ となる．

証明. 記号を簡単にするため，$M = \mathbb{R}$ かつ 1 階までの導関数が有界である実数値関数 a を用いて $P = -\partial_x(a(x)\partial_x)$ と書ける場合にのみ証明する．それ以外の場合も同様に証明できる．

$u, v \in D(P^*)$ とする，つまり $u, v \in L^2(\mathbb{R})$ かつ $Pu, Pv \in L^2(\mathbb{R})$ が成り立つとする．このとき，$(u, Pv) = (Pu, v)$ が成り立つことを証明しよう．$\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}; [0,1])$ を $\chi(x) = 1$（$|x| \leq 1$）かつ $\chi(x) = 0$（$|x| \geq 2$）が成り立つようにとり，$\chi_R(x) = \chi(x/R)$ とおく．Lebesgue の収束定理と微積分学の基本定理（あるいは Green の定理）から，全ての $R > 0$ に対して

$$(u, Pv) - (u, Pv) = \lim_{R\to\infty}((u, \chi_R Pv) - (Pu, \chi_R v)) = \lim_{R\to\infty}(u, [P, \chi_R]v)$$

が成り立つ．ただし，$[A, B] = AB - BA$ である．また，$[P, \chi_R] = -a\chi_R'\partial_x - a'\chi_R' - a\chi_R''$, $\operatorname{supp}\chi_R \subset \{R \leq |x| \leq 2R\}$，$a, a'$ が有界であることを用いると，ある定数 $C > 0$ が存在して

$$|(u, [P, \chi_R]v)| \leq \int_{R\leq|x|\leq R} |u(x)|\,(|v(x)| + |v'(x)|)\,dx$$

が従う．よって，Hölder の不等式と $u \in L^2(\mathbb{R}), v \in H^1(\mathbb{R})$ を用いれば $R \to \infty$ として $(u, Pv) = (Pu, v)$ が証明できる．

今，定理 2.5 を用いて P の本質的自己共役性を証明する．$u \in \operatorname{Ker}(P^* \pm i)$ とすると，前半に示したことから $(Pu, u) = (u, Pu)$ なので $i\|u\|^2 = (iu, u) = \mp(Pu, u) = \mp(u, Pu) = \mp(u, \pm iu) = -i\|u\|^2$ となって，$u = 0$ が従う．定理 2.5 より P は本質的自己共役である．

□

この補題と楕円型正則性を使うと，多くの楕円型作用素の本質的自己共役性が簡単に証明できる．より詳しくいうと,（一様）楕円型作用素については $u \in D(P^*) \Rightarrow u \in H^2$ というより正則性定理が成り立つので以下の系が従う．

系 2.17. *(i)* $M = \mathbb{R}^n$ とし，P を係数の 1 階までの導関数が有界である対称な 2 階の一様楕円型微分作用素とする．このとき，P は本質的自己共役である．
(ii) (M, g) はコンパクトで境界を持たない *Riemann* 多様体とし，$P = -\Delta_g$ を *Laplacian* とする．このとき，P は本質的自己共役である．

2.4 微分作用素の正則性と本質的自己共役性

前にも述べたように，一般的に楕円型でない微分作用素の正則性を期待することはできない．特に局所正則性（$u, Pu \in L^k_{loc}$ なら $u \in H^{k+\varepsilon}_{loc}$ となる $\varepsilon > 0$ が存在すること）が期待できないことは以下のように簡単な例から分かる．

例 2.18. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ 上の微分作用素 $P = \partial_t^2 - \partial_x^2$ を考える．このとき，$f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ とすると $u(t,x) = f(t-x)$ は $Pu = 0$ を満たす．特に $f \in L^2_{loca}(\mathbb{R}) \setminus H^\delta_{loc}(\mathbb{R})$（ただし $\delta > 0$）となる関数 f をとれば $u, Pu \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ かつ $u \notin H^\delta(\mathbb{R}^2)$ が成り立つ．これは *Hugyens* の原理，あるいは特異性伝播定理によってより一般的に証明できる事実である．

一方でより大域的な条件を課した場合にはある種の正則性が期待できる場合がある．

例 2.19. 1 つ前の例と同様に $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ 上の微分作用素 $P = \partial_t^2 - \partial_x^2$ を考える．更に，超関数 u は $Pu = 0$ を満たしかつ大域的に 2 乗可積分，つまり $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ が成り立つと仮定する．このとき $u = 0$ となる．特に u は滑らかな関数で $u \in H^\delta(\mathbb{R}^2)$ が全ての $\delta > 0$ について成り立つ．少し技術的な話になるが簡単に証明を述べると以下のようになる．$w = (1 + D_t^2 + D_x^2)^{-3/2}u$ とおけば $w \in H^3(\mathbb{R}^2)$ なので t に関する *level set* に関してトレースをとれば $w \in C^1(\mathbb{R}_t; H^1(\mathbb{R}_x))$ がわかる．さらに，$Pw = 0$ も成り立つので波動方程式に関するエネルギー保存則から $w = 0$ がわかり，$u = 0$ が証明される．

上記の 2 の例を比べると両者とも $Pu = 0$ の解を考えているが，前者では $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ という局所的な条件しか課していないのに対して，後者では $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ という空間大域的な条件を課していた．すると前者では正則性が期待できなかったのに対して，後者では P の正則性が証明できた，と考えることができる．もちろんこれだけでは単に考察の域を過ぎないが，実際に空間が無限遠点で十分に良い振る舞いをする場合には，ある種の楕円型でない微分作用素の大域的正則性が期待でき，かつそれを本質的自己共役性の問題に応用することができる．

定理 2.20. (i) g を $\mathbb{R}^n$ 上の *Lorentz* 計量であって，無限遠方で *Minkowski* 空間に十分近いとする．更に，定数でない光的測地線は全て無限遠方へ逃げていくとする（より正確な仮定については *[31]* を見よ）．このとき，全ての $\delta > 0$ に対して $D(P^*) \subset (1+|x|^2)^{1/4+\delta} H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$，特に $D(P^*) \subset H^{\frac{1}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ（*[31, Proposition 3.2]*）．更に，*Sobolev* 指数 $1/2$ は最良である（*[32, Theorem 1.3]*）．
(ii) (i) と同じ仮定の下で，$u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ と $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ が $Pu = zu$ を満たせば全ての $\delta > 0$ に対して $u \in (1+|x|^2)^{\delta/2} H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ（*[22]*）．
(iii) S をコンパクトで境界のない多様体とし，g を $M = \mathbb{R} \times S$ 上の *Lorentz* 計量であって，無限遠方で静的であるとする．更に，定数でない光的測地線は全て無限遠方へ逃げていくとする．$u \in L^2(M)$ と $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ が $Pu = zu$ を満たせば全ての $\delta > 0$ に対して $u \in (1+|t|^2)^{-1/2} H^1(M)$ が成り立つ（*[23, §2.7]*）．但し，t は $M = \mathbb{R} \times S$ における $\mathbb{R}$ の変数である．

この定理の $(ii), (iii)$ と補題 2.14 と似た議論（[22, §3]，[23, Lemma 2.1]）を用いると，以上の設定で P が本質的自己共役であることがわかる．

系 2.21. (i) 定理 *2.20*(i) の仮定の下で，*Laplacian* $P = -\Box_g$ は本質的自己共役である．（*[22]*，*[24]*，*[35]*）．
(ii) 定理 *2.20*(iii) の仮定の下で，*Laplacian* $P = -\Box_g$ は本質的自己共役である（*[23]*）．

3　今後の課題

本質的自己共役性について，今後考えるべき課題についていくつか列挙する．

課題 3.1. (i) コンパクトで境界がない *Lorentz* 多様体上において，測地完備性と $\Box_g$ の本質的自己共役性の関係性について調べよ（*Colin de Verdière-Bihan* による予想）．
(ii) 2 次元トーラス $\mathbb{T}^2$ 上 *d'Alembertian* $P = \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2$ を考えると，注意 *2.16* で述べたように $D(P^*) \subset H^\varepsilon(\mathbb{T}^2)$ を満たす $\varepsilon > 0$ は存在しないが，P は本質的自己共役である．この事実を説明できるような，より一般的な理論を見つけよ．例えば，境界のないコンパクト *Riemann* 多様体 $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ に対して，M は積多様体 $M = M_1 \times M_2$ であると仮定する．M の計量を $g = g_1 - g_2$ で導入すると，対応する *Laplacian* は $P = -\Box_g = -\Delta_{g_1} + \Delta_{g_2}$ と書ける．このとき，P が本質的自己共役になることは *Nelson* の交換子定理（*[25, Theorem X.36]*），あるいは Δ_{g_2} に関するスペクトル分解定理を用いて比較的簡単に証明できる．これは些か簡単すぎるので，より広範な作用素について本質的自己共役性を保証するような理論を考えよ．
(iii) 非コンパクトな *Lorentz* 多様体上において，無限遠点の構造と $\Box_g$ の本質的自己共役性の関係性について調べよ．無限遠点の構造の違いが作用素 $\Box_g$ の大域的性質にどのような違いをもたらすか？無限遠点の構造が *Minkowski* 空間や静的とは異なるような場合にも本質的自己共役性が言えるか？

4　スペクトルの構造

楕円型でないような微分作用素のスペクトルについては，未知の部分が多い．特に Riemann 多様体上の Laplacian の場合のように，コンパクトで境界が多様体の上ならば重複度有限の離散スペクトルのみもつ，というような一般性のある定理は知られていないように思える．しかし簡単な多様体上に限ってみれば，しばしば具体計算でスペクトルを求めることができる．そこでいくつかの例に限ってスペクトルの構造について解説する．

　この章では 4.5 節以外では本質的自己共役になるような微分作用素 P を扱い，そのスペクトルとは P のただ 1 つの自己共役作用素のスペクトルを指すことにする．一応スペクトルの定義を復習すると，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 P のスペクトルとは，$\mathbb{R}$ の部分集合であって $P - \lambda$ が定義域から $\mathcal{H}$ への全単射にならないような λ 全体を表す．さらに $\lambda \in \mathbb{R}$ が P の固有値であるとは，$Pu = \lambda u$ となる $u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ が存在することをいう．このような u を固有ベクトル，あるいは固有関数という．

4.1　Minkowski 空間

Minkowski 空間 $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, g_0)$，$g_0 := -dt^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$（$(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$）上の Laplacian は

$$P := \partial_t^2 - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2$$

である．フーリエ変換を通して P は $\mathbb{R}^n$ 上の掛け算作用素 $-\tau^2 + |\xi|^2$（$(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$）とユニタリ同値である．これを用いると P は本質的自己共役であり，かつそのスペクトルは連続であって $\mathbb{R}$ と一致することがわかる．

4.2 平坦トーラス

トーラス $\mathbb{T}^{n_1+n_2} = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}/((2\pi\mathbb{Z})^{n_1} \times (2\pi\mathbb{Z})^{n_2})$ 上に非退化な定数係数計量

$$g = -dt_1^2 - \ldots - dt_{n_1}^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_{n_2}^2$$

を入れた擬 Riemann 多様体 $(\mathbb{T}^{n_1+n_2}, g)$ を考えよう．ただし，ここでは $n_1, n_2 \geq 1$ の場合を考える．このとき，対応する Laplacian

$$P = \sum_{j=1}^{n_1} \partial_{t_j}^2 - \sum_{k=1}^{n_2} \partial_{x_k}^2$$

のスペクトルは離散的になり，

$$\{|m_1|^2 - |m_2|^2 \mid m_1 \in \mathbb{Z}^{n_1},\ m_2 \in \mathbb{Z}^{n_2}\}$$

となることが確かめられる（Fourier 級数展開を用いれば容易に確かめられる）．しかし，この場合は0が重複度無限の固有値になっており，Riemmann 多様体の場合（事実 1.2）とはスペクトルの構造が異なる．

更に，上の計量を1方向に無理数回転させると，Laplacian のスペクトルは大幅に変わる．簡単のため $n_1 = 1$ かつ $n_2 = 2$ の場合を考えよう．$\alpha > 0$ として，Lorentz 計量 g_α を

$$g_\alpha = -dt^2 + dx_1^2 + \alpha^{-2} dx_2^2$$

と定義して $P_\alpha := -\Box_{g_\alpha} = \partial_t^2 - \partial_{x_1}^2 - \alpha^2 \partial_{x_2}^2$ とおくと，P_α の固有値全体の集合は

$$\{-m_1^2 + m_2^2 + \alpha^2 m_3^2 \mid (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3\}$$

になり，P_α のスペクトルはその閉包になることが知られている．α^2 が無理数のとき，この固有値全体の集合は $\mathbb{R}$ で稠密であり，従ってそのスペクトルは $\mathbb{R}$ と一致することが知られている．固有値全体の集合の稠密性は $n_1 + n_2 \geq 3$ のときにも一般化できる．これは Oppenheim 予想と呼ばれており，Margulis により 1987 年に一般的な形で解決された．詳しくは [20, §5] の参考文献を見よ．また，固有値全体の集合が $\mathbb{R}$ で稠密になるような作用素は他にも，長距離型 Schrödinger 作用素の散乱行列（[21]）や磁場 Schrödinger 作用素（[6, §6.2]，Miller-Simon の例）などがある．

一方，トーラスが2次元である場合にはスペクトルの構造は大きく異なる：$\alpha > 0$ に対して $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ 上の計量を $g_\alpha = -dt^2 + \alpha^{-2} dx^2$ と定める．このとき，$P_\alpha = -\Box_{g_\alpha} = \partial_t^2 - \alpha^2 \partial_x^2$ のスペクトルは閉包 $\overline{\{-m_1^2 + \alpha^2 m_2^2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}}$ になるが，α の数論的性質に依存してこの分布は大きく変わることが知られている．

例 4.1. (i) 例として α が2次代数的数（整数係数の2次多項式の零点になっているような有理数でない実数のこと，例えば $\sqrt{2}, \sqrt{3}, (\sqrt{5}+1)/2$ などは2次代数的数で $\sqrt[3]{2}$ は2次代数的数でない）の場合を考える．このとき *Liouville* の定理によりある定数 $c > 0$ が存在して，全ての整数 $m_1 > 0, m_2 \geq 0$ に対し，$|\alpha - m_2/m_1| \geq c/m_1^2$ が成り立つ．よって，$m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ であれば $|-m_1^2 + \alpha^2 m_2^2| = m_2^2 |(\alpha - |m_1|/|m_2|)(\alpha + |m_1|/|m_2|)| \geq c|\alpha|$ が言える．特に，P_α のスペクトルは0を集積点に持たないので特に $\mathbb{R}$ にならない．α^2 が整数になる場合には $\{-m_1^2 + \alpha^2 m_2^2\}$ が整数の部分集合になるのでこれは当たり前である．
(ii) $\alpha > 0$ は *Liouville* 数とする，つまり全ての整数 $n \geq 1$ に対して $|\alpha - \frac{k_n}{m_n}| < 1/m_n^n$ を満たすような異なる整数の組 (k_n, m_n)（ただし $k_n \geq 1, m_n \geq 2$）が存在すると仮定する．このと

き，このとき P_α のスペクトルは 0 を集積点に持つ．実際，$k_n \geq 2$ より $|\alpha - k_n/m_n| < 1$ であって，特に $|k_n/m_n| \leq (1+|\alpha|)$ が成り立つ．従って，$|-k_n^2+\alpha^2 m_n^2| = m_n^2|\alpha-\frac{k_n}{m_n}||\alpha+\frac{k_n}{m_n}| < (1+2|\alpha|)m_n^{2-n} \leq (1+2|\alpha|)2^{2-n} \to 0$（$n \to \infty$）となる．*Liouville* 数の具体例としては，例えば $\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} 1/10^{j!}$ が挙げられる（$m_n = 10^{n!}$ かつ $k_n = 10^{n!}\sum_{j=1}^{n} 1/10^{j!}$ とおけばよい）．

これらの例で用いた議論は有名なもので最初に誰が思いついたのか筆者は知らないが，筆者自身は筑波大学の坂本龍太郎氏に教えてもらった．

平坦トーラス上のスペクトル理論に関連する興味深い問題をいくつか挙げてもみよう．もしかしたら，以下のいずれかの問題のうちで既に解かれているものがあるかもしれない．

課題 4.2. (*i*) 2 次元の場合に，α の数論的性質に応じて P_α のスペクトルの分布はどう変わるか，詳しく調べよ．
(*ii*) 3 次元以上の場合に，P_α の固有値全体の集合のより詳しい形は分かるか？つまり，固有値全体の集合が稠密である，という以上のことは分かるか？それは α のどのような数論的性質と関係するか？
(*iii*) 例えば 2 次元の場合に，各スペクトルに対する固有空間を考えると，α^2 が有理数のときには固有関数は滑らかとは限らない（注意 *2.15*）が，α^2 が無理数の時には固有関数は全て滑らかになることがわかる（固有空間の次元が有限になり，固有関数は全て指数関数の有限線形和で書けるため）．つまり，α^2 が無理数のときには P_α はある種の正則性を持つと考えられる．これについて更なる考察を行え．実は $D(P_\alpha^*) \subset H^\varepsilon(\mathbb{T}^2)$ が成り立つような $\varepsilon > 0$ は存在しない．注意 *4.3* でこの事実の特別な場合を証明する．この作用素の族以外にも，似たような正則性を持つ微分作用素はあるか？

注意 4.3. (*iii*) で述べた事実を特別な場合に示す：*Liouville* 数 $\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} 1/10^{j!}$ に対して $D(P_\alpha^*) \subset H^\varepsilon(\mathbb{T}^2)$ がどんな $\varepsilon > 0$ に対しても成り立たないことを示そう．$m_n = 10^{n!}$ かつ $k_n = 10^{n!}\sum_{j=1}^{n} 1/10^{j!}$ とおくと $|\alpha - k_n/m_n| < 1/m_n^n$ が成り立つことを思い出す．今，数列 $f_n = (1+n)^{-1}$ とおけば $\{f_n\}_{n\geq 1} \in \ell^2(\mathbb{N}) \setminus (1+k_n^2+m_n^2)^{-\varepsilon/2}\ell^2(\mathbb{N})$ となる．．そこで，$a_n = f_n/(|-k_n^2+m_n^2\alpha^2|+1)$ とおくと $|a_n| \geq |f_n|/(1+2|\alpha|)$ となるので $\{a_n\}_{n\geq 1} \in \ell^2(\mathbb{N}) \setminus (1+k_n^2+m_n^2)^{-\varepsilon/2}\ell^2(\mathbb{N})$ がわかる．$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{ik_n t + im_n x}$ とおけば，$n \neq n'$ ならば $k_n \neq k_{n'}$ かつ $m_n \neq m_{n'}$ なので，直交性から $\|u\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 = (2\pi)^2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ かつ $\|u\|_{H^\varepsilon(\mathbb{T}^2)}^2 = (2\pi)^2 \sum_{n=1}^{\infty}(1+k_n^2+m_n^2)^\varepsilon |a_n|^2 = \infty$ である．同様にして，$Pu \in L^2(\mathbb{T}^2)$ を示すことができる．つまり，$u \in D(P^*) \setminus H^\varepsilon(\mathbb{T}^2)$ である．

4.3 de-Sitter 空間

$n \geq 2$ として，積多様体 $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ に Lorentz 計量

$$g = dt^2 - (\cosh^2 t) g_{\mathbb{S}^{n-1}}, \quad (t,\omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$$

を入れた Lorentz 多様体 (M,g) を n 次元 de-Sitter 空間という．ただし，$g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ は $\mathbb{R}^n$ の Euclid 計量から誘導された自然な計量を表す．de-Sitter 空間は断面曲率が至るところ 1 になるような Lorentz 多様体であるため，Riemann 多様体における単位球面のように非常に基本的な Lorentz 多様体である．

Laplacian $P = -\Box_g$ は $L^2(M, (\cosh t)^{n-1} dt d\omega)$（$d\omega$ は $\mathbb{S}^{n-1}$ の体積要素）の内積に関して対称になるが，本質的自己共役になることが知られている（[28, §3]）．更に，P のスペクトルは

$$(-\infty, -\frac{(n-1)^2}{4}] \cup \{j(j+n-1) \mid j = 0,1,2,\ldots\} \tag{4.1}$$

という連続部分と離散部分の和集合からなる（離散スペクトルの計算についてはStrichartzの論文 [28, §3] を見よ）．量子古典対応を考えると，de-Sitter 空間の時間的測地線は散乱する（軌道がコンパクトでない）のでこれが連続スペクトルに対応し，空間的測地線は周期軌道になるのでこれが離散スペクトルに対応する，という直感的な説明ができる．筆者は P のスペクトルが (4.1) と一致することが明確に記述された文献を知らないが，これはある程度初等的に証明できるのでその概略を記述する．

(4.1) の証明の概略. $\mathbb{S}^{n-1}$ 方向をスペクトル分解すると，P は 1 次元 Schrödinger 作用素の（Hilbert 空間としての）直和とユニタリ同値であることがわかる：U を $(\cosh t)^{-\frac{n-1}{2}}$ を掛けるという掛け算作用素とすると，U は $L^2(M, dtd\omega)$ から $L^2(M, (\cosh t)^{n-1}dtd\omega)$ へのユニタリ作用素になる．そこで，$U^{-1}PU$ を計算すると，$U^{-1}PU = \partial_t^2 - \frac{(n-1)^2}{4} + \frac{(n-1)(n-3)}{4\cosh^2 t} - \frac{1}{\cosh^2 t}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ となる．ここで，$n-1$ 次元球面の Laplacian の固有値が $k(k+n-2)$（$k = 0, 1, 2, \ldots$）となることを思い出せば，$U^{-1}PU$ は $-\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ を固有値 $k(k+n-2)$ に置き換えた作用素 $P_k := \partial_t^2 - \frac{(n-1)^2}{4} + \frac{(n-1)(n-3)}{4\cosh^2 t} + \frac{k(k+n-2)}{\cosh^2 t}$ の $k = 0, 1, 2, \ldots$（とその重複度）に関する直和になる．P_k は Pöschl-Teller's potential を持つ 1 次元 Schrödinger 作用素として知られており，そのスペクトルは例えば [15, Lemma A.2] で計算されている．

P は P_k の直和で書けているので，P_k のスペクトルの計算結果と [25, Theorem XIII.85 (d)] を用いると P のスペクトルが (4.1) となることが示される．

□

次に，de-Sitter 空間を不連続部分群 Γ（等長群の部分群であって de-Sitter 空間に自由かつ固有不連続に作用するような離散部分群）で割った局所対称空間について考えよう．以下の Calabi-Markus の定理によれば，不連続部分群として現れる Γ は有限群になる．

定理 4.4 (Calabi-Markus，[2]). *$n \geq 3$ とし，(M, g) を n 次元で連結かつ測地的に完備な Lorentz 多様体とする．もし断面曲率が至るところ 1 であれば，M は非コンパクトであり，かつその基本群は有限である．*

特に，M は de-Sitter 空間を有限群で割った空間になることがわかる．この定理の主張によれば，断面曲率が 1 であるような場合には Lorentz 多様体は Riemmann 多様体の場合と位相構造が大きく異なることがわかる．実際，断面曲率が至るところ 1 であるような（連結）Riemmann 多様体は単位球面の離散部分群による商になり，特にコンパクト多様体になる．また，Calabi-Markus の定理から，直ちに以下の事実が従う．

系 4.5. *$n \geq 3$ とし，(N, h) を n 次元で連結かつ測地的に完備な Lorentz 多様体で，断面曲率が至るところ 1 であるとする．このとき，$-\Box_h$ は本質的は本質的自己共役であって，$\sigma_{pp}(-\Box_h) \subset \sigma_{pp}(P) = \{j(j+n-1) \mid j = 0, 1, 2, \ldots\}$ が成り立つ．ただし，$\sigma_{pp}(P)$ は P の L^2 固有値全体の集合である．*

注意 4.6. P の固有関数であって，N の基本群の作用で不変なものが存在すれば対応する P の固有値が $-\Box_h$ の固有値にもなることが証明できる，しかし一般に $\sigma_{pp}(-\Box_h) = \sigma_{pp}(P)$ が成り立つかはわからない．実際，球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ の *Laplacian* の固有値全体の集合とそれを $\mathbb{Z}_2$ で割った実射影空間 $\mathbb{R}P^{n-1}$ 上の *Laplacian* の固有値全体の集合は一般に異なるので，多様体を有限群で割った時に固有値の集合は変化し得る．

de-Sitter 空間と対応する局所対称空間上のスペクトル理論に関していくつか関連する問題を挙げる．局所対称空間については，不連続部分群 Γ が有限群になるので比較的調べやすいかもしれない．

課題 4.7. (i) 波動方程式 $Pu = \lambda u$ の初期値問題の解の性質と P のスペクトルの性質がどのように対応するのか調べよ．
(ii) $\Gamma\backslash M$ の連続スペクトルの構造はどうなるか？また，離散スペクトルの形状が具体的に決定できるような Γ の例を挙げよ．
(iii) *de-Sitter* 空間の不連続部分群はどのような有限群が現れるか？また，*Sunada* による等スペクトルになるような多様体の構成（*[29]*）は可能か？

4.4 anti de-Sitter 空間

anti de-Sitter 空間上の Laplacian については近年表現論の文脈 [18]，[17] で詳しく調べられているので，ここでは手短に解説しよう．anti de-Sitter 空間は $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分多様体 $M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1\}$ に非退化計量 $g_0 = dx_1^2 + \ldots + dx_{n-1}^2 - dx_n^2 - dx_{n+1}^2$ から誘導された Lorentz 計量 g を入れて Lorentz 多様体と見做したものであり，$n \geq 3$ であれば連結で完備かつ断面曲率が至る所 -1 になる．M は $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ と微分同相であって，3 次元の場合には $SL(2, \mathbb{R})$ や $SU(1,1)$ とも微分同相である．更に，g の $\mathbb{R}^{n-1}$ の部分は双曲計量に対応するので，anti de-Sitter 空間は概ね双曲空間を $\mathbb{S}^1$ に沿って重ねたもののようになっている．また，対応する Laplacian は本質的自己共役になり，de Sitter 空間のときと同様に固有値の値も具体的に計算できる（[28, §3]）．

anti de-Sitter 空間を不連続部分群 Γ で割った局所対称空間は，de-Sitter 空間の場合と比べて非常に多様な構造を持ち，コンパクトになるような場合もあり得る．また Γ に関するある条件のもとで，Γ の連続変形に関して不変な $\Gamma\backslash M$ 上の固有値の存在が知られている．より正確な主張は [18, Theorem 1.1, Theorem 1.5]，3 次元の場合の初等的な証明については [17] を見よ．局所対称空間上の Laplacian の本質的自己共役性は [19] においてスタンダード（[19, §1.1]）な場合に証明された．

4.5 自己共役拡大のスペクトル

この節では，本質的自己共役でない場合に，その自己共役拡大のスペクトルの構造について，著者の結果を中心にして知られている結果を述べる．

例 4.8. 以下の微分作用素 P に関して，自己共役拡大は無限個存在し全ての自己共役拡大のスペクトルは離散かつ重複度有限である：
(i) $a < b$ として開区間 (a, b) 上の *Laplacian* $P = -\partial_x^2$.
(ii) $\mathbb{R}$ 上の *Schrödinger* 作用素 $P = -\partial_x^2 - (1 + |x|^2)^\beta$（$\beta > 1$）.
(iii) 1 次元トーラス $\mathbb{T}$ 上の作用素 $P = -\partial_x(\sin x \partial_x)$.
(i) は古典的な結果 *[27, Corollary 15.15]* であり，(ii)，(iii) の証明についてはそれぞれ *[30]*, *[33]* を見よ．

この例から，$(i), (ii), (iii)$ の作用素は見かけは全く異なるが，非常に似たスペクトルの性質を持つことがわかる．(i) に関して直感的な説明をすれば，量子力学の基本的な原理から有界な部分に留まる波のエネルギーは離散化しなければならないので，境界 $x = a, b$ での境界条件を課せば対応する固有値も離散化する，というものである．(ii) については $|x| = \infty$，つまり $\mathbb{R}$ の無限遠点，(iii) については P の特異点 $x = 0, \pi$ がそれぞれ境界のような役割を果たしていると考えられる．

また (i) についての証明は簡単で，Rellich の定理から（P の極小定義域である）$H_0^2((a,b))$ から $L^2((a,b))$ への埋め込みがコンパクトになり，常微分方程式の解の一意性から不足指数（[25, §X.1]）が有限になるので $D(P^*)$ から $L^2((a,b))$ の埋め込みもコンパクトになる，

という事実から従う．詳しくは [30, Corollary 1.9] の証明を見よ．この議論から $(ii), (iii)$ についても，ある種の正則性（$D(P^*)$ から L^2 の埋め込みのコンパクト性）を証明すれば十分であることがわかり，これは超局所解析を用いて正当化できる（[30, Proposition 5.2], [33, §6.2]）．

一方，同じ結果を多次元に拡張することができない．実際，(i) の例の自然な拡張として，滑らかな境界を持つ $\mathbb{R}^n$ の有界領域 Ω 上の Laplacian $P = -\Delta$ を考えると，重複度無限のスペクトルを持つような自己共役拡大が存在することが知られている．更に多次元の場合には $D(P^*)$ の構造はかなり複雑であるため，その自己共役拡大の分類すら困難で，筆者の知る限りこれも未解決である．

そこで，関連した問題について整理しよう．

課題 4.9. (1) 1 次元の例 4.8 において，スペクトルは離散かつ無限集合になるが，その漸近挙動はどうなるか？（*Weyl* の定理の一般化）(i) における *Dirichlet Laplacian* の場合に，下から j 番目の固有値を λ_j とすると，$\#\{j \mid \lambda_j \leq R\} \sim cR^{\frac{1}{2}}$（$j \to \infty$，$c > 0$ は定数）となるが，同じような漸近挙動が (i) の他の境界条件及び $(ii), (iii)$ の場合に成り立つか？
(2) 例 4.8(iii) の多次元への自然な一般化を与えよ．
(3) 多次元の場合に例 4.8 で挙げた微分作用素の自己共役拡大を分類せよ．また，(ii) と (iii) の場合に，(i) における *Dirichlet Laplacian*，*Neumann Laplacian*）のようなスペクトルが離散かつ重複度有限になるような自己共役拡大は存在するか？更にその幾何学的な意味を与えよ．
(4) 多次元の多様体上において，本質的自己共役でないが全ての自己共役拡大のスペクトルが離散かつ重複度有限になるような微分作用素は存在するか？

4.6 その他の例

これらの他にも Saint-Raymond や Colin de Verdier による外向波の解析 [3]，[5] において，興味深いスペクトルの構造をもつ擬微分作用素が研究されている．また，Nakamura[21] による近年の長距離型 Schrödinger 作用素の散乱行列の研究でも擬微分作用素のスペクトル理論について調べられている．更に近年，Bär-Strohmaier[1] によって境界を持つような Lorentz 多様体上の Dirac 作用素の指数定理が証明された．物理的には通常の指数定理で扱われる楕円型の Dirac 作用素よりも Lorentz 多様体上の Dirac 作用素の方が重要であるが，この場合には楕円性の欠如によって指数を定義するのに必要な Fredholm 性の証明が一般に困難であるため，近年までほとんど研究されていなかった．このように，近年における非楕円型作用素のスペクトル理論は目覚ましい発展を遂げている．

5 場の量子論への応用

場の量子論における 1 つの重要な問題は，$m \geq 0$（m は質量を表す）として Klein-Gorodon 方程式

$$(\Box_g + m^2)u = 0$$

の解の性質について調べることである．これは双曲型の方程式であって，初期データを与えて解を探す Cauchy 問題については広く調べられている．一方で，場の量子論においては $\Box_g + m^2$ のある物理的な性質を満たす Green 関数（逆作用素）を調べることが重要にな

る．その中の 1 つに Feynman propagator と呼ばれる Green 関数があり，g が Minkowski 計量の場合には

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0}(-\Box_g - m^2 - i\varepsilon)^{-1} \tag{5.1}$$

の形で与えられ，その存在は Fourier 変換と超関数の理論を用いて正当化することができる．しかし，g が Minkowski 空間でない場合，つまり曲がった時空上においては Feynman propagator の存在は特別な空間の場合を除いては知られていなかった．実際には 1970 年台の Duistermaat と Hörmander の仕事により（[9]）かなり広いクラスの時空上で Feynman parametrix と呼ばれる準逆作用素の存在自体は知られていたが，Klein-Gordon 作用素が実際に逆作用素を持つかどうかは大域的な幾何構造に強く依存する非常に非自明な問題である．近年になって，超局所解析や散乱理論についての進み，[7]，[8]，[12]，[13]，[14] において，ある程度広いクラスの時空上において Feynman propagator の存在が証明された．しかしその定義は (5.1) によるものではなく，[9] により導入された別の物理的要請によるものであり，(5.1) によって Feynman propagator を定義する試みはなされていなかった．そのような状況を鑑みて， Dereziński と Siemssen（[7]，[8]）は (5.1) を以下のようにして数学的に正当化する手法を提案した：
(i) $\Box_g$ の本質的自己共役性を示すことにより $(-\Box_g - m^2 - i\varepsilon)^{-1}$ を L^2 空間上のレゾルベント作用素と見なし，
(ii) L^2 空間に適当な重みをつけて極限 (5.1) の存在を示し，
(iii) この極限が [7]，[8]，[13]，[14] のいずれかで定義されたものと一致することを示す．

無限遠点で重力場が消えるような空間上においては，問題 (i) は §2.4 で述べたように [22]，[23]，[35] で解決し，(ii) については [35] において少し弱い意味で正当化された．そこで，[31] において (iii) まで含めた正当化を行った：

定理 5.1. *[31]* g を $\mathbb{R}^n$ 上の *Lorentz* 計量であって，無限遠方で *Minkowski* 空間に十分近いとする．更に，定数でない光的測地線は全て無限遠方へ逃げていくとする．このとき，ある離散的な点を除いた $m>0$ に対して極限 (5.1) は $(1+|x|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}L^2(\mathbb{R}^n)$ から $(1+|x|)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}L^2(\mathbb{R}^n)$ への作用素ノルムの意味で収束し，それは *[13]*，*[14]* で定義された *Feynman propagator* と一致する．

References

[1] C. Bär, A. Strohmaier, An index theorem for Lorentzian manifolds with compact spacelike Cauchy boundary. Amer. J. Math. **141** (2019), 1421–1455.

[2] E. Calabi, L. Markus, Relativistic space forms, Ann. Math. **75** (1962), 63–76.

[3] Y. Colin de Verdière, Spectral theory of pseudodifferential operators of degree 0 and an application to forced linear waves. Anal. PDE **13** (2020), no. 5, 1521–1537.

[4] Y. Colin de Verdière, C. Bihan, On essential-selfadjointness of differential operators on closed manifolds, to appear in Ann. Fac. Sci. Toulouse Math, arXiv:2004.06937.

[5] Y. Colin de Verdière , L. Saint-Raymond, Attractors for two-dimensional waves with homoge- neous Hamiltonians of degree 0. Comm. Pure Appl. Math. **73**, (2020) no. 2, 421–462.

[6] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, B. Simon, Schrdöinger operators with application to quantum mechanics and global geometry, Texts and Monographs in Physics. Springer Study Edition. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[7] J. Dereziński, D. Siemssen, An evolution equation approach to the Klein-Gordon operator on curved spacetime, Pure Appl. Anal. **1**, (2019), 215–261.

[8] J. Dereziński, D. Siemssen, An Evoluion Equation Approach to Linear Quantum Field Theory, preprint, arXiv:1912.10692, (2019).

[9] J. Duistermaat, L. Hörmander, Fourier integral operators. II. Acta Math, **128**, (1972), 183–269.

[10] F. Faure and J. Sjöstrand, Upper bound on the density of Ruelle resonances for Anosov flows, Comm. Math. Phys. **308**, (2011), 325–364.

[11] M. Gaffney, A special Stokes's theorem for complete Riemannian manifolds. Ann. of Math. **60**, (1954), 140–145.

[12] J. Gell-Redman, N. Haber, A. Vasy, The Feynman propagator on perturbations of Minkowski space, Commun. Math. Phys. **342**, (2016), 333–384.

[13] C. Gérard, M. Wrochna, The massive Feynman propagator on asymptotically Minkowski spacetimes, Amer. J. Math. **141**, (2019), 1501–1546.

[14] C. Gérard, M. Wrochna, The massive Feynman propagator on asymptotically Minkowski spacetimes II, Int. Math. Res. Notices. **2020**, (2020), 6856–6870.

[15] L. Guillopé, M. Zworski, Upper bounds on the number of resonances for non-compact Riemann surfaces, J. Funct. Anal. **129**, (1995) 346–389.

[16] L. Hörmander, *Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Vol. I-IV. Springer Verlag, 1983–1985.

[17] K. Kannaka, On the discrete spectrum of a certain non-sharp locally anti-de Sitter space (Automorphic forms, automorphic representations and related topics), 数理解析研究所講究録, **2136**, (2019) 69-79.

[18] F. Kassel, T. Kobayashi, Poincare series for non-Riemannian locally symmetric spaces, Adv. Math. **287**, (2016), 123–236.

[19] F. Kassel, T. Kobayashi, Spectral analysis on standard locally homogeneous spaces, preprint, arXiv:1912.12601, (2019).

[20] T. Kobayashi, Intrinsic sound of anti-de Sitter manifolds. Lie theory and its applications in physics, Springer Proc. Math. Stat, **191**, Springer, Singapore, (2016), 83–99.

[21] S. Nakamura, Remarks on scattering matrices for Schrödiner operators with critically long-range perturbations. Ann. H. Poincaré **21**, (2020), no. 10, 3119–3139.

[22] S. Nakamura, K. Taira, Essential self-adjointness of real principal type operators, preprint, Annales Henri Lebesgue. **4** (2021), 1035–1059.

[23] S. Nakamura, K. Taira, Essential self-adjointness for the Klein-Gordon type operators on asymptotically static spacetime, arXiv:2203.00178.

[24] S. Nakamura, K. Taira, A remark on the essential self-adjointness for Klein-Gordon type operators, arXiv:2202.13499.

[25] M. Reed, B. Simon, *The Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. I–IV. Academic Press, 1972–1980.

[26] H. Rumpf, H. Urbantke, Covariant " In-Out " Formalism for Creation by External Fields, Annals of Physics **114**, (1978), 332–355.

[27] K. Schmüdgen, Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space, Graduate Texts in Mathematics, **265** Springer, Dordrecht, (2012).

[28] R. Strichartz, Harmonic analysis on hyperboloids. J. Functional Analysis **12** (1973) 341–383.

[29] T. Sunada, Riemannian coverings and isospectral manifolds, Ann. of Math, **121** (1985), 69–189.

[30] K. Taira, Scattering theory for repulsive Schrödinger operators and applications to limit circle problem, Anal. PDE **14** (2021), no. 7, 2101–2122.

[31] K. Taira, Limiting absorption principle and equivalence of Feynman propagators on asymptotically Minkowski spacetimes, Commun. Math. Phys. **388** (2021), no. 1, 625–655.

[32] K. Taira, Remarks on the geodesic completeness and the smoothing effect on asymptotically Minkowski spacetimes, Lett. Math. Phys. **112** (2022), no. 22.

[33] K. Taira, Equivalence of classical and quantum completeness for real principal type operators on the circle, arXiv:2004.07547.

[34] M. Tsujii, Quasi-compactness of transfer operators for contact anosov flows, Nonlinearity **23** (2010), 1495–1545.

[35] A. Vasy, Essential self-adjointness of the wave operator and the limiting absorption principle on Lorentzian scattering spaces, J. Spectr. Theory. **10**, (2020), 439–461.

[36] M. Zworski, Semiclassical analysis, Graduate Studies in Mathematics **138**, AMS, 2012.

２変数ハーディ空間の不変部分空間

泉池耕平（山口大教育）

線形空間 H を Hilbert 空間とし，T を H 上の有界線形作用素とする。そのとき，H の閉部分空間 M に対して

$$TM \subset M$$

を満たすならば，M は T に対して不変であるという。この講演では，H が正則関数からなる Hilbert 空間，特に 2 変数 Hardy 空間について，T が座標関数の掛け算作用素のときの不変部分空間を考える。

1. **1 変数正則関数からなる Hilbert 空間**

1.1. **Hardy 空間.** 複素数平面 $\mathbb{C}$ の単位開円板を

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

とし，$\mathbb{D}$ 上の正則関数全体を $Hol(\mathbb{D})$ で表すことにする。$\mathbb{D}$ 上の正則関数からなる Hilbert 空間で基本的なものとして Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ がある：

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in Hol(\mathbb{D}) \;\middle|\; \|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta < \infty \right\}$$

この空間に次によって内積が定義される：

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(e^{i\theta}) \overline{g^*(e^{i\theta})} \, d\theta$$

ここで，

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$$

である。$H^2(\mathbb{D})$ 上の作用素で特に単純なものとして座標関数の掛け算作用素

$$T_z f = zf, \qquad f \in H^2(\mathbb{D})$$

があり，正則関数からなる空間では座標関数の掛け算作用素に対する不変部分空間，つまり

$$zM \subset M$$

を満たす閉部分空間を単に不変部分空間と呼ぶ。$H^2(\mathbb{D})$ の不変部分空間は，1949 年に Beurling によって次のような特徴付けが与えられた：

Beurling の定理 ([2])

M を $H^2(\mathbb{D})$ の閉部分空間とする。そのとき，次は同値である：

(1) M が不変部分空間である

(2) M を次の形で表せる：

$$M = \varphi(z)H^2(\mathbb{D}), \qquad \varphi \text{ は内部関数}$$

この定理より，M を不変部分空間とすると，

$$M \ominus zM = \mathbb{C}\cdot\varphi(z), \quad [M \ominus zM] = [\{\varphi(z)\}] = \varphi(z)H^2(\mathbb{D}) = M$$

となることがわかる。ただし，集合 $E \subset H^2(\mathbb{D})$ に対して，$[E]$ は E を含む最小の不変部分空間を表す。このことから，不変部分空間 M を生成するのに必要な関数の最小個数を $\mathrm{rank}\,(M)$ で表すことにすると，$H^2(\mathbb{D})$ では

$$\dim(M \ominus zM) = \mathrm{rank}\,(M) = 1$$

が常に成り立つことがわかる。

1.2. **Bergman 空間.** Hardy 空間と同じように $\mathbb{D}$ 上の正則関数からなる Hilbert 空間の代表的なものとして Bergman 空間

$$L_a^2(\mathbb{D}) := \left\{ f \in Hol(\mathbb{D}) \,\middle|\, \|f\|_{L_a^2}^2 = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2\, dA(z) < \infty \right\}$$

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\, dA(z)$$

がある。この Bergman 空間においても，不変部分空間，つまり

$$zM \subset M$$

を満たす閉部分空間について多くの研究が行われているが，$H^2(\mathbb{D})$ における Beurling の定理のような完全な特徴付けは得られていない。$L_a^2(\mathbb{D})$ では，任意の $1 \le k \le \infty$ に対して

$$\mathrm{rank}\,(M) = k$$

となる不変部分空間 M が存在することが知られている。しかし，Hardy 空間と同様に

$$\dim(M \ominus zM) = \mathrm{rank}\,(M)$$

であり，1996 年に次が成り立つことが Aleman-Richter-Sundberg によって示されている：

Aleman-Richter-Sundberg の定理 ([1])

M を $L_a^2(\mathbb{D})$ の不変部分空間とする。そのとき，

$$[M \ominus zM] = M$$

また，2001 年には Shimorin によって，より一般的に次が成り立つことが示された：

Shimorin の定理 ([9])

T を Hilbert 空間 H 上の有界線形作用素とする。そのとき，T が 2 つの条件

(a) $\|Tx+y\|^2 \leq 2(\|x\|^2+\|Ty\|^2), \quad x,y \in H$

(b) $\bigcap\{T^nH : n \geq 0\} = \{0\}$

を満たすならば，$H = [H \ominus TH]$ である。

有界線形作用素 T が (a) と (b) を満たすならば，T に対する任意の不変部分空間 $M \subset H$ に対して $T|_M : M \to M$ もまた (a) と (b) を満たす。Shimorin はこの定理を用いて，Aleman-Richter-Sundeberg の定理により簡単な証明を与えた。それをさらに簡単な証明として，次を与えた：

定理 ([5])

T を Hilbert 空間 H 上の有界線形作用素とする。そのとき，T が次の条件

(i) $\|Tx\|^2+\|T^{*2}Tx\|^2 \leq 2\|T^*Tx\|^2, \quad x \in H$

(ii) 次を満たす $c>0$ が存在する： $\|Tx\| \geq c\|x\|, \quad x \in H$

(iii) $\|T\| \leq 1$

(iv) 任意の $x \in H$ に対して，$\|T^{*k}x\| \to 0$（$k \to \infty$）

を満たすならば，$H = [H \ominus TH]$ である。

この証明は，Sun-Zheng からアイディアを得ている。

定理 ([5]) の証明.

$$N = H \ominus [H \ominus TH]$$

とする。そのとき，$N=\{0\}$ であることを示せばよい。

任意の $x \in N$ とする。そのとき $x \perp [H \ominus TH]$ であるから，任意の非負整数 k に対して $x \perp T^k(H \ominus TH)$ であり，$T^{*k}x \perp H \ominus TH$ である。条件 (ii) より TH は閉部分空間であるので，$T^{*k}x \in TH$ であり，$Ty_k = T^{*k}x$ となる $y_k \in H$ が存在する。ここで,

$$r_k = \|T^{*k}x\|^2 - \|T^{*(k+1)}x\|^2.$$

とおく。条件 (iii) より $\|T^{*(k+1)}x\| \leq \|T^{*k}x\|$ だから，$r_k \geq 0$ である。また,

$$\begin{aligned} r_k - r_{k+1} &= \|T^{*k}x\|^2 + \|T^{*(k+2)}x\|^2 - 2\|T^{*(k+1)}x\|^2 \\ &= \|Ty_k\|^2 + \|T^{*2}Ty_k\|^2 - 2\|T^*Ty_k\|^2 \\ &\leq 0 \qquad \text{（条件 (i) より）} \end{aligned}$$

であるので，$0 \leq r_k \leq r_{k+1}$ を得る。一方で，条件 (iv) より

$$r_k = \|T^{*k}x\|^2 - \|T^{*(k+1)}x\|^2 \to 0 \quad (k \to \infty)$$

であるので，任意の非負整数 k に対して $r_k = 0$ であることがわかる。このことから,

$$0 = \sum_{j=0}^{k-1} r_j = \|x\|^2 - \|T^{*k}x\|^2 \to \|x\|^2 \quad (k \to \infty) \qquad \text{（条件 (iv) より）}$$

となるので $x=0$, よって $N=\{0\}$ である。 □

これを Bergman 空間 $L^2_a(\mathbb{D})$ の不変部分空間 M について適用する（つまり $H = M$，$T = T_{z|M}$）と，(ii),(iii),(iv) については容易に成り立つことがわかり，ノルムの計算によって (i) も得ることができる。この証明は関数解析の基本的な手法と比較的に容易な計算のみで為されており，現時点で Aleman-Richter-Sundberg の定理の最も簡単な証明方法であると考えられる。また，表現に違いはあるが，Shimorin の定理と同値の主張となっている。

2. 2 変数 Hardy 空間

2 次元複素空間 $\mathbb{C}^2$ の 2 つの変数を z, w とし，2 重単位円板

$$\mathbb{D}^2 = \{(z,w) : |z| < 1, |w| < 1\}$$

上の正則関数全体を $Hol(\mathbb{D}^2)$ で表す。$\mathbb{D}^2$ 上の Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D}^2)$ は

$$H^2(\mathbb{D}^2) = \left\{ f \in Hol(\mathbb{D}^2) \,\middle|\, \|f\|^2 = \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(re^{i\theta_1}, re^{i\theta_2})\right|^2 \frac{d\theta_1 d\theta_2}{(2\pi)^2} < \infty \right\}$$

によって定義される。2 変数 Hardy 空間というと，単位開球

$$\mathbb{B}_2 = \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, |z|^2 + |w^2| < 1\right\}$$

上の Hardy 空間もあるが，本講演では $\mathbb{D}^2$ 上の Hardy 空間について考える。

$H^2(\mathbb{D}^2)$ のような 2 変数正則関数からなる空間においては，閉部分空間 M で

$$zM \subset M \quad \text{かつ} \quad wM \subset M$$

を満たすものを不変部分空間と呼ぶ。$H^2(\mathbb{D}^2)$ で最も単純な不変部分空間 M の例として，1 変数 Hardy 空間のような

$$M = \varphi H^2(\mathbb{D}^2) \qquad (\varphi \text{ は内部関数})$$

の形のものが挙げられる。H^2 において，この形の不変部分空間は不変部分空間全体から見るとごく一部で，その特徴付けは M 上の作用素を用いて次のように与えられている。

Mandrekar-Nakazi の定理 ([6])

M を $H^2(\mathbb{D}^2)$ の不変部分空間とし，M 上の作用素

$$R_z = P_M T_z, \quad R_w = P_M T_w \qquad \text{on} \quad M$$

とする。そのとき，M が Beurling 型不変部分空間，つまり

$$M = \varphi(z,w) H^2(\mathbb{D}^2) \qquad (\varphi \in H^2(\mathbb{D}^2),\ |\varphi| = 1 \text{ on } \mathbb{T}^2)$$

であることと，

$$R_z R_w^* = R_w^* R_z$$

であることは同値である。

集合 $E \subset H^2(\mathbb{D}^2)$ に対して，E を含む最小の不変部分空間を $[E]$ で表すことにし，不変部分空間 M を生成するのに必要な関数の最小個数を $\mathrm{rank}\,(M)$ で表すことにする。そのとき，明らかに，

$$\varphi H^2(\mathbb{D}^2) = [\{\varphi\}], \qquad \mathrm{rank}\,(\varphi H^2(\mathbb{D}^2)) = 1$$
$$H^2(\mathbb{D}^2) \ominus \mathbb{C}\cdot 1 = [\{z, w\}], \qquad \mathrm{rank}\,(H^2(\mathbb{D}^2) \ominus \mathbb{C}\cdot 1) = 2$$

である。実際には，任意の $1 \le k \le \infty$ に対して

$$\mathrm{rank}\,(M) = k$$

となる不変部分空間 M が存在する。ここで，1 変数 Hardy 空間，Bergman 空間において

$$[M \ominus zM] = M$$

が成り立つが，$H^2(\mathbb{D}^2)$ においても

$$[M \ominus [zM + wM]] = M \tag{1}$$

であるかという自然な問題が出てくる。しかし，任意の不変部分空間 $M \neq \{0\}$ に対して

$$1 \le \dim(M \ominus [zM + wM]) \le \mathrm{rank}\,(M)$$

であるが，$H^2(\mathbb{D}^2)$ では

$$\dim(M \ominus [zM + wM]) = \mathrm{rank}\,(M) \tag{2}$$

とならない不変部分空間 M が存在し，一般的には (1) は成り立たない。では (2) を満たす不変部分空間は (1) を満たすだろうか。これに関して，Nakazi によって次の問題が提出されている：

問題 ([7])

関数 $f \in H^2(\mathbb{D}^2)$ とし，$M = [f]$ とする。そのとき，常に

$$\dim(M \ominus [zM + wM]) = \mathrm{rank}\,(M) = 1$$

であるが，

$$[M \ominus [zM + wM]] = M$$

であるか。

次節でこれについて考える。

3. Nakazi の問題

3，4 節は [4] の結果について述べる。

$f \in H^2(\mathbb{D}^2)$ を 0 でない関数とする。考えるのは 1 つの関数によって生成される不変部分空間 $[f]$ であり，まずはこの部分空間について考える。

関数 f は $\mathbb{D}^2$ 上の関数であるが，

$$f(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta_1}, re^{i\theta_2}) \qquad \text{on a.e. } \mathbb{T}^2$$

と書くことにする。

$$d\mu = |f|^2\, dm \qquad \text{on } \mathbb{T}^2$$

ただし dm は $\mathbb{T}^2$ 上のルベーグ測度，とおく。この $d\mu$ を用いて，$\mathbb{C}^2$ 上の多項式環 $\mathcal{C}$ の $L^2(d\mu)$ ノルムでの閉包を $H^2(d\mu)$ で表記する，つまり

$$H^2(d\mu) = \overline{\mathcal{C}}^{L^2(d\mu)} = \overline{\mathcal{C}}^{H^2(d\mu)}$$

と書ける。そのとき，$H^2(d\mu)$ は $\mathbb{T}^2$ 上の関数空間であり，

$$\mathcal{C} \subset H^2(d\mu), \qquad \mathcal{C} \cdot H^2(d\mu) \subset H^2(d\mu)$$

を満たす。ここでは，見やすくするため $M_f = [f]$ とおくことにする。M_f と $H^2(d\mu)$ の間で次の関係が成り立つ：

命題 1. すべての $f \in H^2(\mathbb{D}^2)$ に対して，$M_f = fH^2(d\mu)$ である。

証明. 任意の $h \in H^2(d\mu)$，$p \in \mathcal{C}$ に対して

$$\|h - p\|^2_{H^2(d\mu)} = \int_{\mathbb{T}^2} |p - h|^2 |f|^2 \, dm = \int_{\mathbb{T}^2} |fp - fh|^2 \, dm$$

であるので，$fh \in M_f$ であり，$fH^2(d\mu) \subset M_f$ である。一方で，任意の $g \in M_f$ に対して

$$\int_{\mathbb{T}^2} \left| p - \frac{g}{f} \right|^2 d\mu = \int_{\mathbb{T}^2} |fp - g|^2 \, dm$$

であり，$g/f \in H^2(d\mu)$ がわかる。よって，$M_f \subset fH^2(d\mu)$ である。 □

$\|fh\|_{H^2(\mathbb{D}^2)} = \|h\|_{H^2(d\mu)}$ だから，

$$U : H^2(d\mu) \ni h \to fh \in M_f$$

はユニタリー写像で，任意の $p \in \mathcal{C}$，$h \in H^2(d\mu)$ に対して $U(ph) = pU(h)$ である。いま明らかに

$$M_f \neq \overline{zM_f + wM_f}^{H^2(\mathbb{D}^2)} = [zM_f + wM_f]$$

であるが，

$$M_f \ominus \overline{zM_f + wM_f}^{H^2(\mathbb{D}^2)}$$

はどのようなものに対応するか考えよう。

各 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{D}^2$ に対して，$\mathcal{C}_\lambda = \{p \in \mathcal{C} : p(\lambda) = 0\}$ と書く。そのとき，

$$\overline{\mathcal{C}_{(0,0)}}^{H^2(d\mu)} = \overline{z\mathcal{C} + w\mathcal{C}}^{H^2(d\mu)} = \overline{zH^2(d\mu) + wH^2(d\mu)}^{H^2(d\mu)}$$

であり，

$$\begin{aligned} H^2(d\mu) &= \overline{\mathcal{C}}^{H^2(d\mu)} = \overline{\mathcal{C}_{(0,0)} + \mathbb{C} \cdot 1}^{H^2(d\mu)} \\ &= \overline{zH^2(d\mu) + wH^2(d\mu)}^{H^2(d\mu)} + \mathbb{C} \cdot 1 \end{aligned}$$

と表せる。ここに写像 U を適用すると，

$$\begin{aligned} M_f &= UH^2(d\mu) = U\left(\overline{zH^2(d\mu) + wH^2(d\mu)}^{H^2(d\mu)} \right) + \mathbb{C} \cdot U(1) \\ &= \overline{U(zH^2(d\mu) + wH^2(d\mu))}^{H^2(\mathbb{D}^2)} + \mathbb{C} \cdot f \\ &= \overline{zM_f + wM_f}^{H^2(\mathbb{D}^2)} + \mathbb{C} \cdot f \end{aligned}$$

となり，

$$f \notin \overline{zM_f + wM_f}^{H^2(\mathbb{D}^2)}, \qquad 1 \notin \overline{zH^2(d\mu) + wH^2(d\mu)}^{H^2(d\mu)}$$

であるから，

$$H^2(d\mu) = \overline{zH^2(d\mu) + wH^2(d\mu)}^{H^2(d\mu)} \oplus \mathbb{C} \cdot K_\mu, \qquad \langle 1, K_\mu \rangle_{H^2(d\mu)} = 1$$

を満たす $K_\mu \in H^2(d\mu)$ がただ一つ存在し，

$$M_f = \overline{zM_f + wM_f}^{H^2(\mathbb{D}^2)} \oplus \mathbb{C} \cdot fK_\mu$$

と書ける。

この段階で，$H^2(d\mu)$ は $\mathbb{T}^2$ 上の関数空間であるが，次のように考えることにより $\mathbb{D}^2$ 上の関数空間としてみなすことができる。

任意の $g \in M_f \subset H^2(\mathbb{D}^2)$ を $\mathbb{D}^2$ 上の関数として考えると，[3, Theorem 2.3.3] より $\mathbb{D}^2$ 上で $g = fg_1$ となる $g_1 \in Hol(\mathbb{D}^2)$ が存在する。よって，各 $h \in H^2(d\mu)$ に対して

$$fh \in fH^2(d\mu) = M_f$$

だから，

$$(fh)(z, w) = f(z, w)\tilde{h}(z, w), \qquad (z, w) \in \mathbb{D}^2$$

を満たす $\tilde{h} \in Hol(\mathbb{D}^2)$ が存在する。この各 h に対して定まる $\tilde{h}$ を集めた集合を

$$\tilde{H}^2(d\mu) = \{\tilde{h} : h \in H^2(d\mu)\} \subset Hol(\mathbb{D}^2)$$

とおく。このとき，$h \in H^2(d\mu)$ と $\tilde{h} \in \tilde{H}^2(d\mu)$ を同一視することにより，$H^2(d\mu)$ は $\mathbb{D}^2$ 上の正則関数からなる Hilbert 空間とみなすことができる。

部分空間

$$H_0^2(d\mu) = \left\{ h \in H^2(d\mu) : \tilde{h}(0, 0) = 0 \right\}$$

とする。そのとき，

$$H_0^2(d\mu) = \overline{zH^2(d\mu) + wH^2(d\mu)}^{H^2(d\mu)}, \qquad fH_0^2(d\mu) = \overline{zM_f + wM_f}^{H^2(\mathbb{D}^2)}$$

と表すことができる。このことから次がわかる：

命題 2. 関数 K_μ は $H^2(d\mu)$ の原点における再生核である，つまり

$$\langle h, K_\mu \rangle_{H^2(d\mu)} = \tilde{h}(0, 0), \qquad h \in H^2(d\mu)$$

が成り立つ。

証明. $H^2(d\mu)$ で $zH^2(d\mu) + wH^2(d\mu) \perp K_\mu$ であり，

$$h - \tilde{h}(0, 0) \in H_0^2(d\mu) = \overline{zH^2(d\mu) + wH^2(d\mu)}^{H^2(d\mu)}$$

だから，

$$\begin{aligned} \langle h, K_\mu \rangle_{H^2(d\mu)} &= \langle \tilde{h}(0, 0) + h - \tilde{h}(0, 0), K_\mu \rangle_{H^2(d\mu)} \\ &= \tilde{h}(0, 0) \langle 1, K_\mu \rangle_{H^2(d\mu)} = \tilde{h}(0, 0) \end{aligned}$$

である。 □

Hilbert 空間 $\mathcal{H} \subset Hol(\mathbb{D}^2)$ において，$F\mathcal{C}$ が $\mathcal{H}$ で稠密であるとき関数 F は $\mathcal{H}$ の巡回ベクトルであるという。

命題 3. $[fK_\mu] = M_f \iff K_\mu$ は $H^2(d\mu)$ の巡回ベクトルである。

証明. $U(H^2(d\mu)) = M_f$ であり,

$$\overline{\mathcal{C}\cdot fK_\mu}^{H^2(\Gamma^2)} = \overline{\mathcal{C}\cdot U(K_\mu)}^{H^2(\Gamma^2)} = U\left(\overline{\mathcal{C}\cdot K_\mu}^{H^2(d\mu)}\right).$$

であることから成り立つことがわかる。 □

ここまでは $\lambda = (0,0)$ のときを考えたが, $\lambda \neq (0,0)$ のときも同様のことを考えることができる。

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{D}^2$ とする。そのとき, $\mathcal{C}_\lambda = (z-\lambda_1)\mathcal{C} + (w-\lambda_2)\mathcal{C}$ であり,

$$\overline{\mathcal{C}_\lambda}^{H^2(d\mu)} = \overline{(z-\lambda_1)H^2(d\mu) + (w-\lambda_2)H^2(d\mu)}^{H^2(d\mu)}$$

と表せ, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\lambda + \mathbb{C}\cdot 1$ だから

$$H^2(d\mu) = \overline{(z-\lambda_1)H^2(d\mu) + (w-\lambda_2)H^2(d\mu)}^{H^2(d\mu)} + \mathbb{C}\cdot 1$$

となる。$\lambda = (0,0)$ のときと同様に

$$H^2_\lambda(d\mu) = \left\{h \in H^2(d\mu) :\ \tilde{h}(\lambda) = 0\right\}$$

とすると,

$$H^2_\lambda(d\mu) = \overline{(z-\lambda_1)H^2(d\mu) + (w-\lambda_2)H^2(d\mu)}^{H^2(d\mu)}$$

$$fH^2_\lambda(d\mu) = \overline{(z-\lambda_1)M_f + (w-\lambda_2)M_f}^{H^2(\Gamma^2)}$$

が得られ,

$$H^2(d\mu) \ominus \left[(z-\lambda_1)H^2(d\mu) + (w-\lambda_2)H^2(d\mu)\right] = \mathbb{C}\cdot K_\mu^\lambda$$

$$\langle 1, K_\mu^\lambda\rangle_{H^2(d\mu)} = 1$$

を満たす関数 $K_\mu^\lambda \in H^2(d\mu)$ がただ一つ存在する。この K_μ^λ についてもまた次のことがいえる：

命題 4. K_μ^λ は $H^2(d\mu)$ の $\lambda \in \mathbb{D}^2$ における再生核である，つまり

$$\langle h, K_\mu^\lambda\rangle_{H^2(d\mu)} = \tilde{h}(\lambda), \qquad \in H^2(d\mu)$$

が成り立つ。

命題 5. $[fK_\mu^\lambda] = M_f \iff K_\mu^\lambda$ は $H^2(d\mu)$ の巡回ベクトルである。

ここまでの話から，Nakazi の問題は $H^2(d\mu)$ の原点における再生核は常に巡回ベクトルであるかという問題と同値であることがわかる。

4. 非巡回な再生核

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{D}^2$ に対して，関数 k_λ を $H^2(\mathbb{D}^2)$ の λ における再生核とする，つまり

$$k_\lambda(z,w) = \frac{1}{1-\overline{\lambda_1}z}\frac{1}{1-\overline{\lambda_2}w}$$

とする。いま $\mathbb{D}^2$ 上の有界正則関数全体を $H^\infty(\mathbb{D}^2)$ で表すことにし，関数 $f \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$ で

$$|f| \geq \delta > 0 \quad \text{a.e. on } \mathbb{T}^2$$

を満たすものを考える。そのとき，$M_f = fH^2(\mathbb{D}^2)$ となり，集合として

$$H^2(d\mu) = H^2(\mathbb{D}^2)$$

となる。よって，

$$\tilde{h}(\lambda) = \langle h, k_\lambda \rangle_{H^2(\mathbb{D}^2)} = h(\lambda), \qquad h \in H^2(d\mu),\ \lambda \in \mathbb{D}^2$$

である。このとき，$h \in H^2(d\mu)$ の巡回性について次のことがわかる：

命題 6. 関数 $f \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$ を，ある $\delta > 0$ に対して

$$|f| \geq \delta \quad \text{a.e. on } \mathbb{T}^2$$

を満たすものとする。そのとき，次は同値である：
(1) $h \in H^2(d\mu)$ は $H^2(d\mu)$ の巡回ベクトルである
(2) h は $H^2(\mathbb{D}^2)$ の巡回ベクトルである。

証明. 関数 $h \in H^2(d\mu)$ とする。そのとき，

$$f\overline{h\mathcal{C}}^{H^2(\mathbb{D}^2)} = \overline{fh\mathcal{C}}^{H^2(\mathbb{D}^2)} = f\overline{h\mathcal{C}}^{H^2(d\mu)}$$

であり，$\overline{h\mathcal{C}}^{H^2(\mathbb{D}^2)} = \overline{h\mathcal{C}}^{H^2(d\mu)}$ が得られる。 □

z 変数ディスク環を $\mathcal{A}(\mathbb{D}_z)$ によって表記する。定数でない関数 $G(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{D}_z)$ とし，$\|G\|_\infty < 1$ を満たすものとする。そのとき，外部関数 $F(z)$ で

$$|G|^2 + |F|^2 = 1 \qquad \text{a.e. on } \mathbb{T}_z$$

を満たすものが存在する。

補題 7 ([8])**.** $f \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$ を $f \neq 0$ かつ $|f|$ が $\mathbb{T}^2$ 上で上半連続である関数とする。そのとき，fh が内部関数となるような

$$h \in Hol(\mathbb{D}^2), \quad |h| > 0 \text{ on } \mathbb{D}^2$$

が存在する。

補題 8 ([3])**.** $f, g \in H^2(\mathbb{D}^2)$ とし，$f \neq 0$ であるものを考える。そのとき，$f = gh$ となるような $h \in Hol(\mathbb{D}^2)$ が存在するならば，h は Nevanlinna クラス $N(\mathbb{D}^2)$ の関数である。さらに，g が Bidisk 環 $\mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ の関数であるならば，h は Smirnov クラス $N_*(\mathbb{D}^2)$ の関数である。

これら 2 つの補題より，次が得られる：

命題 9. 定数でない関数 $G(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{D}_z)$ とし，$\|G\|_\infty < 1$ を満たすものとし，$F(z)$ を

$$|G|^2 + |F|^2 = 1 \qquad \text{a.e. on } \mathbb{T}_z$$

を満たす外部関数とする。そのとき，$\mathbb{D}^2$ 上の内部関数 φ で

$$\frac{\varphi F(z)}{w-G(z)} \in H^2(\mathbb{D}^2)$$

を満たすものが存在する。

証明. 仮定より $w-G(z)$ は $\mathbb{T}^2$ 上の連続関数であり，補題 7 より $\varphi=(w-G(z))h$ が内部関数となる $h \in Hol(\mathbb{D}^2)$ が存在する。$w-G(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ だから，補題 8 より

$$hF(z)=\frac{\varphi F(z)}{w-G(z)} \in N_*(\mathbb{D}^2)$$

である。また，

$$\|hF(z)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}=\int_0^{2\pi}\frac{|F(e^{i\theta})|^2}{1-|G(e^{i\theta})|^2}\frac{d\theta}{2\pi}=1$$

であるから，$hF(z) \in N_*(\mathbb{D}^2)\cap L^2(\mathbb{T}^2)=H^2(\mathbb{D}^2)$ であることがわかる。 □

この命題の関数を f とする，つまり

$$f=\frac{\varphi F(z)}{w-G(z)}$$

とする。このとき，

$$M_f=\varphi H^2(\mathbb{D}^2)\oplus\frac{\varphi F(z)}{w-G(z)}H^2(\mathbb{D}_z)$$

と表すことができる。さらに，任意の $n,k\geq 0$ に対して

$$\langle fz^n,\, fz^k\rangle_{H^2(\mathbb{D}^2)}=\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(n-k)\theta}|F(e^{i\theta})|^2}{1-|G(e^{i\theta})|^2}\frac{d\theta}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-k)\theta}d\theta$$

であるので $fz^n \perp fz^k$（$n\neq k$），$\|f\|=1$ であり，

(3) $$\{\varphi z^n w^k :\, n,k\geq 0\}\cup\{fz^n :\, n\geq 0\}$$

は M_f の正規直交基底となる。

一方，$\mathbb{T}^2$ 上で

$$|f|\leq\frac{|F|}{1-\|G\|_\infty}\leq\frac{1}{1-\|G\|_\infty}<\infty$$

$$|f|\geq\frac{|F|}{1+\|G\|_\infty}\geq\frac{\sqrt{1-|G|^2}}{2}\geq\frac{\sqrt{1-\|G\|^2_\infty}}{2}>0$$

であるので，命題 6 の仮定を満たす。また，4 節の最初のことから

$$M_f=fH^2(\mathbb{D}^2)$$

であり，

$$H^2(d\mu)\cong\tilde{H}^2(d\mu)=H^2(\mathbb{D}^2)$$

と考えることができる。(3) が M_f の正規直交基底であることから，

$$\{\varphi z^n w^k :\, n,k\geq 0\}\cup\{fz^n :\, n\geq 0\}$$

は M_f の正規直交基底であり，

$$\left\{\frac{\varphi z^n w^k}{f} :\, n,k\geq 0\right\}\cup\{z^n :\, n\geq 0\}$$

は $H^2(d\mu)$ の正規直交基底である。ここで，

$$\frac{\varphi}{f} = \frac{\varphi(w - G(z))}{\varphi F(z)} = \frac{w - G(z)}{F(z)}$$

となる。よって，各 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{D}^2$ における $H^2(d\mu)$ の再生核は

$$\begin{aligned} K_\mu^\lambda &= \frac{\left(\overline{\lambda_2} - \overline{G(\lambda_1)}\right)(w - G(z))}{\overline{F(\lambda_1)} F(z)(1 - \overline{\lambda_1} z)(1 - \overline{\lambda_2} w)} + \frac{1}{1 - \overline{\lambda_1} z} \\ &= \frac{1}{1 - \overline{\lambda_1} z} \left(\frac{\overline{\lambda_2} - \overline{G(\lambda_1)}}{\overline{F(\lambda_1)}} \frac{w - G(z)}{F(z)(1 - \overline{\lambda_2} w)} + 1 \right), \end{aligned}$$

によって与えられる。この

$$f = \frac{\varphi F(z)}{w - G(z)}$$

とした $M_f = [f]$ の中に Nakazi の問題の反例が存在する。つまり，次のことがいえる：

定理 ([4])

関数 $f \in H^2$ とし，$M = [f]$ とする。そのとき，常に

$$\dim(M \ominus [zM + wM]) = \mathrm{rank}\,(M) = 1$$

であるが,

$$[M \ominus [zM + wM]] \neq M$$

となる f が存在する。

これは，H^2 では Beurling 型の定理

$$[M \ominus [zM + wM]] = M$$

が完全に成り立たないことを意味する。最後にこの定理を示すため，具体的に反例があることを示す。

Nakazi の問題は，命題 3 より $H^2(d\mu)$ の原点における再生核の巡回性を問う問題と同値である。

$$f = \frac{\varphi F(z)}{w - G(z)}$$

とするとき，原点における再生核は

$$K_\mu = -\frac{\overline{G(0)}}{\overline{F(0)}} \frac{w - G(z)}{F(z)} + 1$$

となる。$G(0) = 0$ のとき，$K_\mu = 1$ となるので命題 6 より巡回ベクトルである。

$G(0) \neq 0$ のときを考える。このとき，G，F の定め方によって K_μ が $\mathbb{D}^2$ に零集合をもつ場合がある。$\mathbb{D}^2$ に零集合をもつ関数は $H^2(\mathbb{D}^2)$ で巡回ベクトルとなることはないので，K_μ は $H^2(d\mu)$ の巡回ベクトルではないことになる。

例 10. $0 < r < 1$ とし，$I(z)$ を $\mathcal{A}(\mathbb{D}_z)$ に含まれる内部関数（つまり $\mathbb{D}_z$ 上の有限 Blaschke 積）で $I(0) \neq 0$ とする。ここで,

$$G(z) = rI(z)$$

とおく。このとき,

$$G(0) \neq 0, \qquad F(z) = \sqrt{1-r^2}$$

である。よって，これらを用いて f を定めると

$$\begin{aligned} K_\mu &= -\frac{\overline{G(0)}}{\overline{F(0)}}\frac{w - G(z)}{F(z)} + 1 = -\frac{r\overline{I(0)}}{1-r^2}(w - rI(z)) + 1 \\ &= \frac{r\overline{I(0)}}{1-r^2}\left(rI(z) + \frac{1-r^2}{r\overline{I(0)}} - w\right) \end{aligned}$$

となる。このことから,

$$\left| rI(z) + \frac{1-r^2}{r\overline{I(0)}} \right| < 1$$

となる $z \in \mathbb{D}_z$ が存在する全ての $I(z)$ に対して，K_μ は零集合をもち巡回ベクトルでない。例えば,

$$I(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}z}$$

とすると,

$$\left| rI(z) + \frac{1-r^2}{r\overline{I(0)}} \right| = \left| r\frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z} + \frac{1-r^2}{r\overline{\alpha}} \right|$$

だから,

$$\left| r\frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z} \right| < 1 - \frac{1-r^2}{r|\alpha|}$$

となる z が存在するとき，つまり

$$1 - \frac{1-r^2}{r|\alpha|} > 0, \qquad |\alpha| > \frac{1-r^2}{r}$$

のときは零集合をもつ。そのように定めた f に対して，K_μ は巡回ベクトルではないこと，つまり

$$[M_f \ominus [zM_f + wM_f]] \neq M_f$$

がわかる。

References

[1] A. Aleman, S. Richter, C. Sundberg; *Beurling's theorem for the Bergman space*, Acta Math. **117** (1996), 275–310.

[2] A. Beurling; *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math. **81** (1949), 239–255.

[3] X. Chen, K. Guo; *Analytic Hilbert Modules*, Chapman & Hall/CRC, 2003.

[4] K.H. Izuchi; *Cyclicity of reproducing kernels in weighted Hardy spaces over the bidisk*, J. Funct. Anal. **272** (2017), 546–558.

[5] K.J. Izuchi, K.H. Izuchi, Y. Izuchi; *Wandering subspaces and the Beurling type theorem I*, Arch. Math. (Basel) **95** (2010), 439–446.

[6] V. Mandrekar; *The validity of Beurling theorems in polydiscs*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 145–148.

[7] T. Nakazi; *Szegö's theorem on a bidisc*, Trans. Amer. Math. Soc. **328** (1991), 421–432.

[8] W. Rudin; *Function Theory in Polydiscs*, W. A. Benjamin, Inc., 1969.

[9] S. Shimorin, *Wold-type decompositions and wandering subspaces for operators close to isometries*, J. reine angew. Math. **531** (2001), 147–189.

代数的中点と平均

阿部　敏一　（茨城大学・理工学研究科）

1　準備

1.1　正定値行列

n 次正方複素行列全体を $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ で表し，そのうち可逆なもの全体を $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ で表す．$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ が自己随伴でありかつ固有値が全て非負の実数であるとき，行列 A は**半正定値**であるという．特に，可逆な半正定値行列のことを**正定値**行列という．正定値行列の固有値は全て正の実数である．$A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ が半正定値であることを $A \geq O$, 正定値であることを $A > O$ で表す．n 次の正定値行列全体を $\mathbb{P}_n$ で表す．$\mathbb{P}_n$ は $M_n(\mathbb{C})$ の線型部分空間ではないが，凸錐である．特に $n = 1$ の場合，$\mathbb{P}_1 = \mathbb{R}_+$ は正の実数全体の集合である．$n = 1$ の場合を除き，$\mathbb{P}_n$ は（行列の）積について閉じていない．$A, B \in \mathbb{P}_n$ に対して，$A - B \geq O$ であることを $A \geq B$ で表せば，$\geq$ は $\mathbb{P}_n$ 上の半順序を定める．

1.2　平均

写像 $M : \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ が以下の条件 (M1) から (M5) を全て満足するとき，M は $\mathbb{P}_n$ 上の**平均**（**mean**）であるという．

(M1) $A \leq B \ \Rightarrow\ A \leq M(A,B) \leq B.$

(M2) $M(A,B) = M(B,A) \quad (\forall A, B \in \mathbb{P}_n).$

(M3) $A_1 \leq A_2 \ \Rightarrow\ M(A_1,B) \leq M(A_2,B) \quad (\forall B \in \mathbb{P}_n).$

(M4) $M(X^*AX,^* BX) = X^*M(A,B)X \quad (\forall A, B \in \mathbb{P}_n,\ \forall X \in \mathbb{M}_n^{-1}(\mathbb{C})).$

(M5) $M(\cdot, B) : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ は連続　$(\forall B \in \mathbb{P}_n).$

条件 (M3) と (M5) は第一引数についての単調性，連続性を要求しているが条件 (M2) より第二引数についても単調性と連続性が要求されていることがわかる．$n = 1$ のとき，条件 (M4) は次のように書き換えることができる．

(M4)’ $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b) \quad (\forall a, b, \lambda \in \mathbb{R}_+).$

Example 1. $\mathbb{R}_+$ 上の mean の例をいくつか挙げる．

(1) $A(a,b) = \dfrac{a+b}{2}$ （**算術平均（arithmetic mean）**）．

(2) $G(a,b) = \sqrt{ab}$ （**幾何平均（geometric mean）**）．

(3) $H(a,b) = 2(a^{-1}+b^{-1})^{-1}$ （**調和平均（harmonic mean）**）．

(4) $L(a,b) = \begin{cases} a & (a=b) \\ \frac{a-b}{\log a - \log b} & (x \neq y) \end{cases}$ （**対数平均（logarithmic mean)**）．

(5) $\mathrm{Max}(a,b) = \max\{a,b\}$，$\mathrm{Min}(a,b) = \min\{a,b\}$.

(6) $0 \leq \nu \leq 1$ に対して，$H_\nu(a,b) = \dfrac{a^\nu b^{1-\nu} + a^{1-\nu} b^\nu}{2}$ （**Heinz means**）．
ここで，$H_0 = H_1 = A$, $H_{\frac{1}{2}} = G$, $H_\nu = H_{1-\nu}$.

(7) $-\infty \leq p \leq \infty$ に対して，$B_p(a,b) = \left(\dfrac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$ （**power means, binomial means**）．
但し，$B_0 := \lim\limits_{p\to 0} B_p = G$, $B_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} B_p = \mathrm{Max}$, $B_{-\infty} = \lim\limits_{p\to-\infty} B_p = \mathrm{Min}$ とする．
ここで，$B_1 = A$，$B_{-1} = H$.

Example 2. $\mathbb{P}_n$ 上の mean の例をいくつか挙げる．

(1) $A(a,b) = \dfrac{a+b}{2}$ （**算術平均（arithmetic mean）**）．

(2) $G(a,b) = a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} b^{-1} a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}$ （**幾何平均（geometric mean）**）．

(3) $H(a,b) = 2(a^{-1}+b^{-1})^{-1}$ （**調和平均（harmonic mean）**）．

1.3 二項演算

集合 S とその上の二項演算 $\circ : S \times S \to S$, $(a,b) \mapsto a \circ b$ の組 $(S,\circ)$ を**亜群（magma）**という．全単射 $\phi : S \to S$ が演算を保存する，すなわち，$\phi(a \circ b) = \phi(a) \circ \phi(b)$ $\forall a,b \in S$ であるとき，ϕ は magma $(S,\circ)$ 上の自己同型写像であるという．任意の $a \in (S,\circ)$ に対して $e \circ a = a \circ e = a$ を満たすような $e \in (S,\circ)$ が存在すれば，その e を $(S,\circ)$ の単位元であるという．一般に magma は必ずしも単位元を持つとは限らないが，存在するとすればひとつしかない．単位元を持つ magma $(S,\circ)$ の元 $x \in S$ に対して，$x \circ y = y \circ x = e$ となる $y \in S$ が存在すればその y を x の逆元と呼ぶ．その他，必要な用語を以下にまとめる．

Definition 3. マグマ $(S,\circ)$ に対して，．

- $(S,\circ)$: **associative** $\iff$ $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ $(\forall a,b,c \in S)$.
- $(S,\circ)$: **left-cancellative** $\iff$ $a \circ x = a \circ y$ ならば $x = y$.

- $(S, \circ)$: **right-cancellative** $\iff$ $x \circ a = y \circ a$ ならば $b = c$.
- $(S, \circ)$: **cancellative** $\iff$ $(S, \circ)$: left-cancellative かつ right-cancellative.
- $(S, \circ)$: **commutative** $\iff$ $a \circ b = b \circ a \quad (\forall a, b \in S)$.
- $(S, \circ)$: **uniquely 2-divisible** $\iff$ $\forall a \in S, \exists! b \in S, a = b \circ b$.
  この b を a の **half** という.

以降，二項演算を表す記号として $\oplus$ をよく用いる．マグマ $(S, \oplus)$ が uniquely 2-divisible であるとき，$a \in (S, \oplus)$ の half を $\frac{1}{2} \otimes a$ で表すことにする．

2 ジャイロ群と幾何平均

2.1 ジャイロ群とジャイロ線形空間

A. A. Ungar は特殊相対論における速度の合成則の満たす性質を元に**ジャイロ可換ジャイロ群（gyrocommutative gyrogroup）**を定義した．ジャイロ群は群の公理のうち結合法則を弱めることで定義され，ジャイロ可換ジャイロ群はそれに伴う可換群の一般化である．ジャイロ可換ジャイロ群は **K-loop** とも呼ばれる．

Definition 4. マグマ $(G, \oplus)$ が以下の条件 (G1) から (G5) を満たすとき，gyrogroup であるという．

(G1) $(G, \oplus)$ は単位元 e を持つ.

(G2) 任意の $a \in (G, \oplus)$ は一意に逆元 $\ominus a$ を持つ.

(G3) 任意の $a, b, c \in G$ に対して，以下の等式を満たす $\mathrm{gyr}[a, b]c \in G$ が一意に存在する．

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus \mathrm{gyr}[a, b]c.$$

(G4) 任意の $a, b \in G$ に対して，$c \mapsto \mathrm{gyr}[a, b]c$ により定まる写像 $\mathrm{gyr}[a, b]G \to G$ は $(G, \oplus)$ 上の自己同型写像．

(G5) 任意の $a, b \in G$ に対して，$\mathrm{gyr}[a \oplus b, b] = \mathrm{gyr}[a, b]$.

Gyrogroup $(G, \oplus)$ がさらに以下の条件 (G6) を満たすとき gyrocommutative であるという．

(G6) 任意の $a, b \in G$ に対して，$a \oplus b = \mathrm{gyr}[a, b](b \oplus a)$.

特に，群とは任意の $a, b \in G$ に対して $\mathrm{gyr}[a, b] = id_G$ であるようなジャイロ群のことである．

Gyrogroup $(G, \oplus)$ の演算 $\oplus$ は一般に扱いにくく，以下のように補助的な演算 $\boxplus$ を導入すると便利である．

Definition 5. Gyrogroup $(G,\oplus)$ に対して，G 上の新たな演算 $\boxplus$ を以下のように定める．

$$a \boxplus b = \frac{1}{2} \otimes (a \oplus \mathrm{gyr}[a, \ominus b]b) \quad (\forall a, b \in G).$$

この演算 $\boxplus$ を $(G,\oplus)$ の **coaddition** という．

一般に，gyrogroup $(G,\oplus)$ に対して，$(G,\oplus)$ が gyrocommutative であることと magma $(G,\boxplus)$ が可換であることは同値である．また，明らかに $(G,\oplus)$ が群であれば $\oplus = \boxplus$ である．

Coaddition $\boxplus$ を導入することが自然であることを説明するため gyrogroup の性質を一つ紹介する．ここで，一般に gyrogroup は associative ではないので $(a \oplus b) \oplus (\ominus b) = b$ などとはできないことに注意したい．

Proposition 6. $(G,\oplus)$ を *gyrogroup* とし，$\boxplus$ をその *coaddition* とする．任意の $a, b \in G$ に対して以下が成立する．

(i) $\ominus a \oplus (a \oplus b) = b$ *(Left Cancellation Law);*

(ii) $(a \oplus b) \boxplus (\ominus b) = a$ *((First) Right Cancellation Law);*

(iii) $(a \boxplus b) \ominus b = a$ *((Second) Right Cancellation Law).*

Uniquely 2-divisible gyrocommutative gyrogroup に対して，gyromidpoint と呼ばれる代数的中点は以下のように定義される．

Definition 7. $(G,\oplus)$ を Uniquely 2-divisible gyrocommutative gyrogroup とする．$a, b \in G$ に対して，

$$\frac{1}{2} \otimes (a \boxplus b)$$

を a と b の gyromidpoint という．

gyrocommutative gyrogroup $(G,\oplus)$ に対して $(G,\boxplus)$ は可換であるから,「a と b の gyromidpoint」と「b と a の gyromidpoint」は一致する．また，その他様々な性質を調べると gyromidpoint は gyrogroup の「中点」と呼ぶにふさわしい性質を持っていることが確認できる．

Ungar は特殊相対論における速度全体の成す集合が持つ双曲幾何構造についての研究を行うため,（可換群とは限らない） gyrocommutative gyrogroup を「和」とする「内積空間のようなもの」を定義し，これを**ジャイロベクトル空間 (gyrovector space)** と呼んだ．本講演の内容に関しては「内積」の構造は必要ない（適さない）ので，代数構造のみに関する条件だけを抜き出し（ジャイロベクトル空間と区別し）**ジャイロ線形空間（gyrolinear space）**と呼ぶことにする．Gyrolinear space は通常の線形空間の一般化として以下のように定義する．

Definition 8. Gyrocommutative gyrogroup $(G,\oplus)$ と写像 $\otimes : \mathbb{R} \times G \to G$ の組が以下の条件 (GL1) から (GL5) を全て満たすとき，$(G,\oplus,\otimes)$ を gyrolinear space と呼ぶ．

(GL1) $1 \otimes a = a \quad (\forall a \in G)$.

(GL2) $(\lambda + \mu) \otimes a = (\lambda \otimes a) \oplus (\mu \otimes a) \quad (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall a \in G)$.

(GL3) $(\lambda\mu)\otimes a = \lambda\otimes(\mu\otimes a) \quad (\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall a\in G)$.

(GL4) $\mathrm{gyr}[u,v](\lambda\otimes a) = \lambda\otimes \mathrm{gyr}[u,v]a \quad (\lambda\in\mathbb{R},\ \forall u,v,a\in G)$.

(GL5) $\mathrm{gyr}[\lambda\otimes u,\mu\otimes u] = id_G \quad (\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \forall u\in G)$.

ここで，$(G,\oplus,\otimes)$ が gyrolinear space であるとき，$(G,\oplus)$ は自動的に uniquely 2-divisible であり，gyrolinear space の意味での $\frac{1}{2}\otimes a$ と uniquely 2-divisible gyrocommutative gyrogroup の意味での $\frac{1}{2}\otimes a$ は一致する．

Gyrolinear space でも通常の線形空間と同様に「直線」や「線分」に対応する概念が定義できる．

Definition 9. Gyrolinear space $(G,\oplus,\otimes)$ 上の点 $a,b\in G$ に対して，

$$L[a,b](t) := a\oplus t\otimes(\ominus a\oplus b) \quad (\forall t\in\mathbb{R})$$

とする．$L[a,b](\mathbb{R})$ を a と b を通過する **gyroline** といい，$L[a,b]([0,1])$ を **gyrosegment** ab という．

$L[a,b](\frac{1}{2})$ はちょうど a と b の gyromidpoint $\frac{1}{2}\otimes(a\boxplus b)$ と一致する．

2.2 ジャイロ群と幾何平均

Example 10. ([3], [2])

$$a\oplus_G b = a^{\frac{1}{2}}ba^{\frac{1}{2}} \quad (\forall a,b\in\mathbb{P}_n)$$

によって $\mathbb{P}_n$ 上の二項演算 $\oplus_G$ を定めると $(\mathbb{P}_n,\oplus_G)$ は uniquely 2-divisible gyrocommutative gyrogroup である．$(\mathbb{P}_n,\oplus_G)$ の 2 点 a と b の gyromidpoint は

$$\frac{1}{2}\otimes_G(a\boxplus_G b) = a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}$$

であり，これは幾何平均 $G(a,b)$ と一致する．さらに，

$$\lambda\otimes_G a = a^{\lambda} \quad (\forall a\in\mathbb{P}_n,\forall\lambda\in\mathbb{R})$$

によって $\otimes_G:\mathbb{R}\times\mathbb{P}_n\to\mathbb{P}_n$ を導入すると $(\mathbb{P}_n,\oplus_G,\otimes_G)$ は gyrolinear space になる．またこの時，

$$L[a,b](t) = a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}})^{-t}a^{\frac{1}{2}} \quad (\forall t\in\mathbb{R})$$

は測地線を表し，$d(a,b) = \|\log(\ominus_G a\oplus_G b)\|$ は Tompson metric と一致する．

3　半群と平均

3.1　半群と semi-linear space

半群（**semi-group**）とは associative magma のことである．幾何平均がある gyrocommutative gyrogroup の代数的中点として記述できたように，いくつかの mean は commutative semi-group の代数的中点として記述できる．また，その際現れる半群は自然に線形空間に近い構造を持つ．

Definition 11. $(S, \oplus)$ を uniquely 2-divisible commutative semi-group とする． $a, b \in S$ に対して，

$$\frac{1}{2} \otimes (a \oplus b)$$

を a と b の **semi-group midpoint** という．

Definition 12. Commutative semi-group $(X, \oplus)$ と写像 $\otimes : \mathbb{R}_+ \times X \to X$ の組 $(X, \oplus, \otimes)$ が以下の条件 (SL1) から (SL4) をすべて満足するとき，$(X, \oplus, \otimes)$ を **semi-linear space** と呼ぶ.

(SL1) $1 \otimes a = a$ for any $a \in X$.

(SL2) $(\lambda + \mu) \otimes a = (\lambda \otimes a) \oplus (\mu \otimes a)$ for any $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ and $a \in X$.

(SL3) $\lambda \otimes (a \oplus b) = \lambda \otimes a \oplus \lambda \otimes b$ for any $\lambda \in \mathbb{R}_+$ and $a, b \in X$.

(SL4) $(\lambda\mu) \otimes a = \lambda \otimes (\mu \otimes a)$ for any $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ and $a \in X$.

ここで，$(S, \oplus, \otimes)$ が semi-linear space であるとき，$(S, \oplus)$ は自動的に uniquely 2-divisible であり，semi-linear space の意味での $\frac{1}{2} \otimes a$ と uniquely 2-divisible commutative semi-group の意味での $\frac{1}{2} \otimes a$ は一致する．

Definition 13. Semi-linear space $(S, \oplus, \otimes)$ 上の点 $a, b \in S$ に対して，

$$L[a, b](t) = (1 - t) \otimes a \oplus t \otimes b \quad (\forall t \in (a, b)).$$

特に，$L[a, b](\frac{1}{2})$ は a と b の semi-group midpoint と一致する.

3.2　半群と平均

Example 14.

$$a \oplus_A b = a + b \quad (\forall a, b \in \mathbb{P}_n)$$

によって $\mathbb{P}_n$ 上の二項演算 $\oplus_A$ を定めると $(\mathbb{P}_n, \oplus_A)$ は uniquely 2-divisible commutative semi-group である．$(\mathbb{P}_n, \oplus_A)$ の 2 点 a と b の semi-group midpoint は

$$\frac{1}{2} \otimes_A (a \oplus_A b) = \frac{A + B}{2}$$

であり，これは算術平均 $A(a,b)$ と一致する．さらに，

$$\lambda \otimes_A a = \lambda a \quad (\forall a \in \mathbb{P}_n, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+)$$

によって $\otimes_A : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ を導入すると $(\mathbb{P}_n, \oplus_A, \otimes_A)$ は semi-linear space である．またこのとき，

$$L[a,b](t) = (1-t)a + tb \quad (0 < \forall t < 1).$$

Example 15.

$$a \oplus_H b = (a^{-1} + b^{-1})^{-1} \quad (\forall a, b \in \mathbb{P}_n)$$

によって $\mathbb{P}_n$ 上の二項演算 $\oplus_H$ を定めると $(\mathbb{P}_n, \oplus_H)$ は uniquely 2-divisible commutative semi-group である．$(\mathbb{P}_n, \oplus_H)$ の 2 点 a と b の semi-group midpoint は

$$\frac{1}{2} \otimes_H (a \oplus_H b) = 2(a^{-1} + b^{-1})^{-1}$$

であり，これは調和平均 $H(a,b)$ と一致する．さらに，

$$\lambda \otimes_H a = \frac{1}{\lambda} a \quad (\forall a \in \mathbb{P}_n, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+)$$

によって $\otimes_H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ を導入すると $(\mathbb{P}_n, \oplus_H, \otimes_H)$ は semi-linear space である．またこのとき，

$$L[a,b](t) = \{(1-t)a^{-1} + tb^{-1}\}^{-1} \quad (0 < \forall t < 1).$$

Example 16.

$$a \oplus_M b = \max\{a, b\} \quad (\forall a, b \in \mathbb{R}_+)$$

によって $\mathbb{P}_1 = \mathbb{R}_+$ 上の二項演算 $\oplus_M$ を定めると $(\mathbb{P}_n, \oplus_M)$ は uniquely 2-divisible commutative semi-group である．$(\mathbb{P}_n, \oplus_M)$ の 2 点 a と b の semi-group midpoint は

$$\frac{1}{2} \otimes_M (a \oplus_M b) = \max\{a, b\}$$

であり，これは $\mathbb{R}_+$ 上の平均 $\mathrm{Max}(\cdot,\cdot)$ と一致する．さらに，

$$\lambda \otimes_H a = a \quad (\forall a \in \mathbb{P}_n, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+)$$

によって $\otimes_H : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ を導入すると $(\mathbb{P}_n, \oplus_H, \otimes_H)$ は a semi-linear space である．またこのとき，

$$L[a,b](t) = \max\{a, b\} \quad (0 < \forall t < 1).$$

特に，$(\mathbb{P}_n, \oplus_M)$ は left-cancellative でも right-cancellative でもない．

4 問題

幾何平均がジャイロ群の代数的中点として記述できたのに対し，他のいくつかの平均は半群の代数的中点として記述できた．また，半群としても canceltive なものと cancellative 出ないものが現れた．では，一般にどのような平均はどのような代数構造に対応するであろうか？以降では，ジャイロ群や半群の代数的中点と対応するような平均について考察する．

5　半群に関する結果

算術平均や調和平均は cancellative semi-group の代数的中点として記述できたが，平均 Max は non-cancellative semi-group の代数的中点として記述できた．次の定理は半群の代数中点として記述できる mean に対して，対応する半群が cancellative か否かを mean の性質で特徴付けしたものである．

Theorem 17. $(\mathbb{P}_n, \oplus)$ は *uniquely 2-divisible commutative semi-group* であり，その中点 $M(a,b) = \frac{1}{2} \otimes (a \oplus b)$ が $\mathbb{P}_n$ 上の *mean* であるとする．このとき，半群についての条件 (i) と *mean* についての条件 (ii) は同値である．

(i) $(\mathbb{P}_n, \oplus)$ *is (left and right) cancellative.*

(ii) $b \neq c$ *implies* $M(a,b) \neq M(a,c)$.

Corollary 18. $(\mathbb{P}_n, \oplus)$ は *uniquely 2-divisible commutative group* であり，その中点 $M(a,b) = \frac{1}{2} \otimes (a \oplus b)$ が $\mathbb{P}_n$ 上の *mean* であるとする．このとき,「$b \neq c \Rightarrow M(a,b) \neq M(a,c)$」.

6　ジャイロ群に関する結果

6.1　$\mathbb{R}_+$ 上の平均とジャイロ群

幾何平均はジャイロ群の代数的中点として記述できた．特に，$n \geq 2$ の場合は群ではないジャイロ群が現れたが，$n = 1$ の場合は群であった．一般に $n = 1$ の場合，すなわち $\mathbb{R}_+$ 上の mean に関しては群でないジャイロ群は現れないことがわかる．

Theorem 19. $(\mathbb{R}_+, \oplus)$ を *uniquely 2-divisble gyrocommutative gyrogroup* とし，その代数的中点 $M(a,b) = \frac{1}{2} \otimes (a \boxplus b)$ が $\mathbb{R}_+$ 上の *mean* であるとする．このとき，$(\mathbb{R}_+, \oplus)$ は $(\mathbb{R}, +)$ と同型な群である．

Corollary 20. *Let* $(\mathbb{R}_+, \oplus)$ *be a uniquely 2-divisble commutative group. If* $M(a,b) = \frac{1}{2} \otimes (a \oplus b)$ *is a mean on* $\mathbb{R}_+$*, then* $(\mathbb{R}_+, \oplus)$ *is isomorphic to* $(\mathbb{R}, +)$.

6.2　対称移動とジャイロ群

M を $\mathbb{P}_n$ 上の mean とする．$a, c \in \mathbb{P}_n$ に対して，$c = M(a,x)$ となる $x \in \mathbb{P}_n$ がユニークに存在するならば，この x を（mean に意味で）c を中心として a を対称移動させた点と考えることができる．一般に，mean M に対して，$c = M(a,x)$ は必ずしも解 x を持つとは限らないし，解が存在したとしても一意とは限らない．任意の a, c に対して $x = M(a,x)$ がいつでも唯一解 x を持つような mean M に対しては，$c \circ a = x$ によって $\mathbb{P}_n$ 上に新たな二項演算 $\circ$ を導入することができる．

Example 21. $\mathbb{R}_+$ 上の算術平均 A に対して，方程式 $1 = A(2,x)$ は解をもたない．

Example 22. $\mathbb{R}_+$ 上の平均 $Max(a,b) = \max\{a,b\}$ に対して，方程式 $5 = Max(5,x)$ は解を無数に持つ（$0 < x \le 5$）.

Example 23. $\mathbb{P}_n$ 上の幾何平均 $G(a,b) = a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}$ に対して，方程式 $c = G(a,x)$ は解 $x \in \mathbb{P}_n$ をユニークに持ち，その解は $x = ca^{-1}c$ である.

対称移動に関する代数構造として，dyadic symset と呼ばれる magma がある.

Magma $(X,\circ)$ が任意の $a,b,c \in X$ に対して以下の条件 (d1) から (d4) をすべて満足するとき，$(X,\circ)$ を dyadic symset であるという.

(d1) $a \circ a = a.$

(d2) $a \circ (a \circ b) = b.$

(d3) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ (a \circ c).$

(d4) 方程式 $x \circ a = b$ が解 $x \in X$ をユニークに持つ．この x を a と b の中点といい $a\sharp b$ で表す.

[5] において，Lawson と Lim は dyadic symsets と uniquely 2-divisible gyrocommutative gyrogroups の間に以下のような強い関係があることを示した.

$(X,\circ)$ を dyadic symset とし，1 点 $e \in X$ を選ぶ．ここで，X 上に新たな演算 $\oplus$ を $x \oplus y = (e\sharp x) \circ (e \circ y)$ によって定義すれば，$(X,\oplus)$ は e を単位元とする uniquely 2-divisible gyrocommutative gyrogroup である．逆に，uniquely 2-divisible gyrocommutative gyrogroup $(X,\oplus)$ に対して，X 上の新たな演算 $\circ$ を $x \circ y = (x \oplus x) \ominus y$ によって定義すれば $(X,\circ)$ は dyadic symset である．さらにこのとき， syadic symset の意味での中点と gyrogroup の意味での中点（gyromidpoint）は一致している.

このより，以下のことが直ちに得られる.

Corollary 24. $\mathbb{P}_n$ 上の *mean* M に対して， 次の (i) と (ii) は同値である.

(i) 任意の $a,c \in \mathbb{P}_n$ に対して，$c = M(a,x)$ は解 x をユニークに持つ．さらに，

$$c \circ a = x \iff c = M(a,x)$$

によって定義される $(\mathbb{P}_n,\circ)$ は *dyadic symset* である.

(ii) $M(a,b) = \dfrac{1}{2}(a \boxplus b)$ となる *uniquely 2-divisible gyrocommutative gyrogroup* $(\mathbb{P}_n,\oplus)$ が存在する.

6.3 平均の対称移動について

$\mathbb{R}_+$ 上の mean M に対して，$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ を $f(x) = M(1,x)$ によって定めると，mean の定義より f は以下の (f1) から (f5) までの性質を満たす.

(f1) $0 < x \le 1 \ \Rightarrow\ f(x) \le 1$，また $x \le 1 \ \Rightarrow\ f(x) \le 1.$

(f2) $f(1) = 1$.

(f3) f は単調増加．

(f4) $xf(x^{-1}) = f(x)$.

(f5) f は連続．

逆に，条件 (f1) から (f5) を満たすような $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ が与えられた場合，

$$M(a,b) := af(\frac{b}{a})$$

により $M : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ を定めると M は $\mathbb{R}_+$ 上の mean である．

Proposition 25. $\mathbb{R}_+$ 上の *mean* M に対して，$f(x) = M(1,x)$ とする．このとき，以下 (i) と (ii) は同値．

(i) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ は全単射．

(ii) 任意の $a, c \in \mathbb{P}_n$ に対して，$c = M(a,x)$ はユニーク解 $x \in \mathbb{P}_n$ を持つ．

この結果から直ちに次の結果が得られる．この結果は $\mathbb{R}_+$ 上の mean が可換群の代数的中点として記述されるための必要条件を述べている．

Corollary 26. $\mathbb{R}_+$ 上の *mean* M に対して $f(x) = M(1,x)$ とする．$M(a,b) = \frac{1}{2} \otimes (a \oplus b)$ となる *uniquely 2-divisible commutative group* $(\mathbb{R}_+, \oplus)$ が存在するなら $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は全単射．

参考文献

[1] T. Abe *Algebraic structures for means.*, Results Math, **76** (2021), no.1, Paper No.41, 15pp

[2] T. Abe and O. Hatori, *Generalized gyrovector spaces and a Mazur-Ulam theorem*, Publ. Math. Debrecen, **87** (2015), 393–413

[3] R. Beneduci and L. Molnár, *On the standard K-loop structures of positive invertible elements in a C^*-algebra* J. Math. Anal. Appl., **420** (2014), 551–562

[4] Bhatia. R, *Positive Definite Matrices*, Princeton, 2007

[5] J. Lawson and Y. Lim *Symmetric sets with midpoints and algebraically equivalent theories*, Results Math., **46** (2004), 37–56

[6] A. A. Ungar, *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008

Lattice isomorphisms between projection lattices of von Neumann algebras[*] [†]

森 迪也[‡]

概 要

von Neumann 環 M に対し，その射影全体の集合 $\mathcal{P}(M)$ は束（lattice）をなすことが古くから知られている．二つの von Neumann 環 M, N に対して，$\mathcal{P}(M)$ から $\mathcal{P}(N)$ への束同型の一般形を与える．

1 von Neumann 環と射影

複素 Hilbert 空間[1] H に対し，H 上の有界線形作用素全体のなす代数を $B(H)$ で表す．作用素 $x \in B(H)$ に対し，$\langle xh, g\rangle = \langle h, x^*g\rangle$, $h, g \in H$ を満たす作用素 $x^* \in B(H)$ （共役作用素）が定まることを思い出そう．$B(H)$ の部分 $*$ 代数とは，線形部分空間 $A \subset B(H)$ で，$x, y \in A$ ならば $x^*, xy \in A$ を満たすものを指す．**作用素環論**においては主として，$B(H)$ の部分 $*$ 代数で，適当な位相で閉集合となるものを考える．特に，**von Neumann 環**とは，$B(H)$ の部分 $*$ 代数で，恒等作用素 $1 \in B(H)$ を含み，強作用素位相[2]（SOT）で閉じたものを指す．

例 1.

- $B(H)$ は最も基本的な von Neumann 環である．
- 正の整数 n に対し，$n \times n$ 複素行列の全体 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ は通常の方法で $B(\mathbb{C}^n)$ と同一視され，有限次元 von Neumann 環の例となる．
- $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を適当な有限性を満たす（たとえば σ 有限な）測度空間とする．$f \in L^\infty(\mu)$ を，Hilbert 空間 $L^2(\mu)$ 上の有界線形作用素 $L^2(\mu) \ni g \mapsto fg \in L^2(\mu)$ と同一視することにより，$L^\infty(\mu) \subset B(L^2(\mu))$ と思うことができるが，この同一視の下で $L^\infty(\mu)$ は von Neumann 環の構造を持つ．$L^\infty(\mu)$ は可換な（積がつねに交換可能な）von Neumann 環である．実は，任意の可換な von Neumann 環はこの測度論的な方法で得られることが知られている．これをもとに，一般の von Neumann 環の研究は「非可換な測度論」のようなものである，ととらえられることがある[3]．

---

[*]第 61 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集原稿

[†]講演者は理化学研究所基礎化学特別研究員制度および科研費（課題番号 22K13934）による助成を受けている．

[‡]〒351-0198 和光市広沢 2-1 理化学研究所 数理創造プログラム（iTHEMS），michiya.mori@riken.jp

[1]本講演において，Hilbert 空間は可分とは限らない．

[2]有向点族 $(x_i)_{i\in I} \subset B(H)$ と $x \in B(H)$ に対し，$x_i \to x \iff \|x_ih - xh\| \to 0\ \forall h \in H$ により定まる位相．すなわち各点収束位相．

[3]**非可換**（noncommutative）という単語は作用素環論で頻出するキーワードの一つである．これは「可換と限らない」ということを指し，可換の場合を排除するのではなく，可換と限らない場合に一般化する，というニュアンスで用いられる．

集合 $S \subset B(H)$ に対し，$S' := \{x \in B(H) \mid xy = yx\ \forall y \in S\}$ を S の可換子環（commutant），$S'' := (S')'$ を双可換子環（bicommutant または double commutant）という．von Neumann の双可換子環定理によれば，部分 $*$ 代数 $M \subset B(H)$ に対して，M が von Neumann 環であることは $M'' = M$ が成り立つことと同値である．これは，位相的な条件と代数的な条件の同値性であり，von Neumann 環の研究において関数解析的なアプローチと代数的なアプローチがどちらも強力であることを示唆している．

von Neumann 環 M であって，その中心 $M \cap M'$ が 1 次元である（すなわち恒等作用素の張る部分空間に等しい）ものを**因子環**（factor）とよぶ．一般の von Neumann 環は，適当な条件のもとで因子環の直積分（「連続的な直和」のようなもの）で表されることが知られているため，von Neumann 環の研究においては，初めから考察の対象を因子環に限ることがよくある．本講演の内容については因子環に限らなくとも議論ができるのだが，簡単のため，因子環の場合に限って説明する場面がある．

von Neumann 環の構造の研究は，von Neumann の Murray との共著論文 [13] に始まる．この論文では，因子環が 5 種類に分類できることが示された．これを説明しよう．

射影（projection, あるいは直交射影 orthogonal projection）とは，$B(H)$ の元 p であって $p = p^2 = p^*$ を満たすものをいう[4]．よく知られているように，射影 $p \in B(H)$ に対しその像 $pH \subset H$ は H の閉部分空間であり，また H の閉部分空間に対し，それを像とする射影が唯一つ存在する．これより，射影全体の集合は H の閉部分空間全体の集合と同一視される．この同一視により，射影の集合に半順序 $p \leq q \iff pH \subset qH$ が定まる[5]．

von Neumann 環 $M \subset B(H)$ に対し，M に属する射影の全体を $\mathcal{P}(M)$ と表す．$\mathcal{P}(M) := \{p \in M \mid p = p^2 = p^*\}$．このとき，$\mathcal{P}(M)$ は束[6]（lattice）をなす．実際，$p, q \in \mathcal{P}(M)$ に対し，$pH + qH$ の閉包への射影，$pH \cap qH$ への射影がともに M の元であり，それぞれ p と q の上限 $p \vee q$, 下限 $p \wedge q$ となることが確かめられる[7]．このことから，$\mathcal{P}(M)$ を M の**射影束**（projection lattice）とよぶ．M が可換の場合，M はある測度空間に対する L^∞ 空間と同一視され，ゆえに各射影はある可測集合の特性関数に対応する．(ただし，ほとんど至るところ等しい関数は同じものとして扱うことに注意が必要.) それゆえ，射影束は可測集合のなす束と思うことができる．したがって，一般の von Neumann 環の射影束は，いわば「非可換な可測集合のなす束」のようなものだといえるだろう[8]．

$\mathcal{P}(M)$ には，いくつかの二項関係が定まる．ひとつは，すでに述べた束構造を定める半順序関係である．また，直交関係 $p \perp q \iff pH \perp qH$ も重要である．以上に加え，次のようにして定まる $\mathcal{P}(M)$ 上の同値関係が，Murray–von Neumann により導入された [13]．von Neumann 環 M の射影 $p, q \in \mathcal{P}(M)$ に対し，ある（部分等距離）作用素 $v \in M$ が存在し $vv^* = p$, $v^*v = q$ が成り立つとき，$p \sim q$ と書く．これは同値関係であることがわかる．射影 $p \in \mathcal{P}(M)$ が条件

$$q \in \mathcal{P}(M),\ p \sim q \leq p \Longrightarrow p = q$$

を満たすとき $p \in \mathcal{P}(M)$ は**有限**（finite）な射影であるという．von Neumann 環 M の恒等作用素 $1 \in \mathcal{P}(M)$ が有限な射影であるとき，M は**有限型**であるという．

[4] 文献によっては，$p = p^2$ を満たす作用素を射影とよぶ場合もあるので注意．本講演では登場しないが，講演者は $p = p^2$ を満たす作用素をベキ等元（idempotent）とよぶ．

[5] これは有界自己共役作用素の順序（$a \leq b \iff \langle ah, h\rangle \leq \langle bh, h\rangle\ \forall h \in H$）を射影に制限したものにも一致する．

[6] 半順序集合 $(L, \leq)$ の任意の 2 元 a, b が上限 $a \vee b = \min\{c \in L \mid a \leq c, b \leq c\}$ と下限 $a \wedge b = \max\{c \in L \mid c \leq a, c \leq b\}$ をもつとき，L は**束**をなすという．

[7] より一般に，$\mathcal{P}(M)$ の任意の部分集合は上限と下限をもつ．つまり $\mathcal{P}(M)$ は完備束である．

[8] 「非可換な測度代数」というほうが適切かもしれない．

M を因子環とする．写像 $D\colon \mathcal{P}(M) \to [0,\infty] := [0,\infty) \cup \{\infty\}$ が**相対次元関数**（relative dimension function）であるとは，D が次の条件を満たすことをいう：

1. $D(0) = 0$.
2. $0 \neq p \in \mathcal{P}(M)$ が有限な射影ならば $0 < D(p) < \infty$，有限でなければ $D(p) = \infty$.
3. $p, q \in \mathcal{P}(M)$, $p \sim q$ ならば $D(p) = D(q)$.
4. $p, q \in \mathcal{P}(M)$, $p \perp q$ ならば $D(p+q) = D(p) + D(q)$.

以下の Murray–von Neumann の定理では，$\mathcal{P}(M)$ が支配的な役割を果たしている．

定理 1 (Murray–von Neumann [13])**.** 因子環 M に対し，次のいずれかの条件を満たす相対次元関数 D が唯一つ存在する．

- ある正の整数 n に対し，$D(\mathcal{P}(M)) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. このような D をもつ M を $\mathbf{I}_n$ **型**因子環という．
- $D(\mathcal{P}(M)) = \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$. このような D をもつ M を $\mathbf{I}_\infty$ **型**因子環という．
- $D(\mathcal{P}(M)) = [0, 1]$. このような D をもつ M を $\mathbf{II}_1$ **型**因子環という．
- $D(\mathcal{P}(M)) = [0, \infty]$. このような D をもつ M を $\mathbf{II}_\infty$ **型**因子環という．
- $D(\mathcal{P}(M)) = \{0, \infty\}$. このような D をもつ M を **III 型**因子環という．

因子環のうち，有限型であるものは I_n 型環および II_1 型環である．

例 2. 正の整数 n に対し，$n \times n$ 行列環 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ は I_n 型因子環である．無限次元 Hilbert 空間 H に対し，$B(H)$ は I_∞ 型因子環である．実は，I 型（I_n と I_∞）因子環はこのようなものしか存在しない．

これらの例において，D は射影の階数を与える写像にほかならない．射影を閉部分空間と同一視すれば，D は部分空間に対し次元を与える写像であると思うことができる．

ゆえに，一般の因子環の D は「部分空間の次元を与える写像」を一般化したものだと考えられる．II 型（II_1 と II_∞）および III 型の因子環は，存在することですら自明ではない．Murray–von Neumann の最初の論文 [13] では，II 型因子環が構成された．II 型環の相対次元関数は連続的な値をとる．ゆえに，II 型環を考えることで，連続的な次元の概念が考えられる．これに動機づけられ，von Neumann は**連続幾何学**（continuous geometry）という分野を開拓した [16].

論文 [13] では，III 型環が存在するかどうかは未解決であった．最初の III 型環は数年後に von Neumann が発見し [15]，それ以来，II 型および III 型環の理論が von Neumann 環論の中心的話題として発展していくのだが，その説明はここではしない．作用素環論では，具体例を一つも知らないとしても抽象的な理論展開が可能である場面が多くある．講演者は作用素環のそのような側面を好んでいるため，ここでもあえて，I 型以外の具体例には触れずに，抽象的に議論を進める．

因子環と限らない一般の von Neumann 環は，5 つのタイプ（I_n, I_∞, II_1, II_∞, III）の von Neumann 環の直和で表されることが知られている[9].

[9]詳しくは，作用素環論の標準的な教科書，たとえば [7, Chapter 6] を見るとよい．

2　射影束の束同型

本講演では，次の問題を考える．

問題． M, N を von Neumann 環とするとき，$\mathcal{P}(M)$ から $\mathcal{P}(N)$ への束同型の一般形は何か．

ここで，**束同型**とは，束のあいだの全単射 $\phi\colon L_1 \to L_2$ で，すべての $a, b \in L_1$ に対し等式 $\phi(a \vee b) = \phi(a) \vee \phi(b)$, $\phi(a \wedge b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$ を満たすものである．束構造と半順序構造の対応から，この条件は ϕ が**順序同型**であること，すなわちすべての $a, b \in L_1$ に対し $a \leq b \iff \phi(a) \leq \phi(b)$ が成り立つことと同値である．

2.1 節から 2.3 節で先行研究について紹介し，2.4 節において本研究の主結果のひとつを与える．

2.1　I 型因子環の場合

$M = N = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $1 \leq n < \infty$（I_n 型因子環）のとき，射影を部分空間と同一視すれば，我々の問題は $\mathbb{C}^n$ の部分空間全体のなす束（これを $\mathcal{C}(\mathbb{C}^n)$ と表そう）に対する問題となる．この場合，$n \leq 2$ であれば面白い結論は得られないが，$n \geq 3$ の場合は**射影幾何学の基本定理**（fundamental theorem of projective geometry）が適応できる．

定理 2 (射影幾何学の基本定理[10])**.** $n \geq 3$ とする．$\Phi\colon \mathcal{C}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{C}(\mathbb{C}^n)$ を束同型とする．このとき，ある半線形全単射 $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ が存在して，$\Phi(V) = f(V)$, $V \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^n)$ が成り立つ[11]．

複素ベクトル空間 V, W のあいだの写像 $f\colon V \to W$ が**半線形** (semilinear) であるとは，ある環同型（積と和を保つ全単射） $\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が存在して， $f(c_1v_1 + c_2v_2) = \alpha(c_1)f(v_1) + \alpha(c_2)f(v_2)$ $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $v_1, v_2 \in V$ が成り立つことをいう．α が恒等写像のとき f は複素線形，α が複素共役をとる写像のとき f は共役線形（conjugate-linear）となる．$\mathbb{C}$ 上の自己環同型は，連続なものは恒等写像と複素共役をとる写像に限られるが，不連続なものがほかにたくさんあることが知られている．

射影幾何学の基本定理は，束構造が環構造（環同型 α に対応）と関係していることを示唆する．なぜそのようなことが起こるか理解するため，射影幾何学の基本定理の証明の概略を与えてみよう．

簡単のため，$n = 3$ の場合のみ考える．まず，各 $0 \leq k \leq n$ に対し，k 次元部分空間の Φ による行き先が k 次元部分空間となることは簡単にわかる．適当な線形変換により，Φ は $\mathbb{C}^3$ の 5 つの 1 次元部分空間

$$\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

をいずれも固定すると仮定してもよいことがわかる．このとき，各 $c \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\Phi\left(\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\c\\0\end{pmatrix}\right) = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\\alpha(c)\\0\end{pmatrix}$$

[10] 複素数以外の体を考えてもよい．射影幾何学の基本定理は，ここに述べるものとは異なる定式化で述べられることも多いが，定理の主張の大意は変わらない．

[11] $\Phi(V)$ は元 V の行き先，$f(V)$ は部分集合 $V \subset \mathbb{C}^n$ の像を表していることに注意．

となる $\alpha(c) \in \mathbb{C}$ が定まり，$\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は全単射となる．同様に，

$$\Phi\left(\mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\\c\end{pmatrix}\right) = \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\\\beta(c)\end{pmatrix},\ \Phi\left(\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\c\end{pmatrix}\right) = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\\gamma(c)\end{pmatrix}$$

が任意の $c \in \mathbb{C}$ について成り立つような全単射 $\beta, \gamma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が存在する．ここで，$\alpha(-1) = -1 = \beta(-1)$ となることに注意しておく．

簡単な計算により，任意の $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ に対し，等式

$$\left[\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\c_1\\0\end{pmatrix} \vee \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}\right] \wedge \left[\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \vee \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right] = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\-c_1c_2\end{pmatrix}$$

が示せる．両辺の Φ による送り先を考えると，Φ に関する仮定より，

$$\left[\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\\alpha(c_1)\\0\end{pmatrix} \vee \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\\\beta(c_2)\end{pmatrix}\right] \wedge \left[\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \vee \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right] = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\\gamma(-c_1c_2)\end{pmatrix}$$

が成り立つことがわかる．左辺は $\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\-\alpha(c_1)\beta(c_2)\end{pmatrix}$ に等しいので，$-\alpha(c_1)\beta(c_2) = \gamma(-c_1c_2)$ となる．$\alpha(-1) = -1 = \beta(-1)$ であることを使えば，$\alpha = \beta = \gamma$ であり，しかも α が乗法的である，つまり $\alpha(c_1)\alpha(c_2) = \alpha(c_1c_2)$ が任意の $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ に対し成り立つことが簡単に示せる．

いっぽう，任意の $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ に対し等式

$$\left[\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\c_1\\0\end{pmatrix} \vee \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right] \wedge \left[\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\c_2\end{pmatrix} \vee \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

および

$$\left[\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\c_1\\c_2\end{pmatrix} \vee \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right] \wedge \left[\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \vee \mathbb{C}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right] = \mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\0\\c_1+c_2\end{pmatrix}$$

が成り立つことが簡単に示せる．これらを用いると，α が加法的である，すなわち $\alpha(c_1 + c_2) = \alpha(c_1) + \alpha(c_2)$ が任意の $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ について成り立つことがわかる．

よって，

$$f\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\alpha(c_1)\\\alpha(c_2)\\\alpha(c_3)\end{pmatrix}$$

により定まる写像 $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ は半線形全単射となる．これが定理の条件を満たすことは比較的容易に示せ，証明が完結する．

次に，I_∞ 型因子環の場合を考えてみよう．$\mathcal{P}(B(H))$ は H の閉部分空間全体のなす束と同一視できるのだった．一般に，複素ノルム空間 X に対して，X の閉部分空間全体は包含関係を順序として束をなす．これを $\mathcal{C}(X)$ と表そう．

定理 3 (Fillmore–Longstaff [5])**.** X, Y を無限次元複素ノルム空間，$\Phi\colon \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ を束同型とする．このとき，ある複素線形または共役線形な同相写像 $f\colon X \to Y$ が存在し，$\Phi(V) = f(V)$, $V \in \mathcal{C}(X)$ が成り立つ．

ゆえに，I_∞ 型因子環の射影束の束同型はすべて連続であり，I_n 型の場合とは様子が異なる．講演者にとって，以上の 2.1 節の定理を知ったことが今回の研究を始める契機となった．

2.2 von Neumann の理論

von Neumann は，連続幾何学の理論と関連して，(von Neumann) 正則環という環のクラスと，可補 modular 束という束のクラスを導入し，これらのあいだに良い対応があることを示した．この理論 [16, Part 2] を簡単に説明しよう．

定義 1. 単位元を持つ環 R の任意の元 x に対してある元 y が存在して $xyx = x$ が成り立つとき，R は（von Neumann）**正則**（regular）であるという[12]．

例 3. $n \geq 1$ に対し，$n \times n$ 複素行列全体 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ は正則環である[13]．

定義 2. 最大元 1 と最小元 0 をもつ束 L が**可補**（complemented）であるとは，各元 $a \in L$ に対しある元 $b \in L$ が存在して，$a \vee b = 1$, $a \wedge b = 0$ が成り立つことを指す．束 L が **modular** であるとは，$a \leq c$ を満たす任意の三つ組 $a, b, c \in L$ が等式 $(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c)$ を満たすことを意味する．

3 点集合 $\{1, 2, 3\}$ の部分集合族 $N_5 := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ に包含関係で半順序を与えると束をなすが， modular でない： $(\{2\} \vee \{1\}) \wedge \{2, 3\} = \{2, 3\} \neq \{2\} = \{2\} \vee (\{1\} \wedge \{2, 3\})$. 実は，束が modular であることは，この N_5 を部分束として含まないことと同値である．

例 4. 有限次元複素ベクトル空間 X に対し，その線形部分空間全体 $\mathcal{C}(X)$ は包含関係を順序として可補 modular 束をなす．

定理 4 (von Neumann)**.** R を正則環とする．R の単項右イデアル（すなわち，ある $x \in R$ に対し xR と表される R の右イデアル）全体の集合 L に，包含関係で半順序を与える．このとき，L は可補 modular 束となる．

定義 3. L を可補 modular 束とする．ふたつの元 $a, b \in L$ が **perspective** であるとは，ある $c \in L$ が存在して $a \vee c = 1 = b \vee c$, $a \wedge c = 0 = b \wedge c$ が成り立つことを意味する．n を 2 以上の整数とする．L が **order** n をもつとは，どのふたつも perspective であるような $a_1, a_2, \ldots, a_n \in L$ が存在して，$a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n = 1$, かつすべての部分集合 $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し $\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right) \wedge \left(\bigvee_{j \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus I} a_j\right) = 0$ が成り立つことを指す．

n を正の整数とする．R が正則環のとき，R の元を成分とする $n \times n$ 行列全体 $\mathbb{M}_n(R)$ に通常の環構造を与えたものはまた正則環となる．与えられた正則環の単項右イデアル全体のなす可補 modular 束 L が order n をもつことは，その正則環が $\mathbb{M}_n(R)$ の形で表せることと同値である．

定理 5 (von Neumann)**.** R_1, R_2 を正則環として，それぞれの単項右イデアル全体のなす可補 modular 束を L_1, L_2 とする．L_1 が 3 以上のある order を持つとする．$\Phi\colon L_1 \to L_2$ を束同型とする．このとき，環同型 $\Psi\colon R_1 \to R_2$ が唯一つ存在して，$\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \in L_1$ が成り立つ．

[12] von Neumann 正則環と von Neumann 環は名前が似ていて紛らわしいが，前者は抽象的な環 (ring)，後者は $B(H)$ の部分 $*$ 代数であり，明確に異なることに注意されたい．ただし，I_n 型因子環 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ については双方の例となっている．
[13] 複素数以外の体を考えてもよい．例 4, 5 についても同様．

例 5. $n \geq 1$ に対し，正則環 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ の単項右イデアル全体のなす可補 modular 束は，$\mathcal{C}(\mathbb{C}^n)$ と同一視できる．実際，$\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ が通常の方法で $\mathbb{C}^n$ に作用するとみなせば，$\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ の単項右イデアルは，ある部分空間 $V \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^n)$ に対し，像が V に含まれる行列の全体に等しいことがわかる．

これを用いると，射影幾何学の基本定理は von Neumann の理論の帰結として得られる．実は，定理 5 の証明は，上述の射影幾何学の基本定理の証明と似た方法でできてしまう．

von Neumann はさらに，次の定理を与えた．

定理 6 (von Neumann)**.** L を order $n \geq 4$ の可補 modular 束とする．このとき，ある正則環 R であって，その単項右イデアル全体のなす束が L と束として同型となるものが存在する．

von Neumann 環 M に対し，射影束 $\mathcal{P}(M)$ は常に可補束である．また，$\mathcal{P}(M)$ が modular となることは，M が有限型（I_n または II_1）であることと同値であることが知られている．

M が 有限型 von Neumann 環のとき，可補 modular 束 $\mathcal{P}(M)$ に対応する正則環は何だろうか．von Neumann 環 $M \subset B(H)$ と H 上稠密に定まった閉作用素 x に対し，x が M に**付属する**（x is affiliated with M）とは，M の可換子環 $M' = \{y \in B(H) \mid xy = yx \forall x \in M\}$ に属する任意の y に対し $yx \subset xy$ が成り立つことを指す．M に付属する作用素の全体を $A(M)$ で表す．有限型 von Neumann 環 M に対しては，付属作用素の全体 $A(M)$ が $*$ 代数の構造（$*$ 構造&線形構造&積構造）を持つ [13]．具体的には，$x, y \in A(M)$ と $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ に対し，$x^*, \overline{c_1 x + c_2 y}, \overline{xy} \in A(M)$ が成り立ち，これらを $*$ 代数の演算とするような構造が入ることがわかる．この事実は，M が有限型でない場合には全く成り立たない[14]ため，驚くべき事実であるといってよいだろう．実は，M が有限型のとき，$A(M)$ は正則環となり，これが可補 modular 束 $\mathcal{P}(M)$ に対応する正則環にほかならないことが示せる．実際，正則環 $A(M)$ の単項右イデアルは，ある射影 $p \in \mathcal{P}(M)$ に対し $\{x \in A(M) \mid px = x\}$ という形をしていることが確かめられる．

M の付属作用素 x に対し，$l(x)$ で x の像の閉包への射影を表す．これは M の元である．von Neumann の理論から，特に次の定理が従う．

定理 7 (von Neumann [16])**.** M, N を I_1 型でも I_2 型でもない有限型因子環とする．このとき，任意の束同型 $\Phi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ に対し，環同型 $\Psi\colon A(M) \to A(N)$ が唯一つ存在して，$\Phi(p) = l(\Psi(p))$, $p \in \mathcal{P}(M)$ が成り立つ．逆に，任意の環同型 $\Psi\colon A(M) \to A(N)$ に対し，束同型 $\Phi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ が等式 $\Phi(p) = l(\Psi(p))$, $p \in \mathcal{P}(M)$ により定まる．

2.3 直交性を保つ場合

定理 7 の変形として，Feldman [4] と Dye [3] は，一般の von Neumann 環の設定で，直交性を保つという追加の仮定のもとで射影束の束同型を考えた．彼らの定理を因子環の場合に限定して紹介する．

二つの von Neumann 環のあいだの全単射 $\psi\colon M \to N$ が，複素線形で，積を保ち，$\psi(x^*) = \psi(x)^*$, $x \in M$ を満たすとき，ψ を $*$ **同型**という．$*$ 同型は自動的に von Neumann 環の基本的な構造（たとえば距離構造，適当な位相構造，順序構造...）を保つので，作用素環論において最もよく登場する同型写像の概念である[15]．以下の定理では，共役線形で，積を保ち，$\psi(x^*) = \psi(x)^*$, $x \in M$ を満たす全単射 $\psi\colon M \to N$ が登場する．これを**共役線形 $*$ 同型**とよぼう．共役線形 $*$ 同型は，複素線形構造は保たないが，von Neumann 環の構造の多く（特に射影束とその束構造）を保つ．

[14] I_∞ 型因子環の場合はたとえば von Neumann の [14] を参照．
[15] それゆえ，文献によっては $*$ 同型を単に同型とよぶ場合も多い．

例 6. I_n 型因子環 $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ において，すべての成分の複素共役をとる写像 $(x_{ij})_{1\le i,j\le n} \mapsto (\overline{x_{ij}})_{1\le i,j\le n}$ は共役線形 $*$ 同型である．

定理 8 (Feldman [4], Dye [3])**.** M, N を I_2 型でない因子環とする．束同型 $\Phi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ が，次の条件を満たすとする：$p, q \in \mathcal{P}(M)$ に対し，$p \perp q \iff \Phi(p) \perp \Phi(q)$. このとき，$*$ 同型または共役線形 $*$ 同型 $\Psi\colon M \to N$ が唯一つ存在して，$\Phi(p) = \Psi(p)$, $p \in \mathcal{P}(M)$ が成り立つ．逆に，任意の $*$ 同型または共役線形 $*$ 同型 $\Psi\colon M \to N$ に対し，束同型 $\Phi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ が等式 $\Phi(p) = \Psi(p)$, $p \in \mathcal{P}(M)$ により定まる．

2.4 射影束の束同型と可測作用素環の環同型の対応

有限型でない von Neumann 環 $M \subset B(H)$ に対しては，付属作用素の全体 $A(M)$ は環構造を持ちえないのだった．講演者は，$A(M)$ の代わりに可測作用素のなす代数を考えることで，定理 7 の拡張を得た．von Neumann 環 M に付属する作用素 x が**可測**（measurable）であるとは，ある $c > 0$ が存在して，スペクトル射影 $p = \chi_{[c,\infty)}(|x|)$ （これは実は M の元である）が有限な射影となることである．M に付属する可測作用素の全体を $S(M)$ と表す．これは $*$ 代数の構造を持つことが知られている [19].

例 7.
- M が I 型または III 型の因子環ならば，$S(M) = M$ である．
- M が有限型環のとき，$S(M) = A(M)$ である．

定理 A (森 [11])**.** M, N を I_1 型でも I_2 型でもない因子環とする．このとき，任意の束同型 $\Phi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ に対し，環同型 $\Psi\colon S(M) \to S(N)$ が唯一つ存在して，$\Phi(p) = l(\Psi(p))$, $p \in \mathcal{P}(M)$ が成り立つ．逆に，任意の環同型 $\Psi\colon S(M) \to S(N)$ に対し，束同型 $\Phi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ が等式 $\Phi(p) = l(\Psi(p))$, $p \in \mathcal{P}(M)$ により定まる．

環の同型から束の同型が定まることの証明はそれほど難しくない．束の同型から環の同型を構成する方法は詳しくは述べないが，前述の射影幾何学の基本定理の証明におけるからくりと似たことが使える．なぜ可測作用素が登場するのか，という部分について説明しよう．

一般に，射影 3 つ以上の集まりを同時に考えることはきわめて難しいとされている[16] [20]．しかし，2 つの射影であれば同時に考えることがいつでも，比較的容易にできることが知られている[17]．ここでは，von Neumann 環の 2 つの射影を考えよう．

$M \subset B(H)$ を von Neumann 環とする．射影 $p \in \mathcal{P}(M)$ に対し，$p^\perp := 1 - p \in \mathcal{P}(M)$ と定める．$p, q \in \mathcal{P}(M)$ とする．$e_1 := p \wedge q^\perp$, $e_2 := p \wedge q$, $e_3 := p^\perp \wedge q$, $e_4 := p^\perp \wedge q^\perp$, $e_5 := 1 - e_1 - e_2 - e_3 - e_4$ とおく．このとき，Hilbert 空間 H の直交分解 $H = e_1H \oplus e_2H \oplus e_3H \oplus e_4H \oplus e_5H$ に対応して，p と q を

$$p = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus p_0, \quad q = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus q_0$$

という形に分解することができる．実は，von Neumann 環 $e_5Me_5 \subset B(e_5H)$ は，ある von Neumann 環 $M_{p,q}$ の元を成分とする 2×2 行列全体のなす von Neumann 環 $\mathbb{M}_2(M_{p,q})$ と同一視できて，$\mathbb{M}_2(M_{p,q})$ において p_0 と q_0 がそれぞれ

$$p_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ q_0 = \begin{pmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{pmatrix}$$

[16]本講演とはあまり関係がないが，不思議なふるまいをする 3 つの射影の例として，[9], [10, Section 5] が興味深い．
[17]歴史的背景を含めた，2 つの射影の理論については [2] が詳しい．

という形で表される．ここで，$c, s \in M_{p,q}$ は単射かつ半正定値な作用素で，$c^2 + s^2 = 1$ を満たす[18]．

命題 1 ([11, Lemma 3.6])**.** M を因子環として，$p, q \in \mathcal{P}(M)$ は $p \wedge q = 0$ を満たすとする．上述のような von Neumann 環 $M_{p,q}$ と作用素 $c, s \in M_{p,q}$ をとる．このとき，次は同値．

- 作用素 s は，$S(M_{p,q})$ において可逆である．
- $p_1 \in \mathcal{P}(M)$ が $p_1 \le p$, $p_1 \vee q = p \vee q$ を満たすとき，$p_1 = p$ が成り立つ．

第一の条件では可測作用素が登場するが，第二の条件は束構造のみが関係していることに注意されたい．これをうまく用いることにより，束同型から可測作用素環の環同型が構成できるのである．

3 可測作用素環の環同型

では，環同型 $\Psi\colon S(M) \to S(N)$ は一般にどのような形をしているか．有限次元（つまり I_n 型）因子環の場合については，射影幾何学の基本定理から束同型の一般形がわかるので，説明を省略する．ほかの場合を考えよう．改めて思い出すと，環同型とは，加法と乗法を保つ全単射であり，一般には実線形と限らないのであった．ところが，次の定理が成り立つ．

定理 B (森 [11, 12]; Ayupov–Kudaybergenov [1])**.** M, N を無限次元の因子環とする．このとき，任意の環同型 $\Psi\colon S(M) \to S(N)$ に対し，ある $*$ 同型または共役線形 $*$ 同型 $\psi\colon M \to N$ と可逆元 $y \in S(N)$ が存在し，$\Psi(x) = y\psi(x)y^{-1}$, $x \in S(M)$ が成り立つ[19]．

系 1. M, N を無限次元の因子環とする．このとき，任意の束同型 $\Phi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ に対し，ある $*$ 同型または共役線形 $*$ 同型 $\psi\colon M \to N$ と可逆元 $y \in S(N)$ が存在し，$\Phi(p) = l(y\psi(p))$, $p \in \mathcal{P}(M)$ が成り立つ．逆に，任意の $*$ 同型または共役線形 $*$ 同型 $\psi\colon M \to N$ と可逆元 $y \in S(N)$ に対し，束同型 $\Phi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ が等式 $\Phi(p) = l(y\psi(p))$, $p \in \mathcal{P}(M)$ により定まる．

無限次元因子環に対し，系 1 が定理 8 の真の拡張となっていることは簡単に確かめられる．

定理 B の証明についてコメントしよう．特に，M と N が I_∞ 型または III 型の因子環である場合を考える．このとき，$S(M) = M$, $S(N) = N$ である．この場合の定理 B は，次の二つの定理の帰結である．

定理 9 (Kaplansky [8])**.** X, Y を半単純 Banach 環[20]，$\psi\colon X \to Y$ を環同型とする．このとき，Banach 環としての分解 $X \cong X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$, $Y \cong Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3$ と環同型 $\psi_i\colon X_i \to Y_i$, $i = 1, 2, 3$ であって，$\psi \cong \psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \psi_3$ かつ，X_1 と Y_1 は有限次元，ψ_2 は複素線形，ψ_3 は共役線形であるものが存在する[21]．

定理 10 (Okayasu [17], see also [6], [18, Section 4.1])**.** M, N を von Neumann 環，$\Psi\colon M \to N$ を複素線形な環同型とする．このとき，ある $*$ 同型 $\psi\colon M \to N$ と可逆元 $y \in N$ が存在し，$\Psi(x) = y\psi(x)y^{-1}$, $x \in M$ が成り立つ．

[18] 文字 s, c はそれぞれ sin, cos の頭文字である．2 つの射影を考える際はこれらの文字を用いることが好まれる．

[19] ψ は $S(M)$ から $S(N)$ への全単射に自然に拡張する．

[20] von Neumann 環はすべて半単純 Banach 環である．

[21] X と Y が無限次元因子環の場合に限ると，この定理の証明は次のように簡単にできる：環同型は中心を保つので，ψ は中心のあいだの環同型 $\psi_0\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に制限される．ψ_0 が複素線形でも共役線形でもない場合，ある有界閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ で，$\psi_0(F)$ が非有界となるものがとれる．スペクトルが F を含む作用素 $x \in X$ をとると，$\psi(x)$ のスペクトルは非有界集合 $\psi_0(F)$ を含むことになるが，これは不合理である．ゆえに ψ_0 は複素線形または共役線形となり，ψ も然り．

定理 A および B に関し，因子環と限らない一般の von Neumann 環を考える場合には，可測作用素のかわりに**局所可測**（locally measurable）作用素,「$*$ 同型または共役線形 $*$ 同型」のかわりに「$*$ 同型と共役線形 $*$ 同型の直和」（**実 $*$ 同型**）というものを考える必要がある．これらの正確な定義についてはここでは述べないため，原論文 [11] を参照されたい．定理 B は，一般の von Neumann 環の設定で，I_∞ 型および III 型の場合が [11] で，II_1 型の場合が [1] で与えられた．これらの証明においては，適当なクラスの多元環に対して環同型が自動的にある種の連続性や線形性を持つ場合があるという考え方を応用し，定理 10 を適用できる形に落とし込む，というような議論がなされる．II_∞ 型の場合については，位相構造をうまく使うことに難があり，未解決で残されていたが，[12] において証明が得られた．その方針は，II_1 型環の場合の結果を局所的に用いることで，具体的に（共役線形）$*$ 同型 ψ と非有界作用素 y を構成し，$y \in S(N)$ かつ y は可逆であることを示す，といったものである．以上の研究から，有限 I 型直和成分を持たない von Neumann 環に対し，射影束の束同型を作用素環の道具のみを用いて完全に記述できることがわかった[22]．

最後に，定理 B の ψ と y の一意性に関して述べる．$y \in S(N)$ の極分解 $y = u|y| = |y^*|u$ を考える．$|y^*| \in S(N)$ は正作用素[23]であり，y の可逆性から $u \in N$ はユニタリ作用素となる．ゆえに，組 (ψ, y) は $(u\psi(\cdot)u^*, |y^*|)$ ととりかえられることがわかる．そこで，定理 B において，y が正であるような (ψ, y) の取り方がどれだけあるか考えることが本質となる．これは次の命題により完全に理解できる．

命題 2 ([12])**.** M, N は因子環，$\psi_1, \psi_2 \colon M \to N$ はそれぞれ $*$ 同型または共役線形 $*$ 同型であるとする．また $y_1, y_2 \in S(N)$ は正かつ可逆な作用素であるとする．もし $y_1\psi_1(x)y_1^{-1} = y_2\psi_2(x)y_2^{-1}$ が任意の $x \in S(M)$ について成り立つならば，$\psi_1 = \psi_2$ であり，ある正の実数 $\lambda > 0$ に対し $y_2 = \lambda y_1$ が成り立つ．

参考文献

[1] S. Ayupov and K. Kudaybergenov, Ring isomorphisms of Murray–von Neumann algebras. *J. Funct. Anal.* **280** (2021), no. 5, Paper No. 108891, 28 pp.

[2] A. Böttcher and I.M. Spitkovsky, A gentle guide to the basics of two projections theory. *Linear Algebra Appl.* **432** (2010), no. 6, 1412–1459.

[3] H.A. Dye, On the geometry of projections in certain operator algebras. *Ann. of Math.* (2) **61** (1955), 73–89.

[4] J. Feldman, Isomorphisms of finite type II rings of operators. *Ann. of Math.* (2) **63** (1956), 565–571.

[5] P.A. Fillmore and W.E. Longstaff, On isomorphisms of lattices of closed subspaces. *Canad. J. Math.* **36** (1984), no. 5, 820–829.

[6] L.T. Gardner, On isomorphisms of C*-algebras. *Amer. J. Math.* **87** (1965), 384–396.

[7] R.V. Kadison and J.R. Ringrose, “Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. II”, Academic Press, Inc., Orlando, FL (1986).

[8] I. Kaplansky, Ring isomorphisms of Banach algebras. *Canad. J. Math.* **6** (1954), 374–381.

[9] E. Kopecká and A. Paszkiewicz, Strange products of projections. *Israel J. Math.* **219** (2017), no. 1, 271–286.

[22] なお，I_n 型 von Neumann 環については，局所可測作用素のなす環の環同型がその中心の環同型で記述できる．しかし，それは実線形と限らず，ワイルドなふるまいをする例が存在する．詳しくは [11, Proposition 4.2] の前後を参照されたい．

[23] $S(N)$ の作用素 a は，ある $b \in S(N)$ について $a = b^*b$ と表されるとき**正**であるという．実は，可測作用素を考える限りは，一般の非有界作用素を考える際に現れる面倒（たとえば対称作用素と自己共役作用素の違いなど）は生じないことが多い．

[10] V.I. Lomonosov and V.S. Shulman, Halmos problems and related results in the theory of invariant subspaces. *Uspekhi Mat. Nauk* **73** (2018), no. 1(439), 35–98; translation in *Russian Math. Surveys* **73** (2018), no. 1, 31–90.

[11] M. Mori, Lattice isomorphisms between projection lattices of von Neumann algebras. *Forum Math. Sigma* **8** (2020), Paper No. e49, 19 pp.

[12] M. Mori, Ring isomorphisms of type II_∞ locally measurable operator algebras. Preprint, arXiv:2206.00875.

[13] F.J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators. *Ann. of Math.* (2) **37** (1936), no. 1, 116–229.

[14] J. von Neumann, Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen. *J. Reine Angew. Math.* **161** (1929), 208–236.

[15] J. von Neumann, On rings of operators. III. *Ann. of Math.* (2) **41** (1940), 94–161.

[16] J. von Neumann, "Continuous geometry", Foreword by Israel Halperin, Princeton Mathematical Series, No. 25 Princeton University Press, Princeton, N.J. (1960).

[17] T. Okayasu, A structure theorem of automorphisms of von Neumann algebras. *Tohoku Math. J.* (2) **20** (1968), 199–206.

[18] S. Sakai, "C*-algebras and W*-algebras", Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 60. Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1971).

[19] I.E. Segal, A non-commutative extension of abstract integration. *Ann. of Math.* (2) **57** (1953), 401–457.

[20] 綿谷 安男，ヒルベルト空間の部分空間の配置と箙のヒルベルト表現．第 58 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集 (2019), 52–63.

バナッハ空間の非線形分類：Birkhoff-James 直交性の視点から

田中 亮太朗　(東京理科大学)

1. 導入

近年、バナッハ空間論の領域では、非線形構造や非線形写像に関する研究、すなわち、非線形解析が盛んに行われている。ここでいう非線形解析とは、

(a) 非線形同型写像で保存されるバナッハ空間の性質の解明

(b) 特定のバナッハ空間の構造を決定づける非線形構造の発見

(c) 非線形の同型に基づくバナッハ空間の分類理論の構築

などを目的とする研究のことであり、このような分野は、Benyamini-Lindenstrauss の本 [1] では、幾何学的非線形関数解析（Geometric Nonlinear Functional Analysis）と呼ばれている。当該分野の重要な研究成果としては、次が知られている。

定理. バナッハ空間の回帰性、ラドン＝ニコディム性、アスプルンド性はリプシッツ同相写像により保存される。つまり、バナッハ空間 X, Y の間にリプシッツ同相写像が存在するとき、X と Y のいずれか一方が回帰的である（または、ラドン＝ニコディム性を持つ、または、アスプルンドである）ならば、もう一方も同じ性質を持つ。

この結果は、冒頭の (a) に属するものである。バナッハ空間の回帰性、ラドン＝ニコディム性、アスプルンド性が、有界線形同型写像により保存されることはよく知られているが、この定理では、リプシッツ同相写像という非線形写像のもとで性質が保存されている。これは、バナッハ空間の回帰性、ラドン＝ニコディム性、アスプルンド性が、バナッハ空間の構造全体（つまり、線形構造＋距離構造）よりも、むしろ純粋な距離構造に強く依存していることを示唆している。
また、特定のバナッハ空間においては、非線形構造が全体の構造を決定づけていることがわかる。

定理. $1 < p < \infty$ のとき、ℓ_p はその一様構造により決定される。つまり、バナッハ空間 X と ℓ_p（$1 < p < \infty$）との間に一様同相写像があれば、X と ℓ_p とは同型である。

これは、(b) に属する結果である。この定理によれば、古典的数列空間 ℓ_p（$1 < p < \infty$）については、その一様構造を指定することによって、（等距離的にとまではいかないが）かなりの精度でバナッハ空間として識別できる。さらに、これにより、(c) に属する次の結果が得られる。

定理. バナッハ空間の族 $\{\ell_p : 1 < p < \infty\}$ は、一様構造により分類される。

これらの印象的な結果が示唆するのは、バナッハ空間の構造論においては、もはや線形性は必須のものではなくなってきているということである。このような背景のもと、本講演では、Birkhoff-James 直交性の視点から、バナッハ空間の新たな非線形分類理論の構築を目指す。

2. 準備

本講演における主な道具は、バナッハ空間における直交性の一つである、Birkhoff-James 直交性である。

定義 2.1. X を $\mathbb{K}$ 上のバナッハ空間とし、$x, y \in X$ とする。このとき、x が y に Birkhoff-James の意味で直交するとは、すべての $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ が成立することをいう。また、このことを $x \perp_{BJ} y$ により表す。

この概念は、Birkhoff [2] により導入・研究され、James [6, 7] により大きく発展させられた。定義からもわかるとおり、Birkhoff-James 直交性は、最短距離に基づく通常の直交性の特徴付けをもとに導入されており、バナッハ空間の幾何構造との関連が強いことで知られている。例えば、$\|x\| = 1$ のとき、$x \perp_{BJ} y$ は、集合 $\{x + \lambda y : \lambda \in \mathbb{K}\}$ が x において単位球に接することを意味し、ここから転じて、単位球の接汎関数を用いた Birkhoff-James 直交性の特徴付けも得られる。さらに、Birkhoff-James 直交性の左一意性（left uniqueness）や右一意性（right uniqueness）などの性質は、バナッハ空間の狭義凸性（strict convexity）や平滑性（smoothness）などと強く関連しており、このことからも、Birkhoff-James 直交性とバナッハ空間の幾何構造との関係性が窺える。より踏み込んだ言い方をすれば、Birkhoff-James 直交性の振る舞いを精査することで、バナッハ空間の構造を詳らかにできるのではないかと考えられる。

Birkhoff-James 直交性の基本的性質としては、次が挙げられる。

- $x \perp_{BJ} x$ ならば、$x = 0$ となる。この性質を非退化性（non-degeneracy）という。
- $x \perp_{BJ} y$ ならば、任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して、$\alpha x \perp_{BJ} \beta y$ となる。この性質を同次性（homogeneity）という。

一方で、Birkhoff-James 直交性は、一般には対称（つまり、$x \perp_{BJ} y$ ならば、$y \perp_{BJ} x$）でない。実際、次の定理が知られている。証明については、Day [4] または James [6] を参照されたい。

定理 2.2 (Day, 1947; James, 1947). X をバナッハ空間とし、$\dim X \geq 3$ とする。もし、X において Birkhoff-James 直交性が対称ならば、X はヒルベルト空間である。

この定理は実バナッハ空間の場合に示されたものであるが、[11] において、同じことが複素バナッハ空間に対しても成立することが指摘された。なお、2 次元の場合には定理 2.2 は成立しないことが知られている。

バナッハ空間の幾何構造に対する Birkhoff-James 直交性の影響力の強さを示す定理として、次が知られている。

定理 2.3 (Blanco-Turnšek, 2006). X, Y をバナッハ空間とし、$T : X \to Y$ を線形とする。もし $x \perp_{BJ} y$ が常に $Tx \perp_{BJ} Ty$ を導くならば、T は等距離写像の定数倍である。

実バナッハ空間に対しては、Koldobsky [8] が 1993 年に同じ定理を証明している。Blanco-Turnšek [3] の証明は、実バナッハ空間と複素バナッハの両方に対して機能する。また、実バナッハ空間においては、Blanco-Turnšek の定理の仮定を線形性から加法性に置き換えても同じ結論が成立することが、Wójcik [13] により示された。

特に、定理 2.3 から次が得られる。

系 2.4. X, Y をバナッハ空間とする。このとき、全単射の線形写像 $T : X \to Y$ で Birkhoff-James 直交性を保存するものが存在するならば、$X = Y$ である。ここで、$X = Y$ は、X と Y が等距離同型であることを意味する。

したがって、線形構造と Birkhoff-James 直交構造の組合せは、バナッハ空間の構造全体を決定付けるのに十分な情報を含んでいると言える。この事実を出発点として、本研究では、系 2.4 で T の線形性を取り除いた場合について考える。このため、次の概念を導入する。

定義 2.5. X, Y をバナッハ空間とし、$T : X \to Y$ とする。このとき、T が Birkhoff-James 直交性保存子であるとは、T が全単射であり、かつ、$x \perp_{BJ} y$ と $Tx \perp_{BJ} Ty$ とが同値となることをいう。また、X と Y が Birkhoff-James 同型であるとは、Birkhoff-James 直交性保存子 $T : X \to Y$ が存在することをいう。このことを $X \sim_{BJ} Y$ で表す。

本講演では、Birkhoff-James 同型について、[11, 12] で得られた研究成果を報告する。

3. 有限次元の場合

はじめに、有限次元バナッハ空間における Birkhoff-James 同型の影響を見てみよう。このためには、次の補題が有用である。

補題 3.1. X を n 次元バナッハ空間とする。このとき、X の基底 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ で、次の性質を満たすものが存在する。

(i) $\|x_1\| = \cdots = \|x_n\| = 1$ である。

(ii) すべての j に対して $x_j \perp_{BJ} y$ ならば、$y = 0$ である。

この定理は、ヒルベルト空間における完全正規直交系の存在に対応している。証明には、可分バナッハ空間の単位球面における平滑点（point of smoothness）の稠密性（Mazur の定理の帰結）を用いる。Mazur の定理の証明については、例えば、[10, Theorem 1.20] を参照されたい。

補題 3.1 を用いることで、有限次元が Birkhoff-James 同型により保存されることが示せる。

定理 3.2. X, Y をバナッハ空間とし、X は有限次元とする。このとき、$X \sim_{BJ} Y$ ならば、Y も有限次元であり、$\dim X = \dim Y$ が成立する。

この定理から、直ちに次がわかる。

系 3.3. X, Y をバナッハ空間とし、$X \sim_{BJ} Y$ とする。もし X と Y のいずれかが有限次元ならば、$X \cong Y$ である。ここで、$X \cong Y$ は、X と Y が同型であることを意味する。

したがって、有限次元の枠組みでは、Birkhoff-James 同型は通常の同型よりも強い概念であることがわかる。一方で、$X \cong Y$ であっても、$X \sim_{BJ} Y$ であるとは限らない。

例 3.4. ℓ_2^2 と ℓ_∞^2 を考える。ここで、ℓ_p^2 は p-ノルムを備えた $\mathbb{R}^2$ を表す。ℓ_2^2 はヒルベルト空間であるから、Birkhoff-James 直交性は ℓ_2^2 において対称である。一方で、$x = (1, 1), y = (0, 1)$ とすると、ℓ_∞ においては $x \perp_{BJ} y$ かつ $y \not\perp_{BJ} x$ となる。したがって、$\ell_2^2 \not\sim_{BJ} \ell_\infty^2$ である。

4. 平滑バナッハ空間の場合

ここでは、平滑バナッハ空間を取り扱う。バナッハ空間 X が平滑であるとは、各 $x(\neq 0)$ に対して、劣微分

$$\nu(x) = \{f \in B_{X^*} : f(x) = \|x\|\}$$

が一点集合であることをいう。ここで、B_{X^*} は X の双対空間 X^* の単位球を表す。X が平滑であるとき、一点集合 $\nu(x)$ は、その唯一の要素と同一視される。

平滑バナッハ空間の枠組みでは、次の定理が中心的な役割を果たす。

定理 4.1. X, Y を平滑バナッハ空間とし、$T : X \to Y$ を Birkhoff-James 直交性保存子とする。このとき、M が X の回帰的部分空間ならば、$T(M)$ は Y の閉部分空間である。

この定理により、非線形写像と線形の議論を関連付けることができる。特に、次がわかる。

系 4.2. X, Y を回帰的平滑バナッハ空間とし、$T : X \to Y$ を Birkhoff-James 直交性保存子とする。このとき、M が X の閉部分空間であることと、$T(M)$ が Y の閉部分空間であることとは同値である。

よって、回帰的平滑バナッハ空間においては、Birkhoff-James 直交性保存子は閉部分空間を保存することがわかる。この事実を活用するためには、閉部分空間の成す束の間の（順序）同型に関する次の定理を用いる。X をバナッハ空間とするとき、$\mathcal{C}(X)$ を X の閉部分空間の全体とする。

定理 4.3 (Mackey, 1942)**.** X, Y を実バナッハ空間とする。このとき、$\mathcal{C}(X)$ と $\mathcal{C}(Y)$ が同型ならば、$X \cong Y$ である。

定理 4.4 (Filmore-Longstaff, 1984)**.** X, Y を無限次元複素バナッハ空間とする。このとき、$\mathcal{C}(X)$ と $\mathcal{C}(Y)$ が同型ならば、$X \cong Y$ または $X \cong \overline{Y}$ である。ここで、$\overline{Y}$ は Y の複素共役空間である。

これらの結果については、Mackey [9, Theorem in p.246] と Fillmore-Longstaff [5, Theorem 1] を参照されたい。なお、複素バナッハ空間の場合の次元に関する仮定は、取り除くことができない。

さて、Birkhkoff-James 同型な回帰的平滑バナッハ空間 X, Y に対して、$T : X \to Y$ を Birkhoff-James 直交性保存子とすると、系 4.2 から

$$\rho(M) = T(M)$$

は束の同型写像 $\rho : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ を定めることがわかる。このことと定理 4.3 および定理 4.4 から、次の結果が得られる。

定理 4.5. X, Y を回帰的平滑実バナッハ空間とする。このとき、$X \sim_{BJ} Y$ ならば、$X \cong Y$ である。

定理 4.6. X, Y を回帰的平滑複素バナッハ空間とする。このとき、$X \sim_{BJ} Y$ ならば、$X \cong Y$ または $X \cong \overline{Y}$ である。

特に、これらの結果から、古典的数列空間の部分的な分類が得られる。ここで、複素 ℓ_p については、$\ell_p \sim_{BJ} \overline{\ell_p}$ が成立することに注意する。これは、$(a_n)_n \mapsto (\overline{a_n})_n$ が ℓ_p から $\overline{\ell_p}$ への等距離同型写像であることによる。

系 4.7. バナッハ空間の族 $\{\ell_p : 1 < p < \infty\}$ は、Birkhoff-James 直交構造により分類される。

古典的数列空間の完全な分類を得るには、平滑でない空間を含む理論を発展させる必要がある。

5. ヒルベルト空間の場合

3以上の次元を持つヒルベルト空間は、その Birkhoff-James 直交構造により決定されることが示せる。この事実の大部分は、定理 2.2 に拠る。実際、Birkhoff-James 直交性の対称性は Birkhoff-James 同型により保存されるため、バナッハ空間 X が3以上の次元を持つヒルベルト空間に Birkhoff-James 同型であれば、X において Birkhoff-James 直交性は対称であり、また、定理 3.2 から $\dim X \geq 3$ である。よって、X はヒルベルト空間であることがわかる。あとは、ヒルベルト空間において通常の直交性と Birkhoff-James 直交性とが同値であることに注意すれば、互いに Birkhoff-James 同型なヒルベルト空間が同じ次元を持つことが示せる。この議論により、次が得られる。

定理 5.1. H をヒルベルト空間とし、X をバナッハ空間とする。このとき、$\dim H \geq 3$ かつ $H \sim_{BJ} X$ ならば、$H = X$ である。

この定理の「$\dim X \geq 3$」という仮定は、取り除くことができない。実際、2次元の場合には、平滑ラドン平面を用いて反例が構成できる。ここで、2次元バナッハ空間 X がラドン平面であるとは、X において Birkhoff-James 直交性が対称であることを言う。

定理 5.2. X を平滑ラドン平面とする。このとき、$X \sim_{BJ} \ell_2^2$ である。ここで、ℓ_2^2 は2次元ユークリッド空間を表す。

したがって、すべての平滑ラドン平面は同一の Birkhoff-James 直交構造を持つ。このことからも、Birkhoff-James 同型によるバナッハ空間の分類が自明でないことがわかる。以下に、ヒルベルト空間でない平滑ラドン平面の例を具体例を挙げよう。

例 5.3. $1 < p < \infty$ および $p^{-1} + q^{-1} = 1$ のとき、$\mathbb{R}^2$ 上のノルムを

$$\|(a,b)\|_{p,q} = \begin{cases} (|a|^p + |b|^p)^{1/p} & (ab \geq 0) \\ (|a|^q + |b|^q)^{1/q} & (ab \leq 0) \end{cases}$$

により定めると、$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{p,q})$ は平滑ラドン平面となる。この空間は $\ell_{p,q}^2$ により表される。特に、$p \neq 2$ のとき、$\ell_{p,q}^2$ はヒルベルト空間とならないことから、前の定理により、2次元の場合に定理 5.1 は成立しないことがわかる。

6. 一般の場合に向けた準備

一般のバナッハ空間の Birkhoff-James 直交構造を解析するため、バナッハ空間の幾何的特性を反映する閉包空間（closure space）を導入しよう。

X をバナッハ空間とする。各 $x \in X$ に対して、$R_x = \{y \in X : x \perp_{BJ} y\}$ と定める。X 上の二項関係 $\precsim$ を、$R_x \subset R_y$ のとき $x \precsim y$ であるものとして定めれば、$\precsim$ は X 上の前順序となる。以下では、前順序を備えた集合 $(X, \precsim)$ を考える。X の部分集合 F が $(X, \precsim)$ 上のフィルターであるとは、それが以下の条件を満たすことをいう。

(i) F は空でない。

(ii) $x \in F$ かつ $x \precsim y$ ならば、$y \in F$ である。

(iii) F は下向き有向集合である。

また、フィルター F が極大であるとは、それが他のフィルターの真部分集合とならないことをいう。極大性の定義においては、便宜上、F が X の真部分集合であることは要求しないこととする。

$(X, \precsim)$ のフィルターについて、次がわかる。

補題 6.1. X をバナッハ空間とし、D_0 を X の空でない下向き有向集合とする。このとき、$(X, \precsim)$ 上の極大フィルター U で、$D_0 \subset U$ を満たすものが存在する。

この補題により、$(X, \precsim)$ 上には十分多くの極大フィルターが存在することが予想される。$(X, \precsim)$ 上の極大フィルターを用いて、X の幾何学的構造空間を導入しよう。

定義 6.2. X をバナッハ空間とし、$(X, \precsim)$ 上の極大フィルター U に対して、

$$I_U = \bigcap_{x \in U} R_x = \bigcap_{x \in U} \bigcup_{f \in \nu(x)} \ker f$$

と定める。このとき、X の幾何学的構造空間を

$$\mathfrak{S}(X) = \{I_U : U \text{ は } (X, \precsim) \text{ 上の極大フィルター}\}$$

により定める。

この幾何学的構造空間上で、閉包作用素を考える。

命題 6.3. X を自明でないバナッハ空間とし、各 $S \subset \mathfrak{S}(X)$ に対して

$$S^{=} = \left\{ I \in \mathfrak{S}(X) : \bigcap_{J \in S} J \subset I \right\}$$

と定める。このとき、次が成立する。

(i) $\emptyset^{=} = \emptyset$

(ii) $S \subset S^{=}$

(iii) $(S^{=})^{=} = S^{=}$

(iv) $S_1 \subset S_2$ のとき、$S_1^{=} \subset S_2^{=}$

言い換えれば、$S \mapsto S^{=}$ は $\emptyset^{=} = \emptyset$ を満たす閉包作用素である。

したがって、幾何学的構造空間は、この閉包作用素のもとで閉包空間となる。以下では、幾何学的構造空間を、命題 6.3 の閉包作用素を備えた閉包空間として扱う。そのとき、幾何学的構造空間が位相空間となるかどうかは、取り扱うバナッハ空間の性質に依存することに注意する。このことから、次の定義を与えておく。

定義 6.4. X をバナッハ空間とする。このとき、$\mathfrak{C}(X) = \{S \subset \mathfrak{S}(X) : S^{=} = S\}$ と定める。もし $\mathfrak{C}(X)$ が閉集合の公理を満たすならば、$\mathfrak{S}(X)$ は位相化可能（topologizable）といわれる。

幾何学的構造空間を Birkhoff-James 同型の研究に応用する前に、その基本的性質を挙げておこう。バナッハ空間 X の元 x に対して、

$$\alpha(x) = \{f \in B_{X^*} : |f(x)| = \|x\|\}$$

と定める。このとき、次がわかる。

補題 6.5. X をバナッハ空間とし、$x, y \in X$ とする。このとき、次は同値。

(i) $x \precsim y$

(ii) $\alpha(x) \subset \alpha(y)$

次に、$(X, \precsim)$ 上の極大フィルター U に対して、

$$\alpha(U) = \bigcap_{x \in U} \alpha(x)$$

と定める。この集合を用いることで、$\mathfrak{S}(X)$ の元を特徴づけることができる。

定理 6.6. X をバナッハ空間とし、U を $(X, \precsim)$ 上の極大フィルターとする。このとき、

$$I_U = \bigcup_{f \in \alpha(U)} \ker f$$

が成立する。

定理 6.7. X をバナッハ空間とし、U を $(X, \precsim)$ 上の極大フィルターとする。もし $f \in \alpha(U)$ ならば、

$$I_U = \bigcap \{R_x : x \in f^{-1}(1) \cap B_X\}$$

が成立する。

また、これより、次の定理が得られる。以下では、バナッハ空間 X の単位球面を S_X で表すこととする。

定理 6.8. X をバナッハ空間とし、U を $(X, \precsim)$ 上の極大フィルターとする。もし $x_0 \in S_X$ が $(x_0 + I_U) \cap B_X \subset S_X$ を満たすならば、

$$I_U = \bigcap \{R_x : x \in (x_0 + I_U) \cap B_X\}$$

が成立する。

この定理の応用として、幾何学的構造空間は T_1 様の性質を持つことが示せる。

定理 6.9. X をバナッハ空間とし、U, V を $(X, \precsim)$ 上の極大フィルターとする。このとき、$I_U \subset I_V$ ならば、$I_U = I_V$ となる。また、したがって、各 $I \in \mathfrak{S}(X)$ に対して、$\{I\} \in \mathfrak{C}(X)$ である。が成立する。

このことから、特に、次がわかる。

系 6.10. X をバナッハ空間とする。もし $\mathfrak{S}(X)$ が位相化可能ならば、$\mathfrak{S}(X)$ の有限集合は閉である。

この事実は、$\mathfrak{S}(X)$ の位相化可能性の判定に有用である。

さて、この節の最後に、バナッハ空間の単位球の面構造と幾何学的構造空間との間の関係について述べよう。X の単位球の面 F に対して、

$$\Phi^*(F) = \{f \in B_{X^*} : \text{各}\, x \in F\, \text{に対して、}\, f(x) = 1\}$$

と定める。

補題 6.11. X をバナッハ空間とし、F を B_X の極大面とする。また、

$$I_F = \bigcup \{\ker f : f \in \Phi^*(F)\}$$

とする。このとき、$(X, \precsim)$ 上の極大フィルター U が存在して、$\Phi^*(F) \subset \alpha(U)$ かつ $I_F = I_U$ となる。特に、$I_F \in \mathfrak{S}(X)$ である。

この補題を用いることで、幾何学的構造空間を、単位球の極大面から構成することが可能となる。バナッハ空間 X に対して、その単位球のすべての極大面から成る集合を $\mathcal{F}_{\max}(X)$ により表す。この集合において、$|c| = 1$ を満たすある $c \in \mathbb{K}$ に対して $F_1 = cF_2$ となるとき $F_1 \simeq F_2$ であると定めれば、$\simeq$ は $\mathcal{F}_{\max}(X)$ 上の同値関係となる。この同値関係による $\mathcal{F}_{\max}(X)$ の商集合を $\mathcal{F}_{\mathrm{ess}}(X)$ により表す。また、F の同値類を $C(F)$ と書く。

定理 6.12. X をバナッハ空間とし、各 $F \in \mathcal{F}_{\mathrm{ess}}(X)$ に対して $\kappa(C(F)) = I_F$ と定める。このとき、$\kappa : \mathcal{F}_{\mathrm{ess}}(X) \to \mathfrak{S}(X)$ は全単射である。特に、

$$\mathfrak{S}(X) = \{I_F : F\, \text{は}\, B_X\, \text{の極大面}\}$$

が成立する。

7. 一般の場合

バナッハ空間の幾何学的構造空間を、Birkhoff-James 同型の理論に応用しよう。まずは、幾何学的構造空間が Birkhoff-James 直交性保存子のもとで保存されることを見る。

定理 7.1. X, Y をバナッハ空間とし、$T : X \to Y$ を Birkhoff-James 直交性保存子とする。このとき、$(X, \precsim)$ 上の各極大フィルター U に対して $\Phi_T(I_U) = T(I_U)$ と定めれば、$\Phi_T : \mathfrak{S}(X) \to \mathfrak{S}(Y)$ は同相写像となる。

幾何学的構造空間の位相化可能性は、閉包空間の同相写像のもとで移りあうことも示せる。

定理 7.2. X, Y をバナッハ空間とし、$\mathfrak{S}(X)$ と $\mathfrak{S}(Y)$ とは閉包空間として同相とする。このとき、$\mathfrak{S}(X)$ が位相化可能ならば、$\mathfrak{S}(Y)$ も位相化可能である。さらに、$\mathfrak{S}(X)$ と $\mathfrak{S}(Y)$ とは位相空間として同相である。

さて、具体的なバナッハ空間について、幾何学的構造空間を調べてみよう。まずは、連続関数の成す空間を考える。

定理 7.3. K を局所コンパクトハウスドルフ空間とする。このとき、$\mathfrak{S}(C_0(K))$ は位相化可能であり、$\mathfrak{S}(C_0(K))$ と K とは同相である。

このことと定理 7.1 から、次がわかる。

系 7.4. K, Lを局所コンパクトハウスドルフ空間とする。このとき、$C_0(K) \sim_{BJ} C_0(L)$ならば、KとLとは同相である。特に、$C_0(K) \sim_{BJ} C_0(L)$ならば、$C_0(K) = C_0(L)$が成立する。

一方で、多くのバナッハ空間が、位相化不可能な幾何学的構造空間を持つことがわかる。

定理 7.5. Xを非自明な平滑バナッハ空間とする。このとき、

$$\mathfrak{S}(X) = \{\ker \nu(x) : x \in X \setminus \{0\}\}$$

である。さらに、Xが回帰的かつ$\dim X \geq 2$ならば、$\mathfrak{S}(X)$は位相化不可能である。

特に、$1 < p < \infty$のとき、ℓ_pは回帰的平滑バナッハ空間であるから、$\mathfrak{S}(\ell_p)$は位相化不可能である。この事実は、$p = 1$のときも成立する。

定理 7.6. $\mathfrak{S}(\ell_1)$は位相化不可能である。

したがって、定理 7.1と7.2の観点から、$1 \leq p < \infty$のとき、$c_0 \not\sim_{BJ} \ell_p \not\sim_{BJ} \ell_\infty$である。また、これより、Birkhoff-James同型のもとでの古典的数列空間の分類を完了させるには、$1 < p < \infty$のとき$\ell_1 \not\sim_{BJ} \ell_p$であることを示せばよい。これを示すために、次の概念を導入する。

定義 7.7. Xをバナッハ空間とする。このとき、$\mathfrak{S}(X)$がBirkhoff-James同次性を持つとは、各$I, J \in \mathfrak{S}(X)$に対して、X上のBirkhoff-James直交性保存子Tが存在して、$T(I) = J$となることをいう。

この概念は、Birkhoff-James同型のもとで保存される。

定理 7.8. X, Yをバナッハ空間とし、$X \sim_{BJ} Y$とする。このとき、$\mathfrak{S}(X)$がBirkhoff-James同次性を持つならば、$\mathfrak{S}(Y)$もBirkhoff-James同次性を持つ。

この道具を用いて、ℓ_pを分類しよう。

定理 7.9. $\mathfrak{S}(\ell_1)$はBirkhoff-James同次性を持つ。

定理 7.10. $1 < p < \infty$かつ$p \neq 2$のとき、$\mathfrak{S}(\ell_p)$はBirkhoff-James同次性を持たない。

したがって、定理 7.8より、$1 < p < \infty$かつ$p \neq 2$のとき、$\ell_1 \not\sim_{BJ} \ell_p$である。また、$\ell_1 \not\sim_{BJ} \ell_2$であることは、ヒルベルト空間に対する結果から従う。以上より、Birkhoff-James同型のもとで、古典的数列空間の完全な分類が得られる。

系 7.11. バナッハ空間の族$\{c_0\} \cup \{\ell_p : 1 \leq p \leq \infty\}$は、Birkhoff-James直交構造により分類される。

参考文献

[1] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis*, Vol. 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[2] G. Birkhoff, *Orthogonality in linear metric spaces*, Duke Math. J., **1** (1935), 169–172.

[3] A. Blanco and A. Turnšek, *On maps that preserve orthogonality in normed spaces*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **136** (2006), 709–716.

[4] M. M. Day, *Some characterizations of inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **62** (1947), 320–337.

[5] P. A. Fillmore and W. E. Longstaff, *On isomorphisms of lattices of closed subspaces*, Canad. J. Math., **36** (1984), 820–829.

[6] R. C. James, *Inner product in normed linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **53** (1947), 559–566.

[7] R. C. James, *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., *61* (1947), 265–292.

[8] A. Koldobsky, *Operators preserving orthogonality are isometries*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **123** (1993), 835–837.

[9] G. W. Mackey, *Isomorphisms of normed linear spaces*, Ann. of Math. (2), **43** (1942), 244–260.

[10] R. R. Phelps, *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.

[11] R. Tanaka, *Nonlinear equivalence of Banach spaces based on Birkhoff-James orthogonality*, J. Math. Anal. Appl., **505** (2022), 125444, 12 pp.

[12] R. Tanaka, *Nonlinear equivalence of Banach spaces based on Birkhoff-James orthogonality, II*, J. Math. Anal. Appl., **514** (2022), 126307, 19 pp.

[13] P. Wójcik, *Mappings preserving B-orthogonality*, Indag. Math. (N.S.), **30** (2019), 197–200.

Bourgain–Morrey 空間について*

野ヶ山　徹†

1　導入

Morrey 空間は，1938 年に C.B.Morrey [11] によって 2 階楕円型偏微分方程式の解の局所的な振る舞いを解析するためにその原型となるノルムが導入され，1969 年の Peetre による survey [13] にて現在の形に定式化された．その後，この空間自身の研究のみならず，関数空間として拡張されたり偏微分方程式へ応用されるなど，多くの研究がなされている．Morrey 空間については [15] の本に非常に多くの結果がまとまっている．本講演では，その一般化の 1 つである「Bourgain–Morrey 空間」について紹介する．

ここで，1 つ記号を用意しておく．$\nu \in \mathbb{Z}$，$m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ とする．立方体 $Q_{\nu m}$ が

$$Q_{\nu m} \equiv \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{m_j}{2^\nu}, \frac{m_j+1}{2^\nu}\right)$$

と書けているとき，$Q_{\nu m}$ を 2 進立方体という．2 進立方体全体の集合を $\mathcal{D}$ で表し，体積が 2^{-kn} であるような 2 進立方体全体の集合を $\mathcal{D}_k$ で表す．2 進立方体の重要な性質の 1 つとして，$Q, R \in \mathcal{D}$ としたとき，$Q \cap R$ は $\emptyset, Q, R$ のいずれかになることが挙げられる．

まず，Morrey 空間を定義する．パラメータ p, q は $0 < q \le p < \infty$ を満たすものとする．関数 $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対し，Morrey (quasi-) ノルムを

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} := \sup_{Q \in \mathcal{D}} |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_Q |f(y)|^q \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}$$

と定義する．このとき，Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ を $\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} < \infty$ となる関数 f 全体の集合とする．

---

*本講演は波多野修也氏（中央大学），澤野嘉宏氏（中央大学），Denny Ivanal Hakim 氏（バンドン工科大学）との共同研究 [5] に基づく．

†中央大学 理工学部 数学科，E-mail: toru.nogayama@gmail.com

本研究は JSPS 科研費 22J00614 の助成を受けたものである．

ここで，$q=p$ とすると，$\mathcal{M}_p^p(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n)$ となることに注意しておく．

Morrey 空間には以下のような性質がある．

(1) $1 \le q \le p < \infty$ のとき，Banach 空間となる．

(2) $0 < q_1 < q_2 \le p < \infty$ に対し

$$L^p(\mathbb{R}^n)=\mathcal{M}_p^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}_{q_2}^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}_{q_1}^p(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ．

(3) $0 < q < p < \infty$ に対し，$|x|^{-\frac{n}{p}} \in \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) \setminus L^p(\mathbb{R}^n)$ である．

(4) Morrey 空間は反射的でない．つまり，$0 < q < p < \infty$ に対し，

$$(\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n))^{**} \neq \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$$

である．

(5) $0 < q < p < \infty$ に対し，$L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ や $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ は $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ で稠密でない．

これらのことから，Morrey 空間は Lebesgue 空間の拡張であるにも関わらず，Lebesgue 空間とはかなり違った関数空間であることが分かる．一方で，2 つのパラメータ p, q はそれぞれある種の可積分性を表している．埋め込みの関係と定義から p は大域的な，q は局所的な可積分性をそれぞれ表していることが分かる．

次に，Morrey 空間の 1 つの一般化である Bourgain–Morrey 空間 $\mathcal{M}_{q,r}^p(\mathbb{R}^n)$ を定義する．この一般化のために Morrey ノルムのどの部分に注目するかというと，2 進立方体全体について上限を取る点である．この上限を

$$\sup_{Q\in\mathcal{D}} \quad \Longrightarrow \sup_{\nu\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{Z}^n}$$

と書き直してみる．すると，これは立方体の列 $\{Q_{\nu m}\}_{\nu\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{Z}^n}$ の ℓ^∞ ノルムを取っていると見なすこともできる．そこで，この部分を ℓ^r ノルムに一般化することを考える．

Definition 1.1. パラメータ p, q, r を $0 < q \le p < \infty$，$0 < r \le \infty$ を満たすものとする．このとき，関数 $f \in L_{\mathrm{loc}}^q(\mathbb{R}^n)$ に対し，(quasi-) ノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_{q,r}^p}$ を

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{q,r}^p} = \left\| \left\{ |Q_{\nu m}|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{Q_{\nu m}} |f(y)|^q \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q}} \right\}_{\nu\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{Z}^n} \right\|_{\ell^r}$$

と定義する．そして，$\|f\|_{\mathcal{M}_{q,r}^p} < \infty$ を満たす関数 f 全体の集合を $\mathcal{M}_{q,r}^p(\mathbb{R}^n)$ で表し，Bourgain–Morrey 空間と呼ぶ．

実はこの関数空間は 1990 年頃に Bourgain[2] により，その原型となるものが導入されている．このときは，Fourier 制限問題の考察のために用いられている．その後もこの関数空間が現れる研究はいくつかあり，その都度，少しずつ性質が明らかにされていった．しかし，関数空間自身についての研究はおそらくなく，制限問題や偏微分方程式，特に分散型方程式の解析へ応用するために用いられている．そこでこの関数空間自身の性質を調和解析，実解析的な側面から研究し，応用の更なる進展につなげようというのが，本研究に至った動機である．

結果について述べる前に，Bourgain–Morrey 空間が用いられている主な先行研究を紹介する．

(1) Stein–Thomas (Strichartz) 評価との関連

Bourgain [2] や Moyua, Vargas, Vega [12] らはこの関数空間を Stein–Thomas 評価の改良に用いている．特に，$\mathcal{M}^2_{p,4}$ ($p \geq 12/7$) を用いているのだが，これは L^2 空間よりも広い関数空間である．[1]（包含関係については 2.2 節を参照.）もう少し詳しく述べると，Moyua, Vargas, Vega は振動積分

$$\widehat{f\mathrm{d}\sigma}(\xi, \xi_3) = \int_{\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}} e^{-2\pi i (x \cdot \xi + \Phi(x)\xi_3)} f(x) \mathrm{d}x, \quad (\xi, \xi_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

についての評価を考察している．ここで相関数 Φ には楕円型条件を課している．つまり，

$$\det(\mathrm{Hess}(\Phi)) > 1,$$

を満たす $\Phi \in C^\infty(\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2\})$ を扱っている．このとき，彼らは次の評価を得た：可測集合 $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ に対して，

$$\|\widehat{\chi_\Omega \mathrm{d}\sigma}\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\chi_\Omega\|_{\mathcal{M}^2_{p,4}}, \quad p \geq 4(\sqrt{2} - 1) \quad (1.2)$$

が成り立つ．さらに，この p の条件が sharp であることも示している．(1.2) の評価はある可測集合の特性関数に対するものであるが，実は一般の関数に対してもこの評価を示すことできる（[12, Theorem 4.2]）．しかし，そのときは $p \geq 12/7$ という制限が付く．

(2) 分散型方程式との関連

さらに Moyua, Vargas, Vega は上で得た評価を応用して，次の分散型方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u = (-\Delta)^{\frac{a}{2}} u, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \quad a > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (1.3)$$

の解の初期値への a.e. 収束性についても考察している．特に，(1.3) の解は

$$e^{it(-\Delta)^{\frac{a}{2}}} u_0(x) = u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi - it|\xi|^a} \widehat{u_0}(\xi) \mathrm{d}\xi$$

[1]彼らは $\mathcal{M}^2_{p,4}$ の代わりに X_p という記号を使用している．

と書けるので，(1.1) の典型例になっていることが分かる．

Merle と Vega は [10] において，(1.2) の評価を少し改良して，$p \geq 12/7$ に対して

$$\|e^{it(-\Delta)}u_0\|_{L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)} \leq C_0 \min\{\|u_0\|_{\mathcal{M}^2_{p,4}}, \|\widehat{u_0}\|_{\mathcal{M}^2_{p,4}}\}$$

という評価を示した．この評価を使うと，2 次元の非線形 Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u = i(\Delta u \pm |u|^2 u), & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

に対して，初期値 u_0 が

$$\min\{\|u_0\|_{\mathcal{M}^2_{p,4}}, \|\widehat{u_0}\|_{\mathcal{M}^2_{p,4}}\} \leq \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

を満たすような時間大域解 $u \in L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)$ を構成することができる．さらに，大きい L^4 ノルムを持つ自由解の列に対するコンパクト性についても考察している．

Bégout と Vargas は [1] において，次の非線形 Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \gamma |u|^{\frac{4}{n}} u = 0, & (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.4}$$

を考察した．ここで，$\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は与えられたパラメータである．彼らは (1.4) の解の集中現象を解析するために，$\mathcal{M}^2_{p,\frac{2(n+2)}{n}}$ を用いて Strichartz 評価の改良を高次元へと拡張した．さらにこの評価を応用し，方程式 (1.4) の小さな初期値に対する時間大域解を構成した．

(3) 散乱理論との関連

Masaki は [7] において次の Schrödinger 方程式を扱っている：

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = -|u|^{2\alpha} u, & (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n, \\ u(t_0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.5}$$

ここで，$I \subset \mathbb{R}$ は区間であり，$t_0 \in I$ とし，$u(t,x) : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ が未知関数である．この論文では mass-subcritical の場合にあたる $\alpha < 2/d$ のときに (1.5) の解の時間大域的な振る舞いに付随した 2 つの最小化問題を導入した．一般論として，偏微分方程式を研究する際には Sobolev 空間 H^s や重み付き L^2 空間などの関数空間は非常に扱いやすい．しかし，この最小化問題を考えるときには，上述のような L^2 空間をベースにした関数空間では問題を上手く解析できないことが分かっている．そこでその代替として，局所的に L^2 の性質を持ちながらも，大域的には可積分性をずらすことができる Bourgain–Morrey 空間を利用している．他にも，Bourgain–Morrey 空間は KdV 方程式や Airy 方程式などの各偏微分方程式に対応する Strichartz 評価の改良にも用いられている（[8, 9]）．

2　Bourgain–Morrey 空間の性質

2.1　基本的な性質と例

まず，Bourgain–Morrey 空間同士の埋め込みについて考察する．$r_1 \le r_2$ のとき，数列空間の埋め込み $\ell^{r_1} \subseteq \ell^{r_2}$ が成り立つことに注意すると，次の埋め込みが成り立つ．

Lemma 2.1. $0 < q \le p < r_1 \le r_2 \le \infty$ とすると，$\mathcal{M}^p_{q,r_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^p_{q,r_2}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．

また，Morrey 空間と同様に，パラメータ q についても埋め込みが成り立つ．

Lemma 2.2. $0 < q_2 \le q_1 \le p < r \le \infty$ とすると，$\mathcal{M}^p_{q_1,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^p_{q_2,r}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．

Lemma 2.1 と Lemma 2.2 から，次のような関係になっていることが分かる（ここでは $\mathbb{R}^n$ を省略する）：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
L^p & = & \mathcal{M}^p_p & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_1} & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_2} & \hookrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \mathcal{M}^p_{p,r_2} & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_1,r_2} & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_2,r_2} & \hookrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \mathcal{M}^p_{p,r_1} & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_1,r_1} & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_2,r_1} & \hookrightarrow & \cdots
\end{array}
$$

この図から，Bourgain–Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ は Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ の部分集合となることは分かるのだが，どのくらい違いがあるのだろうか．

Example 2.3. $0 < q < p < r < \infty$ とする．このとき，$f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \notin \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ である．実際，$\nu \in \mathbb{Z}$ を固定し，計算すると，

$$
\begin{aligned}
\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |Q_{\nu m}|^{\frac{r}{p}-\frac{r}{q}} \left(\int_{Q_{\nu m}} |y|^{-\frac{qn}{p}} \mathrm{d}y \right)^{\frac{r}{q}} &= (2^{-\nu n})^{\frac{r}{p}-\frac{r}{q}} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \left(\int_{Q_{\nu m}} |y|^{-\frac{qn}{p}} \mathrm{d}y \right)^{\frac{r}{q}} \\
&\ge (2^{-\nu n})^{\frac{r}{p}-\frac{r}{q}} \left(\int_{Q_{\nu 0}} |y|^{-\frac{qn}{p}} \mathrm{d}y \right)^{\frac{r}{q}} \\
&\ge (2^{-\nu n})^{\frac{r}{p}-\frac{r}{q}} \left(\int_{Q_{\nu 0}} \left(2^{-\nu}\sqrt{n}\right)^{-\frac{qn}{p}} \mathrm{d}y \right)^{\frac{r}{q}} \\
&= (2^{-\nu n})^{\frac{r}{p}-\frac{r}{q}} \left(2^{-\nu}\sqrt{n}\right)^{-\frac{rn}{p}} \left(2^{-\nu}\right)^{\frac{rn}{q}} \sim 1
\end{aligned}
$$

となる．したがって，

$$
\|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \ge C \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} 1 \right)^{\frac{1}{r}} = \infty
$$

となってしまう．

冒頭で述べたように，$|x|^{-\frac{n}{p}} \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ であったので，Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ と Bourgain–Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ の間の包含は真の包含であることがわかる．

一方で，上の表からは Lebesgue 空間と Bourgain–Morrey 空間との間の包含関係はほとんど分からない．中には，Lebesgue 空間の方が広いものもあるように見える．しかし，次の定理が示すように，そのような空間は自明な元しか持たないことがわかる．

Theorem 2.4. $0 < q \le p < \infty$，$0 < r \le \infty$ とする．このとき，$\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n) \neq \{0\}$ であるための必要十分条件は $0 < q < p < r < \infty$ となるか，$0 < q \le p < r = \infty$ となることである．

では，Lebesgue 空間との包含関係はどのようになっているのか．これは次の補間不等式を経由することで考察できる．

2.2 補間不等式

Bégout, Vargas [1] や Masaki, Segata [8] らによって，以下のような補間不等式が示されている．

Theorem 2.5 ([1, Theorem 1.3], [8, Proposition A.1])**.** $0 < q < p < r < \infty$ とする．もし，パラメータ s が

$$\frac{1}{s}\left(1 - \frac{p}{r}\right) + \frac{1}{p} \times \frac{p}{r} < \frac{1}{q}$$

を満たしているとすると，

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \le C\|f\|_{\mathcal{M}^p_s}^{1-\frac{p}{r}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{r}} \tag{2.1}$$

が成り立つ．特に，$L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．

実はこの定理を Calderón–Lozanovskiǐ 積と呼ばれる補間空間の 1 つを用いることでもう少し一般化することができる．そこで，Calderón–Lozanovskiǐ 積を定義する．ここでは，Morrey 空間と Lebesgue 空間のそれのみを考えることにする．一般的な定義は，例えば [3] を参照せよ．

Definition 2.6. $0 \le \theta \le 1$, $1 \le s \le p < \infty$ とする．このとき，Calderón–Lozanovskiǐ 積 $(\mathcal{M}^p_s(\mathbb{R}^n))^{1-\theta}(L^p(\mathbb{R}^n))^\theta$ を，ある $f_0 \in \mathcal{M}^p_s(\mathbb{R}^n)$ と $f_1 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して，$|f| \le |f_0|^{1-\theta}|f_1|^\theta$ が成り立つような可測関数 f 全体の集合とする．このとき，$f \in (\mathcal{M}^p_s(\mathbb{R}^n))^{1-\theta}(L^p(\mathbb{R}^n))^\theta$ のノルムを

$$\|f\|_{(\mathcal{M}^p_s)^{1-\theta}(L^p)^\theta} = \inf\{\|f_0\|_{\mathcal{M}^p_s}{}^{1-\theta}\|f_1\|_{L^p}{}^\theta\}$$

で定義する．ここで，下限は $|f| \le |f_0|^{1-\theta}|f_1|^\theta$ を満たす全ての関数 $f_0 \in \mathcal{M}^p_s(\mathbb{R}^n)$ と $f_1 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に関して取ることとする．

この補間空間を使うと，Theorem 2.5 を次のような形に一般化できる．

Theorem 2.7. $0 < q < p < r < \infty$ とし，$\theta = \dfrac{p}{r}$ とおく．もし，パラメータ s が

$$\frac{1}{s}\left(1 - \frac{p}{r}\right) + \frac{1}{r} < \frac{1}{q}, \qquad p \geq s$$

を満たしているとすると，$(\mathcal{M}^p_s(\mathbb{R}^n))^{1-\theta}(L^p(\mathbb{R}^n))^\theta \hookrightarrow \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．特に，$L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ を得る．

つまり，この定理は同じ関数 f に対してだけでなく，f を適当に分割した場合にも，補間不等式 (2.1) が成り立つことを示している．

では，Lebesgue 空間と Bourgain–Morrey 空間の間の包含関係が分かったところで，そこにはどの程度違いがあるのだろうか．次の例から，その包含が真であることが分かる．

Example 2.8. $0 < q < p < r < \infty$, $ap < 1 < ar$ とする．このとき

$$g(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}(\log(|x|^{-1}))^{-a}\chi_{[0,1/2n]}(|x|) \in \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n) \setminus L^p(\mathbb{R}^n)$$

である．

3 Bourgain–Morrey 空間における積分作用素の有界性

新たに関数空間を定義した際に，いくつかの積分作用素の有界性を考察することは 1 つの重要な問題である．その中でも特に，Hardy–Littlewood の極大作用素の有界性はそのほかの作用素の有界性にも関わる重要な問題である．ここでは，Hardy–Littlewood の極大作用素について得られた結果を紹介する．

まず，Hardy–Littlewood の極大作用素とは，可測関数 f に対して，

$$Mf(x) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{\chi_Q(x)}{|Q|} \int_Q |f(y)| \mathrm{d}y$$

と定義される作用素 M のことである．ここで，$\mathcal{Q}$ は立方体全体の集合を表し，上限は立方体全体に関して取ることとする．

Bourgain–Morrey 空間における M の有界性は以下の通りである．

Theorem 3.1. $1 < q \leq p < r \leq \infty$ とする．このとき，*Hardy-Littlewood* の極大作用素 M は $\mathcal{M}^p_{q,r}$ 上で有界である．つまり，以下の不等式が成り立つ：ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \leq C\|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \quad (f \in \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)).$$

（証明の概略）．いくつかの reduction と notation を与える．

- $r=\infty$ のときは，Morrey 空間の場合（[4]）なので，$r<\infty$ のときを考えれば良い．
- M を適当に評価することで，M の代わりに $M_{\mathcal{D}}$ を考えれば良いことが分かる（[6]）．ここで $M_{\mathcal{D}}$ とは，

  $$M_{\mathcal{D}}f(x)=\sup_{Q\in\mathcal{D}}\frac{\chi_Q(x)}{|Q|}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y$$

  である．
- $f\in\mathcal{M}^p_{q,r}$ と $Q\in\mathcal{D}$ を固定し，$f_1\equiv f\chi_Q$, $f_2\equiv f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus Q}$ とおく．

まず，f_1 について考える．これは，Lebesgue 空間における $M_{\mathcal{D}}$ の有界性（[6]）を利用することで，

$$\left(\int_Q M_{\mathcal{D}}f_1(x)^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\int_Q|f(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

が分かる．したがって，

$$\|M_{\mathcal{D}}f_1\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}\le C\|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}$$

を得る．

次に，f_2 について考える．立方体 Q_k を $Q\subset Q_k$ であり，$|Q_k|=2^{kn}|Q|$ を満たすようなものとする.（Q_k を Q の k 世代上の親と呼ぶことにする.）

このとき，$x\in Q$ とすると，$x(\in Q)$ を含みつつ，$\mathbb{R}^n\setminus Q$ と交わるような 2 進立方体が $M_{\mathcal{D}}$ の上限を達成する候補であり，それらは Q の親のみが該当する．よって，

$$M_{\mathcal{D}}f_2(x)=\sup_{S\in\mathcal{D}}\frac{\chi_S(x)}{|S|}\int_S|f(y)|\chi_{\mathbb{R}^n\setminus Q}(y)\mathrm{d}y\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f(y)|\mathrm{d}y$$

と評価でき，

$$|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_Q M_{\mathcal{D}}f_2(x)^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\le|Q|^{\frac{1}{p}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}|f(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

となる．$|Q_k| = 2^{kn}|Q|$ であったから，

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{Q\in\mathcal{D}} |Q|^{\frac{r}{p}-\frac{r}{q}} \left(\int_Q M_{\mathcal{D}} f_2(x)^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\quad \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{kn}{p}} \left(\sum_{Q\in\mathcal{D}} |Q_k|^{\frac{r}{p}-\frac{r}{q}} \left(\int_{Q_k} |f(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{kn}{p}} \left(\sum_{R\in\mathcal{D}} \sum_{Q\in\mathcal{D}, Q_k=R} |Q_k|^{\frac{r}{p}-\frac{r}{q}} \left(\int_{Q_k} |f(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{q}}\right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}
$$

を得る．ここで最後の等号では,「2 進立方体全体について和を取っているもの」を,【「2 進立方体を 1 つ固定し（R とする），k 世代上の親が R であるような 2 進立方体について足し上げた」後，R について足し上げる】と考え，和を分解している．

$R \in \mathcal{D}$ と $k \in \mathbb{N}$ を固定すると，2 進立方体 Q の中で k 番目の親が R になるようなものは 2^{kn} 個存在する．よって,

$$
\sum_{Q\in\mathcal{D}, Q_k=R} |Q_k|^{\frac{r}{p}-\frac{r}{q}} \left(\int_{Q_k} |f(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{q}} = 2^{kn} |R|^{\frac{r}{p}-\frac{r}{q}} \left(\int_{R} |f(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{q}}
$$

となる．したがって,

$$
\begin{aligned}
\sum_{Q\in\mathcal{D}} |Q_k|^{\frac{r}{p}-\frac{r}{q}} \left(\int_{Q_k} |f(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{q}} &= 2^{kn} \sum_{R\in\mathcal{D}} |R|^{\frac{r}{p}-\frac{r}{q}} \left(\int_{R} |f(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{q}} \\
&= 2^{kn} (\|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}})^r
\end{aligned}
$$

が従う．$p < r$ であることに注意すると

$$
\|M_{\mathcal{D}} f_2\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{kn}{r}-\frac{kn}{p}} \|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}
$$

がわかる．したがって，$M_{\mathcal{D}}$ の劣線形性と $\mathcal{M}^p_{q,r}$ ノルムの三角不等式を使うことで

$$
\|M_{\mathcal{D}} f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \le C \|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}
$$

を得る．
∎

Remark 3.2. この結果を利用することで，分数べき積分作用素や特異積分作用素などの積分作用素の有界性，また，Fefferman–Stein のベクトル値不等式などの結果も得ることができるが，ここでは注意のみにして詳しい結果については省略する．

4 Morrey 空間との違い

この節では，Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ と Bourgain–Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)(r<\infty)$ の違いを稠密性と双対性の観点から紹介する．

4.1 稠密性

冒頭に述べた性質 (5) から，Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ において，$C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ や $L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ は稠密でないことが知られている．そのため，例えば特異積分作用素などの作用素を近似によって $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ 上に定義することができず，定義の仕方を工夫しなければならない．一方で，Bourgain–Morrey 空間では，これらの空間が稠密であることを示すことができる．

Proposition 4.1. $0<q<p<r<\infty$ とすると，$L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ や $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ は $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ において稠密である．

次に冒頭の性質 (2) から，$0<q_1<q_2\le p<\infty$ に対し

$$\mathcal{M}^p_{q_2}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{M}^p_{q_1}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つのだが，その隙間はどのくらいなのか．$L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ や $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ よりは広い関数空間なので，少しは良い結果があると嬉しい．しかし，これも稠密ではないことが知られている．

Theorem 4.2 ([14, Theorem 1])**.** $0<q<q_0\le p<\infty$ のとき，$\mathcal{M}^p_{q_0}(\mathbb{R}^n)$ は $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ において稠密ではない．

この結果を Lemma 2.2 の直後にある図で考えると，横の包含関係では稠密性が成り立たない，ということになる．では，縦の包含関係，つまり，Bourgain–Morrey 空間と Morrey 空間の包含関係ではどうだろうか．残念ながらこれも否定的な結果となる．

Proposition 4.3. $0<q<p<r<\infty$ とすると，$\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ は $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ において稠密ではない．

この結果は，関数 $|x|^{-\frac{n}{p}}\in\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)\setminus\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ を L^∞_c の元で近似できないことに由来する.（Proposition 4.1 から L^∞_c は $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ で稠密なことに注意する.）

4.2 反射性，回帰性

冒頭の性質 (4) から，Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ は反射的でないことが知られている．（例えば，[15, Section 9] を参照.）では，Bourgain–Morrey 空間ではどうなのだろうか．実はこれについてはパラメータを少し制限すれば，肯定的な結果が得られる．

Theorem 4.4. $1 \le q < p < r < \infty$ であるとき $\mathcal{M}^p_{q,r}$ は反射的である．つまり，

$$(\mathcal{M}^p_{q,r})^{**} = \mathcal{M}^p_{q,r}$$

が成り立つ．

もちろん，Morrey 空間と Bourgain–Morrey 空間の違いは $r = \infty$ であるか $r < \infty$ であるかのみである．つまり，上限 sup が関係しているかどうかである．これは L^∞ が反射的ではないことと類似している．

4.3 Proposition 4.1 と Theorem 4.4 の証明について

これらの主張を証明するために次の作用素を定義する．

Definition 4.5. $k \in \mathbb{Z}$ とし，$0 < q < p < r < \infty$ とする．非負値関数 $f \in \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ に対し，作用素 $E^{(q)}_k$ を

$$E^{(q)}_k(f) = \sum_{Q \in \mathcal{D}_k} m^{(q)}_Q(f)\chi_Q, \quad m^{(q)}_Q(f) = \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)^q \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}$$

と定義する．

この作用素について成り立つ以下の性質が key lemma となる．

Lemma 4.6. $0 < q < p < r < \infty$ のとき，非負値関数 $f \in \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$\left\| E^{(q)}_k(f) - f \right\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

が成り立つ．

Lemma 4.7. $0 < q < p < r < \infty$ とする．十分大きな $k \in \mathbb{N}$ と非負値関数 $f \in \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$\left\| E^{(q)}_k(f) - E^{(q)}_k(f)\chi_{B(R)} \right\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

が成り立つ．ここで，$B(R)$ は原点中心，半径 $R > 0$ の開球を表す．

Lemma 4.8. $k \in \mathbb{Z}$，$0 < q < p < r < \infty$ とする．このとき，$f \in \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ に対し，

$$\left\| E^{(q)}_k(|f|) \right\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}$$

が成り立つ．

これらを利用することで，どちらの主張も証明することができる．

（Proposition 4.1 の証明）． $E_k^{(q)}(f)\chi_{B(R)} \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ であるから，Lemma 4.6 と Lemma 4.7 から，

$$\begin{aligned}&\left\|f - E_k^{(q)}(f)\chi_{B(R)}\right\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}\\ &\quad\le \left\|f - E_k^{(q)}(f)\right\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} + \left\|E_k^{(q)}(f) - E_k^{(q)}(f)\chi_{B(R)}\right\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \to 0\end{aligned}$$

となるので，結論が従う．∎

Theorem 4.4 の証明は複雑で，もう少し準備が必要なので，ここでは注意を与えるだけにする．

Remark 4.9. Lemma 4.8 と L^q 空間の双対性を利用することで，$\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ の双対空間を特定することができる．実は [7] において，Bourgain–Morrey 空間の前双対について考察がなされている．ここで，Banach 空間 B_1, B_2 に対して，$(B_1)^* = B_2$ となるとき，B_1 を B_2 の前双対という．つまり，[7] において考察された前双対が，今回特定した $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ の双対空間と一致するため，反射性が示せる．

References

[1] P. Bégout and A. Vargas, *Mass concentration phenomena for the L^2-critical nonlinear Schrödinger equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 11, 5257–5282.

[2] J. Bourgain, *On the restriction and multiplier problems in* $\mathbb{R}^3$, Geometric aspects of functional analysis (1989–90), Lecture Notes in Math., vol. 1469, Springer, Berlin, 1991, 179–191.

[3] A.P. Calderón, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math. **24** (1964), 113–190. no. 1, 46–56.

[4] F. Chiarenza and M. Frasca, *Morrey spaces and Hardy–Littlewood maximal function*, Rend. Mat. Appl. (7) **7** (1987), no. 3-4, 273–279 (1988).

[5] N. Hatano, T. Nogayama, Y. Sawano, D. I. Hakim, *Bourgain-Morrey spaces and their applications to boundedness of operators*, submitted.

[6] A.K. Lerner and F. Nazarov, *Intuitive dyadic calculus: the basics*, Expo. Math. **37** (2019), no. 3, 225–265.

[7] S. Masaki, *Two minimization problems on non-scattering solutions to mass-subcritical nonlinear Schrödinger equation*, Preprint arXiv:1605.09234

[8] S. Masaki and J. Segata, *Existence of a minimal non-scattering solution to the mass-subcritical generalized Korteweg–de Vries equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **35** (2018), no. 2, 283–326.

[9] S. Masaki and J. Segata, *Refinement of Strichartz estimates for Airy equation in nondiagonal case and its application*, SIAM J. Math. Anal. **50** (2018), no. 3, 2839–2866.

[10] F. Merle and L. Vega, *Compactness at blow-up time for L^2 solutions of the critical nonlinear Schrödinger equation in 2D*, Internat. Math. Res. Notices (1998), no. 8, 399–425.

[11] C. B. Morrey Jr., *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), no. 1, 126–166.

[12] A. Moyua, A. Vargas and L. Vega, *Restriction theorems and maximal operators related to oscillatory integrals in* $\mathbb{R}^n$, Duke Math. J. **96** (1999), no. 3, 547–574.

[13] J. Peetre, *On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ spaces*, J. Funct. Anal. **4** (1969), 71–87.

[14] Y. Sawano, *A non-dense subspace in $\mathcal{M}^p_q$ with* $1 < q < p < \infty$, Trans. A. Razmadze Math. Inst., **171** (2017), no. 3, 379–380.

[15] Y. Sawano, G. Di Fazio and D.I. Hakim, *Morrey spaces. Introduction and Applications to Integral Operators and PDE's. Vol. I and II.* Monographs and Research Notes in Mathematics. Chapman & Hall CRC Press, Boca Raton, FL, 2020.

「Bourgain–Morrey 空間について」の正誤表

- 4.1 節　Theorem 4.2

  （誤）$0 < q < q_0 \le p < \infty$ のとき,

  （正）$1 < q < q_0 < p < \infty$ のとき,

- 4.2 節　Theorem 4.4

  （誤）$0 < q < p < r < \infty$ とすると

  （正）$1 < q < p < r < \infty$ とすると

- 4.3 節　Lemma 4.6

  （誤）$0 < q < p < r < \infty$ のとき,

  （正）$0 < q^* < q < p < r < \infty$ のとき,

- 4.3 節　Lemma 4.6

  （誤）$\|E_k^{(q)}(f) - f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}$

  （正）$\|E_k^{(q^*)}(f) - f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}$

- 4.3 節　Lemma 4.7

  （誤）$0 < q < p < r < \infty$ のとき,

  （正）$0 < q^* < q < p < r < \infty$ のとき,

- 4.3 節　Lemma 4.7

  （誤）$\|E_k^{(q)}(f) - E_k^{(q)}(f)\chi_{B(R)}\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}$

  （正）$\|E_k^{(q^*)}(f) - E_k^{(q^*)}(f)\chi_{B(R)}\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}$

- 4.3 節　Proposition 4.1 の証明

  （誤）$E_k^{(q)}(f)\chi_{B(R)} \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ であるから，Lemma 4.6 と Lemma 4.7 から,

$$\begin{aligned}&\left\|f - E_k^{(q)}(f)\chi_{B(R)}\right\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}\\ &\quad\le \left\|f - E_k^{(q)}(f)\right\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} + \left\|E_k^{(q)}(f) - E_k^{(q)}(f)\chi_{B(R)}\right\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \to 0\end{aligned}$$

  （正）$E_k^{(q^*)}(f)\chi_{B(R)} \in L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ であるから，Lemma 4.6 と Lemma 4.7 から,

$$\begin{aligned}&\left\|f - E_k^{(q^*)}(f)\chi_{B(R)}\right\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}\\ &\quad\le \left\|f - E_k^{(q^*)}(f)\right\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} + \left\|E_k^{(q^*)}(f) - E_k^{(q^*)}(f)\chi_{B(R)}\right\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \to 0\end{aligned}$$

Dunkl 調和多項式とその周辺

示野信一（関西学院大学）*

Euclid 空間上の Fourier 解析の変形である，有限鏡映群に付随した Dunkl 解析が研究されてきた ([3])．Dunkl 調和多項式に関連した我々の結果 [10, 11] について述べる．

1 Dunkl 作用素と Dunkl 調和多項式

d を正の整数，$\mathfrak{a} = \mathbb{R}^d$，$\langle \, , \, \rangle$ を $\mathfrak{a}$ 上の内積とする．$R \subset \mathfrak{a}$ を reduced な root 系とする（crystallographic であることを仮定しない）．r_α を $\alpha \in R$ に関する鏡映，G を R に対応する有限鏡映群（$r_\alpha \, (\alpha \in R)$ で生成される群）とする．$\kappa : R \to \mathbb{C}, \alpha \mapsto \kappa_\alpha$ を G-不変な関数とする（重複度関数）．正ルート系 $R_+ \subset R$ を固定する．

たとえば，$\{e_1, \ldots, e_d\}$ を $\mathfrak{a} = \mathbb{R}^d$ の標準基底とするとき，$R = \{\pm e_i\}_{1 \le i \le d}$ は $R_+ = \{e_i\}_{1 \le i \le d}$ を正ルート系に持つルート系で $G = \mathbb{Z}_2^d$，κ は $\kappa_{-e_i} = \kappa_{e_i}$ を満たす．

$\xi \in \mathfrak{a}$ に対して ∂_ξ を ξ 方向の方向微分とする．$\xi \in \mathfrak{a}$ に対して，**Dunkl 作用素** $\mathcal{D}_\xi = \mathcal{D}_\xi(\kappa)$ を次で定める．

$$\mathcal{D}_\xi f(x) = \partial_\xi f(x) + \sum_{\alpha \in R_+} \kappa_\alpha \langle \alpha, \xi \rangle \frac{f(x) - f(r_\alpha x)}{\langle \alpha, x \rangle}.$$

任意の $\xi, \eta \in \mathfrak{a}$ に対して，$[\mathcal{D}_\xi, \mathcal{D}_\eta] = 0$ が成り立つ．$\partial_i = \partial_{e_i}$, $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_{e_i}$, $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_1, \ldots, D_d)$ と書くと，$\mathcal{D}_\xi = \langle \xi, \mathcal{D} \rangle$ である．特に，$\mathcal{D}_\xi(0) = \partial_\xi$, $\mathcal{D}(0) = \nabla$ である．

たとえば，$G = \mathbb{Z}_2^d$ のときは，$\mathcal{D}_i$ は次のようになる．

$$\mathcal{D}_i f(x) = \partial_i f(x) + \kappa_{e_i} \frac{f(x) - f(x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_d)}{x_i}.$$

Dunkl Laplacian Δ_κ を $\Delta_\kappa = \sum_{i=1}^d \mathcal{D}_i^2$ により定めると，

$$\Delta_\kappa f(x) = \Delta f(x) + \sum_{\alpha \in R_+} \frac{2k_\alpha}{\langle \alpha, x \rangle} \partial_\alpha f(x) - \sum_{\alpha \in R_+} \kappa_\alpha \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{\langle \alpha, x \rangle^2} \{f(x) - f(r_\alpha x)\}$$

が成り立つ．Δ_0 は Euclid Laplacian $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_i^2$ である．

* 第 61 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム 於 日本大学

$\mathscr{P}$ を $\mathbb{R}^d$ 上の実数係数多項式全体の空間とし，非負整数 m に対して $\mathscr{P}_m$ を $\mathbb{R}^d$ 上の m 次斉次多項式全体の空間とする．$\mathscr{H}_\kappa := \{p \in \mathscr{P}\,;\, \Delta_\kappa p = 0\}$ の元を **Dunkl 調和多項式**と呼ぶ．$\mathscr{H}_0$ は古典的な調和多項式の空間であり，この場合に知られている多くの結果 ([7]) が Dunkl 調和多項式の場合に拡張されている．$\mathscr{H}_{\kappa,m} = \mathscr{H}_\kappa \cap \mathscr{P}_m$ とおくと，直和分解 $\mathscr{H}_\kappa = \sum_{m=0}^{\infty}{}^{\oplus} \mathscr{H}_{\kappa,m}$ が成り立つ．$p, q \in \mathscr{P}$ に対して $\langle p, q\rangle_\kappa = (p(\mathcal{D})q)(0)$ と定める (Dunkl 版の Fischer 内積)．$m \neq n$, $p \in \mathscr{P}_m$, $q \in \mathscr{P}_n$ ならば $\langle p, q\rangle_\kappa = 0$ である．

古典的な直交多項式の場合と同じく次の直交分解（正規分解）が成り立つ．

(1) $\mathscr{P}_m = \mathscr{H}_{\kappa,m} \oplus ||x||^2 \mathscr{H}_{\kappa,m-2} \oplus \cdots \oplus ||x||^{2l} \mathscr{H}_{\kappa,m-2l} \quad (l = [m/2],\ ||x||^2 = \langle x, x\rangle)$.

定数 λ_κ と重み関数 $h_\kappa(x)$ を次で定める．

$$\lambda_\kappa = \frac{d}{2} - 1 + \sum_{\alpha \in R_+} \kappa_\alpha, \qquad h_\kappa(x) = \prod_{\alpha \in R_+} |\langle \alpha, x\rangle|^{\kappa_\alpha}$$

$d\sigma$ を単位球面 $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ 上の表面測度とし，$\omega_{\kappa,d}$ を次で定める．

$$\omega_{\kappa,d} = \int_{S^{d-1}} h_\kappa^2(y)\,d\sigma(y).$$

$p \in \mathscr{H}_m$, $q \in \mathscr{H}_n$ に対して次が成り立つ．

(2) $$\frac{1}{\omega_{\kappa,d}} \int_{S^{d-1}} p(y)q(y)h_\kappa^2(y)\,d\sigma(y) = \frac{1}{2^m\,(\lambda_\kappa + 1)_m} \langle p, q\rangle_\kappa.$$

ここで $(a)_0 = 1$, $(a)_m = a(a+1)\cdots(a+m-1)$ $(m \in \mathbb{Z}_{>0})$.

2 Hobson の公式

定理 1 ([10])．$f_0(r)$ を $(0, \infty)$ 上の C^∞ 級関数，$f(x) = f_0(||x||)$，$p \in \mathscr{P}_m$ とするとき，次が成り立つ．

$$p(\mathcal{D})f(x) = \sum_{j=0}^{[m/2]} \frac{1}{2^j j!} \left[\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} \right)^{m-j} f_0 \right] (||x||) \cdot \Delta_\kappa^j\, p(x).$$

上の定理は，$\kappa = 0$ の場合は Hobson [5] によって与えられた．また，$G = \mathbb{Z}_2^d$ の場合は [13, Theorem 6] で与えられている．

例 (i) $p(x) = ||x||^2$ のとき，$m = 2$，$p(\mathcal{D}) = \Delta_\kappa$ であり，

$$\Delta_\kappa f(x) = f_0''(r) + \frac{2\lambda_\kappa + 1}{r} f_0'(r) \quad (r := ||x||).$$

(ii) $f(x)=e^{-||x||^2/2}$ とすると，

$$p(\mathcal{D})e^{-||x||^2/2}=\sum_{j=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^{m-j}}{2^j j!}e^{-||x||^2/2}\Delta_\kappa^j p(x).$$

定理 1 の証明について　野村 [8] は Laplacian と Euler 作用素の交換関係（下の (ii)）と数学的帰納法を用いて Hobson の公式（$\kappa=0$ の場合）の簡明な証明を与えた．([5], [12] の証明よりずっと簡明である．）一般の κ の場合にも [8] のアイディアが有効である．

$p\in\mathscr{P}$ に対して M_p を p を掛ける掛け算作用素とし，$E=\sum_{l=1}^d x_l\partial_l$ を Euler 作用素とする．$p\in\mathscr{P}_{m+1}$ に対して，$p=\frac{1}{m+1}Ep$ だから，$p(\mathcal{D})=\frac{1}{m+1}\sum_{l=1}^d\mathcal{D}_l\,(\partial_l p)(\mathcal{D})$. この右辺に $\partial_l p\in\mathscr{P}_m$ に対する Hobson の公式（帰納法の仮定）と次の交換関係を用いることにより，$p\in\mathscr{P}_{m+1}$ に対する Hobson の公式が従う．

(i) $[\Delta_\kappa, M_{x_i}]=2\mathcal{D}_i$. 一般に $[\Delta_\kappa^j, M_{x_i}]=2j\mathcal{D}_i\Delta_k^{j-1}$ $(j=1,2,\ldots)$.
(ii) $[\Delta_\kappa, E]=2\Delta_k$. 一般に $[\Delta_\kappa^j, E]=2j\Delta_k^j$ $(j=0,1,2,\ldots)$.

応用　Strasburger [12] は Hobson の公式（$\kappa=0$ の場合）に着目し，その別証明と応用を与えた．同様にして，一般の κ に対しても以下のような応用を与えることができる．

- 斉次多項式の調和多項式への射影 (Clebsch 射影）公式
- Bochner-Hecke 等式
- Pizzetti の公式
- Hermite 多項式の表示式

これらは Dunkl 解析における既知結果の別証明を与えるものである．

3　Pizzetti の公式の拡張

正規分解 (1) の具体形 ([3, Theorem 7.1.15]) と内積の関係式 (2) から次が導かれる．

定理 2 ([11])**.** $p\in\mathscr{P}_l$, $q\in\mathscr{H}_{\kappa,m}$ とする．$l-m=2n$ が非負の偶数のとき，

$$\frac{1}{\omega_{\kappa,d}}\int_{S^{d-1}}q(y)p(y)h_\kappa^2(y)d\sigma(y)=\frac{1}{2^{m+2n}n!\,(\lambda_\kappa+1)_{m+n}}q(\mathscr{D})\Delta_\kappa^n p.$$

Dunkl 版の Taylor の定理を用いて上の結果を重ね合せることにより次が得られる．

系 3. $q\in\mathscr{H}_{\kappa,m}$ とする．$0\in\mathbb{R}^d$ の近傍で定義された C^∞-級関数 f に対して，$r\to 0^+$ のとき次が成り立つ．

$$(3)\quad \frac{1}{\omega_{\kappa,d}}\int_{S^{d-1}}q(y)f(ry)h_\kappa^2(y)d\sigma(y)=\sum_{n=0}^{N}\frac{(q(\mathscr{D})\Delta_\kappa^n f)(0)}{n!\,(\lambda_\kappa+1)_{m+n}}\left(\frac{r}{2}\right)^{m+2n}+o(r^{m+2N}).$$

系 3 において $q=1$ とすると Dunkl 作用素に対する Pizzetti の公式が得られる（[6], [1] により既に証明されている）．さらに $\kappa=0$ とすると古典的な Pizzetti の公式 ([9]) が得られる．$\kappa=0$ の場合，定理 2 は [2] が，系 3 は [4] が与えている．また，定理 2 および系 3 は $q=1$ の場合（Pizzetti の公式）と Hobson の公式（定理 1) から導くこともできる．

応用　上の定理，系の応用として，Dunkl 解析において知られている Funk-Hecke 公式，調和多項式の再生核の表示式の別証明を与えることができる．

参考文献

[1] N. Ben Salem and K. Touahri, *Pizzetti series and polyharmonicity associated with the Dunkl Laplacian*, Mediterr. J. Math., **7** (2010), 455–470.

[2] A. Bezubik, A. Dąbrowska, and A. Strasburger, *On spherical expansions of zonal functions on Euclidean spheres*, Arch. Math., **90** (2008), 70–81.

[3] C.F. Dunkl and Y. Xu, *Orthogonal Polynomials of Several Variables* Second. Ed., Cambridge University Press, 2014.

[4] R. Estrada, *On Pizzetti's formula*, Asymptot. Anal., **111** (2019), 1–14.

[5] E.W. Hobson, *On a theorem in the differential calculus*, Messenger Math., **23** (1894), 115–119.

[6] H. Mejjaoli and K. Trimèche, *Mean value property associated with the Dunkl Laplacian*, Integral Transform. Spec. Funct., **12** (2001), 279–302.

[7] 野村 隆昭, 球面調和函数と群の表現, 日本評論社, 2018.

[8] T. Nomura, *A proof of Hobson's formula with the Euler operator*, Kyushu J. Math. **72** (2018), 423–427.

[9] P. Pizzetti, *Sulla media dei valori che una funzione dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera*, Rend. Reale Accad. Lincei, **18** (1909), 182–185.

[10] N. Shimeno, *Hobson's formula for Dunkl operators and its applications*, Integr. Transf. Spec. F., 2018.

[11] N. Shimeno and N. Tani, *An extension of Pizzetti's formula associated with the Dunkl operators*, A. Baklouti and H. Ishi Ed, *Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications*, Springer, 2021, 217–227.

[12] A. Strasburger, *A generalization of the Bochner identity*, Expo. Math. **11** (1993), 153–157.

[13] H. Volkmer, *Generalized Ellipsoidal and Sphero-Conal Harmonics*, SIGMA **2** (2006), 071, 16 pages.