

第60回実函数論・函数解析学
合同シンポジウム
講演集

期日：2021年9月6日(月) - 9月8日(水)

会場：オンライン (Zoom)

まえがき

本講演集は、

第60回実函数論・函数解析学合同シンポジウム
2021年9月6日(月)–9月8日(水) オンライン (Zoom)

において、講演者の方々にご寄稿いただきました予稿原稿(プレプリント)を集録したものです。

本シンポジウムの開催のために多くの方々にご協力をいただきましたが、関係者各位のご尽力によって、講演者の方々の素晴らしい論文を本講演集で発表することができました。各グループの責任者の方々、講演者の皆様、本シンポジウム参加者の皆様方に深く感謝いたします。

なお、本シンポジウムの講演会場の運営、および講演集の作成には、下記の科学研究費補助金の援助を受けています。

基盤研究(B)(代表 廣島 文生) 研究課題番号: 20H01808

「確率解析的手法による場の量子論の非摂動的スペクトル解析と
準古典近似」

挑戦的研究(萌芽)(代表 廣島 文生) 研究課題番号: 20K20886

「時間作用素の数理と実験的検証」

基盤研究(C)(代表 白川 健) 研究課題番号: 20K03672

「フィードバック型形態変動を伴う自由境界の安定構造に対する
予測・制御の研究」

廣島 文生 (九州大学大学院・数理学研究院)

菅野 聡子 (神戸高専)

白川 健 (千葉大学・教育学部)

第60回実函数論・函数解析学合同シンポジウム プログラム

期日: 2021年9月6日(月) – 9月8日(水)

会場: オンライン

9月6日(月)

13:30–14:30 大井 志穂 (新潟大学・理学部)

“ C^* 環に値をとるリプシッツ環の間の等距離写像”

16:00–17:00 小森 大地 (北海道大学・数理・データサイエンス教育研究センター)

“無限階擬微分作用素のチェックドルボーコホモロジーによる表示とその表象理論について”

9月7日(火)

9:30–10:30 平山 浩之 (宮崎大学・教育学部)

“微分型非線形シュレディンガー方程式系のほとんど最良なソボレフ空間における適切性について”

10:45–11:45 中村 昌平 (大阪大学大学院・理学研究科)

“熱方程式による関数不等式の改良について”

14:00–15:00 木村 泰紀 (東邦大学・理学部)

“完備測地距離空間上の均衡問題と解近似”

15:15–16:15 東條 広一 (理化学研究所)

“スタンダードコンパクト Clifford–Klein 形を持つ既約対称空間の分類”

16:30–17:30 落合 啓之 (九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所)

“3変数階数8のある線形偏微分方程式系とそれの特異制限の特殊関数”

9月8日(水)

9:30–10:30 国定 亮一

“実数直線 \mathbb{R} の Ellis コンパクト化と $L^\infty(\mathbb{R})$ の調和解析”

10:45–11:45 入山 聖史 (東京理科大学・理工学部)

“強非対称性公開鍵共有の数学的定式化とその応用”

12:00–13:00 武石 拓也 (京都工芸繊維大学・基盤科学系)

“KMS-states on Toeplitz algebras of graphs”

※. オンライン開催のため、今回は懇親会はなしとさせていただきます。

代表者: 廣島 文生 (九州大学大学院・数理学研究院)

菅野 聡子 (神戸高専)

白川 健 (千葉大学・教育学部)

目次

大井 志穂 (新潟大学・理学部) C^* 環に値をとるリプシッツ環の間の等距離写像	1
小森 大地 (北海道大学・数理・データサイエンス教育研究センター) 無限階擬微分作用素のチェックドルボーコホモロジーによる表示とその表象理論 について	15
平山 浩之 (宮崎大学・教育学部) 微分型非線形シュレディンガー方程式系のほとんど最良なソボレフ空間における 適切性について	34
中村 昌平 (大阪大学大学院・理学研究科) 熱方程式による関数不等式の改良について	54
木村 泰紀 (東邦大学・理学部) 完備測地距離空間上の均衡問題と解近似	66
東條 広一 (理化学研究所) スタンダードコンパクト Clifford–Klein 形を持つ既約対称空間の分類	78
落合 啓之 (九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所) 3変数階数8のある線形偏微分方程式系とそれの特異制限の特殊関数	95
国定 亮一 実数直線 \mathbb{R} の Ellis コンパクト化と $L^\infty(\mathbb{R})$ の調和解析	104
入山 聖史 (東京理科大学・理工学部) 強非対称性公開鍵共有の数学的定式化とその応用	116
武石 拓也 (京都工芸繊維大学・基盤科学系) KMS-states on Toeplitz algebras of graphs	133

C^* 環に値をとるリップシッツ環の間の等距離写像*

大井 志穂^{† ‡}

概要

本講演では, [9, 10, 19, 20] で得られた単位的 C^* 環に値をとるリップシッツ写像全体からなる Banach 環 (リップシッツ環と呼ぶ) の間の全射複素線形等距離写像についての一連の結果について述べる。

1 はじめに

二つのノルム空間 N_1, N_2 の間の写像 $U : N_1 \rightarrow N_2$ が, 任意の $a, b \in N_1$ に対して

$$\|U(a) - U(b)\| = \|a - b\|$$

をみたすとき, U を等距離写像という。等距離写像は歴史的にも非常に古くから研究されている写像の一つであるが, Banach 空間の間の等距離写像の研究の始まりは, 1932 年の S. Banach ([1]) による。ここで, $C_{\mathbb{R}}(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$ で, コンパクト距離空間 X で定義された実数値連続関数全体のなす線形空間に, 各 $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$ に対して, $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ でノルムを定義した実 Banach 空間を表す。

定理 1.1 ([1]). 二つのコンパクト距離空間 X_1 と X_2 が同相であるための必要十分条件は, $C_{\mathbb{R}}(X_1)$ と $C_{\mathbb{R}}(X_2)$ の間の全射等距離写像が存在することである。

もし Banach 空間論の始まりが, [1] だとすると, Banach 空間の間の等距離写像の研究は, Banach 空間が創始されたときから興味関心を持たれ, 研究され続けているテーマであると言える。また, Banach は定理 1.1 の Remark として, 任意の全射等距離写像が原点を保存するならば, 具体的に次のように表されることを述べた。

注意 1.2 ([1] Remark). 全射等距離写像 $U : C_{\mathbb{R}}(X_1) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(X_2)$ が $U(0) = 0$ をみたすならば, 同相写像 $\varphi : X_2 \rightarrow X_1$ と実数値連続関数 $\alpha : X_2 \rightarrow \{-1, 1\}$ があって,

$$U(f)(y) = \alpha(y)f(\varphi(y)), \quad f \in C_{\mathbb{R}}(X_1), \quad y \in X_2$$

が成り立つ。

*第 60 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集

[†]〒 950-2181 新潟市西区五十嵐 2 の町 8050 番地, 新潟大学理学部数学プログラム

[‡]shiho-oi@math.sc.niigata-u.ac.jp

このような形をした写像を、現在では荷重合成作用素と呼ぶことも多い。1937年に Stone はコンパクト距離空間 X_1, X_2 をコンパクトハウスドルフ空間 Y_1, Y_2 の場合に一般化して、 $C_{\mathbb{R}}(Y_i)$ の間の全射等距離写像の特徴づけを与えた。その後、コンパクトハウスドルフ空間 Y_i 上で定義された複素数値連続関数全体からなる複素 Banach 空間 $C(Y_i)$ の間の全射複素線形等距離写像が考えられ、その結果得られた次の定理 1.3 は非常に有名である。現在では、定理 1.3 を Banach-Stone の定理と呼ぶ。

定理 1.3. 写像 $U : C(Y_1) \rightarrow C(Y_2)$ が全射複素線形等距離写像であるための必要十分条件は、同相写像 $\varphi : Y_2 \rightarrow Y_1$ と $|\alpha(y)| = 1$ が任意の $y \in Y_2$ で成り立つ複素数値連続関数 $\alpha : Y_2 \rightarrow \mathbb{C}$ があって、

$$U(f)(y) = \alpha(y)f(\varphi(y)), \quad f \in C(Y_1), \quad y \in Y_2$$

が成り立つことである。

Banach-Stone の定理では、全射等距離写像が複素線形であることを仮定しているが、実は次の Mazur-Ulam の定理より、全射等距離写像は自然にアフィン写像となることが知られている。

定理 1.4 (Mazur-Ulam). 二つのノルム空間 N_1, N_2 の間の写像 $U : N_1 \rightarrow N_2$ が全射等距離写像であるならば、 $U - U(0)$ は実線形である。

Banach-Stone の定理から、二つの任意のコンパクトハウスドルフ空間 Y_1 と Y_2 に対して、二つの可換 Banach 環 $C(Y_1)$ と $C(Y_2)$ が与えられたとき、次が互いに同値であることを確かめることができる。

- $C(Y_1)$ と $C(Y_2)$ が等距離同型
- $C(Y_1)$ と $C(Y_2)$ が Banach 環として同型

よって、Banach-Stone の定理は、Banach 空間としての同型性が、Banach 環として同型であることを導くことを主張した定理であると読み替えられる。では、単位的可換 C^* 環以外の Banach 環についても、Banach-Stone 型の定理が成り立つのだろうか。本講演においては、Banach 環の間の全射複素線形等距離写像を調べることにより、この問いに関するいくつかの結果を得たので紹介する。これ以降、Banach 空間は、すべて複素 Banach 空間とし、さらに全射複素線形等距離写像のことを全射線形等距離写像と呼ぶことにする。

2 Banach 環の間の全射線形等距離写像

主定理の主張の背景について述べるために、ここでは Banach-Stone の定理の拡張として、次の二つの定理を紹介する。

2.1 関数環の間の全射線形等距離写像

コンパクトハウスドルフ空間 Y に対して、 Y で定義された複素数値連続関数からなる Banach 環 $C(Y)$ の閉部分環で、定数関数 1 を含み、 Y の各点を分離する Banach 環を関数環と呼ぶ。関数環 A に対して、 A の極大イデアル空間を Ω_A と書く。Banach-Stone の定理は、関数環に拡張されることが知られている。

定理 2.1 (Nagasawa [18], de Leeuw, Rudin and Wermer [4]). 関数環 A, B に対して、写像 $U : A \rightarrow B$ が全射線形等距離写像であるならば、任意の $y \in \Omega_B$ に対して $|\alpha(y)| = 1$ をみたす $\alpha \in B$ と、同相写像 $\varphi : \Omega_B \rightarrow \Omega_A$ が存在して、

$$Uf(y) = \alpha(y)f(\varphi(y))$$

が任意の $f \in A, y \in \Omega_B$ に対して成立する。

Banach 環とは限らない関数空間からなる Banach 空間 (ハーディ空間など) の間の等距離写像の研究も行われているが、本講演では Banach 環の間の全射複素線形等距離写像に焦点を絞って考える。Banach 空間の間の等距離写像の基本的な結果については、Fleming and Jamison ([7, 8]) などを参照されたい。

2.2 C^* 環の間の全射線形等距離写像

C^* 環 \mathcal{A} に対して、任意の $a, b \in \mathcal{A}$ に対して $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ と定義された演算 \circ を Jordan 積と呼ぶ。ここで、二つの C^* 環 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ に対して、複素線形全単射写像 $\tau : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ が条件 $\tau(a^*) = \tau(a)^*$, $\tau(ab + ba) = \tau(a)\tau(b) + \tau(b)\tau(a)$ を任意の $a, b \in \mathcal{A}_1$ で満たすとき、 τ を Jordan $*$ -同型写像と呼ぶ。Banach-Stone の定理の非可換化は Kadison によって、次のように与えられた。

定理 2.2 (Kadison [13]). $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ を単位的 C^* 環とする。写像 $U : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ が全射線形等距離写像であるとき、ユニタリー元 $u \in \mathcal{A}_2$ と、Jordan $*$ -同型写像 $\tau : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ が存在して、

$$U = u\tau$$

となる。またこの逆も成立する。

つまり、Kadison の定理によって、二つの C^* 環 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ の間の全射線形等距離写像は、Jordan 積の構造を保存することが示されたと言える。一般の単位的 C^* 環の間の等距離写像が、結局 Jordan $*$ -algebra としての代数構造を保存する。これ以降、Jordan 積をもつ Banach 環である単位的 JB $*$ -algebra の間の全射線形等距離写像が Jordan $*$ -同型であるという Kaplansky の予想を Wright と Youngson が解決するなど、Jordan 積の構造を持つ Banach 環の間の等距離写像の研究も発展を遂げている。

2.3 種々の Banach 環の間の全射線形等距離写像

さて実際、一様ノルムや作用素ノルムで定義された Banach 環に対しては、Banach-Stone 型の定理が成り立つ場合が多数報告されている。一方で、これは任意の Banach 環に対しては到底成り立たない。単位的半単純可換 Banach 環の範疇でも Banach-Stone 型の定理が成り立たない Banach 環が存在する。そこで、Banach 空間として同型であるならば、積もしくは Jordan 積の構造を保存する Banach 環とはどのようなものであるのか。次に、一様ノルムではないノルムで定義された可換 Banach 環について考えてみる。

Cambern は、一様ノルム以外のノルムで定義された関数空間からなる Banach 環に対して、その間の全射線形等距離写像を考えた。Cambern は、[6]において、 $[0, 1]$ 上の複素数値連続微分可能関数全体に $\|f\| = \max_{x \in [0, 1]} \{|f(x)| + |f'(x)|\}$ でノルムを定めた Banach 環 $C^1([0, 1])$ と、 $[0, 1]$ 上の複素数値絶対連続関数全体に $\|f\| = \max_{x \in [0, 1]} \{|f(x)|\} + \int_0^1 |f'(x)| dx$ でノルムを定めた Banach 環 $AC([0, 1])$ に対して、その間の全射線形等距離写像も荷重合成作用素となることを証明した。

Cambern の結果を皮切りに、数多くの一様ノルムとは異なるノルムで定義された可換 Banach 環に対して、その間の全射線形等距離写像を決定する問題が研究されるようになった。その中でも特筆すべきは、Rao と Roy の結果である。Rao と Roy は [21]において $[0, 1]$ 上の連続微分可能な関数全体に $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ でノルムを定めた $C^1([0, 1])$ と $[0, 1]$ 上の絶対連続関数全体に $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_1$ でノルムを定めた $AC([0, 1])$ に加えて、閉区間 $[0, 1]$ 上のリプシッツ関数全体に $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ をノルムとして定義したリプシッツ環 $Lip([0, 1])$ の間の全射線形等距離写像を決定した。ここでは、リプシッツ環をより一般的に定義する。

定義 2.3. コンパクト距離空間 X に対して、 $Lip(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ はリプシッツ関数}\}$ と定める。このとき、 $Lip(X)$ 上に

$$\|f\|_L = \sup_{x \in X} |f(x)| + L(f), \quad f \in Lip(X)$$

と定義すると、 $Lip(X)$ は単位的可換 Banach 環となる。

これ以降、特に注意をしない限りは、 $Lip(X)$ のノルムは $\|\cdot\|_L$ で定める。Rao と Roy の結果は次の通りである。

定理 2.4 ([21]). 写像 $U : Lip([0, 1]) \rightarrow Lip([0, 1])$ が全射線形等距離写像であるとき、 $|\alpha| = 1$ である $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して、

$$U(f)(x) = \alpha f(x), \quad f \in Lip([0, 1]), \quad x \in [0, 1]$$

か

$$U(f)(x) = \alpha f(1 - x) \quad f \in Lip([0, 1]), \quad x \in [0, 1]$$

が成り立つ。またこの逆も成立する。

同論文 [21] において、次の問いが提唱された。

問題 1 ([21]). X を任意のコンパクト距離空間とする。このとき, $\text{Lip}(X)$ の間の全射線形等距離写像は荷重合成作用素で表せるか。

この問いは, 長年の未解決問題となった。実際, [12, Example 8] において, 肯定的な解決を意味する証明が与えられたが, その証明には疑義が生じ, 筆者も現段階では, その証明が正しいかどうか分かっていない。実際, 任意のコンパクト距離空間 X に対して, $\text{Lip}(X)$ の双対空間の閉単位球の端点を決定できていないことがこの理由である。一方で, 我々はこの問題に改めて証明を与え, 本問題を肯定的に解決した。

定理 2.5 ([10]). 任意のコンパクト距離空間 $X_i (i = 1, 2)$ に対して, 写像 $U : \text{Lip}(X_1) \rightarrow \text{Lip}(X_2)$ が全射線形等距離写像であるとき, $|\alpha| = 1$ である $\alpha \in \mathbb{C}$ と全射等距離写像 $\varphi : X_2 \rightarrow X_1$ が存在して,

$$U(f)(x) = \alpha f(\varphi(x)), \quad f \in \text{Lip}(X_1), \quad x \in X_2$$

が成立する。また, この逆も成立する。

これらのことより, 一様ノルムとは限らないノルムで定義された可換 Banach 環に対しても, Banach 空間としての同型性から, Banach 環としての同型性が導ける場合が多くあることが分かる。一方で, 非可換 Banach 環の間の全射線形等距離写像の研究は, C^* 環や JB*-algebra などを除くと極めて乏しい。Banach 環の間の等距離写像が積や Jordan 積の構造を保存し, Banach 環としての同型性を導くかどうかを研究するためには, C^* 環とは異なるノルムで Banach 環をなす, 非可換 Banach 環の間の全射線形等距離写像も調べる必要がある。そこでまずは, 一様ノルムではないノルムで定義された関数空間からなる Banach 環と C^* 環を組み合わせてできる非可換 Banach 環の間の全射線形等距離写像の研究を行うことで, C^* 環とは限らない Banach 環の間の全射線形等距離写像の研究を進めたいというのが, 筆者の研究の動機である。より構造的な Banach 環を設定するため, 任意のコンパクト距離空間 X で定義できるリップシッツ環 $\text{Lip}(X)$ に着目した。ここで, ベクトル値リップシッツ環 $\text{Lip}(X, E)$ を次のように定義する。

定義 2.6. 任意のコンパクト距離空間 (X, d) と Banach 環 $(E, \|\cdot\|_E)$ に対して, 写像 $F : X \rightarrow E$ が

$$L(F) := \sup_{x \neq y \in X} \left\{ \frac{\|F(x) - F(y)\|_E}{d(x, y)} \right\} < \infty,$$

を満たすとき, F を (E 値) リップシッツ写像であると呼ぶ。このとき, X で定義された E 値リップシッツ写像全体を $\text{Lip}(X, E)$ と書く。任意の $F \in \text{Lip}(X, E)$ に対して, ノルムを

$$\|F\|_L = \sup_{x \in X} \|F(x)\|_E + L(F)$$

と定めると $\text{Lip}(X, E)$ は Banach 環となる。

これ以後は $\|F\|_\infty = \sup_{x \in X} \|F(x)\|_E$ と記述し, 特に注意をしない限り, $\text{Lip}(X, E)$ 上のノルムは $\|\cdot\|_L$ とする。もし E が単位的 Banach 環であるならば, $\text{Lip}(X, E)$ は単位的 Banach 環となり, E が可換 Banach 環であるならば $\text{Lip}(X, E)$ は可換 Banach 環となることに注意する。

問題 2. 任意のコンパクト距離空間 $X_i (i = 1, 2)$, 単位的 C^* 環 $\mathcal{A}_i (i = 1, 2)$ に対して, 全射線形等距離写像 $U : \text{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow \text{Lip}(X_2, \mathcal{A}_2)$ を考えるとき, U はどのような形をした写像か。また, U は *Jordan 積* の構造を保存するか。

3 エルミート作用素

3.1 エルミート作用素を用いた等距離写像の決定

与えられた二つの Banach 環の間の全射線形等距離写像を決定する方法としては, いろいろな方法が知られている。その中でも標準的な証明方法の一つに, 与えられた Banach 環の双対空間の閉単位球の端点を決定し, 全射線形等距離写像の双対写像が双対空間の閉単位球の端点を保存することを用いて全射線形等距離写像を決定する方法がある。この方法は, "extreme point method" とか "extreme point argument" などと呼ばれ, 等距離写像を決定するための主要な方法として有名である。

ところが, 双対空間の閉単位球の端点が複雑で, 調べるのが難しい Banach 環に対して, "extreme point method" を用いて等距離写像を決定することは難しい。実はリップシッツ環 $\text{Lip}(X)$ は, $\text{Lip}(X)$ の双対空間の閉単位球の端点が非常に複雑である。そこで, エルミート作用素を決定し, エルミート作用素を用いて等距離写像を決定する Lumer's method に着目する。

定義 3.1. E を Banach 空間とする。有界線形作用素 $T : E \rightarrow E$ がエルミート作用素であるとは, E の semi-inner product $[\cdot, \cdot]_E$ に対して

$$[Ta, a]_E \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in E$$

であるときをいう。また, これは semi-inner product の選び方に依存しない ([15])。

注意 3.2. Banach 空間 E 上の有界線形作用素 $T : E \rightarrow E$ に対して, T がエルミート作用素である $\iff \|I + itT\| = 1 + o(t) \iff \|\exp(itT)\| = 1 \ (\forall t \in \mathbb{R}) \iff \exp(itT)$ が等距離写像 ($\forall t \in \mathbb{R}$) であることが知られている ([7, Theorem 5.2.6])。

さらに Koehler and Rosenthal によって, 次が証明されている。

定理 3.3 ([14]). ノルム空間 N_1, N_2 に対して, $U : N_1 \rightarrow N_2$ が全射等距離写像であるとき, N_i 上の semi-inner product $[\cdot, \cdot]$ が存在して, 任意の $a, b \in N_1$ に対して $[Ua, Ub] = [a, b]$ が成立する。

よって, $U : N_1 \rightarrow N_2$ が全射線形等距離写像のとき, N_i 上の semi-inner product $[\cdot, \cdot]$ が存在して, 任意のエルミート作用素 $T : N_1 \rightarrow N_1$ に対して,

$$[UTU^{-1}a, a] = [UTU^{-1}a, UU^{-1}a] = [TU^{-1}a, U^{-1}a] \in \mathbb{R}$$

が任意の $a \in N_2$ に対して成立する。これより, $UTU^{-1} : N_2 \rightarrow N_2$ はエルミート作用素である。すると, N_1 上のエルミート作用素全体と N_2 上のエルミート作用素全体の間の対応が生まれる。従って, エルミート作用素を調べることにより, 等距離写像を決定することが

できる場合がある。この方法は、Lumer が [16] において用いた手法であることから、今ではこの方法を Lumer's method と呼ばれる。つまり、問題 2 を Lumer's method を用いて証明するためには、任意の単位的 C^* 環 \mathcal{A} に対して、まずは $\text{Lip}(X, \mathcal{A})$ の間のエルミート作用素を決定する必要がある。

3.2 リプシッツ空間上のエルミート作用素の決定

任意の単位的 C^* 環 \mathcal{A} に対して、 $\text{Lip}(X, \mathcal{A})$ の間のエルミート作用素の特徴づけについて説明する前に、Banach 空間に値をとる連続写像からなる Banach 空間の間のエルミート作用素に関する主要な結果を紹介する。実際、エルミート作用素を特徴づける問題は、等距離写像を決定するための道具としてではなく、エルミート作用素自体にも関心もたれ、古くから長い間研究されている対象である。その中で Fleming と Jamison は、Banach 空間 E に値をとる連続写像全体からなる Banach 空間 $C(X, E)$ の間のエルミート作用素について、以下の結果を与えた。

定理 3.4 ([5]). X をコンパクトハウスドルフ空間、 E を Banach 空間とする。写像 $T : C(X, E) \rightarrow C(X, E)$ がエルミート作用素であるとき、任意の $x \in X$ に対して、エルミート作用素 $\phi(x) : E \rightarrow E$ が存在して

$$TF(x) = \phi(x)F(x)$$

が任意の $F \in C(X, E)$ に対して成り立つ。また、逆も成立する。

これ以降、任意の Banach 空間 E に値をとる写像からなる Banach 空間上のエルミート作用素の研究が進んできた。特に、リプシッツ空間の間のエルミート作用素の決定は、任意のコンパクト距離空間 X と Banach 空間 E に対して、 X 上で定義される E 値リプシッツ写像の集合 $\text{Lip}(X, E)$ に対して、定義 2.3 や定義 2.6 で定義したノルムとは異なるノルム

$$\|F\|_M = \max\{\sup_{x \in X} \|F(x)\|_E, L(F)\}, \quad F \in \text{Lip}(X, E)$$

を導入したリプシッツ空間 $(\text{Lip}(X, E), \|\cdot\|_M)$ に対して初めに行われた。この $\|\cdot\|_M$ を $\text{Lip}(X, E)$ に定義すると、 $\text{Lip}(X, E)$ は Banach 空間となるが、Banach 環ではないことを注意したい。Botelho, Jamison, Jiménez-Vargas, Villegas-Vallecillos は、このリプシッツ空間 $(\text{Lip}(X, E), \|\cdot\|_M)$ の間のエルミート作用素を考え、次の結果を与えた。

定理 3.5 ([2]). X を 2-連結コンパクト距離空間¹、 E を Banach 空間とする。このとき写像 $T : (\text{Lip}(X, E), \|\cdot\|_M) \rightarrow (\text{Lip}(X, E), \|\cdot\|_M)$ がエルミート作用素であるとき、エルミート作用素 $\phi : E \rightarrow E$ が存在して

$$TF(x) = \phi(F(x))$$

が任意の $F \in \text{Lip}(X, E)$ に対して成り立つ。また、逆も成立する。

¹距離が 2 以上の二つの空でない互いに素な集合に分解できない距離空間のことを 2-連結距離空間と呼ぶ。

このとき、任意の Banach 空間 E に対して、 $(\text{Lip}(X, E), \|\cdot\|_L)$ 上のエルミート作用素は定理 3.5 と同様の形で記述できるのだろうか。ここで $(\text{Lip}(X, E), \|\cdot\|_M)$ のエルミート作用素が完全に決定できるならば、同様の議論をすることにより $(\text{Lip}(X, E), \|\cdot\|_L)$ の場合についても決定できるのではないかと思われるかもしれないが、実はそうではないことを強調したい。定義されたノルムの違いによって、この二つの空間の双対空間の閉単位球の端点が、かなり異なる。 $(\text{Lip}(X, E), \|\cdot\|_M)$ の双対空間の閉単位球の端点の集合には、比較的調べやすいものも含まれているが、 $(\text{Lip}(X, E), \|\cdot\|_L)$ の双対空間の閉単位球の端点は、すべて複雑である。このようなことが影響し、たとえ $(\text{Lip}(X, E), \|\cdot\|_M)$ のエルミート作用素が完全に決定できていたとしても、 $(\text{Lip}(X, E), \|\cdot\|_L)$ のエルミート作用素を決定する問題は別問題である。実際、Botelho, Jamison, Jiménez-Vargas, Villegas-Vallecillos は、上述の定理 3.5 を決定した後、[3]において、 $(\text{Lip}(X, E), \|\cdot\|_L)$ の間のエルミート作用素の研究を次のように開始した。

定理 3.6 ([3]). コンパクト距離空間 X に対して、写像 $T : \text{Lip}(X) \rightarrow \text{Lip}(X)$ がエルミート作用素であるための必要十分条件は $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して

$$Tf(x) = \lambda f(x), \quad f \in \text{Lip}(X), \quad x \in X$$

が成立することである。また、逆も成立する。

筆者は、任意の Banach 空間 E に対して、 $(\text{Lip}(X, E), \|\cdot\|_L)$ のエルミート作用素を決定する問題に取り組み、次の特徴づけを与えた。

定理 3.7 ([20]). X をコンパクト距離空間、 E を Banach 空間とする。写像 $T : \text{Lip}(X, E) \rightarrow \text{Lip}(X, E)$ がエルミート作用素であるための必要十分条件はエルミート作用素 $\phi : E \rightarrow E$ が存在して

$$TF(x) = \phi(F(x)), \quad F \in \text{Lip}(X, E), \quad x \in X$$

が成立することである。また、逆も成立する。

ここで、 E が関数環の場合は [9, Theorem 8] において、 E が有限次元 Banach 空間の場合は [19, Theorem 2.2] において、 $\text{Lip}(X, E)$ 上のエルミート作用素が決定されていた。本定理によって、任意の Banach 空間 E に対して、 $\text{Lip}(X, E)$ 上のエルミート作用素が決定し、ベクトル値リプシッツ空間上では最も一般的な設定で解決されたことになる。

4 可換 C^* 環に値をとるリプシッツ環上の全射線形等距離写像

コンパクトハウスドルフ空間 Y に対して、 $C(Y)$ 上のエルミート作用素は、乗算作用素であることが知られている。すなわち、 $T : C(Y) \rightarrow C(Y)$ がエルミート作用素であるとする。このとき実数値連続関数 $f \in C(Y)$ が存在して、 $T(g) = f \cdot g$ が任意の $g \in C(Y)$ に対して成立する。よって、定理 3.7 より次の命題 4.1 を得る。

命題 4.1. X をコンパクト距離空間, Y をコンパクトハウスドルフ空間とする。このとき, 写像 $T : \text{Lip}(X, C(Y)) \rightarrow \text{Lip}(X, C(Y))$ がエルミート作用素であるための必要十分条件は, 実数値連続関数 $f \in C(Y)$ が存在して,

$$TF(x) = (f \cdot F)(x)$$

が任意の $F \in \text{Lip}(X, C(Y))$ で成り立つ。

また, 単位的半単純可換 Banach 環であるリップシッツ環 $\text{Lip}(X, C(Y))$ は, $C(X \times Y)$ の稠密な部分空間と見ることができる。ここで, 全射線形等距離写像 $U : \text{Lip}(X_1, C(Y_1)) \rightarrow \text{Lip}(X_2, C(Y_2))$ が単位元を保存するとき (すなわち $U(1)=1$ であるとき), [11, Theorem] を用いると, 一様ノルム $\|F\|_\infty = \sup_{(x,y) \in X \times Y} |F(x,y)|$ に関しても等距離写像になることが分かる。[11, Theorem] において, 全射線形等距離写像が単位元を保存するという条件は, 本質的であることを注意する。このとき, 単位的全射線形等距離写像 $U : \text{Lip}(X_1, C(Y_1)) \rightarrow \text{Lip}(X_2, C(Y_2))$ は, $C(X_1 \times Y_1) \rightarrow C(X_2 \times Y_2)$ への全射線形等距離写像に一意に拡張されることが稠密性から保証され, Banach-Stone の定理より, $X_2 \times Y_2 \rightarrow X_1 \times Y_1$ への同相写像を用いた荷重合成作用素であることが直ちに導かれる。さらに, 命題 4.1 より Lumer's method を用いると, 全射線形等距離写像 U が, $C(Y_1) \rightarrow C(Y_2)$ の間の写像を誘導することが確かめられるので, 単位的全射線形等距離写像 $U : \text{Lip}(X_1, C(Y_1)) \rightarrow \text{Lip}(X_2, C(Y_2))$ に対して, 任意の $y \in Y_2$ に対して $\varphi(\cdot, y) : X_2 \rightarrow X_1$ が全射等距離写像となる連続写像 $\varphi : X_2 \times Y_2 \rightarrow X_1$ と, 同相写像 $\tau : Y_2 \rightarrow Y_1$ が存在して,

$$U(F)(x, y) = F(\varphi(x, y), \tau(y))$$

が任意の $F \in \text{Lip}(X_1, C(Y_1))$ に対して成立することが示される。

さて, $U(1) = 1$ であるという条件を外すことができるか?, すなわち, 任意の全射線形等距離写像に対して, 任意の $y \in X_2$ に対して $|U(1)(y)| = 1$ が成り立つかどうかという問題が自然に生じる。実は, この問題は非常に難しい。2 章において, 複素数値リップシッツ環 $\text{Lip}(X)$ の間の全射線形等距離写像を決定する問題 1 は, 長年の未解決問題であったと述べたが, この問題の解決の困難さは, 実は全射線形等距離写像に関する単位元 1 の行き先を決定するところにあった。[10] において, $\text{Lip}(X, C(Y))$ の双対空間の閉単位球の端点に関する必要な情報を Choquet 理論を用いて調べ, 次の補題 4.2 を得た。この補題 4.2 の証明には, 込み入った測度論的な議論が必要となるため, 詳細は省略するが, $\text{Lip}(X, C(Y))$ をあるコンパクトハウスドルフ空間上の連続関数全体の空間に等長に埋め込み, その空間での Choquet 境界を調べることにより, 示される。

補題 4.2 ([10]). 写像 $U : \text{Lip}(X_1, C(Y_1)) \rightarrow \text{Lip}(X_2, C(Y_2))$ を全射線形等距離写像とする。このとき任意の $y \in Y_2$ に対して, $|\alpha(y)| = 1$ となる $\alpha \in C(Y_2)$ が存在して, $U(1)(x) = \alpha$ が任意の $x \in X_2$ に対して成り立つ。

ここで, $\text{Lip}(X)$ の双対空間の閉単位球の端点を完全には決定できてはいないことを強調する。複素数値リップシッツ環 $\text{Lip}(X)$ であっても, 双対空間の閉単位球の端点はかなり複雑であり, 現段階では完全に決定できていない。よって, Banach 空間 E に対する $\text{Lip}(X, E)$ の双対空間の閉単位球の端点を決定することはかなり難しい。

補題 4.2 を上の議論と組み合わせることで、我々は可換 C^* 環に値をとるリップシッツ環 $\text{Lip}(X, C(Y))$ 上の全射線形等距離写像について、完全な特徴づけを与えた。

定理 4.3 ([10]). $i = 1, 2$ に対して、 X_i をコンパクト距離空間、 Y_i をコンパクトハウスドルフ空間とする。写像 $U : \text{Lip}(X_1, C(Y_1)) \rightarrow \text{Lip}(X_2, C(Y_2))$ が全射線形等距離写像であるとき、任意の $y \in Y_2$ に対して、 $|\alpha(y)| = 1$ となる $\alpha \in C(Y_2)$ 、任意の $y \in Y_2$ に対して $\varphi(\cdot, y) : X_2 \rightarrow X_1$ が全射等距離写像となる連続写像 $\varphi : X_2 \times Y_2 \rightarrow X_1$ 、同相写像 $\tau : Y_2 \rightarrow Y_1$ が存在して、

$$U(F)(x, y) = \alpha(y)F(\varphi(x, y), \tau(y))$$

が任意の $F \in \text{Lip}(X_1, C(Y_1))$ に対して成立する。また、逆も成立する。

注意 4.4. 定理 4.3 より、 $\text{Lip}(X_1, C(Y_1))$ と $\text{Lip}(X_2, C(Y_2))$ が等距離同型であるならば、 X_1 と X_2 が (等距離) 同相であることが分かる。これは、連続写像全体からなる Banach 環では成り立たない。すなわち、コンパクトハウスドルフ空間 $X_i, Y_i (i = 1, 2)$ に対して、 $C(X_1, C(Y_1))$ と $C(X_2, C(Y_2))$ が等距離同型であるとき、Banach-Stone の定理より、 $X_1 \times Y_1$ と $X_2 \times Y_2$ が同相であることは直ちに導かれるが、 X_1 と X_2 が同相であるとは限らない。

5 非可換 C^* 環に値をとるリップシッツ環上の全射線形等距離写像

定理 4.3 において考えたリップシッツ環 $\text{Lip}(X, C(Y))$ の $C(Y)$ を、より一般的な単位的 C^* 環 \mathcal{A} に拡張したい。単位的 C^* 環の間のエルミート作用素は、Sinclair[23] によって、次のように特徴づけられている。

定理 5.1 ([23]). 単位的 C^* 環 \mathcal{A} に対して、 \mathcal{A} 上の有界線形作用素 T がエルミート作用素であるための必要十分条件は、あるエルミート元 $h \in \mathcal{A}$ と \mathcal{A} 上の $*$ -derivation D が存在して、

$$T = M_h + iD$$

が成り立つことである。²

これを用いて、単位的 C^* 環 \mathcal{A} に対して、 $\text{Lip}(X, \mathcal{A})$ 上のエルミート作用素を特徴づけた。任意の $f \in \text{Lip}(X)$ と $a \in \mathcal{A}$ に対して、代数的テンソル積 $f \otimes a$ を

$$f \otimes a(x) = f(x)a, \quad x \in X$$

²任意の $h \in \mathcal{A}$ に対して、 $M_h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ は $M_h(a) = h \cdot a \quad \forall a \in \mathcal{A}$ で定義する。加えて本稿では、次を満たす有界線形作用素 $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ を \mathcal{A} 上の $*$ -derivation D と呼ぶ。

$$D(a^*) = D(a)^*, \quad D(ab) = D(a)b + aD(b) \quad (\forall a, b \in \mathcal{A})$$

(Sinclair[23] での定義とは異なることに注意。)

として定義する。また任意の $f \in \text{Lip}(X)$ と $a \in \mathcal{A}$ に対して、 $f \otimes a$ の線形結合全体を $\text{Lip}(X) \otimes \mathcal{A}$ で表す。このとき任意のエルミート元 $h \in \mathcal{A}$ に対して、乗算作用素 $M_{1 \otimes h} : \text{Lip}(X, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Lip}(X, \mathcal{A})$ を

$$M_{1 \otimes h}(F) = (1 \otimes h)F, \quad F \in \text{Lip}(X, \mathcal{A})$$

と定め、任意の $*$ -derivation $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ に対して、写像 $\widehat{D} : \text{Lip}(X, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Lip}(X, \mathcal{A})$ を

$$\widehat{D}(F)(x) = D(F(x)), \quad F \in \text{Lip}(X, \mathcal{A}), \quad x \in X$$

と定める。このとき、定理 3.7 と定理 5.1 から、次の命題 5.2 を直ちに得る。

命題 5.2. 写像 $T : \text{Lip}(X, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Lip}(X, \mathcal{A})$ に対して、 T がエルミート作用素であるための必要十分条件は、エルミート元 $h \in \mathcal{A}$ と \mathcal{A} 上の $*$ -derivation D が存在し

$$T = M_{1 \otimes h} + i\widehat{D}$$

を満たすことである。

エルミート作用素の特徴づけを得たので、Lumer' method を用いて全射線形等距離写像を決定したい。単位的 C^* 環 \mathcal{A} が単位的因子 C^* 環であるとは、 \mathcal{A} の center が自明なものに限るとき、すなわち $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \mathbb{C}1$ となるときをいう。このとき、次の命題 5.3 を得る。

命題 5.3. $i = 1, 2$ に対して、 \mathcal{A}_i を単位的因子 C^* 環とする。また、写像 $U : \text{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow \text{Lip}(X_2, \mathcal{A}_2)$ が単位的全射線形等距離写像であるとする。このとき、単位的全射線形等距離写像 $\psi : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ と全射等距離写像 $\varphi : X_2 \rightarrow X_1$ が存在して、

$$U(f \otimes a)(y) = \psi(f \otimes a(\varphi(y))), \quad f \in \text{Lip}(X_1) \quad a \in \mathcal{A}_1$$

が任意の $y \in X_2$ で成立する。

命題 5.3 の証明の方法を簡単に述べる。任意のエルミート元 $h \in \mathcal{A}_1$ に対して、 $1 \otimes h$ の乗算作用素 $M_{1 \otimes h}$ は $\text{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1)$ 上のエルミート作用素である。よって $UM_{1 \otimes h}U^{-1}$ は $\text{Lip}(X_2, \mathcal{A}_2)$ 上のエルミート作用素であるが、 $U(1) = 1$ より、 $UM_{1 \otimes h}U^{-1} = M_{1 \otimes h_0}$ となるエルミート元 $h_0 \in \mathcal{A}_2$ が見つかる。このことより、単位的全射線形等距離写像 $\psi : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ の存在が示される。さらに、命題 5.2 で与えたエルミート作用素の特徴づけを用いると、任意の $f \in \text{Lip}(X_1)$, $x \in X_2$ に対して、 $U(f \otimes 1)(x) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ であることを導くことができるので、 $U(f \otimes 1) = g \otimes 1$ となる $g \in \text{Lip}(X_2)$ が見つかり、全射等距離写像 $\varphi : X_2 \rightarrow X_1$ が導かれる。その後、幾つかの計算を経て証明が完了する。

5.1 単位的因子 C^* 環 \mathcal{A} が有限次元の場合

単位的 C^* 環 \mathcal{A} が有限次元の場合は、 $\text{Lip}(X) \otimes \mathcal{A} = \text{Lip}(X, \mathcal{A})$ が成立する。よって、 \mathcal{A} が有限次元の場合は、命題 5.3 は、写像 $U : \text{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow \text{Lip}(X_2, \mathcal{A}_2)$ が単位的全射線形等距離写像であるための必要十分条件を与えていることが分かる。特に n 次複素正方形行列全体 $M_n(\mathbb{C})$ に値をとるリプシッツ環 $\text{Lip}(X, M_n(\mathbb{C}))$ の間の単位的全射線形等距離写像は、Schur の定理 [22] を用いて、次のように特徴づけられることが分かる。

定理 5.4 ([19]). 写像 $U : \text{Lip}(X_1, M_n(\mathbb{C})) \rightarrow \text{Lip}(X_2, M_n(\mathbb{C}))$ が単位的全射線形等距離写像であるとき, ユニタリー行列 $V \in M_n(\mathbb{C})$ と全射等距離写像 $\varphi : X_2 \rightarrow X_1$ が存在して,

$$UF(x) = V(F(\varphi(x)))V^{-1}, \quad F \in \text{Lip}(X_1, M_n(\mathbb{C})), x \in X_2$$

または

$$UF(x) = V(F^t(\varphi(x)))V^{-1}, \quad F \in \text{Lip}(X_1, M_n(\mathbb{C})), x \in X_2$$

が成立する。但し, $F^t(y)$ は $F(y)$ の転置行列を表す。さらにこの逆も成立する。

5.2 単位的因子 C^* 環 \mathcal{A} が無限次元の場合

一般には, $\text{Lip}(X) \otimes \mathcal{A} \subset \text{Lip}(X, \mathcal{A})$ であるが, \mathcal{A} が無限次元の場合は, X が有限集合の場合を除き, 等号は成立しない。よって, 単位的全射線形等距離写像 $U : \text{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow \text{Lip}(X_2, \mathcal{A}_2)$ に対して $U(f \otimes a)(y) = \psi(f \otimes a(\varphi(y)))$ が任意の $f \in \text{Lip}(X_1)$ と $a \in \mathcal{A}_1$ で成り立つならば, 任意の $F \in \text{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1)$ に対しても $U(F)(y) = \psi(F(\varphi(y)))$ が成り立つかどうかを調べる必要がある。実際, 次の命題よりこれは肯定的に解決される。

命題 5.5 ([20]). $i = 1, 2$ に対して, X_i をコンパクト距離空間, E_i を Banach 空間とする。ここで, 全射線形等距離写像 $U : \text{Lip}(X_1, E_1) \rightarrow \text{Lip}(X_2, E_2)$ に対して, 全射線形等距離写像 $\psi : E_1 \rightarrow E_2$ と全射等距離写像 $\varphi : X_2 \rightarrow X_1$ が存在して $U(f \otimes e)(y) = \psi(f \otimes e(\varphi(y)))$ を任意の $f \in \text{Lip}(X_1)$ と $e \in E_1$ で満たすと仮定する。このとき,

$$UF(y) = \psi(F(\varphi(y)))$$

が任意の $F \in \text{Lip}(X_1, E_1)$ に対して成立する。

命題 5.5 の証明における重要なアイデアは, 全射線形等距離写像が T -集合を保存するという点である。 T -集合とは, Myers が [17] において, ノルム空間上に定義した集合であるが, 筆者は, これを半ノルム空間の場合にも拡張して次のように定義した。 $(V, \|\cdot\|_V)$ を半ノルム空間とする。半ノルム空間 V の部分集合 \mathbb{U} が V のノルム $\|\cdot\|_V$ に関する T -集合であるとは, 任意の有限個の要素 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{U}$ に対して $\|\sum_{i=1}^n a_i\|_V = \sum_{i=1}^n \|a_i\|_V$ を満たし, さらにこの性質に関して \mathbb{U} が極大であるときをいう。実際, 任意の Banach 空間 $(E, \|\cdot\|_E)$ に対して $\text{Lip}(X, E)$ の $\|\cdot\|_L$ に関する T -集合 \mathcal{S} は, $x \in X$ と E の T -集合 \mathbb{U} と $\text{Lip}(X, E)$ の $L(\cdot)$ に関する T -集合 \mathbb{T} が存在して, $\mathcal{S} = \{F \in \text{Lip}(X, E) \mid F(x) \in \mathbb{U}, \|F(x)\|_E = \|F\|_\infty, F \in \mathbb{T}\}$ であると特徴づけられることが分かった。この T -集合の特徴づけと, $\text{Lip}(X) \otimes E$ 上での全射線形等距離写像 U のふるまいに関する考察により, 命題 5.5 を証明することができる。

命題 5.3 と命題 5.5 より, 次の結果を得る。

定理 5.6 ([20]). $i = 1, 2$ に対して X_i をコンパクト距離空間, \mathcal{A}_i を単位的因子 C^* 環とする。写像 $U : (\text{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1), \|\cdot\|_L) \rightarrow (\text{Lip}(X_2, \mathcal{A}_2), \|\cdot\|_L)$ が単位的全射線形等距離写像であるとき, 単位的全射線形等距離写像 $\psi : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ と全射等距離写像 $\varphi : X_2 \rightarrow X_1$ が存在して

$$UF(y) = \psi(F(\varphi(y))), \quad F \in \text{Lip}(X_1, \mathcal{A}_1), y \in X_2.$$

が成立する。またこの逆も成り立つ。

問題 2 に対する解答として, この定理から, 単位的 C^* 環 \mathcal{A}_i が因子 C^* 環であるならば, 単位的全射線形等距離写像は Jordan 積を保存することが導かれる。

参考文献

- [1] S. Banach, *Theory of linear operations*, Translated from the French by F. Jellet. With comments by A. Pełczyński and Cz. Bessaga, North Holland Mathematica Library, **38**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987. x+237 pp.
- [2] F. Botelho, J. Jamison, A. Jiménez-Vargas and M. Villegas-Vallecillos, *Hermitian operators on Lipschitz function spaces*, *Studia Math.*, **215** (2013), 127–137.
- [3] F. Botelho, J. Jamison, A. Jiménez-Vargas and M. Villegas-Vallecillos, *Hermitian operators on Banach algebras of Lipschitz functions*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **142** (2014), 3469–3481.
- [4] K. de Leeuw, K. Rudin and J. Wermer, *The isometries of some function spaces*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **11** (1960), 694–698.
- [5] R. J. Fleming and J. E. Jamison, *Hermitian Operators on $C(X, E)$ and the Banach-Stone Theorem*, *Math. Z.*, **170** (1980), 77–84.
- [6] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, *Studia Math.* , **25** (1964/65), 217–225.
- [7] R. J. Fleming and J. E. Jamison, *Isometries on Banach spaces*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 129. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003. x+197 pp. ISBN: 1-58488-040-6.
- [8] R. J. Fleming and J. E. Jamison, *Isometries on Banach spaces. Vol. 2. Vector-valued function spaces*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 138. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008. x+234 pp. ISBN: 978-1-58488-386-9; 1-58488-386-3.
- [9] O. Hatori and S. Oi, *Hermitian operators on Banach algebras of vector-valued Lipschitz maps*, *J. Math. Anal. Appl.*, **452** (2017), no.1, 378–387.
- [10] O. Hatori and S. Oi, *Isometries on Banach algebras of vector-valued maps*, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **84** (2018), 151–183.
- [11] K. Jarosz, *Isometries in semisimple, commutative Banach algebras*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **94** (1985), 65–71.
- [12] K. Jarosz and V. D. Pathak, *Isometries between function spaces*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **305** (1988), 193–206.
- [13] R. V. Kadison, *Isometries of operator algebras*, *Ann. of Math.*, **54** (1951), 325–338.
- [14] D. Koehler and P. Rosenthal, *On isometries of normed linear spaces*, *Studia Math.*, **34** (1970), 213

- [15] G. Lumer, *Semi-inner product of bounded maps into Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 26–43.
- [16] G. Lumer, *On the isometries of reflexive Orlicz spaces*, Ann. Inst. Fourier, (1963), 99–109.
- [17] S. B. Myers, *Banach spaces of continuous functions*, Ann. of Math, **49** (1948), 132–140.
- [18] M. Nagasawa, *Isomorphisms between commutative Banach algebras with an application to rings of analytic functions*, Kōdai Math. Sem. Rep., **11** (1959), 182–188.
- [19] S. Oi, *Hermitian operators and isometries on algebras of matrix-valued Lipschitz maps*, Linear Multilinear Algebra, **68** (2020) no.6, 1096–1112.
- [20] S. Oi, *Isometries and hermitian operators on a Banach space of Lipschitz maps*, preprint, arXiv:2106.11546.
- [21] N. V. Rao and A. K. Roy, *Linear isometries of some function spaces*, Pacific J. Math. **38** (1971), 177–192.
- [22] I. Schur, *Einige Bemerkungen zur determinanten theorie*, S.B. Preuss Akad. Wiss. Berlin **25** (1925), 454—463.
- [23] A. M. Sinclair, *Homomorphisms and Derivations on Semisimple Banach Algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **24** (1970), 209–214.

無限階擬微分作用素のチェックドルボーコホモロジーによる表示とその表象理論について

小森 大地（北海道大学 数理・データサイエンス教育研究センター）

Abstract

本稿では、青木により展開された無限階擬微分作用素の表象理論の基礎理論における諸問題の一つである、無限階擬微分作用素の層とその表象が、層として同型となることについて述べる。筆者は、無限階擬微分作用素の層からその表象のクラスへの大域的な射を、チェックドルボーコホモロジーの理論を応用することによって実現した。また、青木により導入された射との局所的両立性を示すことにより、二つのクラスの同型性を与える。本稿は投稿予定の論文 [6] のサマリーである。

1 はじめに

無限階擬微分作用素の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ は佐藤・河合・柏原 [12] により 1960 年代に導入され、有限階の微分方程式の研究に対して画期的な成果を残した。また無限階擬微分作用素自体の研究も、1980 年代に片岡のラドン変換のアイデアをもとに、青木によって表象理論を展開することで行われてきた。青木は、佐藤らによる結果を無限階の微分方程式へ拡張することに成功したが、青木が展開した無限階擬微分作用素の表象理論は基礎理論において幾つかの問題点を残している。本稿では、その問題点の一つである、無限階擬微分作用素の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ とその表象の層 \mathcal{G}/\mathfrak{N} の、層としての同型性を、それらの間の層の射を実現することで示した。

青木による無限階擬微分作用素の表象理論では、無限階擬微分作用素の層からその表象の層へ、各点の茎の射を構成した。しかし、層の一般論として、各点の茎が同型であっても、大域的には層として同型にはならないことが知られている。例えば、定数層 \mathbb{Z}_M と向き付け層 $or_{X/M}$ は、局所的にはどちらも各点における茎が \mathbb{Z} であり同型となるが、層としては同型ではない。したがって、局所的な射だけでなく、大域的な層の射の存在を明確にすることが非常に重要である。この問題に対して、本稿では無限階擬微分作用素の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ に対してチェックドルボーコホモロジーの理論を応用することで解決する。

チェックドルボーコホモロジーは、本多・伊澤・諏訪 [4],[13] によって導入された理論であり、正則関数の層を、ドルボー複体と、チェックの被覆によって作られる複体の二重複体から得られるコホモロジーである。 C^∞ 級関数を係数とする微分形式の複体から作られるため、1 の分解を用いることができ、これにより正則関数に対しては行えない、関数の台に対する操作などが実現可能となった。

本稿の構成は以下の通りである。第2章では、本稿で用いる言葉の定義を与える。第3章では、無限階擬微分作用素の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ の代数的定義と、コホモロジーによる解釈を与え、そのコホモロジーを計算する方法として、チェックドルボーコホモロジーを紹介する。また、そのもっとも基本的かつ簡潔な例として、佐藤超関数のチェックドルボーコホモロジー表示を与える。チェックドルボーコホモロジーの理論を無限階擬微分作用素に応用することで得られる利点は、第5章における射の構成の際に活用される。第4章では青木により導入された古典的表象 $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ と、著者により新たに導入された C^∞ 級の表象 $\mathfrak{G}^\infty/\mathfrak{N}^\infty$ を紹介する。青木による理論では、第3章で紹介する無限階擬微分作用素のコホモロジー表示から古典的表象のクラス $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ への射を局所的に構成した。しかし、彼の構成した射を自然に大域的な射に拡張することは困難なため、チェックドルボーコホモロジーを用いた計算を経由して表象のクラスに射を構成する。チェックドルボーコホモロジーの理論はドルボー分解を用いるため C^∞ 級関数の理論を基礎としている一方で、古典的表象の理論は正則関数を基礎としているため、直接射を構成することは困難である。そこで、新たに C^∞ 級の表象を導入し、それが青木に導入された古典的表象のクラスと同型であることを示す。第5章では、第3章と第4章の結果を元に、チェックドルボーコホモロジーによる表示から、 C^∞ 級の表象のクラスへ、大域的な射を具体的に構成する。また、この結果から無限階擬微分作用素の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ とその表象のクラス $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ が層として同型であることがわかる。

2 準備

$\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ をそれぞれ整数、実数、複素数全体のなす集合とする。また、 M を n 次元の実多様体、 X を M の複素化とし、 $X \times X$ から X への第一射影、第二射影をそれぞれ p_1, p_2 とおく。

∂_z と $\bar{\partial}_z$ を X 上の z に関するドルボー作用素とする。すなわち、 ω を C^∞ 級関数を係数に持つ X 上の (p, q) 形式とすれば、局所座標系 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ に対して ω とドルボー作用素は具体的に以下のように書ける。

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{|I|=p, |J|=q} f_{IJ}(z) dz^I \wedge d\bar{z}^J, \\ \partial_z \omega &= \sum_{i=1}^n \sum_{|I|=p, |J|=q} \frac{\partial}{\partial z_i} f_{IJ}(z) dz_i \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J, \\ \bar{\partial}_z \omega &= \sum_{i=1}^n \sum_{|I|=p, |J|=q} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} f_{IJ}(z) d\bar{z}_i \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J.\end{aligned}$$

ただし $f_{IJ}(z)$ は X 上の C^∞ 級関数である。

本稿で用いる層の定義を以下で与える。ただし $\tau: TX \rightarrow X$, $\pi: T^*X \rightarrow X$ をそれぞれ接束と余接束から X への自然な射影とする。

1. $\mathcal{O}_X^{(p)}$ を X 上の正則 p 形式のなす層とする。特に、 $\mathcal{O}_X^{(0)} = \mathcal{O}_X$ は X 上の正則関数のなす層である。

2. $\mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)} = \mathcal{O}_{X \times X} \otimes_{p_2^{-1}\mathcal{O}_X} p_2^{-1}\mathcal{O}_X^{(n)}$ と定義する。

3. $C_X^{\infty,(p,q)}$ を C^∞ 級関数に係数を持つ X 上の (p, q) 形式のなす層とする。

4. $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ を T^*X 上の無限階擬微分作用素の層とする。

$(z; \zeta)$ を T^*X の局所座標とする。この時、第一射影 $p_1 : X \times X \rightarrow X$ により誘導される射

$$(z, z; \zeta, -\zeta) \mapsto (z; \zeta), \quad (2.1)$$

によって $T_\Delta^*(X \times X)$ と T^*X を同一視する。ただし、 Δ とは $X \times X$ の対角集合

$$\Delta = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid x_1 = x_2\}$$

のことである。また、零切断 T_X^*X に対して $\mathring{T}^*X = T^*X \setminus T_X^*X$ とする。

定義 2.1. V を \mathring{T}^*X の部分集合とする。 V は以下の条件を満たす時に \mathring{T}^*X の錐状集合と呼ばれる。

$(z; \zeta) \in V$ ならば、任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して $(z; t\zeta) \in V$ を満たす。

注意 2.2. V を T^*X の部分集合とする。任意の $z \in \pi(V)$ に対して集合 $\pi^{-1}(z) \cap V$ が凸であるときに、 V を凸であるという。同様に、任意の $z \in \pi(V)$ に対して集合 $\pi^{-1}(z) \cap V$ が錐状、または固有であるときに、 V を錐状、または固有であるという。ここで、錐が固有であるとは、その閉包が任意の直線を含まないことをいう。

V と V' を T^*X の部分集合とする。通常の意味で V' が V の相対コンパクト集合である時に $V' \Subset V$ と書く。

定義 2.3. V を \mathring{T}^*X における開錐とする。 $W \subset V$ が無限遠で V 型の無限小楔であるとは、任意の $K \Subset V$ に対してある $\delta > 0$ が存在して以下を満たすことをいう。

$$K_\delta = \{(z; t\zeta) \mid (z; \zeta) \in K, t > \delta\} \subset W.$$

定義 2.4. V と V' を \mathring{T}^*X の錐とし、 $V' \subset V$ を満たすとする。 V' が V の相対コンパクト錐であるとは、 V のある相対コンパクト集合 K が存在して

$$V' = \{(z; t\zeta) \mid t \in \mathbb{R}_+, (z; \zeta) \in K\}$$

と記述できることをいう。違いを明記するために、相対コンパクト錐を $V' \Subset_{\text{cone}} V$ と書く。

3 無限階擬微分作用素の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ とそのチェックドルボーコホモロジーによる表示

この章では、無限階擬微分作用素の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ の代数的定義から紹介し、チェックドルボーコホモロジーの理論を応用することで具体的な計算を見る。チェックドルボーコホモロジーによる表示は、第5章の射の構成の際に活用される。

X を複素 n 次元の複素多様体とする。 T^*X 上の無限階擬微分作用素の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ は以下のように定義される。

$$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} = H^n(\mu_\Delta(\mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)})). \quad (3.1)$$

ただし、 $\mu_\Delta(\mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)})$ は対角線集合 Δ に沿った $\mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)}$ の超局所化のことである。

ここで T^*X の部分集合 V に対して、 V° を V の極集合とする。すなわち、 V° は以下のような集合である。

$$V^\circ = \{y \in TX \mid \text{任意の } x \in \pi^{-1} \circ \tau(y) \cap V \text{ に対して } \tau(y) \in \pi(V) \text{ かつ } \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \geq 0\}.$$

無限階擬微分作用素の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ の定義は代数的であり扱いが難しいが、柏原-Schapira[9] の fiber 公式により、帰納極限を用いたコホモロジー表示を与えられることが知られている。

定理 3.1 ([9], Theorem 4.3.2). V を T^*X の開凸錐とすると、以下が成り立つ。

$$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}(V) = \varinjlim_{U,G} H_{G \cap U}^n(U; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)}). \quad (3.2)$$

ただし、 U は $U \cap \Delta = \pi(V)$ を満たすような $X \times X$ の開集合の族を動き、 G は $C_\Delta(G) \subset V^\circ$ を満たすような $X \times X$ の閉集合の族を動く。

この定理により、無限階擬微分作用素のコホモロジー表示として、 $H_{G \cap U}^n(U; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)})$ が得られる。

次に、諏訪ら ([4],[13]) により導入されたチェックドルボーコホモロジーを用いた超関数の表示について簡潔に述べる。 M を X の閉集合とし、 $V_0 = X \setminus M$ 、 V_1 を X における M の開近傍とする。 X の被覆 $\mathcal{V} = \{V_0, V_1\}$ に対して $C_X^{\infty,(p,q)}(\mathcal{V})$ を以下で定義する。

$$C_X^{\infty,(p,q)}(\mathcal{V}) = C_X^{\infty,(p,q)}(V_0) \oplus C_X^{\infty,(p,q)}(V_1) \oplus C_X^{\infty,(p,q-1)}(V_{01}). \quad (3.3)$$

ただし、 $V_{01} = V_0 \cap V_1$ である。これに対して微分 $\bar{\partial} : C_X^{\infty,(p,q)} \rightarrow C_X^{\infty,(p,q+1)}$ を

$$\bar{\partial}(\omega_0, \omega_1, \omega_{01}) = (\bar{\partial}\omega_0, \bar{\partial}\omega_1, \omega_1 - \omega_0 - \bar{\partial}\omega_{01}), \quad (3.4)$$

で与えると定義から $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$ がしたがひ、 $(C_X^{\infty,(p,\bullet)}(\mathcal{V}), \bar{\partial})$ が複体をなすことがわかる。

定義 3.2. 複体 $(C_X^{\infty,(p,\bullet)}(\mathcal{V}), \bar{\partial})$ の q 次コホモロジーを、 q 次のチェックドルボーコホモロジーといい、 $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(\mathcal{V})$ と書く。

次に、 $\mathcal{V}' = \{V_0\}$ を $X \setminus M$ の被覆とみなし、これに対して

$$C_X^{\infty,(p,q)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}') = \{(\omega_0, \omega_1, \omega_{01}) \in C_X^{\infty,(p,q)}(\mathcal{V}) \mid \omega_0 = 0\} = C_X^{\infty,(p,q)}(V_1) \oplus C_X^{\infty,(p,q)}(V_{01})$$

とおくと $(C_X^{\infty,(p,\bullet)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}'), \bar{\vartheta})$ は $(C_X^{\infty,(p,\bullet)}(\mathcal{V}), \bar{\vartheta})$ の部分複体となる。

定義 3.3. 複体 $(C_X^{\infty,(p,\bullet)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}'), \bar{\vartheta})$ の q 次コホモロジーを、 q 次の相対チェックドルボーコホモロジーといい、 $H_{\bar{\vartheta}}^{p,q}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ と書く。

この時、次の命題が成り立つ。

命題 3.4 ([4], Proposition 4.6). 相対チェックドルボーコホモロジー $H_{\bar{\vartheta}}^{p,q}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ は V_1 の取り方によらず、同型を除いて一意に決まる。

この命題により、 V_1 として X を取ることができるため、これ以降では $H_{\bar{\vartheta}}^{p,q}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ を $H_{\bar{\vartheta}}^{p,q}(X, X \setminus M)$ と表すこととする。

定理 3.5 ([4], Theorem 4.9). 以下のような規準的同型写像が存在する。

$$H_{\bar{\vartheta}}^{p,q}(X, X \setminus S) \simeq H_S^q(X; \mathcal{O}_X^{(p)}). \quad (3.5)$$

例 3.6. チェックドルボーコホモロジーのもっとも基本的な例は佐藤超関数である。 $M = \mathbb{R}^n$, $X = \mathbb{C}^n$ とすれば佐藤超関数のなす層 \mathcal{B}_M は

$$\mathcal{B}_M(M) = H_{\mathbb{R}^n}^n(\mathbb{C}^n; \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) \simeq H^{0,n}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n)$$

となる。特に、 $u \in \mathcal{B}_M(M)$ の代表限を ω とすると、 ω は $\bar{\partial}\omega_{01} = \omega_1$ を満たすような C^∞ 級関数を係数とする $(0, n)$ 形式 ω_1 と C^∞ 級関数を係数とする $(0, n-1)$ 形式 ω_{01} の組 $\omega = (\omega_1, \omega_{01})$ と書くことができる。

次に、定理 3.5 を定理 3.1 のコホモロジー $H_{G \cap U}^n(U; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)})$ に適用することで無限階擬微分作用素の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ のチェックドルボーコホモロジー表示を得る。

定義 3.7. $C_{X \times X}^{\infty,(p,q;r)}$ を $X \times X$ 上の C^∞ 級関数を係数とする $(p, q+r)$ 形式のなす層とする。即ち、 $X \times X$ の局所座標 (z_1, z_2) と $X \times X$ の開集合 V に対して $f(z_1, z_2) \in C_{X \times X}^{\infty,(p,q;r)}(V)$ は以下のように書ける。

$$f(z, z') = \sum_{|I|=p, |J|=q, |K|=r} f_{IJK}(z_1, z_2) dz_1^I \wedge dz_2^J \wedge d\bar{z}^K,$$

ただし $f_{IJK}(z_1, z_2)$ は V 上の C^∞ 級関数である。

定理 3.1 であらわれる集合 U, G に対して $V_0 = U \setminus G$, $V_1 = U$ とおき、 $V_{01} = V_0 \cap V_1 = U \setminus G$ とする。さらに、 U の被覆 $\mathcal{V} = \{V_0, V_1\}$ と $U \setminus G$ の被覆 $\mathcal{V}' = \{V_0\}$ をとり、

$$C_{X \times X}^{\infty,(p,q;r)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}') = C_{X \times X}^{\infty,(p,q;r)}(V_1) \oplus C_{X \times X}^{\infty,(p,q;r-1)}(V_{01})$$

と定義する。微分 $\bar{\vartheta} : C_{X \times X}^{\infty,(p,q;r)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \rightarrow C_{X \times X}^{\infty,(p,q;r+1)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ を上で述べたチェックドルボーコホモロジーの構成方法と同様に定義することで、 $(C_{X \times X}^{\infty,(p,q;\bullet)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}'), \bar{\vartheta})$ は複体となることがわかる。

定義 3.8. r 次の相対チェックドルボーコホモロジー $H_{\bar{\partial}}^{p,q,r}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ を、複体 $(C_{X \times X}^{\infty, (p,q;\bullet)}(\mathcal{V}, \mathcal{V}'), \bar{\partial})$ の r 次のコホモロジーと定義する。

命題 3.4 と定理 3.5 から次の定理が成り立つ。

定理 3.9. 以下のような規準的な射が存在する。

$$H_{\bar{\partial}}^{0,n,n}(U, U \setminus G) \simeq H_{G \cap U}^n(U; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)}). \quad (3.6)$$

したがって、 T^*X の開凸錐 V に対して $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}(V)$ は以下のような表示を持つ。

$$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}(V) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U, G}} H_{G \cap U}^n(U; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)}) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U, G}} H_{\bar{\partial}}^{0,n,n}(U, U \setminus G).$$

ただし U と G は定理 3.1 で与えられた条件を満たすように動く。

注意 3.10. 佐藤超関数をチェックドルボーコホモロジーで表示した際に、その代表限 $\omega = (\omega_1, \omega_{01})$ は $\bar{\partial}\omega_{01} = \omega_1$ を満たすような微分形式の組で表されたが、この場合は全体空間 $X = \mathbb{C}^n$ が複素 n 次元であるため

$$\omega_1 = f(z)d\bar{z} = f(z)d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n$$

と非常に簡潔に記述できる。一方で、定理 3.9 であられる相対チェックドルボーコホモロジー $H_{\bar{\partial}}^{0,n,n}(U, U \setminus G)$ は n 次のコホモロジーである一方で、全体空間 $X \times X$ は複素 $2n$ 次元であるため、代表限を表すための微分形式は複数の微分形式の和で構成されていることに注意。

4 古典的表象と C^∞ 級の表象

青木により導入された無限階擬微分作用素の表象のクラス $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ は正則関数の理論が元になっている。一方で、チェックドルボーコホモロジーは C^∞ 級関数の理論が元になっており、チェックドルボー表示から古典的な表象へ直接写像を構成することは非常に難しい。そこで、 C^∞ 級関数の理論を元とする新たな表象のクラス $\mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty$ を導入する。

まずは、青木により導入された古典的な表象について紹介する ([1],[2])。 $z^* = (z; \zeta)$ を T^*X の局所座標とする。

定義 4.1. V を \hat{T}^*X の開錐とする。

1. 関数 $f(z, \zeta)$ が以下の条件を満たす時、 V 上の表象と呼ばれる。

(i) V 型の無限小楔 W が存在して $f(z, \zeta)$ は W 上の正則関数である。

(ii) 任意の開錐 $V' \Subset V$ に対して V' 型のある無限小楔 $W' \subset W$ が存在し、 $f(z, \zeta)$ は以下の条件を満たす:

任意の $h > 0$ に対してある $C > 0$ が存在して W' 上では以下の評価を満たす。

$$|f(z, \zeta)| \leq C \cdot e^{h|\zeta|}. \quad (4.1)$$

2. V の表象 $f(z, \zeta)$ は以下の条件を満たす時に零表象と呼ばれる:

任意の開錐 $V' \in V$ に対して V' 型のある無限小楔 $W' \subset W$ と定数 $h, C > 0$ が存在して W' 上で以下の評価を満たす。

$$|f(z, \zeta)| \leq C \cdot e^{-h|\zeta|}. \quad (4.2)$$

3. $\mathfrak{S}(V)$ と $\mathfrak{N}(V)$ でそれぞれ全ての V 上の表象のなす集合、全ての V 上の零表象のなす集合とする。このとき、 $\mathfrak{S}_{z^*}, \mathfrak{N}_{z^*}$ を以下のように定義する。

$$\mathfrak{S}_{z^*} = \varinjlim_{V \ni z^*} \mathfrak{S}(V), \quad \mathfrak{N}_{z^*} = \varinjlim_{V \ni z^*} \mathfrak{N}(V).$$

ただし V は $z^* \in \mathring{T}^*X$ の錐状開近傍の族を動く。

さらに、零切断 $T_X^*X = X$ における $\mathfrak{S}|_{T_X^*X}$ と $\mathfrak{N}|_{T_X^*X}$ を以下のように定義する。

1. U を X の開集合とする。切断 $\mathfrak{S}|_{T_X^*X}(U)$ を以下の条件を満たすような $f(z, \zeta) \in \mathcal{O}_{T^*X}(\pi^{-1}(U))$ の集合とする:

任意のコンパクト集合 $K \Subset U$ と任意の $h > 0$ に対してある $C > 0$ が存在して $\pi^{-1}(K)$ 上では以下の評価を満たす。

$$|f(z, \zeta)| \leq C \cdot e^{h|\zeta|}.$$

2. $\mathfrak{N}|_{T_X^*X} = 0$ とする。

これにより \mathfrak{S} と \mathfrak{N} は \mathring{T}^*X の層から T^*X の層へ自然に拡張される。

次に、商集合からなる層 $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ を構成する。

命題 4.2. V を \mathring{T}^*X の開錐とすると、 $\mathfrak{N}(V)$ は $\mathfrak{S}(V)$ のイデアルである。

\mathring{T}^*X の開錐 V に対して $\mathfrak{S}(V)/\mathfrak{N}(V)$ を対応させる前層を $\widehat{\mathfrak{S}/\mathfrak{N}}$ と定義し、その層化を $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ とすると、層化は茎を変えないため以下の短完全列が得られる。

$$0 \longrightarrow \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{S} \xrightarrow{\kappa_1} \mathfrak{S}/\mathfrak{N} \longrightarrow 0. \quad (4.3)$$

ここで κ_1 は規準的な射の合成 $\mathfrak{S} \rightarrow \widehat{\mathfrak{S}/\mathfrak{N}} \rightarrow \mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ であり、(4.3) は以下の長完全列を誘導する。

$$0 \rightarrow \mathfrak{N}(V) \rightarrow \mathfrak{S}(V) \rightarrow \mathfrak{S}/\mathfrak{N}(V) \rightarrow H^1(V; \mathfrak{N}) \rightarrow \dots$$

故に $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}(V)$ と商集合 $\mathfrak{S}(V)/\mathfrak{N}(V)$ を同一視するためには、1次のコホモロジー $H^1(V; \mathfrak{N})$ が消滅していれば良い。特に、ある条件を満たす閉錐 \tilde{V} に対しては、高次コホモロジーが消滅することが以下の定理からわかる。

定理 4.3. X を複素ベクトル空間とし、 \tilde{V} を \mathring{T}^*X の閉錐とする。さらに \tilde{V} は以下の3条件を満たすとする。

- C1. \tilde{V} の錐状開近傍の族は \dot{T}^*X の Stein な開錐からなる共終部分族をもつ。
- C2. 射影 $\pi(\tilde{V})$ は X におけるコンパクト集合である。
- C3. ある点 $\zeta_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ が存在し、 \tilde{V} は ζ_0 の為す半開空間に含まれる。すなわち、以下を満たす。

$$\tilde{V} \subset \{(z; \zeta) \in \dot{T}^*X \mid z \in \pi(\tilde{V}), \operatorname{Re} \langle \zeta, \zeta_0 \rangle > 0\}.$$

このとき、任意の $k > 0$ に対して $H^k(\tilde{V}; \mathfrak{N}) = 0$ が成り立つ。

例 4.4. 定理 4.3 の 3 条件を満たすような閉錐 \tilde{V} は以下のように構成できる。 N を自然数とし、 $f_1(z), f_2(z), \dots, f_N(z)$ を X 上の正則関数とする。

$$B = \bigcap_{i=1}^N \{|f_i(z)| \leq 1\},$$

とおき、 B はコンパクトであると仮定する。さらに Γ を閉凸固有錐とする。このとき $\tilde{V} = B \times \Gamma$ は定理 4.3 の条件 C3 をみたす。また、条件 C1 の $B \times \Gamma$ の共終族は以下のように構成する。 B の開近傍の族 $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+}$ を

$$B_\varepsilon = \bigcap_{1 \leq i \leq N} \{|f_i(z)| < 1 + \varepsilon\}$$

で与える。 Γ は閉凸固有錐であるので共終族 $\{\Gamma_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で Γ の凸固有開錐状近傍からなるものが存在する。

系 4.5. \tilde{V} を定理 4.3 の 3 条件を満たすような閉錐とする。任意の元 $f(z, \zeta) \in \mathfrak{S}/\mathfrak{N}(\tilde{V})$ に対して、ある表象 $f'(z, \zeta) \in \mathfrak{S}(\tilde{V})$ が存在して $f = [f']$ と書ける。

これは以下の完全列からすぐに従う。

$$0 \rightarrow \mathfrak{N}(\tilde{V}) \rightarrow \mathfrak{S}(\tilde{V}) \rightarrow \mathfrak{S}/\mathfrak{N}(\tilde{V}) \rightarrow 0.$$

次に、新たな表象として、 C^∞ 型の表象を導入する。 V を \dot{T}^*X の開錐とし、 $z^* = (z; \zeta)$ を T^*X の局所座標とする。まずは \dot{T}^*X 上の錐状層 $\mathfrak{S}^\infty, \mathfrak{N}^\infty$ を定義する。

定義 4.6. 開集合 $V \subset T^*X$ に対し、変数 z に関して C^∞ 級であり、変数 ζ に関して正則であるような関数 $f(z, \zeta)$ 全体のなす集合を $C_z^\infty \mathcal{O}_\zeta(V)$ とする。この時、 $C_z^\infty \mathcal{O}_\zeta$ は層となる。

注意 4.7. $C_z^\infty \mathcal{O}_\zeta$ は X の座標変換に関して不変である。

定義 4.8. 1. 関数 $f(z, \zeta)$ は以下の条件を満たす時、 V 上の C^∞ 型の零表象である。

N1. ある V 型の無限小楔 W が存在し、次を満たす。

$$f(z, \zeta) \in C_z^\infty \mathcal{O}_\zeta(W).$$

N2. 任意の開錐 $V' \in V$ に対してある V' 型の無限小楔 $W' \subset W$ が存在して以下を満たす:

任意の多重添字 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対して正の定数 h, C が存在して W' 上で以下の評価を満たす。

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial \bar{z}^\beta} f(z, \zeta) \right| \leq C \cdot e^{-h|\zeta|}.$$

2. 関数 $f(z, \zeta)$ は以下の条件を満たす時, V 上の C^∞ 型の表象である。

S1. ある V 型の無限小楔 W が存在し、次を満たす。

$$f(z, \zeta) \in C_z^\infty \mathcal{O}_\zeta(W).$$

S2. 任意の開錐 $V' \in V$ に対してある V' 型の無限小楔 $W' \subset W$ が存在して以下を満たす:

任意の多重添字 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ と任意の定数 $h > 0$ に対して、ある定数 $C > 0$ が存在して W' 上で以下の評価を満たす。

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial \bar{z}^\beta} f(z, \zeta) \right| \leq C \cdot e^{h|\zeta|}.$$

S3. 任意の $i = 1, 2, \dots, n$ に対して、微分 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} f(z, \zeta)$ は V 上の零表象となる。

3. $\mathfrak{G}^\infty(V)$ と $\mathfrak{N}^\infty(V)$ でそれぞれ全ての V 上の C^∞ 型の表象、全ての V 上の C^∞ 型の零表象の集合とする。このとき、 $\mathfrak{G}_{z^*}^\infty, \mathfrak{N}_{z^*}^\infty$ を以下のように定義する。

$$\mathfrak{G}_{z^*}^\infty = \varinjlim_{V \ni z^*} \mathfrak{G}^\infty(V), \quad \mathfrak{N}_{z^*}^\infty = \varinjlim_{V \ni z^*} \mathfrak{N}^\infty(V).$$

ただし V は $z^* \in \mathring{T}^*X$ の錐状開近傍の族を動く。

通常 of 表象と同様に、 $\mathfrak{G}^\infty|_{T_X^*X} = \mathfrak{G}|_{T_X^*X}$, $\mathfrak{N}^\infty|_{T_X^*X} = 0$ と定義することで \mathfrak{G}^∞ と \mathfrak{N}^∞ を T^*X 上の層に自然に拡張することができる。

さて、 $\mathfrak{G}^\infty/\mathfrak{N}^\infty(V)$ と $\mathfrak{G}^\infty/\mathfrak{N}^\infty(V)$ を同一視するために、古典的な表象の場合と同様の議論を行う。

命題 4.9. V を \mathring{T}^*X の開錐とする。この時、 $\mathfrak{N}^\infty(V)$ は $\mathfrak{G}^\infty(V)$ のイデアルである。

\mathring{T}^*X の開錐 V に対して $\mathfrak{G}^\infty(V)/\mathfrak{N}^\infty(V)$ を対応させる前層を $\widehat{\mathfrak{G}^\infty/\mathfrak{N}^\infty}$ と定義し、その層化を $\mathfrak{G}^\infty/\mathfrak{N}^\infty$ とすると、以下の短完全列が得られる。

$$0 \longrightarrow \mathfrak{N}^\infty \longrightarrow \mathfrak{G}^\infty \xrightarrow{\kappa_2} \mathfrak{G}^\infty/\mathfrak{N}^\infty \longrightarrow 0. \quad (4.4)$$

ここで κ_2 は規準的な射の合成 $\mathfrak{S}^\infty \rightarrow \widehat{\mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty} \rightarrow \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty$ であり、以下の列

$$0 \rightarrow \mathfrak{N}^\infty(\tilde{V}) \rightarrow \mathfrak{S}^\infty(\tilde{V}) \rightarrow \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty(\tilde{V}) \rightarrow 0,$$

が完全列であること望ましいが、それは次の議論からわかる。まずは以下の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{N}(\tilde{V}) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(\tilde{V}) & \xrightarrow{\kappa_1(\tilde{V})} & \mathfrak{S}/\mathfrak{N}(\tilde{V}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \iota_2(\tilde{V}) & & \downarrow \iota_1(\tilde{V}) & & \downarrow \iota(\tilde{V}) \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{N}^\infty(\tilde{V}) & \longrightarrow & \mathfrak{S}^\infty(\tilde{V}) & \xrightarrow{\kappa_2(\tilde{V})} & \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty(\tilde{V}) \end{array} .$$

ただし、 $\iota_1(\tilde{V})$ と $\iota_2(\tilde{V})$ は規準的な埋め込みであり、 $\iota(\tilde{V})$ は $\iota_1(\tilde{V})$ と $\iota_2(\tilde{V})$ から誘導される射である。また、横の行はどちらも完全列である。ここで、 $\iota(\tilde{V})$ が同型射であることを仮定すると、 $\iota(\tilde{V}) \circ \kappa_1(\tilde{V})$ が全射となることから、 $\kappa_2(\tilde{V})$ も全射となり、2行目の後ろの完全性が補完される。

系 4.10. \tilde{V} 条件 C を満たす閉錐であるとする。任意の $f(z, \zeta) \in \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty(\tilde{V})$ はある表象 $f'(z, \zeta) \in \mathfrak{S}^\infty(\tilde{V})$ で代表される。

最後に、 ι が $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ と $\mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty$ の間の同型射であることを示そう。 ι は規準的な埋め込み射

$$\iota_1: \mathfrak{S} \hookrightarrow \mathfrak{S}^\infty, \quad \iota_2: \mathfrak{N} \hookrightarrow \mathfrak{N}^\infty,$$

から以下の射が誘導される以下のような射であった。

$$\iota: \mathfrak{S}/\mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty.$$

定理 4.11. 誘導された射 ι は層の同型射である。

T_X^*X 上では明らかに $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}|_{T_X^*X} = \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty|_{T_X^*X} = \mathcal{D}_X^\infty$ が成り立つため、定理 4.11 を T^*X 上で示せば十分である。特に、埋め込み射により誘導された射

$$\iota: \mathfrak{S}/\mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty,$$

が大域的に構成されているため、茎の間の射 ι_{z^*} が同型射であることを示せば良い。

問題が局所的であるので、証明では $T^*X \simeq \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_\zeta^n$ の同一視をする。特に $z^* = z_0^* = (0; 1, 0, \dots, 0)$ としても一般性を失わない。各 $D_i(r_i, 0)$ を中心が原点であり半径が r_i であるような \mathbb{C} の開円盤とした時に、 $D = D_1(r_1, 0) \times D_2(r_2, 0) \times \dots \times D_n(r_n, 0)$ を \mathbb{C}_z^n の多重円盤とする。さらに Γ を $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}_\zeta^n$ を含むような開凸錐として、 V を

$$V = D \times \Gamma,$$

とする。また、 \mathfrak{N}^∞ を係数を持つ T^*X 上の (p, q) 形式の層を $\mathfrak{N}^{\infty, (p, q)}$ とおく。このとき、以下の命題が証明の鍵となる。

命題 4.12. D を多重開円盤、 Γ を $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}_\zeta^n$ を含む開凸錐とし、 $V = D \times \Gamma$ とする。さらに $f(z, \zeta) \in \mathfrak{N}^{\infty, (p, q)}(V)$ は $\bar{\partial}_z f(z, \zeta) = 0$ を満たすとする。このとき、任意の多重開円盤 $D' \Subset D$ に対して $V' = D' \times \Gamma$ とおけば、 V' 上で $\bar{\partial}_z u(z, \zeta) = f$ を満たす $u \in \mathfrak{N}^{\infty, (p, q-1)}(V')$ を見つけることができる。

この命題を用いて、定理 4.11 を示す。

Proof. $\iota: \mathfrak{S}/\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty$ から誘導される各点での茎の間の射を

$$\iota_{z^*}: \mathfrak{S}_{z^*}/\mathfrak{N}_{z^*} \longrightarrow \mathfrak{S}_{z^*}^\infty/\mathfrak{N}_{z^*}^\infty$$

とする。 ι_{z^*} の単射性は明らかであるので、全射性を示す。

$F \in \mathfrak{S}_{z^*}^\infty$ とすると、 z^* の近傍 $V = D \times \Gamma$ が存在して、 F の代表元となるような $f \in \mathfrak{S}(V)$ がとれる。定義から f は $\bar{\partial}f \in \mathfrak{N}^{\infty, (0, 1)}(V)$ かつ $\bar{\partial}^2 f = 0$ を満たす。命題 4.12 より $D' \Subset D$ が存在して $V' = D' \times \Gamma$ 上では $\bar{\partial}g = \bar{\partial}f$ を満たすような $g \in \mathfrak{N}^\infty(V')$ がとれる。これは $f - g \in \mathfrak{S}(V')$ を意味するので $F' = (f - g)_{z^*}$ とおけば $\iota(F')_{z^*} = F$ が成り立ち、 ι_{z^*} が全射であることがわかる。□

5 無限階擬微分作用素の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ とその表象 $\mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty$ の同型性

ここでは特に X を n 次元複素ベクトル空間とする。以下の射により $X \times X$ と TX を同一視する。

$$\varrho: X \times X \ni (z, z') \mapsto (z, z' - z) \in TX. \quad (5.1)$$

このとき、以下の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\varrho} & TX \\ & \searrow p_1 & \swarrow \tau \\ & X & \end{array}$$

この章の目的は、第 3 章、第 4 章の結果を用いて層の間の射 $\varsigma: \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty$ を構成し、以下の定理を示すことである。

定理 5.1. 無限階擬微分作用素の層 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ と古典的表象のなす層 $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ は同型である。

まずは、 ς を構成しよう。 \tilde{V} を T^*X の閉凸固有錐、 V と V' を開凸固有錐とし、 $\tilde{V} \Subset_{\text{cone}} V' \Subset V$ を満たすとする。さらに $\pi(\tilde{V})$ はコンパクト、 $\pi(V')$ と $\pi(V)$ は相対コンパクトであると仮定する。定理 3.1 の条件を満たすような U, G に対して無限階擬微分作用素の層の切断 $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}(V)$ は以下の表示を持っている。

$$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}(V) = \varinjlim_{U, G} H_{G \cap U}^n(U; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0, n)}).$$

したがって、コホモロジーを固定し、

$$\tilde{\varsigma}: H_{G \cap U}^n(U; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0, n)}) \rightarrow \mathfrak{S}^\infty/\mathfrak{N}^\infty(V')$$

を構成することができれば二つの帰納極限 $\varinjlim_{U,G}$ と $\varinjlim_{\substack{V' \in V \\ \text{cone}}} \varinjlim_{\substack{V' \in V \\ \text{cone}}}$ を作用させることで、無限階擬微分作用素からその表象への射

$$\varsigma_{\tilde{V}} : \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}(\tilde{V}) \longrightarrow \mathfrak{S}^{\infty} / \mathfrak{N}^{\infty}(\tilde{V}).$$

が構成される。これ以降では $\tilde{\zeta}$ を構成することを目指す。

定義 5.2. γ を TX の凸閉錐とする。 TX における γ 位相とは、以下の開集合 Ω で与えられる位相のことである。

1. Ω は通常の意味で開集合である。
2. $\Omega \dot{+} \gamma = \Omega$.

ここで、 $\dot{+}$ は以下で定義される集合の和のことである。

$$\Omega \dot{+} \gamma = \bigsqcup_{z \in \tau(\Omega)} (\Omega_z + \gamma_z).$$

ただし $\Omega_z = \Omega \cap \tau^{-1}(z)$ かつ $\gamma_z = \gamma \cap \tau^{-1}(z)$ とする。特に $\gamma_z = \emptyset$ の場合は $\Omega_z + \gamma_z = \Omega_z$ とする。

TX の開集合 V は γ 位相の意味で開集合であるとき、 γ 開集合という。

Γ_1 と Γ_2 を T^*X の開凸固有錐として、以下の条件を満たすように選ぶ。

1. $V' \underset{\text{cone}}{\subseteq} \Gamma_2 \underset{\text{cone}}{\subseteq} \Gamma_1 \underset{\text{cone}}{\subseteq} V$.
2. $p_1^{-1}(\pi(V'))$ では $G \cap U \subset \varrho^{-1}(\text{Int}(\Gamma_1^\circ)) \cup \Delta$ が成り立つ。

ここで、 Δ は $X \times X$ の対角集合のことである。

注意 5.3. 定理 3.1 より、錐の頂点付近では G は $\varrho^{-1}(V^\circ)$ に漸近するので U を十分小さくとれば、上のような Γ_1, Γ_2 を取ることができる。このとき、Figure 1 では $X \times X$ における図を表しているため、包含関係が入れ替わっていることに注意してほしい。

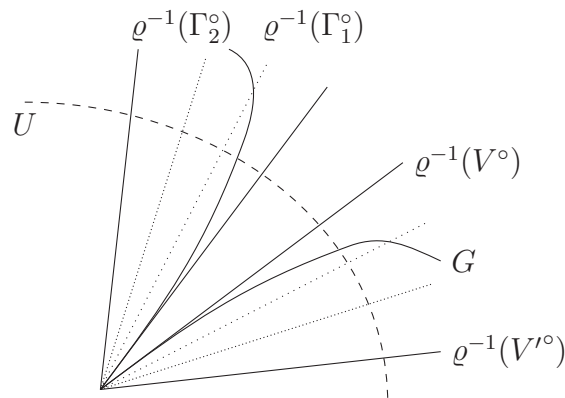


Figure 1: $X \times X$ における頂点付近の錐の関係性

射 ζ を積分により実現するために、まずはその積分路を構成する。 $i = 1, 2$ に対して $\gamma_i = \Gamma_i^\circ$ とおく。 D_1, D_2 を、以下の条件を満たすような、滑らかな境界をもつ $X \times X$ の開領域とする。

- D1. $i = 1, 2$ について $\varrho(D_i)$ は γ_i 開集合。
- D2. $\Delta_X(\pi(V')) \subset D_1$ が成り立つ。ただし、 $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$ は対角埋め込みのことである。
- D3. $\overline{D_2} \cap p_1^{-1}(\pi(V')) \subset \varrho^{-1}(\text{Int}(\gamma_2))$.
- D4. $\overline{D_1 \setminus D_2} \cap p_1^{-1}(\pi(V')) \subset U$.
- D5. $\overline{\partial D_1 \setminus D_2} \cap p_1^{-1}(\pi(V')) \subset U \setminus G$.
- D6. ∂D_1 と ∂D_2 は $p_1^{-1}(\pi(V'))$ において横断的に交わる。
- D7. $p_1^{-1}(z)$ と ∂D_1 (または ∂D_2) は任意の $z \in \pi(V')$ において横断的に交わる。

例 5.4. 条件の D6 と D7 を除けば、上の条件を満たす D_1 と D_2 は以下のように構成できる。まずは $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を正の定数とし、 \widehat{D}_1 と \widehat{D}_2 を以下のように定める。

$$\widehat{D}_1 = \bigsqcup_{z \in \pi(V')} \{(z, v) \in T_z X \mid \text{dist}_{T_z X}(v, \gamma_1 \cap \tau^{-1}(z)) < \varepsilon_1\},$$

$$\widehat{D}_2 = \bigsqcup_{z \in \pi(V')} \{(z, v) \in T_z X \mid \text{dist}_{T_z X}(v, \tau^{-1}(z) \setminus \gamma_2) > \varepsilon_2\}.$$

$D_1 = \varrho^{-1}(\widehat{D}_1), D_2 = \varrho^{-1}(\widehat{D}_2)$ とすると、 ε_1 と ε_2 を十分に小さく取ることで、 D_1 と D_2 は条件の D1 から D5 を満たす。

さらに D_1 と D_2 の境界を滑らかに変形することで全ての条件を満たすことがわかる。

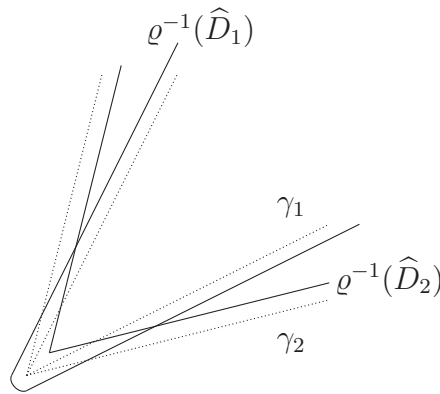


Figure 2: \widehat{D}_1 と \widehat{D}_2

D_1 と D_2 を、上の条件を満たすような $X \times X$ の開領域とし、 $D = D_1 \setminus D_2, E = \partial D_1 \setminus D_2$ とおく。さらに $D_z = D \cap p_1^{-1}(z), E_z = E \cap p_1^{-1}(z)$ とする。

定義 5.5. u をチェックコホモロジー $H_{\bar{\partial}}^{0,n,n}(U, U \setminus G)$ の元とし、その代表元として $\omega = (\omega_1, \omega_{01})$ をとる。このとき、無限階擬微分作用素のコホモロジー表示からその表象への射

$$\tilde{\zeta}: H_{G \cap U}^n(U; \mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)}) = H_{\bar{\partial}}^{0,n,n}(U, U \setminus G) \rightarrow \mathfrak{S}^\infty / \mathfrak{N}^\infty(V') \quad (5.2)$$

を以下で定義する。

$$\tilde{\zeta}(\omega)(z, \zeta) = \int_{D_z} \omega_1(z, z') \cdot e^{\langle z' - z, \zeta \rangle} - \int_{E_z} \omega_{01}(z, z') \cdot e^{\langle z' - z, \zeta \rangle}. \quad (5.3)$$

このとき、 $\tilde{\zeta}$ の well-defined 性について次の命題が成り立つ。

命題 5.6. $\omega = (\omega_1, \omega_{01})$ を $u \in H_{\bar{\partial}}^{0,n,n}(U, U \setminus G)$ の代表元とすると、 $\tilde{\zeta}$ は以下の性質をみたす。

1. $\tilde{\zeta}(\omega)$ は V' 上の表象である。
2. ω がチェックドルポーコホモロジーの元として 0 であれば $\tilde{\zeta}(\omega)$ は V' 上の零表象である。
3. $\tilde{\zeta}(\omega)$ は D_1 と D_2 の選択によらない。

命題 5.6 の証明のために幾つか準備をおこなう。

定義 5.7. V を T^*X の開錐とする。 V 上の C^∞ 型の表象 $f(z, \zeta), g(z, \zeta)$ が $\mathfrak{S}^\infty / \mathfrak{N}^\infty(V)$ の意味で同じ表象であるとき、 $f(z, \zeta) \approx g(z, \zeta)$ と書く。すなわち、これは $f(z, \zeta) - g(z, \zeta) \in \mathfrak{N}^\infty(V)$ と同値である。

$\tilde{\zeta}$ と作用素 $\frac{\partial}{\partial z}$ (または作用素 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$) が可換であることが望ましいが、一般には可換にならない。そこで、まずは以下の補題を導入する。

補題 5.8. $\omega = (\omega_1, \omega_{01})$ を $u \in H_{\bar{\partial}}^{0,n,n}(U, U \setminus G)$ の代表元とすると次が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \tilde{\zeta}(\omega_1, \omega_{01}) \approx \tilde{\zeta}\left(\frac{\partial}{\partial z_i} \omega_1, \frac{\partial}{\partial z_i} \omega_{01}\right)$$

この補題により、 C^∞ 型の表象のクラスでは $\tilde{\zeta}$ と各作用素 $\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$ が可換であると言える。

命題 5.6 の (1) の証明の概略を紹介する。(2) および (3) も条件式を用いて似た式変形を行うことで証明が可能であるので、ここでは省略する。これ以降では、ドルポー作用素 $\bar{\partial}_z + \bar{\partial}_{z'}$ を略して $\bar{\partial}$ と記述する。

$\tilde{\zeta}(\omega)$ が V' 上の表象であることを示す。 z を固定した時に、積分路 D_z を以下のように区分的に滑らかな境界をもつ $D_{z,1}(\varepsilon), D_{z,2}(\varepsilon)$ の二つに分割することを考える。

1. G と $D_{z,1}(\varepsilon)$ の共通部分は空集合である。
2. $\partial E_z(\varepsilon) = \partial(\partial D_z \setminus E_z)$.

3. (z, z) を中心とする半径 ε の球 $B((z, z), \varepsilon)$ に対して、 $D_{z,2}(\varepsilon) \subset (\varrho^{-1}(\gamma_2) \cup B((z, z), \varepsilon)) \cap p_1^{-1}(z)$ が成り立つ。

ただし、 $E_z(\varepsilon) = \partial D_{z,1}(\varepsilon) \cap \partial D_{z,2}(\varepsilon)$ とおいた。

注意 5.9. 十分に小さい ε に対しても、境界を滑らかに変形することで上の条件を満たすような分割 $D_{z,1}(\varepsilon)$, $D_{z,2}(\varepsilon)$ を構成できる。

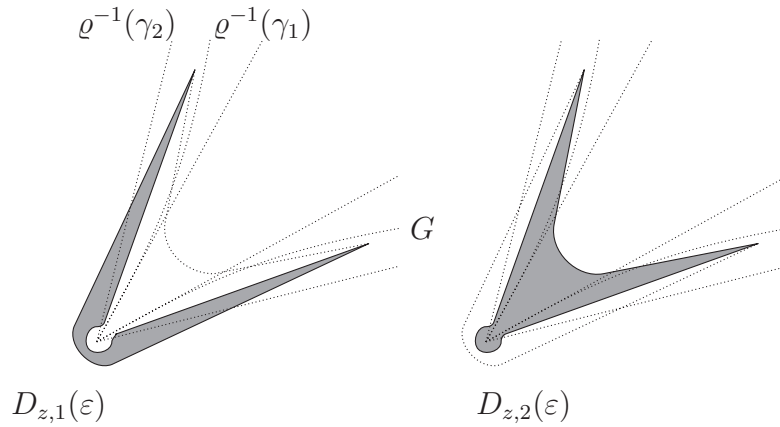


Figure 3: D_z の分割 $D_{z,1}(\varepsilon)$ と $D_{z,2}(\varepsilon)$

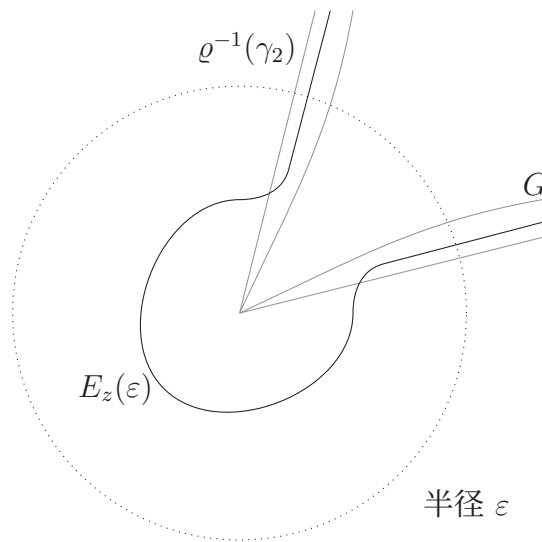


Figure 4: 錐の頂点付近における E_ε

Stokes の定理により、次が成り立つ。

$$\int_{D_{z,1}(\varepsilon)} \omega_1(z, z') \cdot e^{\langle z' - z, \zeta \rangle} = \int_{D_{z,1}(\varepsilon)} \bar{\partial} \omega_{01}(z, z') \cdot e^{\langle z' - z, \zeta \rangle} = \int_{E_z + E_z(\varepsilon)} \omega_{01}(z, z') \cdot e^{\langle z' - z, \zeta \rangle}.$$

これを用いて、 $\zeta(\omega)$ が C^∞ 型の表象であることをみる。特に、 $U \setminus G$ においては $\bar{\partial}\omega_{01} = \omega_1$ が成り立つため、Stoke's の定理により D_z と E_z における積分を $D_{z,2}(\varepsilon)$ と $E_z(\varepsilon)$ の積分に帰着することができることに注意すると、任意の $h > 0$ に対して最後の評価を満たすことがわかる。

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial \bar{z}^\beta} \zeta(\omega) \right| \\
&= \left| \int_{D_{z,2}(\varepsilon)} \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial \bar{z}^\beta} \left(\omega_1(z, z') \cdot e^{\langle z'-z, \zeta \rangle} \right) + \int_{E(\varepsilon)} \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial \bar{z}^\beta} \left(\omega_{01}(z, z') \cdot e^{\langle z'-z, \zeta \rangle} \right) \right| \\
&= \left| \int_{D_{z,2}(\varepsilon)} \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \left(\frac{\partial^\beta}{\partial \bar{z}^\beta} \omega_1(z, z') \cdot e^{\langle z'-z, \zeta \rangle} \right) + \int_{E(\varepsilon)} \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \left(\frac{\partial^\beta}{\partial \bar{z}^\beta} \omega_{01}(z, z') \cdot e^{\langle z'-z, \zeta \rangle} \right) \right| \\
&\leq \left| \int_{D_{z,2}(\varepsilon)} \sum_{0 \leq \alpha' \leq \alpha} \frac{\partial^{\alpha'}}{\partial z^{\alpha'}} \frac{\partial^\beta}{\partial \bar{z}^\beta} \omega_1(z, z') \cdot \frac{\partial^{\alpha-\alpha'}}{\partial z^{\alpha-\alpha'}} e^{\langle z'-z, \zeta \rangle} \right| \\
&\quad + \left| \int_{E(\varepsilon)} \sum_{0 \leq \alpha' \leq \alpha} \frac{\partial^{\alpha'}}{\partial z^{\alpha'}} \frac{\partial^\beta}{\partial \bar{z}^\beta} \omega_{01}(z, z') \cdot \frac{\partial^{\alpha-\alpha'}}{\partial z^{\alpha-\alpha'}} e^{\langle z'-z, \zeta \rangle} \right| \\
&\leq \sum_{0 \leq \alpha' \leq \alpha} \int_{D_{z,2}(\varepsilon)} \left| \frac{\partial^{\alpha'}}{\partial z^{\alpha'}} \frac{\partial^\beta}{\partial \bar{z}^\beta} \omega_1(z, z') \right| \cdot |P_{\alpha'}(\zeta)| \cdot e^{\operatorname{Re} \langle z'-z, \zeta \rangle} \\
&\quad + \sum_{0 \leq \alpha' \leq \alpha} \int_{E(\varepsilon)} \left| \frac{\partial^{\alpha'}}{\partial z^{\alpha'}} \frac{\partial^\beta}{\partial \bar{z}^\beta} \omega_{01}(z, z') \right| \cdot |P_{\alpha'}(\zeta)| \cdot e^{\operatorname{Re} \langle z'-z, \zeta \rangle} \\
&\leq C \cdot e^{2h|\zeta|}.
\end{aligned}$$

ただし、 $P_{\alpha'}(\zeta)$ は ζ に関する多項式であり、任意の α' に対して十分小さい ε をとれば $|P_{\alpha'}(\zeta)| \leq e^{h|\zeta|}$ となる。また、 $h > 0$ に対して、 $B((z, z), \varepsilon) \cap p_1^{-1}(z)$ では $\operatorname{Re} \langle z'-z, \zeta \rangle \leq h|\zeta|$ を満たすように ε を小さく取り直すことで上の評価を満たすようにできることに注意。

続いて、任意の $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \zeta(\omega)$ が $\mathfrak{N}^\infty(V')$ に属することを示す。Stoke's の定理と $(\bar{\partial}_z + \bar{\partial}_{z'})\omega_{01} = \omega_1$, $\bar{\partial}_z \omega_1 = -\bar{\partial}_{z'} \omega_1$ という二つの事実により以下のような式変形ができる。

$$\begin{aligned}
|\bar{\partial}_z \zeta(\omega)| &= \left| \int_{D_{z,2}(\varepsilon)} \bar{\partial}_z \omega_1(z, z') \cdot e^{\langle z'-z, \zeta \rangle} + \int_{E(\varepsilon)} \bar{\partial}_z \omega_{01}(z, z') \cdot e^{\langle z'-z, \zeta \rangle} \right| \\
&= \left| - \int_{D_{z,2}(\varepsilon)} \bar{\partial}_{z'} \omega_1(z, z') \cdot e^{\langle z'-z, \zeta \rangle} \right. \\
&\quad \left. + \int_{E(\varepsilon)} (\omega_1(z, z') - \bar{\partial}_{z'} \omega_{01}(z, z')) \cdot e^{\langle z'-z, \zeta \rangle} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{\partial D_{z,2}(\varepsilon)} \omega_1(z, z') \cdot e^{\langle z'-z, \zeta \rangle} \right. \\
&\quad \left. - \int_{E(\varepsilon)} \omega_1(z, z') \cdot e^{\langle z'-z, \zeta \rangle} + \int_{\partial E(\varepsilon)} \omega_{01}(z, z') \cdot e^{\langle z'-z, \zeta \rangle} \right| \\
&= \left| \int_{\partial D_{z,2}(\varepsilon) \setminus E(\varepsilon)} \omega_1(z, z') \cdot e^{\langle z'-z, \zeta \rangle} + \int_{\partial E(\varepsilon)} \omega_{01}(z, z') \cdot e^{\langle z'-z, \zeta \rangle} \right|.
\end{aligned}$$

$D_{z,1}$ と $D_{z,2}$ の構成法により $\partial D_{z,2}(\varepsilon) \setminus E(\varepsilon) \subset \text{Int}(\varrho^{-1}(\gamma_2))$, $\partial E(\varepsilon) \subset \text{Int}(\varrho^{-1}(\gamma_2))$ の二つの評価を満たす。したがって、 $\bar{\partial}_z \tilde{\zeta}(\omega) = \sum_{i=1}^n \bar{\partial}_{z_i} \tilde{\zeta}(\omega)$ であることに注意すれば、ある定数 $h > 0, C > 0$ が存在して

$$\left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \tilde{\zeta}(\omega) \right| \leq C \cdot e^{-h|\zeta|}$$

を満たす。以上により、 $\tilde{\zeta}(\omega)$ が C^∞ 型の表象であることが示された。

系 5.10. 射 $\tilde{\zeta}$ は well-defined である。

最後に定理 5.1 を証明する。これまでの結果から以下のような射が構成できる。

$$\varsigma_{\tilde{V}} : \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}(\tilde{V}) \longrightarrow \mathfrak{S}^\infty / \mathfrak{N}^\infty(\tilde{V}).$$

ただし $\tilde{V} \subset \mathring{T}^*X$ は $\pi(\tilde{V})$ がコンパクトであるような固有凸閉錐である。

\tilde{V}' を \tilde{V} を含むような固有凸閉錐とすると、 $\tilde{\zeta}$ の well-definedness 性により ς と制限射が可換になることがわかる。

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}(\tilde{V}) & \xrightarrow{\varsigma_{\tilde{V}}} & \mathfrak{S}^\infty / \mathfrak{N}^\infty(\tilde{V}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{O}_X^{\mathbb{R}}(\tilde{V}') & \xrightarrow{\varsigma_{\tilde{V}'}} & \mathfrak{S}^\infty / \mathfrak{N}^\infty(\tilde{V}').
\end{array}$$

\mathring{T}^*X の基底として閉凸固有錐 \tilde{V} からなる族がとれるため、 $\{\varsigma_{\tilde{V}}\}$ により \mathring{T}^*X 上の層の射

$$\varsigma : \mathcal{O}_X^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathfrak{S}^\infty / \mathfrak{N}^\infty$$

が定義される。したがって、大域的に射が存在することがわかったため、茎における同型を示せば十分である。特に、各点 $z^* \in T^*X$ において以下の図式が可換となればよい。

$$\begin{array}{ccc}
& & (\mathfrak{S} / \mathfrak{N})_{z^*} \\
& \nearrow \sigma & \downarrow \iota_{z^*} \\
\mathcal{O}_{X,z^*}^{\mathbb{R}} & & (\mathfrak{S}^\infty / \mathfrak{N}^\infty)_{z^*} \\
& \searrow \varsigma_{z^*} &
\end{array} \tag{5.4}$$

ここで σ は青木により導入された表象写像であり、この表象写像は同型であることが知られている。

定理 5.11 ([2], Theorem 4.3 and Theorem 4.5). 表象写像

$$\sigma : \mathcal{E}_{X,z^*}^{\text{or}} \rightarrow (\mathfrak{S}/\mathfrak{N})_{z^*}$$

は茎の間の同型写像である。

図式 5.4 の可換性は、 σ と ζ を具体的に計算することで示すことが可能である。

定理 5.12. 上で与えられる図式 5.4 は可換である。

さらに、第 4 章の結果により、縦の射 l_{z^*} が同型であるため、 ζ_{z^*} が同型射であることが示された。

References

- [1] Takashi Aoki, *Calcul Exponential des opérateurs Microdifférentiels d'ordre infini* I, II. Ann. Inst. Fourier. Grenoble. (1983/1986).
- [2] Takashi Aoki, Symbols and formal symbols of pseudodifferential operators, Group Representation and Systems of Differential Equations, Proceedings Tokyo, (1982) (ed. K. Okamoto), Adv. Stud. Pure Math., 4, Kinokuniya, Tokyo; North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, (1984), 181-208.
- [3] Takashi Aoki, Naofumi Honda and Susumu Yamazaki, Foundation of Symbol Theory for Analytic Pseudodifferential Operators. I. Journal of the Mathematical Society of Japan. Volume **69**. (2017).
- [4] Naofumi Honda, Takeshi Izawa and Tatsuo Suwa, Sato hyperfunctions via relative Dolbeault cohomology. (in preparation)
- [5] Kiyoomi Kataoka, On the theory of Radon transformations of hyperfunctions and its applications, Master's Thesis, Univ. Tokyo, (1976) (in Japanese).
- [6] Daichi Komori, The equivalence of pseudodifferential operator and its symbol via Čech-Dolbeault cohomology, in preparation.
- [7] Masaki Kashiwara and Takahiro Kawai, Micro-hyperbolic pseudo-differential operators I, J. Math. Soc. Japan, **27** (1975), 359-404.
- [8] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, Micro-hyperbolic systems. Acta Math. **142**, (1979), 1-55.
- [9] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, Sheaves on Manifold. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, **292**, Springer-Verlag, (1990).
- [10] Hörmander Lars, An introduction to complex analysis in several variables. North-Holland mathematical library, **7** (1990).
- [11] Mikio Sato, *Theory of hyperfunctions. I and II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA **8** (1959/1960).
- [12] Mikio Sato, Takahiro Kawai and Masaki Kashiwara, Microfunctions and pseudo-differential equations. In *Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations (Proc. Conf., Katata, 1971; dedicated to the memory of Andre Martineau)*. Springer, Berlin, 265–529. Lecture Notes in Math., **287**, (1973).
- [13] Tatsuo Suwa, Relative Dolbeault cohomology. In preparation.

微分型非線形シュレディンガー方程式系の ほとんど最良なソボレフ空間における 適切性について

宮崎大学 教育学部 平山 浩之

1 序論

本講演では、非線形シュレディンガー方程式の連立系

$$\begin{cases} (i\partial_t + \alpha\Delta)u = -(\nabla \cdot w)v, & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ (i\partial_t + \beta\Delta)v = -(\nabla \cdot \bar{w})u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ (i\partial_t + \gamma\Delta)w = \nabla(u \cdot \bar{v}), & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (1.1)$$

を初期条件

$$(u, v, w)|_{t=0} = (u_0, v_0, w_0), \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (1.2)$$

の下で考える。ここで α, β, γ は 0 でない実定数、初期値 (u_0, v_0, w_0) は既知の関数であり、未知関数 $u(t, x), v(t, x), w(t, x)$ は \mathbb{C}^d に値を取るベクトル値関数である。また、 \mathbb{C}^d 値関数 f, g に対して $f \cdot g$ は実内積を表し、 $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d})$, $\Delta = \sum_{k=1}^d \partial_{x_k}^2$ である。連立系 (1.1) は Colin-Colin [5] によって、レーザーとプラズマの相互作用を記述するモデルとして導出されたものであり、次の保存量を持つ。

$$\begin{aligned} M(u(t), v(t), w(t)) &= \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |v(t, x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |w(t, x)|^2 dx, \\ E(u(t), v(t), w(t)) &= \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t, x)|^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v(t, x)|^2 dx + \frac{\gamma}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla w(t, x)|^2 dx \\ &\quad + \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{w(t, x)} \cdot \nabla(u(t, x) \cdot \overline{v(t, x)}) dx. \end{aligned}$$

すなわち、 (u, v, w) が (1.1) の滑らかな解であるとき、任意の $t > 0$ に対して保存則

$$M(u(t), v(t), w(t)) = M(u_0, v_0, w_0), \quad E(u(t), v(t), w(t)) = E(u_0, v_0, w_0)$$

が成立する。ここでは M を質量、 E をエネルギーと呼ぶことにする。

保存量は時刻 t についての解の一樣評価を導く際に役立ち、解の一樣評価には時間局所的な解を時間大域的に延長出来るといった利点がある。(実際に保存量 M, E を利用することで, (1.1) の時間大域解の存在についての結果 ([7]) が得られる.) 質量については, 初期値の L^2 ノルムが有限であれば保存則を利用することが可能となる. エネルギーについては, $1 \leq d \leq 4$ のときヘルダーの不等式とソボレフの不等式から

$$|E(u_0, v_0, w_0)| \leq C(\|u_0\|_{H^1}, \|v_0\|_{H^1}, \|w_0\|_{H^1})$$

が得られる.(右辺は初期値のノルムに依存した定数.) ここで $s \in \mathbb{R}$ に対して $\|\cdot\|_{H^s}$ は L^2 を基礎としたソボレフノルムである. この評価により, 初期値の H^1 ノルムが有限であればエネルギーの保存則を利用することが可能となる. したがって, 時間大域的な解の構成を視野に入れるのであれば,

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) := (H^s(\mathbb{R}^d))^d \times (H^s(\mathbb{R}^d))^d \times (H^s(\mathbb{R}^d))^d$$

とするとき, 初期値を $\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^d)$ や $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$ に与えるのは自然な発想である. 本講演では時間局所的な解についてしか述べないが, $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ は s が小さいほど広い空間であるため, より多くの初期値に対して時間局所的な解を考えるという意味では, 初期値は $\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^d)$ や $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$ のみに限らず, 出来るだけ小さな s に対する $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ に与えるのが望ましい.

本講演の目的は, 連立系 (1.1) の $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ における適切性が成立するソボレフ指数 s の値の範囲を決定することである. そのような範囲を決定することの利点の一つとして, 方程式の構造が明らかになることが挙げられる. 特に (1.1) においては, パラメーター α, β, γ の値によって適切性が成立する s の範囲を分類することで, パラメーターの値の違いによって連立系の構造がどのように変わるかを知ることが出来る.

連立系 (1.1) が関数空間 $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ において適切であることを, 次のように定義する.

定義 1.1. 次が成り立つとき, 連立系の初期値問題 (1.1)-(1.2) は $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ において時間局所的適切であると言う:

任意の $(u_0, v_0, w_0) \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ に対し, ある $T > 0$ と $t \in [0, T]$ において (1.1)-(1.2) を満たす解 $(u, v, w) \in C([0, T]; \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d))$ が存在し, そのような解は $C([0, T]; \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d))$ の適当な部分空間において一意である. さらに, 初期値から解への写像は連続である.

ここで (u, v, w) が (1.1)-(1.2) の解であるとは, (u, v, w) が (1.1)-(1.2) に対応する積分方程式を $C([0, T]; \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d))$ の位相で満たすことを意味する. また, ノルムが r 以下の元からなる $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ の部分集合を $B_r(\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d))$ とするとき, 初期値から解への写像が連続であるとは, 任意の $r > 0$ に対して初期値 $(u_0, v_0, w_0) \in B_r(\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d))$ に解 $(u, v, w) \in C([0, T]; \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d))$ を対応させる写像が連続写像であることを意味する.

適切性を示すための方法として、本講演では逐次近似法を用いる。ここでは $N(u)$ を非線形項とする非線形シュレディンガー方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = N(u), & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

を例にとって説明する。逐次近似法とは、このような微分方程式をデュアメル原理を用いて積分方程式

$$u(t) = e^{it\Delta} u_0 + \int_0^t e^{i(t-t')\Delta} N(u(t')) dt' =: \Phi(u)(t)$$

の形に書き直し、

$$u_1(t) = e^{it\Delta} u_0, \quad u_{n+1}(t) = \Phi(u_n)(t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって関数列 $\{u_n\}$ を定め、その極限関数 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ の存在を示すことで解を構成する方法である。ここで u_n を逐次近似の第 n 項と呼ぶことにする。ただし、 $e^{it\Delta}$ は初期値 u_0 に対して線形シュレディンガー方程式の初期値問題

$$i\partial_t u + \Delta u = 0, \quad u(0, x) = u_0(x)$$

の解を対応させる写像であり、 x についてのフーリエ変換 \mathcal{F}_x を用いて

$$\mathcal{F}_x[e^{it\Delta} f](x) = e^{-it|\xi|^2} \mathcal{F}_x[f](\xi)$$

により定義される。なお、(1.1) のような連立系では積分方程式も連立系となる。逐次近似法は解を初期値で冪級数展開することに相当するため、初期値から解への写像は解析的になる。(つまり、適切性の定義よりも強いことが得られる。) 対偶を考えると、ある $k \in \mathbb{N}$ に対して初期値から解への写像が C^k 級でないことが示されると、逐次近似法による解の構成は不可能であることが得られる。

逐次近似法において極限関数の存在を得るためには $\{u_n\}$ がコーシー列であることを示す必要があり、その際に非線形項の評価が重要となる。非線形項の評価は関数の正則性 (ソボレフ指数 s) が小さいほど難しくなる。例えば不等式

$$\|fg\|_{H^s} \leq C \|f\|_{H^s} \|g\|_{H^s}$$

は $s > \frac{d}{2}$ でなければ成立しない。そのため、適切性が成立するソボレフ指数 s の値の範囲を決定するという問題は、適切性が成立する s の下限を求める問題となる。そのような s の下限の一つの目安として、尺度変換から定まる尺度臨界指数が挙げられる。連立系 (1.1) は尺度変換

$$A_\lambda(t, x) = \lambda^{-1} A(\lambda^{-2}t, \lambda^{-1}x) \quad (A = (u, v, w))$$

によって不変であり, $s_c = \frac{d}{2} - 1$ に対しては初期値の斉次ソボレフノルムも不変となる. すなわち,

$$\|A_\lambda(0, x)\|_{\dot{H}^{s_c}} = \|A(0, x)\|_{\dot{H}^{s_c}}$$

が成立する. この s_c を尺度臨界指数と呼ぶ. 尺度臨界指数は方程式の線形部分と非線形部分の影響が釣り合いを取る指数であり, $s < s_c$ の場合には非線形項の影響が大きくなる. そのため, $s < s_c$ では逐次近似法によって適切性を得ることは出来ない. (実際, 連立系 (1.1) の初期値から解への写像は C^2 級にならない.) したがって, 本講演では $s \geq s_c$ の範囲で適切性が成立するための s の下限を決定する.

2 先行結果および主結果

まず, 単独の非線形シュレディンガー方程式の先行結果について述べる. Mizohata ([13]) は b を既知の \mathbb{R}^d 値関数とする線形シュレディンガー方程式

$$i\partial_t u + \Delta u = b(x) \cdot \nabla u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (2.1)$$

が $L^2(\mathbb{R}^d)$ において適切であるための必要条件は

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d, \omega \in \mathbb{S}^{d-1}, R > 0} \left| \operatorname{Re} \int_0^R b(x + r\omega) \cdot \omega dr \right| < \infty \quad (2.2)$$

であることを示している. この必要条件を満たす b の例としては, \mathbf{c} を定数ベクトル, $\epsilon > 0$ として $b(x) = \mathbf{c}(1 + |x|)^{-1-\epsilon}$ が挙げられる. したがって, (2.1) の適切性を得るためには, b に空間遠方での減衰のような仮定が必要であることが分かる.

シュレディンガー方程式 (2.1) において b を未知関数 u とした 1 次元非線形シュレディンガー方程式

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = u \partial_x u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

は任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $H^s(\mathbb{R})$ において非適切となることが, Christ ([4]) によって示されている. これは, $H^s(\mathbb{R})$ に属する関数には (2.2) に相当する条件が課されていないことが原因だと考えられる. 実際, Ozawa ([14]) は初期値 $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ に付加条件

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^x u_0(y) dy \right| < \infty$$

を課すことで, (2.3) の適切性を得ている.

一方, Grünrock ([6]), Hirayama ([7]) によって

$$i\partial_t u + \Delta u = \partial_{x_k}(\bar{u}^2), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

が $d = 1$ のとき $L^2(\mathbb{R})$ で適切, $d \geq 2$ のとき $s \geq \frac{d}{2} - \frac{1}{m-1}$ に対する $H^s(\mathbb{R}^d)$ で適切であることが示されている. このことから, 単独の微分型非線形シュレディンガー

方程式の構造は、非線形項の形によって異なることが見て取れる。連立系 (1.1) においては、このような構造の違いは線形項のパラメーター α, β, γ の取る値によって決定される。

連立系 (1.1) の $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ における適切性が得られるための s の条件は

$$\begin{aligned}\mu &:= \alpha\beta\gamma \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} \right), \\ \kappa &:= (\alpha - \beta)(\beta + \gamma)(\gamma - \alpha), \quad \tilde{\kappa} := (\beta + \gamma)(\gamma - \alpha)\end{aligned}\tag{2.4}$$

の値によって決まり、[7], [8] において次の表のように分類されている。

(I) $\kappa \neq 0$ のとき

	$d = 1$	$d = 2, 3$	$d \geq 4$
$\mu > 0$	* $s \geq 0$ で適切	$s \geq s_c$ で適切	$s \geq s_c$ で適切
$\mu = 0$	$s \geq 1$ で適切	$s \geq 1$ で適切	
$\mu < 0$	$s \geq 1/2$ で適切	$s \geq 1/2$ かつ $s > s_c$ で適切	

(II) $\kappa = 0$ のとき (このときは $\mu < 0$ となる)

	$d = 1$	$d = 2, 3$	$d \geq 4$
$\alpha - \beta = 0$ かつ $\tilde{\kappa} \neq 0$	$s \geq 1/2$ で適切	* $s > 1$ で適切	$s > s_c$ で適切
$\alpha - \beta \neq 0$	全ての $s \in \mathbb{R}$ で解写像が C^2 級にならない		

さらに、 $\mu = 0$ では $s < 1$ で、 $\mu < 0$ では $s < 1/2$ で、初期値から解への写像が C^2 級にならないことも示されている。したがって、表中の網掛けされていない (* が付いていない) 箇所については、逐次近似法によって適切性が得られるソボレフ指数 s の下限は明らかになっている。(ただし、一部の条件下では $s = s_c$ における適切性は未解決。) なお、 $\mu, \kappa, \tilde{\kappa}$ がどのように導出されるかについては、3節で連立系 (1.1) の共鳴構造とともに説明する。本講演の主結果は、表中の網掛けされている (* が付いている) 箇所についての以下の定理である。

定理 2.1 (主結果 1). $d = 1$ かつ $\mu > 0$ とする。 $s < 0$ に対して連立系 (1.1) の初期値から解への写像は $\mathcal{H}^s(\mathbb{R})$ において C^3 級にならない。

定理 2.2 (主結果 2). $d \in \{2, 3\}$ とし、 $\alpha - \beta = 0$ かつ $\tilde{\kappa} \neq 0$ とする。 $s \geq \frac{1}{2}$ かつ $s > s_c$ なる s に対して連立系 (1.1) は $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ において時間局所的適切である。

注意 2.3. これらの主結果により、表中の網掛けされている箇所についても、逐次近似法で適切性が得られる s の下限が決定されたことになる。(ただし、主結果 2 において $d = 3, s = s_c (= \frac{1}{2})$ における適切性は未解決.)

なお、上記の表を見ると分かるように、 $\kappa \neq 0$ のときは $\mu = 0$ の場合が適切性の観点では最も悪い結果となっている。(適切性が得られる s の下限が大きい。) しか

し, 初期値に球対称性を課すことで, $\kappa \neq 0, \mu = 0, d = 2, 3$ の場合も $s > \frac{1}{2}$ における適切性が得られる ([9]). また, $\mu = 0$ は質量共鳴条件という特別な条件であり, このような条件下では, 連立系 (1.1) の非線形項の代わりに零構造という構造を持つ非線形項を考えることで, より小さな s に対する適切性や小さな初期値に対する解の時間漸近挙動が得られる. 零構造を持つ非線形シュレディンガー系についての結果は [10], [11] で得られており, [12], [15] では零構造を一般化した非線形項を扱っており, 連立系 (1.1) の漸近挙動についての結果も得ている.

以下では, $\langle \cdot \rangle := 1 + |\cdot|$ とし, 関数 $f(x), f(t, \xi)$ の x についてのフーリエ変換をそれぞれ $\widehat{f}(\xi), \widehat{f}(t, \xi)$, もしくは $\mathcal{F}_x[f](\xi), \mathcal{F}_x[f](t, \xi)$ で表す. また, 定数 $C > 1$ が存在して $A \leq CB$ が成立するとき $A \lesssim B$ と書き, $CA \leq B$ が成立するとき $A \ll B$ と書く. さらに, $A \lesssim B$ かつ $B \lesssim A$ が成立するとき $A \sim B$ と書く. 次のことに注意する.

命題 2.4. $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}^d$ が $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$ および $|\xi_1| \geq |\xi_2| \geq |\xi_3|$ を満たしているとする. このとき, $|\xi_1| \sim |\xi_2|$ が成立する.

証明. $|\xi_2| \lesssim |\xi_1|$ は明らか. また, $\xi_1 = -\xi_2 - \xi_3$ より

$$|\xi_1| \leq |\xi_2| + |\xi_3| \leq 2|\xi_2|$$

なので, $|\xi_1| \lesssim |\xi_2|$ が得られる. □

命題 2.5. $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^d$ が $|\xi_1| \gg |\xi_2|$ を満たしているとする. このとき, $|\xi_1 + \xi_2| \sim |\xi_1|$, $|\xi_1| + |\xi_2| \sim |\xi_1|$ が成立する.

証明. $|\xi_1| \gg |\xi_2|$ より, ある $C > 1$ に対して $|\xi_2| \leq \frac{1}{C}|\xi_1|$ が成立するので,

$$\frac{C-1}{C}|\xi_1| \leq |\xi_1| - |\xi_2| \leq |\xi_1 + \xi_2| \leq |\xi_1| + |\xi_2| \leq \frac{C+1}{C}|\xi_1|$$

が得られる. □

注意 2.6. 命題 2.4 により, $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0, |\xi_1| \geq |\xi_2| \geq |\xi_3|$ であるとき, $|\xi_1| \sim |\xi_2| \sim |\xi_3|$ または $|\xi_1| \sim |\xi_2| \gg |\xi_3|$ のどちらかが成立する.

3 共鳴構造

本節では, (2.4) の μ, κ がどのような経緯で現れるのかを説明する. シュレディンガー方程式は分散型方程式と呼ばれるものの一種であり, 解が周波数領域において振動成分を持つという特徴がある. 例えば, 線形シュレディンガー方程式

$$i\partial_t u + \Delta u = 0$$

の初期値 u_0 における解は $u(t) = e^{it\Delta}u_0$ であり, 解の x についてのフーリエ変換は

$$\widehat{u}(t, \xi) = e^{-it|\xi|^2} \widehat{u}_0(\xi), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

となる. したがって, 解は周波数領域において振動成分 $e^{-it|\xi|^2}$ を持つ. 例えば, 1次元線形シュレディンガー方程式の解に対しては, 振動成分 $e^{-it\xi^2}$ を利用することで平滑化効果

$$\| |\partial_x|^{\frac{1}{2}} u \|_{L_x^\infty L_t^2} \lesssim \| u_0 \|_{L_x^2}$$

が得られる. この評価式は, 解の正則性が初期値の正則性よりも $\frac{1}{2}$ 階分高くなることを意味している. ただし, 分散型方程式の解の平滑化効果は各時刻では成立せず, t についての積分を行うことで得られる. このような平滑化効果を非線形相互作用からも引き出すことが, より小さなソボレフ指数 s に対する適切性を導くための鍵となる.

非線形相互作用によってどのような振動成分が現れるのかを見るために, 連立系 (1.1) の第3式の両辺を x についてフーリエ変換し,

$$\widehat{f}(t, \xi) = e^{it\alpha|\xi|^2} \widehat{u}(t, \xi), \quad \widehat{g}(t, \xi) = e^{it\beta|\xi|^2} \widehat{v}(t, \xi), \quad \widehat{h}(t, \xi) = e^{it\gamma|\xi|^2} \widehat{w}(t, \xi)$$

と置くと次の式が得られる.

$$e^{-it\gamma|\xi|^2} \partial_t \widehat{h}(t, \xi) = \sum_{j=1}^d \xi (e^{-it\alpha|\xi|^2} \widehat{f}_j(t, \xi)) *_{\xi} (e^{it\beta|\xi|^2} \overline{\widehat{g}_j(t, -\xi)}).$$

ここで $*_{\xi}$ は ξ についての畳み込みであり, f_j, g_j はそれぞれベクトル値関数 f, g の第 j 成分である. さらに, 両辺に $e^{it\gamma|\xi|^2}$ をかけて畳み込みの計算を行うと次が得られる.

$$\partial_t \widehat{h}(t, \xi) = \xi \int_{\mathbb{R}^d} e^{-it(\alpha|\xi_1|^2 - \beta|\xi_1 - \xi|^2 - \gamma|\xi|^2)} \widehat{f}(t, \xi_1) \overline{\widehat{g}(t, \xi_1 - \xi)} d\xi_1. \quad (3.1)$$

したがって, この右辺から平滑化効果を得るためには振動成分

$$\Phi(\xi, \xi_1) := \alpha|\xi_1|^2 - \beta|\xi_1 - \xi|^2 - \gamma|\xi|^2 \quad (3.2)$$

を利用する必要がある. もしも $\Phi(\xi, \xi_1) \neq 0$ であれば, (3.1) の両辺を $[0, t]$ において積分し, 部分積分を行うことで $\Phi(\xi, \xi_1)^{-1}$ が現れる. 特に, $|\Phi(\xi, \xi_1)| \sim |\xi|^\delta$ ($\delta > 0$) の場合には, $|\Phi(\xi, \xi_1)|^{-1}$ は周波数領域における減衰因子となり, これを用いることで平滑化効果を引き出すことが出来る. 6節において定義を与えるフーリエ制限ノルムを用いる際にも, 同様の効果が得られる.

振動成分が $\Phi(\xi, \xi_1) = 0$ となるとき, 共鳴が生じると言う. 共鳴が生じる場合には, 時間変数での積分を行っても周波数領域における減衰因子は得られないため, 平滑化効果を得ることは出来ない. 共鳴が生じるか否かは, f (つまり u) の周波数 ξ_1, g (つまり v) の周波数 $\xi_1 - \xi$, および h (つまり w) の周波数 ξ の大きさの関係によって決まり, 次のことが成立する.

命題 3.1. $\Phi(\xi, \xi_1)$ は (3.2) のものとし, μ, κ は (2.4) のものとする.

(i) $\kappa \neq 0$ とする. $D_1, D_2, D_3 \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ を

$$D_1 := \{(\xi, \xi_1) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mid |\xi_1| \ll |\xi_1 - \xi| \sim |\xi|\},$$

$$D_2 := \{(\xi, \xi_1) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mid |\xi_1 - \xi| \ll |\xi| \sim |\xi_1|\},$$

$$D_3 := \{(\xi, \xi_1) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mid |\xi| \ll |\xi_1| \sim |\xi_1 - \xi|\}$$

により定めるとき, $D := D_1 \cup D_2 \cup D_3$ において

$$|\Phi(\xi, \xi_1)| \sim \max\{|\xi_1|^2, |\xi_1 - \xi|^2, |\xi|^2\}$$

が成立する.

(ii) $\mu > 0$ (このとき $\kappa \neq 0$ となる) のとき, $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \setminus \{(0, 0)\}$ において

$$|\Phi(\xi, \xi_1)| \sim \max\{|\xi_1|^2, |\xi_1 - \xi|^2, |\xi|^2\}$$

が成立する.

証明. $|\xi_1| \geq |\xi_1 - \xi| \geq |\xi|$ の場合のみ考える. このとき, 命題 2.4 より $|\xi_1| \sim |\xi_1 - \xi| \gtrsim |\xi|$ であり, $|\Phi(\xi, \xi_1)| \lesssim |\xi_1|^2$ は明らかに成立する. $\Phi(\xi, \xi_1)$ を ξ_1 と ξ の 2 次形式と捉えて平方完成すると

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \xi_1) &= (\alpha - \beta)|\xi_1|^2 + 2\beta\xi \cdot \xi_1 - (\beta + \gamma)|\xi|^2 \\ &= (\alpha - \beta) \left| \xi_1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta}\xi \right|^2 + \frac{\mu}{\alpha - \beta}|\xi|^2 \end{aligned}$$

が得られる, よって, もし $|\xi| \ll |\xi_1| \sim |\xi_1 - \xi|$ なら命題 2.5 により $|\Phi(\xi, \xi_1)| \sim |\xi_1|^2$ が成立する. また, $\Phi(\xi, \xi_1)$ を ξ_1 と $\xi_1 - \xi$ の 2 次形式と捉えれば, 同様にして

$$\Phi(\xi, \xi_1) = (\alpha - \gamma) \left| \xi_1 + \frac{\beta}{\alpha - \gamma}(\xi_1 - \xi) \right|^2 + \frac{\mu}{\alpha - \gamma}|\xi_1 - \xi|^2$$

が得られる. よって, もし $\mu > 0$ なら

$$|\Phi(\xi, \xi_1)| \geq \frac{\mu}{\alpha - \gamma}|\xi_1 - \xi|^2 \sim |\xi_1|^2$$

が成立する. □

命題 3.1 により, $\kappa \neq 0$ のときには $|\xi_1| \sim |\xi_1 - \xi| \sim |\xi|$ となる領域を除いて共鳴が生じないことが分かる. 特に, $\mu > 0$ のときには, 共鳴が生じるのは $\xi = \xi_1 = 0$ の場合のみである. したがって, $\mu > 0$ の場合には常に非線形相互作用から平滑化効果を引き出すことが出来る. $\mu > 0$ のときの適切性が成立する s の下限が小さくなるのはこのような理由による. なお, $\kappa = 0$ のときには D においても共鳴が生じ

る. このような現象は単独の非線形シュレディンガー方程式 (2.3) においても現れ, Christ ([4]) による非適切性の結果は, D のように周波数の大きさに差が生じる領域における共鳴現象を利用して得られている. 特に $\tilde{\kappa} = 0$ のときには, (1.1) の共鳴構造は (2.3) と類似のものとなるため, 前節の表に見られるように逐次近似法で適切性を得ることは出来ない. 一方 $\kappa = 0$ でも $\tilde{\kappa} \neq 0$ の場合には, D_3 で共鳴が生じるものの $D_1 \cup D_2$ においては共鳴が生じない. このことは (2.3) とは異なる点であり, その結果として適切性を得ることが可能となる. これについては次節で詳しく説明をする.

4 可微分性の損失

連立系 (1.1) や単独非線形シュレディンガー方程式 (2.3) は非線形項に空間微分が含まれており, それにより評価を得ることが難しくなる. 例えば, 非線形項が空間微分を含まない u^2 の場合には,

$$\|u^2\|_{H^s} \lesssim \|u\|_{H^s}^2$$

が $s > \frac{d}{2}$ であれば成立するため, $C([0, T]; H^s)$ において非線形項の評価を閉じさせることが出来る. 一方, (2.3) のように非線形項に空間微分を含む場合には, このような積の評価式を用いたとしても

$$\|u\partial_x u\|_{H^s} \lesssim \|u\|_{H^s} \|\partial_x u\|_{H^s} \lesssim \|u\|_{H^s} \|u\|_{H^{s+1}}$$

しか得られないため, 評価を閉じさせるには $s+1$ の正則性が必要となる. しかし, H^{s+1} で評価を閉じさせようとする, 今度は $s+2$ の正則性が必要となってしまい, どれだけ (有限の) 大きな正則性を仮定したとしても, 平滑化効果等の道具なしでは $C([0, T]; H^s)$ で評価を閉じさせることは出来ない. このような問題点を可微分性の損失と呼ぶ. ただし, 非線形項のフーリエ変換を考えると, 可微分性の損失が本質的に問題となる周波数領域とそうでない領域に分けることが出来る. そこで, $d=1$ の場合の連立系 (1.1) の第 1 式の非線形項 $(\partial_x w)v$ を例にとって考察する. 今, $N \geq 1$ に対して

$$B_N := \{\xi \in \mathbb{R} \mid |\xi| \sim N\}$$

と置き, $\text{supp } \hat{v} \subset B_M$, $\text{supp } \hat{w} \subset B_L$ とする. (\hat{v}, \hat{w} は (t, ξ) の関数であるが, ここでは $t \in \mathbb{R}$ を固定して ξ のみの関数として考える.) 考えられる場合は次の 3通りである.

$$(a) M \sim L \quad (b) M \gg L \quad (c) M \ll L$$

まず, (a) の場合について考える. $\xi \in \text{supp } \mathcal{F}_x[(\partial_x w)v]$ とすると畳み込みの台の性質から

$$|\xi| \leq L + M \sim L \sim M$$

となるため,

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle^s |\mathcal{F}_x[(\partial_x w)v]| &\lesssim \langle \xi \rangle^s |(\widehat{\partial_x w}) *_{\xi} \widehat{v}| \lesssim |(L^{\frac{s+1}{2}} \widehat{w}) *_{\xi} (M^{\frac{s+1}{2}} \widehat{v})| \\ &\lesssim |\mathcal{F}_x[(\langle \partial_x \rangle^{\frac{s+1}{2}} w)(\langle \partial_x \rangle^{\frac{s+1}{2}} v)]| \end{aligned}$$

が得られる. したがって, ヘルダーの不等式とソボレフの不等式から

$$\|(\partial_x w)v\|_{H^s} \lesssim \|\langle \partial_x \rangle^{\frac{s+1}{2}} w\|_{L^4} \|\langle \partial_x \rangle^{\frac{s+1}{2}} v\|_{L^4} \lesssim \|w\|_{H^{\frac{s+1}{2}+\frac{1}{4}}} \|v\|_{H^{\frac{s+1}{2}+\frac{1}{4}}}$$

が導かれる. これより, $s \geq \frac{3}{2}$ であれば $\frac{s+1}{2} + \frac{1}{4} \leq s$ となるため, $C([0, T]; H^s)$ において非線形項の評価を閉じることが出来る.

次に (b) の場合を考える. $\xi \in \text{supp } \mathcal{F}_x[(\partial_x w)v]$ は $\xi_1 \in \text{supp } \widehat{w}$ と $\xi_2 \in \text{supp } \widehat{v}$ を用いて $\xi = \xi_1 + \xi_2$ と表されるから, 命題 2.5 により $|\xi| = |\xi_1 + \xi_2| \sim M$ となる. よって

$$\langle \xi \rangle^s |\mathcal{F}_x[(\partial_x w)v]| \sim |(\widehat{\partial_x w}) *_{\xi} (M^s \widehat{v})| \lesssim |\mathcal{F}_x[(\partial_x w)\langle \partial_x \rangle^s v]|$$

が得られる. したがって, ヘルダーの不等式とソボレフの不等式から

$$\|(\partial_x w)v\|_{H^s} \lesssim \|\langle \partial_x \rangle w\|_{L^\infty} \|\langle \partial_x \rangle^s v\|_{L^2} \lesssim \|w\|_{H^{1+\frac{1}{2}+\epsilon}} \|v\|_{H^s}$$

が任意の $\epsilon > 0$ に対して導かれる. これより, $s > \frac{3}{2}$ であれば $C([0, T]; H^s)$ において非線形項の評価を閉じることが出来る.

最後に (c) の場合について考える. (b) の場合と同様の議論により $|\xi| \sim L$ なので,

$$\langle \xi \rangle^s |\mathcal{F}_x[(\partial_x w)v]| \sim |(L^{s+1} \widehat{w}) *_{\xi} \widehat{v}| \sim |\mathcal{F}_x[(\langle \partial_x \rangle^{s+1} w)v]|$$

が導かれるが, $M \ll L$ であることから (a), (b) の場合のように $\langle \partial_x \rangle$ を v に押し付けることが出来ないため, $\langle \partial_x \rangle^{s+1} w$ を評価することが出来ない. したがって, 平滑化効果等の道具なしでは $C([0, T]; H^s)$ で評価は閉じない. ここで $\text{supp } \widehat{u} \subset B_N$ として (1.1) の第 3 式の非線形項 $\partial_x(u\bar{v})$ に対して同様の考察を行うと,

$$\partial_x(u\bar{v}) = (\partial_x u)\bar{v} + u(\partial_x \bar{v})$$

であることから $N \gg M$ または $N \ll M$ のときに (c) の場合と同じ問題が生じる.

以上のことから, 可微分性の損失が本質的に問題となるのは,

- (i) 周波数の大きさに差が生じている
- (ii) 高周波に台を持つ関数に空間微分がかかっている

の 2 つを同時に満たす場合に限られることが分かる. 連立系 (1.1) では, 第 1 式, 第 2 式において非線形項の微分は w にかかっているため, w が u または v に比べて大きな周波数を持つ領域で可微分性の損失が問題となる. 第 3 式で問題となるのも同じ領域である. しかし, 命題 3.1 で見たように, $\tilde{\kappa} \neq 0$ の場合にはそのような領域である $D_1 \cup D_2$ においては共鳴が生じない. したがって, 可微分性の損失による悪さを非共鳴性による平滑化効果によってカバーすることが出来る. これが $\kappa = 0$ でも $\tilde{\kappa} \neq 0$ であれば適切性が得られる理由である. 一方で, 単独の非線形シュレディンガー方程式 (2.3) が非適切となるのは, 可微分性の損失が問題となる領域においても共鳴が生じるためである.

5 主結果1の証明の概略

本節では $d = 1, \mu > 0$ とする. 前節までの議論により, 適切性を示すことが困難となるのは可微分性の損失が問題となり, かつ共鳴が生じる場合である. したがって, そのような周波数領域に台を持つ関数を初期値として与えることで, 初期値から解への写像が解析的でないことが示される. 通常, 2次の非線形項で解析性の崩れを導く場合には, そのような初期値に対して逐次近似の第2項の H^s ノルムが増大することを示すことが多い. その理由は, 逐次近似の第2項に非線形相互作用による共鳴構造が反映されるためである. そのことを見るために連立系 (1.1) の第1式を積分方程式に書き直すと

$$u(t) = e^{it\alpha\partial_x^2} u_0 + i \int_0^t e^{i(t-t')\alpha\partial_x^2} (\partial_x w(t')) v(t') dt'$$

となる. これより, v, w にそれぞれ $v_1(t) = e^{it\beta\partial_x^2} v_0, w_1(t) = e^{it\gamma\partial_x^2} w_0$ を代入することで, 逐次近似の第2項 u_2 のフーリエ変換 \widehat{u}_2 は

$$\widehat{u}_2(t, \xi) = e^{-it\alpha\xi^2} u_0 - \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^t e^{-it'\Phi(\xi, \xi_1)} dt' \right) \xi_1 \widehat{w}_0(\xi_1) \widehat{v}_0(\xi - \xi_1) d\xi_1$$

となり, 3節で登場した振動成分が現れる. しかし, $\mu > 0$ の場合には命題 3.1 により共鳴は生じず, 振動成分の時間積分によって ξ についての減衰因子が生じてしまう. そのため, $s < 0$ という仮定だけでは u_2 の H^s ノルムの増大を示すことは出来ない. この問題点を克服するために, Bourgain ([3]) による逐次近似第3項まで考える方法を用いる. そこで, $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して

$$\mathcal{I}_\sigma(f)(t) := i \int_0^t e^{i(t-t')\sigma\partial_x^2} f(t') dt'$$

により写像 \mathcal{I} を定め,

$$\begin{aligned} u^{(1)}(t) &:= u_1(t) = e^{it\alpha\partial_x^2} u_0, \quad v^{(1)}(t) := v_1(t) = e^{it\beta\partial_x^2} v_0, \quad w^{(1)}(t) := w_1(t) = e^{it\gamma\partial_x^2} w_0, \\ u^{(2)}(t) &:= \mathcal{I}_\alpha((\partial_x w^{(1)})v^{(1)})(t), \quad v^{(2)}(t) := \mathcal{I}_\beta((\partial_x \overline{w^{(1)}})u^{(1)})(t), \quad w^{(2)}(t) = \mathcal{I}_\gamma((\partial_x (u^{(1)}\overline{v^{(1)}}))(t) \\ u^{(3)}(t) &:= \mathcal{I}_\alpha((\partial_x w^{(1)})v^{(2)})(t) - \mathcal{I}_\alpha((\partial_x w^{(2)})v^{(1)})(t) - \mathcal{I}_\alpha((\partial_x w^{(2)})v^{(2)})(t) \end{aligned}$$

と置く. このとき,

$$u_3(t) = u^{(1)}(t) + u^{(2)}(t) + u^{(3)}(t)$$

であり, 特に $v_0 = 0$ の場合には $v^{(1)} = u^{(2)} = w^{(2)} = 0$ となるため,

$$u_3(t) = u^{(1)}(t) + \mathcal{I}_\alpha((\partial_x w^{(1)})v^{(2)})(t)$$

を得る. この右辺の第2項のフーリエ変換を計算すると,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x[\mathcal{I}_\alpha((\partial_x w^{(1)})v^{(2)})] &= e^{-it\alpha\xi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t e^{it'\Phi(\xi, \xi_1)} \int_0^{t'} e^{-it''\Phi(\xi - \xi_1 + \xi_2, \xi_2)} dt'' dt' \right) \\ &\quad \times \xi_1 \xi_2 \widehat{w}_0(\xi_1) \overline{\widehat{w}_0(\xi_2)} \widehat{u}_0(\xi - \xi_1 + \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

が得られる. そのため, $\xi_3 := \xi - \xi_1 + \xi_2$ と置くと, 振動成分の和

$$\Psi(\xi, \xi_1, \xi_2) := \Phi(\xi, \xi_1) + \Phi(\xi_3, \xi_2) = (\xi_1 - \xi_2)\{2(\alpha\xi_3 - \gamma\xi_2) + (\alpha - \gamma)(\xi_1 - \xi_2)\}$$

が小さくなるような周波数領域に台を持つ初期値 u_0, w_0 を与えることで, $u_3(t)$ の H^s ノルムの増大を $s < 0$ に対して示すことが出来る. 実際に, 次のことが得られる.

命題 5.1. $d = 1, \mu > 0, s < 0, 0 < T \ll 1$ とする. このとき, $k = \frac{\gamma}{\alpha}$ および十分大きな $N \in \mathbb{N}$ に対して $u_0, w_0 \in H^s(\mathbb{R})$ を

$$\widehat{u}_0(\xi) = N^{-s} \mathbf{1}_{[kN, kN+1]}(\xi), \quad \widehat{w}_0(\xi) = N^{-s} \mathbf{1}_{[N, N+1]}(\xi)$$

を満たすように選ぶと,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u^{(3)}(t)\|_{H^s} \gtrsim N^{-2s}$$

が成立する.

命題 5.1 により, $s < 0$ において逐次近似第 3 項の H^s ノルムが増大することが示されるため, 主結果 1 が得られる.

6 主結果 2 の証明の概略

本節では $\tilde{\kappa} \neq 0, \alpha - \beta = 0$ とし, 簡単のため $d = 2$ の場合のみ考える. 4 節で見たように, $\tilde{\kappa} \neq 0$ であれば可微分性の損失が問題となる領域において共鳴が起こらないため, 非共鳴性による平滑化効果を用いることで適切性を得ることが出来る. しかし, 命題 3.1 のように共鳴構造を周波数の大きさのみで捉えてしまうと, 目標となる $s \geq \frac{1}{2}$ での適切性は得られない. 先行研究 ([7]) で $s > 1$ での適切性しか得られていない (1 節の表を参照) のはそのためである. $\kappa \neq 0$ かつ $\mu < 0$ の場合にも同様のことが当てはまり, この場合に [7] では $s \geq 1$ での適切性しか得られていない. その結果を改善するために, [8] では共鳴構造を周波数の大きさと方向で捉える (多次元では周波数 ξ はベクトルであることに注意する) ことで, より精密な非線形項の評価を導いた. 本講演においてもその方針で主結果 2 を示す. ここでは, 連立系 (1.1) の第 3 式 of 非線形項 $\nabla(u \cdot \bar{v})$ に対する評価のみ考えることとする. u の周波数ベクトルを ξ_1, v の周波数ベクトルを ξ_2 とし, そこで $\xi := \xi_1 - \xi_2$ と置く. (ξ は $u \cdot \bar{v}$ の周波数ベクトルである.) このとき, (3.2) の $\Phi(\xi, \xi_1)$ を ξ_1, ξ_2 のなす角 θ_{12} を用いて表すと

$$\Phi(\xi, \xi_1) = \{(\alpha - \gamma)|\xi_1| + (\alpha + \gamma)|\xi_2|\}(|\xi_1| - |\xi_2|) - 2\gamma|\xi_1||\xi_2|(1 - \cos \theta_{12})$$

となる. したがって,

$$|\xi_1| \sim |\xi_2| \gtrsim |\xi| \text{ かつ } |\theta_{12}| \ll (|\xi_1||\xi_2|)^{-\frac{1}{2}} \quad (6.1)$$

となる領域で共鳴が生じる. このことから, 精密な非線形項の評価を導くために周波数領域を大きさと角度によって分割する.

6.1 周波数領域の分割

まず, $N \in 2^{\mathbb{N}}$ として P_1, P_N を非斉次のリトルウッド・ペーリー分解作用素とする. つまり, P_1, P_N は

$$\text{supp } \mathcal{F}_x[P_1 f] \subset \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi| \lesssim 1\}, \quad \text{supp } \mathcal{F}_x[P_N f] \subset \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi| \sim N\}$$

および

$$P_1 f + \sum_{N \in 2^{\mathbb{N}}} P_N f = f$$

を満たす作用素とする. これを用いて

$$u = P_1 u + \sum_{N_1 \in 2^{\mathbb{N}}} P_{N_1} u, \quad v = P_1 v + \sum_{N_2 \in 2^{\mathbb{N}}} P_{N_2} v$$

と分解する.

次に, \mathbb{R} 上の 1 の分割 $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ を

$$\text{supp } \omega_k \subset [k-2, k+2]$$

を満たすように取り, $A \in 2^{\mathbb{N}}$ と $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\omega_k^A(\theta) := \omega_k(\pi^{-1} A \theta) + \omega_{k-A}(\pi^{-1} A \theta)$$

と置く. このとき ω_k^A は

$$\Theta_k^A := [\pi A^{-1}(k-2), \pi A^{-1}(k+2)] \cup [-\pi + \pi A^{-1}(k-2), -\pi + \pi A^{-1}(k+2)]$$

に台を持ち, $\{\omega_k^A\}_{k=0}^{A-1}$ は $[-\pi, \pi]$ 上の 1 の分割となる. さらに作用素 R_k^A を

$$\mathcal{F}_x[R_k^A f](\xi) = \omega_k^A(\theta) \widehat{f}(\xi), \quad \xi = |\xi|(\cos \theta, \sin \theta)$$

により定めると

$$\text{supp } \mathcal{F}_x[R_k^A f] \subset D_k^A := \{\xi = |\xi|(\cos \theta, \sin \theta) \mid \theta \in \Theta_k^A\}, \quad \sum_{k=0}^{A-1} R_k^A f = f$$

が成り立つ. また, $M \in 2^{\mathbb{N}}$, $M \geq 64$ に対して周波数領域 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ は

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &= \left(\bigcup_{\substack{0 \leq k_1, k_2 \leq M-1 \\ |k_1 - k_2| \leq 16}} D_{k_1}^M \times D_{k_2}^M \right) \cup \left(\bigcup_{64 \leq A \leq M} \bigcup_{\substack{0 \leq k_1, k_2 \leq A-1 \\ 16 \leq |k_1 - k_2| \leq 32}} D_{k_1}^A \times D_{k_2}^A \right) \\ &=: \Omega_1 \cup \Omega_2 \end{aligned}$$

と分解される. これは ξ_1 と ξ_2 のなす角 θ_{12} が $|\theta_{12}| \lesssim M^{-1}$ を満たす領域 Ω_1 と $|\theta_{12}| \gtrsim M^{-1}$ を満たす領域 Ω_2 に分解することを意味している.

6.2 フーリエ制限ノルム

連立系 (1.1) の解を構成する関数空間として Bourgain ([2]) によって導入されたフーリエ制限ノルム

$$\begin{aligned} \|f\|_{X_\sigma^{s,b}} &= \sum_{j=1}^2 \|f_j\|_{X_\sigma^{s,b}} := \sum_{j=1}^2 \|\langle \xi \rangle^s \langle \tau + \sigma|\xi|^2 \rangle^b \mathcal{F}_{tx}[f_j](\tau, \xi)\|_{L_{\tau\xi}^2} \\ &\sim \sum_{j=1}^2 \left(\sum_N \sum_L N^{2s} L^{2b} \|Q_L^\sigma P_N f_j\|_{L_{tx}^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

により定まる空間

$$X_\sigma^{s,b} := \{f = (f_1, f_2) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \mid \|f\|_{X_\sigma^{s,b}} < \infty\}$$

を用いる. ノルムの重みに現れる $\tau + \sigma|\xi|^2$ は, 連立系 (1.1) の線形化方程式

$$i\partial_t u + \sigma\Delta u = 0 \quad (\sigma \in \{\alpha, \gamma\}) \quad (6.2)$$

の時空変数 (t, x) についてのフーリエ変換から決まる曲面

$$\tau + \sigma|\xi|^2 = 0 \quad (6.3)$$

に由来している. また, ここで作用素 Q_L^σ は

$$\text{supp} \mathcal{F}_{tx}[f_j] \subset \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mid |\tau + \sigma|\xi|^2| \sim L\}$$

を満たすリトルウッド・ペーリー分解作用素である. \mathcal{F}_{tx} は時空変数 (t, x) についてのフーリエ変換である. 線形化方程式 (6.2) の解は曲面 (6.3) に台を持つため, フーリエ制限ノルムの空間 $X_\sigma^{s,b}$ は線形化方程式の台の周辺に周波数分布が集中している関数の集合である. したがって, フーリエ制限ノルムの空間で (1.1) の解を構成するということは, 線形化方程式の解に近い周波数分布を持つ解を見つけることを意味する. 逐次近似法で解を構成するために重要となるのは, 次の双線形評価式である.

命題 6.1. $s \geq \frac{1}{2}$ とする. このとき, ある $b > \frac{1}{2}$ が存在して

$$\|\nabla(u \cdot \bar{v})\|_{X_\gamma^{s,b-1}} \lesssim \|u\|_{X_\alpha^{s,b}} \|v\|_{X_\alpha^{s,b}} \quad (6.4)$$

が成立する.

命題 6.1 は連立系 (1.1) の第 3 式の非線形項に対するものであるが, 第 1 式, 第 2 式の非線形項に対しても同様の評価式が得られる. これらの評価式および逐次近似法を用いることで, 連立系 (1.1) の解 (u, v, w) が

$$\mathcal{X}^s := X_\alpha^{s,b} \times X_\alpha^{s,b} \times X_\gamma^{s,b}$$

をある時間区間 $[0, T]$ に制限した空間において構成され, 主定理 2 が得られる.

注意 6.2. (i) $b > \frac{1}{2}$ に対して $X_{\sigma,T}^{s,b}$ は $C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2))$ の部分空間である. 特に,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H^s} \lesssim \|u\|_{X_{\sigma,T}^{s,b}}$$

が成立する.

(ii) 双線形評価式 (6.4) の左辺の指数に $b-1$ が現れているのは, デュアメル項に対する評価式

$$\left\| \psi(t) \int_0^t e^{i(t-t')\gamma\Delta} \nabla(u(t') \cdot \overline{v(t')}) dt' \right\|_{X_{\gamma}^{s,b}} \lesssim \|\nabla(u \cdot \bar{v})\|_{X_{\gamma}^{s,b-1}}$$

が成立するためである. ここで ψ は $[-2, 2]$ に台を持ち, $[-1, 1]$ 上で $\psi(t) = 1$ となる滑らかな関数である.

(iii) $d = 3$ の場合にも $s > s_c (= \frac{1}{2})$ に対して同様の評価式が得られる. しかし, $s = s_c$ での評価式は得られない. その理由は, 角度の分割による A についての足しあげで \log オーダーの発散が生じるためである. 同じことが $\kappa \neq 0$, $\mu < 0$, $d = 3$ の場合にも生じており, この問題の解決は今後の課題の一つである.

6.3 双線形評価式の証明の概略

双線形評価式 (6.4) は $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ とするとき

$$\|\nabla|(u_j \bar{v}_j)|\|_{X_{\gamma}^{s,b-1}} \lesssim \|u_j\|_{X_{\alpha}^{s,b}} \|v_j\|_{X_{\alpha}^{s,b}} \quad (j = 1, 2)$$

から導かれるため, 以下では u, v はスカラー値関数とする. 次の2つの命題が, 双線形評価式 (6.4) を得るための鍵となる.

命題 6.3. $N_1, N_2, N_3, L_1, L_2, L_3, A \in 2^{\mathbb{N}}$ および $0 \leq k_1, k_2 \leq A-1$ は $N_1 \sim N_2 \gtrsim N_3$, $\max\{L_1, L_2, L_3\} \ll N_1^2$, $64 \leq A \leq N_1$, $16 \leq |k_1 - k_2| \leq 32$ を満たしているとする. このとき,

$$\begin{aligned} & \|Q_{L_3}^{\gamma} P_{N_3} (R_{k_1}^A Q_{L_1}^{\alpha} P_{N_1} u \cdot \overline{R_{k_2}^A Q_{L_2}^{\alpha} P_{N_2} v})\|_{L_{tx}^2} \\ & \lesssim A^{\frac{1}{2}} N_1^{-1} L_1^{\frac{1}{2}} L_2^{\frac{1}{2}} L_3^{\frac{1}{2}} \|R_{k_1}^A Q_{L_1}^{\alpha} P_{N_1} u\|_{L_{tx}^2} \|R_{k_2}^A Q_{L_2}^{\alpha} P_{N_2} v\|_{L_{tx}^2} \end{aligned} \quad (6.5)$$

が成立する.

命題 6.4. $N_1, N_2, N_3, L_1, L_2, M \in 2^{\mathbb{N}}$, $0 \leq k_1, k_2 \leq M-1$ は $N_1 \sim N_2 \gtrsim N_3$, $\frac{N_1}{N_3} \ll M$, $|k_1 - k_2| \lesssim 1$ を満たしているとする. このとき,

$$\begin{aligned} & \|P_{N_3} (R_{k_1}^M Q_{L_1}^{\alpha} P_{N_1} u \cdot \overline{R_{k_2}^M Q_{L_2}^{\alpha} P_{N_2} v})\|_{L_{tx}^2} \\ & \lesssim \left(\frac{N_1}{N_3 M} \right)^{\frac{1}{2}} L_1^{\frac{1}{2}} L_2^{\frac{1}{2}} \|R_{k_1}^M Q_{L_1}^{\alpha} P_{N_1} u\|_{L_{tx}^2} \|R_{k_2}^M Q_{L_2}^{\alpha} P_{N_2} v\|_{L_{tx}^2} \end{aligned} \quad (6.6)$$

が成立する.

注意 6.5. (i) 命題 6.3 の条件 $\max\{L_1, L_2, L_3\} \ll N_1^2$ は共鳴に関する条件 $|\Phi(\xi, \xi_1)| \ll |\xi_1|^2$ に対応するものである.

(ii) 命題 6.3 は $\alpha - \beta \neq 0$ の場合でも, $\mu < 0$ であれば成立する.

(iii) 命題 6.4 の条件 $N_1 \sim N_2 \gtrsim N_3$, $|k_1 - k_2| \lesssim 1$ は, 角度を考慮した共鳴に関する条件 (6.1) に対応するものである.

(iv) 命題 6.4 は $\frac{N_1}{N_3} \gtrsim M$ の場合にも成立する. この場合には, ヘルダーの不等式およびストリッカーズ評価と呼ばれる線形シュレディンガー方程式の解に対する評価式

$$\|e^{it\alpha\partial_x^2} u_0\|_{L_{tx}^4} \lesssim \|u_0\|_{L_x^2}$$

を用いることで, より強い評価式

$$\begin{aligned} & \|P_{N_3}(R_{j_1}^M Q_{L_1}^\alpha P_{N_1} u \cdot \overline{R_{j_2}^M Q_{L_2}^\alpha P_{N_2} v})\|_{L_{tx}^2} \\ & \lesssim L_1^{\frac{1}{2}} L_2^{\frac{1}{2}} \|R_{j_1}^M Q_{L_1}^\alpha P_{N_1} u\|_{L_{tx}^2} \|R_{j_2}^M Q_{L_2}^\alpha P_{N_2} v\|_{L_{tx}^2} \end{aligned}$$

が得られる.

(v) 命題 6.3, 6.4 を $M \sim N_1^{\frac{3}{2}} N_3^{-\frac{1}{2}}$, $A \lesssim M$ に対して適用すると

$$\begin{aligned} A^{\frac{1}{2}} N_1^{-1} & \lesssim M^{\frac{1}{2}} N_1^{-1} \sim N_3^{-\frac{1}{4}} N_1^{-\frac{1}{4}} \lesssim N_3^{-1} N_1^{\frac{1}{2}}, \\ \left(\frac{N_1}{N_3 M}\right)^{\frac{1}{2}} & \sim N_3^{-\frac{1}{4}} N_1^{-\frac{1}{4}} \lesssim N_3^{-1} N_1^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

が得られる. N_3^{-1} によって非線形項の微分から生じる可微分性の損失を打ち消すことが出来る. また, 命題 6.1 における s の条件 $s \geq \frac{1}{2}$ は, $N_1^{\frac{1}{2}}$ を N_1^s で評価する際に必要となる.

命題 6.3 は角度成分の分割による領域 Ω_2 における評価式である. Ω_2 では u の周波数ベクトルと v の周波数ベクトルのなす角がある程度の大きさを持っているため, 共鳴の観点では問題とならない. このような領域では Bejenaru-Herr-Tataru ([1]) による非線形 Loomis-Whitney 不等式を用いることが出来る. この不等式は正確に述べるとやや複雑になるため端的に述べると, パラメーター $\lambda_i \in \mathbb{R}^3$ を用いた等式 $\Phi_i(\lambda_i) = 0$ ($i = 1, 2, 3$) によって定まる 3 つの曲面 $S_i \subset \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル $n_i(\lambda_i)$ が, ある $a > 0$ に対して

$$a \leq |\det(n_1(\lambda_1), n_2(\lambda_2), n_3(\lambda_3))| \quad (6.7)$$

を満たしているのであれば, 曲面上に制限した畳み込み評価式

$$\|f * g\|_{L^2(S_3)} \lesssim \frac{1}{\sqrt{a}} \|f\|_{L^2(S_1)} \|g\|_{L^2(S_2)} \quad (6.8)$$

が成立するというものである。ここで、条件 (6.7) を横断性と言う。横断性は、3つの曲面の接空間が正の体積を持って交わるという幾何学的な条件である。

非線形 Loomis-Whitney 不等式 (6.8) を連立系 (1.1) の線形化方程式の時空フーリエ変換から定まる3つの曲面

$$\tau_1 + \alpha|\xi_1|^2 = 0, \quad \tau_2 + \alpha|\xi_2|^2 = 0, \quad \tau_3 + \gamma|\xi_3|^2 = 0$$

に対して適用する。ここでは話を簡単にするため、 (τ_1, ξ_1) , (τ_2, ξ_2) , (τ_3, ξ_3) がそれぞれ u , v , $u\bar{v}$ の時空周波数である場合のみを考える。(つまり、 $\tau_3 = \tau_1 - \tau_2$, $\xi_3 = \xi_1 - \xi_2$ の場合を考える。) このとき、 $\xi_i = (\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$ とするとパラメーターは $\lambda_i = (\tau_i, \xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)})$ であり、 $\sigma_1 = \sigma_2 = \alpha$, $\sigma_3 = \gamma$ とすると単位法線ベクトルは

$$n_i(\lambda_i) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\sigma_i^2|\xi_i|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sigma_i\xi_i^{(1)} \\ 2\sigma_i\xi_i^{(2)} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$$

となる。さらに ξ_3 は $\xi_3 = \xi_1 - \xi_2$ より、

$$|\det(n_1(\lambda_1), n_2(\lambda_2), n_3(\lambda_3))| = \left(\prod_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{1 + 4\sigma_i^2|\xi_i|^2}} \right) \times 4|\alpha^2\gamma\mu| |\xi_1^{(1)}\xi_2^{(2)} - \xi_1^{(2)}\xi_2^{(1)}|$$

が得られる。ここで $(\xi_1, \xi_2) \in D_{k_1}^A \times D_{k_2}^A$ であれば $|\theta_{12}| \sim A^{-1}$ なので、

$$|\xi_1^{(1)}\xi_2^{(2)} - \xi_1^{(2)}\xi_2^{(1)}| \sim |\xi_1||\xi_2| |\sin \theta_{12}| \sim N_1 N_2 A^{-1}$$

となる。したがって、

$$|\det(n_1(\lambda_1), n_2(\lambda_2), n_3(\lambda_3))| \sim \frac{|\alpha^2\gamma\mu| N_1 N_2 A^{-1}}{N_1 N_2 N_3} = |\alpha^2\gamma\mu| N_3^{-1} A^{-1}$$

が得られるが、 $\mu = -\alpha^2 \neq 0$ なので、 S_1, S_2, S_3 は横断性条件 (6.7) を満たしていることが分かる。このように、角度による周波数領域の分割を行うことで、 u の周波数ベクトルと v の周波数ベクトルのなす角が小さくならないという情報を評価に反映させることが出来、曲面の横断性という幾何学的情報と非線形相互作用を結びつけることが出来る。その結果と非線形 Loomis-Whitney 不等式を組み合わせることで、周波数の大きさによる周波数領域の分割しか用いなかった従来の方法よりも精度の高い評価式が得られる。実際に、畳み込み評価式 (6.8) を $a \sim N_3^{-1} A^{-1}$ として適用することで (6.5) が導かれる。ただし、(6.5) の両辺は L^2 ノルムが曲面上に制限したのではなく、厚みを持った領域上でのノルムになっているため、(6.8) を適用する際には厚みの影響を考慮する必要がある。

命題 6.4 は角度成分の分割による領域 Ω_1 領域 Ω_1 では u の周波数ベクトルと v の周波数ベクトルのなす角 θ_{12} の大きさが小さくなるため、 Ω_2 における評価のように非線形 Loomis-Whitney 評価式を用いることは出来ない。しかし、 Ω_1 は角度の範囲

が M^{-1} 程度であることに着目すると, M がある程度大きい場合には $(\xi_1, \xi_2) \in \Omega_1$ に対して $\xi_1 - \xi_2$ の動く範囲は制限される. このことを確かめるために, $N_1 \sim N_2 \gtrsim N_3$, $|k_1 - k_2| \lesssim 1$ として共鳴が生じる領域

$$\Omega := \{(\xi_1, \xi_2) \in D_{k_1}^M \times D_{k_2}^M \mid |\xi_1| \sim N_1, |\xi_2| \sim N_2, |\xi_1 - \xi_2| \sim N_3\}$$

を考えると, 回転によって

$$\tilde{\Omega} := \{(\xi_1, \xi_2) \in D_{k_1 - k_2}^M \times D_0^M \mid |\xi_1| \sim |\xi_2| \sim N_1, |\xi_1 - \xi_2| \sim N_3\}$$

に等積変換される. ここで $\xi_i = (\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}) = |\xi_i|(\cos \theta_i, \sin \theta_i)$ ($i = 1, 2$) とすると,

$$\frac{N_1}{N_3} \ll M$$

の場合には $|k_1 - k_2| \lesssim 1$ より

$$|\xi_1^{(2)} - \xi_2^{(2)}| \leq |\xi_1| |\sin \theta_1| + |\xi_2| |\sin \theta_2| \lesssim (N_1 + N_2)M^{-1} \ll N_3 \quad (6.9)$$

となる. よって $\xi_1 - \xi_2$ の第 2 成分は自身の長さ $|\xi_1 - \xi_2|$ よりも小さな値の範囲に制限される. このことを用いると, 以下のようにして命題 6.4 が導かれる.

命題 6.4 の証明. プランシュレルの定理, 双対性, および回転により

$$\begin{aligned} I &:= \left| \int_{\tilde{\Omega}} \left(\int_D \mathcal{F}_{tx}[u](\tau_1, \xi_1) \overline{\mathcal{F}_{tx}[v](\tau_2, \xi_2) \mathcal{F}_{tx}[w](\tau_1 - \tau_2, \xi_1 - \xi_2)} d\tau_1 d\tau_2 \right) d\xi_1 d\xi_2 \right| \\ &\lesssim \left(\frac{N_1}{N_3 M} \right)^{\frac{1}{2}} L_1^{\frac{1}{2}} L_2^{\frac{1}{2}} \|R_{k_1}^M Q_{L_1}^\alpha P_{N_1} u\|_{L_{tx}^2} \|R_{k_2}^M Q_{L_2}^\alpha P_{N_2} v\|_{L_{tx}^2} \|P_{N_3} w\|_{L_{tx}^2} \end{aligned}$$

を示せばよい. ここで

$$D := \{(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |\tau_1 + \alpha|\xi_1|^2| \sim L_1, |\tau_2 + \alpha|\xi_2|^2| \sim L_2\}$$

である. コーシー・シュワルツの不等式により

$$\begin{aligned} I &\lesssim \|R_{k_1}^M Q_{L_1}^\alpha P_{N_1} u\|_{L_{tx}^2} \|R_{k_2}^M Q_{L_2}^\alpha P_{N_2} v\|_{L_{tx}^2} \\ &\quad \times \left\{ \int_{\tilde{\Omega}} \left(\int_D |\mathcal{F}_{tx}[w](\tau_1 - \tau_2, \xi_1 - \xi_2)|^2 d\tau_1 d\tau_2 \right) d\xi_1 d\xi_2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

が得られるため,

$$J := \int_{\tilde{\Omega}} \left(\int_D |\mathcal{F}_{tx}[w](\tau_1 - \tau_2, \xi_1 - \xi_2)|^2 d\tau_1 d\tau_2 \right) d\xi_1 d\xi_2 \lesssim \frac{N_1}{N_3 M} L_1 L_2 \|P_{N_3} w\|_{L_{tx}^2}^2$$

を示せばよい. 変数変換 $(\tau_1, \tau_2) \mapsto (c_1, c_2)$ および $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\mu, \nu, z)$ を

$$c_1 = \tau_1 + \alpha|\xi_1|^2, \quad c_2 = \tau_2 + \alpha|\xi_2|^2, \quad \mu = c_1 - c_2 - \alpha(|\xi_1|^2 - |\xi_2|^2), \quad \nu = \xi_1 - \xi_2, \quad z = \xi_2^{(2)}$$

により行くと、これらの変換によるヤコビアンはそれぞれ

$$J_1 := \det \frac{\partial(\tau_1, \tau_2)}{\partial(c_1, c_2)} = 1, \quad J_2 := \det \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(\mu, \nu, z)} = 2\alpha(\xi_1^{(1)} - \xi_2^{(1)})$$

となる. 特に (6.9) および $|\xi_1 - \xi_2| \sim N_3$ より $|J_2| \sim N_3$ である. また, $|z| \lesssim N_2 M^{-1}$ である. したがって,

$$\begin{aligned} J &\lesssim \int_{\substack{|c_1| \sim L_1 \\ |c_2| \sim L_2}} \left(\int_{|z| \lesssim N_2 M^{-1}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}_{tx}[w](\mu, \nu)|^2 |J_1|^{-1} d\mu d\nu dz \right) |J_2|^{-1} dc_1 dc_2 \\ &\lesssim N_2 M^{-1} N_3^{-1} L_1 L_2 \|P_{N_3} w\|_{L_{tx}^2} \end{aligned}$$

となるが, $N_1 \sim N_2$ なので

$$J \lesssim \frac{N_1}{N_3 M} L_1 L_2 \|P_{N_3} w\|_{L_{tx}^2}^2$$

が得られる. □

参考文献

- [1] I. Bejenaru, S. Herr and D. Tataru, *A convolution estimate for two-dimensional hypersurfaces*, Rev. Mat. Iberoamericana **26** (2010), 707–728.
- [2] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to nonlinear evolution equations*, GAFA. **3** (1993), 107–156, 209–262.
- [3] J. Bourgain, *Periodic Korteweg de Vries equation with measures as initial data*, Selecta Math. (N.S.) **3** (1997), 115–159.
- [4] M. Christ, *Illposedness of a Schrödinger equation with derivative nonlinearity*, preprint.
(<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.70.1363>).
- [5] M. Colin and T. Colin, *On a quasilinear Zakharov system describing laser-plasma interactions*, Differential Integral Equations., **17** (2004), 297–330.
- [6] A. Grünrock, *On the Cauchy - and periodic boundary value problem for a certain class of derivative nonlinear Schrödinger equations*, preprint, arXiv:math/0006195v1.
- [7] H. Hirayama, *Well-posedness and scattering for a system of quadratic derivative nonlinear Schrödinger equations with low regularity initial data*, Comm. Pure Appl. Anal., **13** (2014), 1563–1591.

- [8] H. Hirayama and S. Kinoshita, *Sharp bilinear estimates and its application to a system of quadratic derivative nonlinear Schrödinger equations*, *Nonlinear Analysis*, **178** (2019), 205–226.
- [9] H. Hirayama, K. Kinoshita and M. Okamoto, *Well-posedness for a system of quadratic derivative nonlinear Schrödinger equations with radial data*, *Ann. Henri Poincaré* **21** (2020), 2611–2636.
- [10] M. Ikeda, S. Katayama and H. Sunagawa, *Null structure in a system of quadratic derivative nonlinear Schrödinger equations*, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **16** (2015), 535–567.
- [11] M. Ikeda, N. Kishimoto and M. Okamoto, *Well-posedness for a quadratic derivative nonlinear Schrödinger system at the critical regularity*, *J. Funct. Anal.* **271** (2016), 747–798.
- [12] S. Katayama and D. Sakoda, *Asymptotic behavior for a class of derivative nonlinear Schrödinger systems*, *SN Partial Differential Equations and Applications*, **1:12** (2020).
- [13] S. Mizohata, *On the Cauchy problem*, *Notes and Reports in Mathematics in Science and Engineering*, Science Press & Academic Press., **3** (1985), 177pp.
- [14] T. Ozawa, *Finite energy solutions for the Schrödinger equations with quadratic nonlinearity in one space dimension*, *Funkcial. Ekvac.* **41** (1998), no. 3, 451–468.
- [15] D. Sakoda and H. Sunagawa, *Small data global existence for a class of quadratic derivative nonlinear Schrödinger systems in two space dimensions*, *J. Differential Equations*, **268** (2020), 1722–1749.

熱方程式による関数不等式の改良について

中村昌平

July 22, 2021

Abstract

熱方程式の正則化効果はよく知られているが、本講演では、その性質を用いて既存の関数不等式を改良することができる、という新たなオブザベーションについて報告する。本講演で特に考える関数不等式は、Nelson の Gaussian hypercontractivity 不等式 [14] と Gross の対数 Sobolev 不等式 [11] であり、これらの不等式の最良定数を熱方程式、あるいは Fokker–Planck 方程式を用いて改良する。この目標のため、我々の新たなアイデアは、Ornstein–Uhlenbeck 半群 P_s , $s > 0$, の下での Fokker–Planck 方程式の closure property にある。

本講演及びこの予稿集は Neal Bez 氏（埼玉大学）と辻 寛氏（大阪大学）との共同研究 [7] に基づく。

1 導入と主結果

1.1 Fokker–Planck 方程式の closure property

与えられた発展方程式の inputs flow に沿って単調な汎関数を見出すことができれば、その汎関数についてより深い情報を反映した不等式を得ることができる。Ledoux のサーベイ論文 [13] にあるように、*flow monotonicity* あるいは *semigroup interpolation* として知られるこのようなフレームワークは、幾何的および関数不等式を示す際の強力なツールとしてこの数十年間発展し、利用されてきた。この側面の発展に寄与してきた数々の文献をリストアップする代わりに、Bakry–Gentil–Ledoux による教科書 [2] を挙げる。このような flow monotonicity のフレームワークの豊潤な結論にも関わらず、我々の知る限り、この flow monotonicity 現象の背後にどのような理論が隠れているのか、いまだに明らかになっていない。この問題意識に対して近年注目を集めているのが、拡散方程式の closure property である [1, 3, 4]。

本講演で、特に関連する closure property として、近年 [1] において、Ornstein–Uhlenbeck 方程式あるいは backward Kolmogorov 方程式の closure property が見出された。彼らの結果を述べるべく、記号を導入する。拡散係数 $\beta > 0$ に対し、 \mathcal{L}_β を $\mathcal{L}_\beta \phi(x) := \beta \Delta \phi(x) - x \cdot \nabla \phi(x)$ で与えられる拡散係数 β の Ornstein–Uhlenbeck 半群の生成子とし、 $P_s = e^{s\mathcal{L}_1}$ を \mathcal{L}_1 に付随する Ornstein–Uhlenbeck 半群とする。つまり、十分正則な初期値 f に対し、 $u_s = P_s f$ は

$$\partial_s u_s = \mathcal{L}_1 u_s, \quad u_0 = f$$

の解である．特にガウス測度の場合は

$$P_s f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(L_s(x, y)) d\gamma_1(y), \quad L_s(x, y) := e^{-s}x + (1 - e^{-2s})^{\frac{1}{2}}y \quad (1.1)$$

と明示的に解の表示が知られている．さらに固定した時間パラメータ (Nelson time と呼ばれる) $s > 0$ に対し $1 < p < q < \infty$ は

$$\frac{q-1}{p-1} = e^{2s} \quad (1.2)$$

を満たすものとする．このとき, [1]において, $\beta = 1$ の下, もし $u = u_t(x)$ が正値かつ十分正則な \mathbb{R}^n 上の supersolution:

$$\partial_t u \geq \mathcal{L}_1 u, \quad (t \in (0, \infty))$$

であれば, 新たな関数 \tilde{u} を $\tilde{u}(t, x)^{\frac{1}{q}} := P_s[u_t^{\frac{1}{p}}](x)$ として作った時に, この \tilde{u} が再び supersolution になること:

$$\partial_t \tilde{u} \geq \mathcal{L}_1 \tilde{u}, \quad (t \in (0, \infty)) \quad (1.3)$$

が見出された．この closure property は

$$\Lambda(t) := \int_{\mathbb{R}^n} P_s[u_t^{\frac{1}{p}}](x)^q d\gamma_1(x),$$

で与えられる汎関数に対し, $\frac{d}{dt}\Lambda(t) \geq 0$ を保証する．ここで, $d\gamma_a(x) := (2\pi a)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2a}}$, $a > 0$, は分散 a の正規化されたガウシアンである．特に $\lim_{t \rightarrow \infty} u_t = \int u_0 d\gamma_1$ から, 十分正則な初期値 $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ に対して, Nelson の hypercontractivity 不等式 [14]

$$\|P_s[u_0^{\frac{1}{p}}]\|_{L^q(d\gamma_1)} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} u_0 d\gamma_1 \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.4)$$

をみちびくことができる．[1]において, 著者らは一般の Markov semigroup の枠組みで議論をしていることを述べておく．

我々の最初の目的は拡散係数 $\beta \geq 1$ の Fokker–Planck 方程式:

$$\partial_t v = \mathcal{L}_\beta^* v = \beta \Delta v + x \cdot \nabla v + nv, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \quad (1.5)$$

に対する新たな closure property を得ることである．ここで, \mathcal{L}_β^* は \mathcal{L}_β の $L^2(dx)$ に関する双対である． $\beta = 1$ の Fokker–Planck 方程式 (1.5) が, $u = \frac{v}{\gamma_1}$ という変換により, Ornstein–Uhlenbeck 方程式

$$\partial_t u = \mathcal{L}_1 u$$

と関連していることを指摘しておくことは重要である．実際, この関連と Ornstein–Uhlenbeck 方程式の closure property (1.3) を援用することで, $v = v_t$ が正値かつ十分正則な Fokker–Planck 方程式の supersolution:

$$\partial_t v \geq \mathcal{L}_1^* v,$$

なら, v_t の初期条件に関わらず,

$$\partial_t \tilde{v} \geq \mathcal{L}_1^* \tilde{v}, \quad \left(\frac{\tilde{v}(t, x)}{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{q}} := P_s \left[\left(\frac{v_t}{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{p}} \right](x)$$

となることがわかる. 従って $\beta = 1$ の場合は, Fokker–Planck 方程式の closure property は, Ornstein–Uhlenbeck 方程式のそれに帰着することがわかる. 本講演の最初の結果は, この closure property の $\beta > 1$ の場合への一般化である. 拡散係数を一般化することは, しばしばマイナーな変更であるとみなされる. ところが以下で見るように, この closure property に関して言えば, その限りではない. 実際, $\beta > 1$ の場合には, Fokker–Planck 方程式の closure property はいつでも成立するとは限らず, 解の log-convexity あるいは Li-Yau gradient estimate に関連した適切な初期条件を課さねばならないことを見出した. 我々が導入するこの条件とは以下のようなものである. すなわち, $v = v(t, x)$ はある正値かつ有限な測度 $d\mu$ により,

$$v(t, x) = \frac{1}{(2\pi\beta)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2\beta}|x-e^{-t}y|^2} d\mu(y), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \quad (1.6)$$

とあらわせるという仮定である. このとき, v が Fokker–Planck 方程式 (1.5) を満たすことは簡単に確認できる. この条件を用いて以下の $\beta > 1$ の場合の closure property を得ることに成功した.

Theorem 1.1 ([7]). $s > 0$, $\beta > 1$ とし $1 < p < q < \infty$ は $\frac{q-1}{p-1} = e^{2s}$ を満たすものとする. $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ は Fokker–Planck 方程式 (1.5) の解で (1.6) により明示的に与えられるものとする. この時,

$$\partial_t \tilde{v} \geq \mathcal{L}_{\beta_2}^* \tilde{v}, \quad \left(\frac{\tilde{v}_t}{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{q}} := P_s \left[\left(\frac{v_t}{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{p}} \right], \quad (t \in (0, \infty))$$

が成立する. ここで $\beta_2 > 1$ は

$$\beta_2 := 1 + (\beta - 1) \frac{q}{p} e^{-2s}. \quad (1.7)$$

Remarks:

- 条件 (1.6) はいつでも成立するとは限らない. 例えば, (1.6) で与えられる解 v_t は $t = 0$ の時点で, 既に滑らかかつ分散が β 以上でなければならない.
- $u_t = \frac{v_t}{\gamma_1}$ の変換により, Theorem 1.1 を Ornstein–Uhlenbeck 方程式の形で述べることもできるが, 新たな関数 \tilde{u} が満たす微分不等式は一般に Ornstein–Uhlenbeck 方程式のものではなくなる.

この Theorem 1.1 を応用することで, Nelson の hypercontractivity 不等式 (1.4) が Fokker–Planck 方程式により改良できることを次に見る.

1.2 Fokker–Planck 方程式による hypercontractivity 不等式の改良

Nelson の Gaussian hypercontractivity 不等式は Ornstein–Uhlenbeck 半群 P_s の平滑化効果, 具体的には不等式 (1.4) が任意の正値な $u_0 \in L^1(d\gamma_1)$ に対し成立するこ

とを主張する. この hypercontractivity 不等式の場の量子論におけるモチベーションとその後の発展については, [9] に詳しく書いてあるので, それを参照していただきたい. また, 不等式 (1.4) の等号は $u_0(x) = e^{a \cdot x + b}$, $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ で達成され, かつ (滑らかな初期値に対しては) そのときに限る [12]. 従って, 特に $u_0 = \frac{\gamma_a}{\gamma_1}$ は $a = 1$ でない限り不等式 (1.4) の等号を達成し得ない. 実際 $\beta > 1$ に対し, 直接計算により,

$$\|P_s[(\frac{\gamma_\beta}{\gamma_1})^{\frac{1}{p}}]\|_{L^q(d\gamma_1)} = \beta^{\frac{n}{2p'}} \beta_2^{-\frac{n}{2q'}} < 1 \quad (1.8)$$

が確かめられる. ここで $\beta_2 > 1$ は (1.7) で与えられる. 我々の hypercontractivity 不等式の改良は, このシンプルなオブザベーションがより一般の Fokker–Planck 方程式により記述される関数のクラスで成立することを主張する. そこでまず, Fokker–Planck 方程式で正則化された関数のクラスを導入する. 一般の状況を考え, $\beta > 0$ に対し, $FP^1(\beta) \subset L^1(d\gamma_1)$ を

$$FP^1(\beta) := \left\{ \frac{v(1, \cdot)}{\gamma_1} : v \text{ is FP sol given by (1.6)} \right\} \quad (1.9)$$

として定める. この時, 包含関係の単調性: $\beta_1 \leq \beta_2 \Rightarrow FP^1(\beta_1) \supset FP^1(\beta_2)$ は簡単に確かめることができる. さらに $\frac{\gamma_a}{\gamma_1} \in FP^1(\beta)$ は $a \geq \beta$ と同値になることも確かめられるので, 特に $\beta > 1$ の場合, hypercontractivity 不等式 (1.4) の等号達成関数はこのクラスに属していない. さらに Fokker–Planck 方程式の正則化効果も念頭に入れれば, 初期値をこの $FP^1(\beta)$ に制限した時に, hypercontractivity 不等式が改良されることが期待される. Theorem 1.1 の応用として, 実際にこのケースであることが以下のようにわかった.

Theorem 1.2 ([7]). $\beta > 1, s > 0$ とし, $1 < p < q < \infty$ は $\frac{q-1}{p-1} = e^{2s}$ を満たすものとする. この時,

$$\|P_s[f^{\frac{1}{p}}]\|_{L^q(d\gamma_1)} \leq \beta^{\frac{n}{2p'}} \beta_2^{-\frac{n}{2q'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_1 \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in FP^1(\beta) \quad (1.10)$$

が成立する. ここで, β_2 は (1.7) で与えられる. さらに $f = \frac{\gamma_\beta}{\gamma_1}$ の時に等号が達成される.

Remark 1.3. 1. 我々の関数のクラス $FP^1(\beta)$ は, Bennett–Carbery–Christ–Tao [5] における regularised Brascamp–Lieb の研究で導入された *Type-G* functions から着想を得ている.

2. (1.10) の双対形は [6] において見出した不等式である. ただし, 関数空間を $FP^1(\beta)$ に制限したことから, 通常の変換の議論で (1.10) を導こうとすると, 新たな困難が生じる. 論文 [7] では, closure property を用いて直接 (1.10) を導いている.

Nelson の hypercontractivity 不等式の種々の応用のうち, L. Gross [11] による, 対数 Sobolev 不等式との同値性がある. この不等式は,

$$\text{Ent}_{\gamma_1}(f) \leq \frac{1}{2} I_{\gamma_1}(f)$$

を主張する. ここでエントロピー $\text{Ent}_{\gamma_1}(f)$ と Fisher 情報量 $I_{\gamma_1}(f)$ は

$$\text{Ent}_{\gamma_1}(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f \log f d\gamma_1 - \left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_1 \right) \log \left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_1 \right), \quad I_{\gamma_1}(f) := \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \log f|^2 f d\gamma_1 \quad (1.11)$$

で定義される. また Carlen [8] により, 対数 Sobolev 不等式の等号達成は $f(x) = e^{a \cdot x + b}$, $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ のときかつその時のみに限ることが示されている. したがって, hypercontractivity 不等式のとくと同じく, $\beta > 1$ として, 初期値の関数のクラスを $FP^1(\beta)$ に制限すれば対数 Sobolev 不等式が改良されることが期待される. 実際, Theorem 1.2 から以下が導かれる.

Theorem 1.4 ([7]). $\beta \geq 1$ とする. この時,

$$\text{Ent}_{\gamma_1}(f) \leq \frac{1}{2} I_{\gamma_1}(f) - D_n(\beta), \quad D_n(\beta) := \frac{n}{2} (\log \beta - 1 + \frac{1}{\beta}), \quad f \in FP^1(\beta). \quad (1.12)$$

が成立し, $f = \frac{\gamma_\beta}{\gamma_1}$ の時に等号が達成される.

Remark 1.5. 1. 不等式 (1.12) は以下の次元依存しない形に書ける

$$\text{Ent}_{\gamma_1}(f) - \text{Ent}_{\gamma_1}\left(\frac{\gamma_\beta}{\gamma_1}\right) \leq \frac{1}{2} I_{\gamma_1}(f) - \frac{1}{2} I_{\gamma_1}\left(\frac{\gamma_\beta}{\gamma_1}\right).$$

この形で見れば, 我々の不等式 (1.12) が, 近年 Eldan–Lehec–Shenfeld [10] により得られた対数 Sobolev 不等式の安定性の結果を補完していることがわかる.

2. 我々は, Theorem 1.2 から Theorem 1.4 を導いたが, この逆が成立するかは自明ではない. 少なくとも [2] にあるような通常の方法を用いて, Theorem 1.4 から Theorem 1.2 を導こうとすると新たな困難が生じる.

以下のセクションでは, Theorem 1.1 を v_t がガウシアンという特別な場合に限って議論する.

2 ガウシアンの場合の計算

以下では常に $n = 1$ の場合を考える. v_t をガウシアンに制限することは, (1.6) において $d\mu = d\gamma_a$, $a \in [-\beta, \infty)$, の場合を考えることに対応する. ただし, $a = 0$ の場合は $d\gamma_0 = \delta$: デルタ関数と理解する. また以下で見るように, $-\beta \leq a < 0$ の場合も (1.6) は well-defined であることに注意する.

2.1 P_s の明示的な表示を用いた計算

以下の議論において基本的な量はガウシアンに Ornstein–Uhlenbeck 半群 P_s を作用させたものである. P_s の明示的な表示 (1.1) を用いて, 以下がわかる.

Lemma 2.1. $\alpha \in \mathbb{R}$ は

$$1 + \frac{1 - e^{-2s}}{\alpha} > 0 \quad (2.1)$$

を満たすとする. このとき, $P_s[e^{-\frac{1}{2\alpha} \cdot^2}]$ は well-defined で

$$P_s[e^{-\frac{1}{2\alpha} \cdot^2}](x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1 - e^{-2s}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{e^{-2s}}{2(\alpha + 1 - e^{-2s})} x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Proof. 定義に基づいて、ガウス積分の計算を実行する。

$$\begin{aligned} P_s[e^{-\frac{1}{2\alpha} \cdot^2}](x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\alpha}|e^{-s}x+(1-e^{-2s})^{1/2}y|^2} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{e^{-2s}}{2\alpha}x^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{e^{-s}(1-e^{-2s})^{1/2}}{\alpha}xy - \frac{1}{2}(1+\frac{1-e^{-2s}}{\alpha})y^2} dy \end{aligned}$$

であるが、 α の仮定 (2.1) より、この積分は収束し以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} P_s[e^{-\frac{1}{2\alpha} \cdot^2}](x) &= \frac{e^{-\frac{e^{-2s}}{2\alpha}x^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1-e^{-2s}}{\alpha})[y^2+2(1+\frac{1-e^{-2s}}{\alpha})^{-1}\frac{e^{-s}(1-e^{-2s})^{1/2}}{\alpha}xy]} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{e^{-2s}}{2\alpha}x^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1-e^{-2s}}{\alpha})[y^2+2\frac{e^{-s}(1-e^{-2s})^{1/2}}{\alpha+1-e^{-2s}}xy]} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{e^{-2s}}{2\alpha}x^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1-e^{-2s}}{\alpha})[(y+\frac{e^{-s}(1-e^{-2s})^{1/2}}{(\alpha+1-e^{-2s})}x)^2 - (\frac{e^{-s}(1-e^{-2s})^{1/2}}{(\alpha+1-e^{-2s})}x)^2]} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{e^{-2s}}{2\alpha}x^2}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\frac{e^{-2s}(1-e^{-2s})}{\alpha(\alpha+1-e^{-2s})}x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\alpha+1-e^{-2s}}{\alpha}z^2} dz. \end{aligned}$$

したがって、 $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma}} dz = \sqrt{2\pi\sigma}$, $\sigma > 0$ なので

$$\begin{aligned} P_s[e^{-\frac{1}{2\alpha} \cdot^2}](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{e^{-2s}}{2\alpha}(1-\frac{1-e^{-2s}}{\alpha+1-e^{-2s}})x^2} \left(2\pi \frac{\alpha}{\alpha+1-e^{-2s}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha+1-e^{-2s}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{e^{-2s}}{2(\alpha+1-e^{-2s})}x^2} \end{aligned}$$

となる。 □

この Lemma を用いて \tilde{v}_t の明示的な計算が可能になる。

Proposition 2.2. $\beta > 1$, $a \in [-\beta, \infty)$ とし、 v_t は (1.6) で与えられ、特に $d\mu = d\gamma_a$ の状況を考える。このとき、以下が成立する。

1.

$$v_t = \gamma_{\beta_t}, \quad \beta_t := \beta + e^{-2t}a > 0, \quad (t > 0). \quad (2.3)$$

2. $p \geq 1$ として

$$P_s\left[\left(\frac{v_t}{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{p}}\right] = \frac{1}{(\beta_t)^{\frac{1}{2p}}} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1-e^{-2s}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{e^{-2s}}{2(\alpha+1-e^{-2s})}x^2}, \quad (t > 0). \quad (2.4)$$

ここで

$$\alpha = \alpha(t, a, \beta, p) := -\frac{p(\beta + e^{-2t}a)}{\beta - 1 + e^{-2t}a}.$$

3. $1 \leq p \leq q < \infty$ は $\frac{q-1}{p-1} = e^{2s}$ を満たすものとして,

$$\tilde{v}_t := \gamma_1 P_s \left[\left(\frac{v_t}{\gamma_1} \right)^{\frac{1}{p}} \right]^q = (\tilde{\beta}_t)^{-\frac{q}{2q'}} (\beta_t)^{\frac{q}{2p'}} \gamma_{\tilde{\beta}_t}(x), \quad (t > 0). \quad (2.5)$$

ここで,

$$\tilde{\beta}_t := 1 + (\beta_t - 1) \frac{q}{p} e^{-2s} > 0.$$

Proof. 1. は定義 (1.6) に基づいて計算すると良いので省略する.

2. は 1. と Lemma 2.2 を組み合わせると良い. 実際, 1. より

$$\left(\frac{v_t}{\gamma_1} \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2p}}}{(2\pi\beta_t)^{\frac{1}{2p}}} e^{-\frac{1}{p} \left(\frac{1}{\beta_t} - 1 \right) \frac{x^2}{2}} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2p}}}{(2\pi\beta_t)^{\frac{1}{2p}}} e^{-\frac{1-\beta_t}{p\beta_t} \frac{x^2}{2}}$$

なので $\alpha = \frac{p\beta_t}{1-\beta_t} = -\frac{p(\beta+e^{-2t}a)}{\beta-1+e^{-2t}a}$ として Lemma 2.2 を用いる. この際, 条件 (2.1) は

$$1 + \frac{1 - e^{-2s}}{\alpha} = 1 + (1 - e^{-2s}) \left(\frac{1}{p\beta_t} - \frac{1}{p} \right) = 1 - \frac{1}{p} + \frac{e^{-2s}}{p} + \frac{1 - e^{-2s}}{p\beta_t}$$

と $p \geq 1$ 及び $\beta_t \geq 0^*$ から確認できる. したがって,

$$P_s \left[\left(\frac{v_t}{\gamma_1} \right)^{\frac{1}{p}} \right] (x) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2p}}}{(2\pi\beta_t)^{\frac{1}{2p}}} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1 - e^{-2s}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{e^{-2s}}{2(\alpha+1-e^{-2s})} x^2}$$

となる.

3. について, (2.4) を用いて,

$$\begin{aligned} \tilde{v}_t(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{(\beta_t)^{\frac{q}{2p}}} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1 - e^{-2s}} \right)^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{qe^{-2s}}{2(\alpha+1-e^{-2s})} x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\beta_t)^{\frac{q}{2p}}} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1 - e^{-2s}} \right)^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{qe^{-2s} + \alpha + 1 - e^{-2s}}{2(\alpha+1-e^{-2s})} x^2} \\ &=: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\beta_t)^{\frac{q}{2p}}} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1 - e^{-2s}} \right)^{\frac{q}{2}} e^{-\frac{1}{2\tilde{\beta}_t} x^2}. \end{aligned}$$

ここで, ガウシアン分散係数 $\tilde{\beta}_t$ について, $\frac{q-1}{p-1} = e^{2s}$ を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\beta}_t} &:= \frac{qe^{-2s} + \alpha + 1 - e^{-2s}}{(\alpha + 1 - e^{-2s})} = \frac{p-1 + e^{-2s} + \alpha + 1 - e^{-2s}}{(\alpha + 1 - e^{-2s})} \\ &= \frac{p + \frac{p\beta_t}{1-\beta_t}}{(\alpha + 1 - e^{-2s})} \\ &= \frac{p}{(\alpha + 1 - e^{-2s})(1 - \beta_t)} \end{aligned}$$

* $\beta_t \geq 0$ は, β_t の定義と $t > 0$ の仮定から確認できる.

となり, さらに

$$\begin{aligned}
(\alpha + 1 - e^{-2s})(1 - \beta_t) &= \left(\frac{p\beta_t}{1 - \beta_t} + 1 - e^{-2s} \right) (1 - \beta_t) \\
&= p\beta_t + 1 - e^{-2s} - (1 - e^{-2s})\beta_t \\
&= (p - 1 + e^{-2s})\beta_t + 1 - e^{-2s} - p + p \\
&= qe^{-2s}(\beta_t - 1) + p
\end{aligned}$$

なので,

$$\tilde{\beta}_t := \left(\frac{qe^{-2s} + \alpha + 1 - e^{-2s}}{\alpha + 1 - e^{-2s}} \right)^{-1} = 1 + (\beta_t - 1) \frac{q}{p} e^{-2s}$$

も確認できる. $\tilde{\beta}_t > 0$ については, $\beta_t > 0$ より

$$\tilde{\beta}_t > 1 - \frac{q}{p} e^{-2s} = \frac{1}{p}(p - qe^{-2s}) = \frac{1 - e^{-2s}}{p} > 0$$

とわかる. さらに, 係数 $\frac{\alpha}{\alpha + 1 - e^{-2s}}$ について, 上の計算を参考に

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha + 1 - e^{-2s}}{\alpha} &= 1 + (1 - e^{-2s}) \frac{1 - \beta_t}{p\beta_t} \\
&= \frac{p\beta_t + 1 - e^{-2s} - (1 - e^{-2s})\beta_t}{p\beta_t} \\
&= \frac{qe^{-2s}(\beta_t - 1) + p}{p\beta_t} = \frac{\tilde{\beta}_t}{\beta_t}.
\end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_t(x) &= \frac{(\tilde{\beta}_t)^{\frac{1}{2}}}{(\beta_t)^{\frac{q}{2p}}} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1 - e^{-2s}} \right)^{\frac{q}{2}} \gamma_{\tilde{\beta}_t}(x) \\
&= \frac{(\tilde{\beta}_t)^{\frac{1}{2}}}{(\beta_t)^{\frac{q}{2p}}} \left(\frac{\tilde{\beta}_t}{\beta_t} \right)^{-\frac{q}{2}} \gamma_{\tilde{\beta}_t}(x) \\
&= (\tilde{\beta}_t)^{\frac{q}{2}(\frac{1}{q}-1)} (\beta_t)^{\frac{q}{2}(1-\frac{1}{p})} \gamma_{\tilde{\beta}_t}(x)
\end{aligned}$$

となる. □

(2.5) を積分することで, 以下がわかる.

Corollary 2.3. $\beta > 1$, $a \in [-\beta, \infty)$ とし, $s > 0$ と $1 \leq p \leq q < \infty$ は $\frac{q-1}{p-1} = e^{2s}$ を満たすものとする. このとき, $d\mu = d\gamma_a$ と (1.6) により定まる v_t に対して,

$$\|P_s\left[\left(\frac{v_t}{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{p}}\right]\|_{L^q(d\gamma_1)} = (\tilde{\beta}_t)^{-\frac{1}{2q'}} (\beta_t)^{\frac{1}{2p'}}, \quad (t > 0) \quad (2.6)$$

が成立する. ただし,

$$\beta_t := \beta + e^{-2t}a, \quad \tilde{\beta}_t := 1 + (\beta_t - 1) \frac{q}{p} e^{-2s} > 0.$$

特に, $a = 0$ の場合

$$\|P_s[(\frac{\gamma\beta}{\gamma_1})^{\frac{1}{p}}]\|_{L^q(d\gamma_1)} = (\tilde{\beta})^{-\frac{1}{2q}} (\beta)^{\frac{1}{2p}} < 1 \quad (2.7)$$

が成立する. ただし,

$$\tilde{\beta} := 1 + (\beta - 1)\frac{q}{p}e^{-2s} > 1.$$

2.2 P_s の具体形を用いずに, \tilde{v} を特定する

以上の議論の核は, $P_s f$ の具体的な表示 (1.1) のおかげで, \tilde{v} が (2.5) のように明示的に計算できたことにある. 他方で, ガウシアンに限らずより一般のポテンシャル V に対して同様の hypercontractivity を考える際には, $P_s f$ の具体的な表示は期待できない困難がある. そこで, ここではこういった状況を見据え, $a = 0$ つまり, $d\mu = d\gamma_\beta$ の特別な場合に, (2.5) の公式を P_s の表示を用いずに導くことを考える. すなわち目標は

$$\tilde{v} := \gamma_1 P_s[(\frac{\gamma\beta}{\gamma_1})^{\frac{1}{p}}]^q = \|P_s[(\frac{\gamma\beta}{\gamma_1})^{\frac{1}{p}}]\|_{L^q(d\gamma_1)}^q \gamma_\beta, \quad \tilde{\beta} := 1 + (\beta - 1)\frac{(p-1)e^{2s} + 1}{p}e^{-2s} \quad (2.8)$$

を示すことである.

まず, 結論ありきの議論ではあるが, \tilde{v} は再びガウシアンになることが予想される. その際に, 分散と定数係数はパラメータ β, p, s に依存するであろう. ここで $q = q_s = (p-1)e^{2s} + 1$ とみなして, q は従属変数と思っている. 以下では特に s パラメータに関する微分方程式を解くことになるので, β, p は固定されていると思い, \tilde{v} は

$$\tilde{v}(x) := A_s e^{-\frac{x^2}{2b_s}} \quad (2.9)$$

の形を仮定して, A_s, b_s を求めることを考える. A_s は以下のように簡単に特定できる. つまり, \tilde{v} は定義より $\gamma_1 P_s[(\frac{\gamma\beta}{\gamma_1})^{\frac{1}{p}}]^{q_s}$ なので,

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{v}(x) dx = \|P_s[(\frac{\gamma\beta}{\gamma_1})^{\frac{1}{p}}]\|_{L^{q_s}(d\gamma_1)}^{q_s}$$

であり, 他方で (2.9) からは

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{v}(x) dx = A_s \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2b_s}} dx = A_s (2\pi b_s)^{\frac{1}{2}}$$

なので

$$A_s = \|P_s[(\frac{\gamma\beta}{\gamma_1})^{\frac{1}{p}}]\|_{L^{q_s}(d\gamma_1)}^{q_s} (2\pi b_s)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

がわかる. 問題は b_s の特定である. $\tilde{v} := \gamma_1 P_s[(\frac{\gamma\beta}{\gamma_1})^{\frac{1}{p}}]^{q_s}$ と (2.9) を組み合わせて

$$P_s[(\frac{\gamma\beta}{\gamma_1})^{\frac{1}{p}}](x) = A_s^{\frac{1}{q_s}} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2b_s}}}{\gamma_1(x)} \right)^{\frac{1}{q_s}} = ((2\pi)^{\frac{1}{2}} A_s)^{\frac{1}{q_s}} e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s} - 1)x^2}$$

となるがこれは、右辺の $u_s(x) := ((2\pi)^{\frac{1}{2}} A_s)^{\frac{1}{q_s}} e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2}$ が Ornstein-Uhlenbeck 方程式の解になっていること

$$\partial_s u_s = \mathcal{L}_1 u_s, \quad u_0 = \left(\frac{\gamma_\beta}{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.11)$$

を意味する. ここから b_s を特定できる. 以下では $C_s := ((2\pi)^{\frac{1}{2}} A_s)^{\frac{1}{q_s}}$ と書いて, その影響には腐心しないことにする. (2.11) を念頭に $\partial_s u_s$ と $\mathcal{L}_1 u_s$ をそれぞれ計算する.

$$\begin{aligned} & \partial_s (C_s e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2}) \\ &= (\partial_s C_s) e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2} + C_s \partial_s (e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2}) \\ &= (\partial_s C_s) e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2} + C_s \left(-\frac{x^2}{2}\right) \left(-\frac{\partial_s q_s}{q_s^2} \left(\frac{1}{b_s}-1\right) - \frac{1}{q_s} \frac{\partial_s b_s}{b_s^2}\right) e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2} \\ &= (\partial_s C_s) e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2} + C_s \frac{1}{2} \left(\frac{2(p-1)e^{2s}}{q_s^2} \left(\frac{1}{b_s}-1\right) + \frac{1}{q_s} \frac{\partial_s b_s}{b_s^2}\right) x^2 e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2}. \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \partial_x (C_s e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2}) &= -C_s \frac{1}{q_s} \left(\frac{1}{b_s}-1\right) x e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2}, \\ \partial_{xx} (C_s e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2}) &= -C_s \frac{1}{q_s} \left(\frac{1}{b_s}-1\right) e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2} + C_s \frac{1}{q_s^2} \left(\frac{1}{b_s}-1\right)^2 x^2 e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2} \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_1 (C_s e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2}) \\ &= -C_s \frac{1}{q_s} \left(\frac{1}{b_s}-1\right) e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2} + C_s \frac{1}{q_s^2} \left(\frac{1}{b_s}-1\right)^2 x^2 e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2} \\ & \quad + C_s \frac{1}{q_s} \left(\frac{1}{b_s}-1\right) x^2 e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2} \\ &= -C_s \frac{1}{q_s} \left(\frac{1}{b_s}-1\right) e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2} + C_s \left(\frac{1}{q_s^2} \left(\frac{1}{b_s}-1\right)^2 + \frac{1}{q_s} \left(\frac{1}{b_s}-1\right)\right) x^2 e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2}. \end{aligned}$$

以上より, $\partial_s u_s$ と $\mathcal{L}_1 u_s$ はどちらも $e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2}$ と $x^2 e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2}$ の独立な二つな関数からなることがわかる. 特に, 後者の $x^2 e^{-\frac{1}{2q_s} (\frac{1}{b_s}-1)x^2}$ の係数を比較することで,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2(p-1)e^{2s}}{q_s^2} \left(\frac{1}{b_s}-1\right) + \frac{1}{q_s} \frac{\partial_s b_s}{b_s^2}\right) = \frac{1}{q_s^2} \left(\frac{1}{b_s}-1\right)^2 + \frac{1}{q_s} \left(\frac{1}{b_s}-1\right)$$

が従う. これを整理すると, $q_s = (p-1)e^{2s} + 1$ を使って

$$\partial_s b_s = \frac{2}{q_s} (1 - b_s)$$

となる. あるいは $h_s = b_s - 1$ と置き直して

$$\partial_s h_s = -\frac{2}{(p-1)e^{2s} + 1} h_s, \quad h_0 = \beta - 1$$

という常微分方程式を得る。これは、具体的に解いても良いが、

$$h_s = (\beta - 1) \frac{q_s}{p} e^{-2s} = (\beta - 1) \frac{(p-1) + e^{-2s}}{p}$$

が解になっていることが確認できる。したがって

$$b_s = 1 + (\beta - 1) \frac{q_s}{p} e^{-2s} =: \tilde{\beta}$$

が確認でき、(2.8)が示せた。

References

- [1] Y. Aoki, J. Bennett, N. Bez, S. Machihara, K. Matsuura, S. Shiraki, *A supersolutions perspective on hypercontractivity*, *Annali di Matematica*, **199** (2020), 2105–2116. [1, 2]
- [2] D. Bakry, I. Gentil, M. Ledoux, *Analysis and geometry of Markov diffusion operators*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 348, Springer (2014). [1, 5]
- [3] J. Bennett, N. Bez, *Closure properties of solutions to heat inequalities*, *J. Geom. Anal.* **19** (2009), 584–600. [1]
- [4] J. Bennett, N. Bez, *Generating monotone quantities for the heat equation*, *J. reine angew. Math.* **756** (2019), 37–63. [1]
- [5] J. Bennett, A. Carbery, M. Christ, T. Tao, *The Brascamp–Lieb inequalities: finiteness, structure and extremals*, *Geom. Funct. Anal.* **17** (2008), 1343–1415. [4]
- [6] N. Bez, S. Nakamura, in preparation. [4]
- [7] N. Bez, S. Nakamura, H. Tsuji, in preparation. [1, 3, 4, 5]
- [8] E. Carlen, *Super additivity of Fisher’s information and Logarithmic Sobolev inequalities*, *J. Funct. Anal.* **101** (1991), 194–211. [5]
- [9] W. Faris, ed. *Diffusion, Quantum Theory, and Radically Elementary Mathematics*. (MN-47). PRINCETON; OXFORD: Princeton University Press, 2006. Accessed July 6, 2021. <http://www.jstor.org/stable/j.ctt7ztfkx>. [4]
- [10] R. Eldan, J. Lehec, Y. Shenfeld, *Stability of the logarithmic Sobolev inequality via the Föllmer process*, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **56** (2020), 2253–2269. [5]
- [11] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities*, *Amer. J. Math.* **97** (1975), 1061–1083. [1, 4]

- [12] M. Ledoux, *On an integral criterion for hypercontractivity of diffusion semigroups and extremal functions*, J. Funct. Anal. *105* (1992), 445–467. [4]
- [13] M. Ledoux, *Heat flows, geometric and functional inequalities*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, *4* (2014), 117–135. [1]
- [14] E. Nelson, *The free Markov field*, J. Funct. Anal. **12** (1973), 211–227. [1, 2]

完備測地距離空間上の均衡問題と解近似

木村泰紀 (東邦大学・理学部)

概要

均衡問題は多くの非線形問題を一般化した問題として知られている。この問題の解近似手法については、均衡問題に対するリゾルベント作用素を利用することで不動点近似理論を応用することができる。本稿では、完備 CAT(1) 空間と呼ばれる測地距離空間における均衡問題を考え、その解近似として収縮射影法と呼ばれる不動点近似法を応用した手法を利用する。近似点列を生成する際に用いる距離射影の計算で誤差が発生することを考慮し、近似点列の性質を誤差の上限を用いて評価する。

1 はじめに

距離空間 X の部分集合 K で定義された 2 変数関数 $f: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。 f に関する均衡問題とは、すべての $y \in K$ に対して $f(x_0, y) \geq 0$ をみたすような $x_0 \in K$ を求める問題である。すなわち、 $x_0 \in K$ が均衡問題の解であるとは

$$\inf_{y \in K} f(x_0, y) \geq 0$$

をみたすことであり、この問題の解の集合を $\text{Equil } f$ であらわす。

線形位相空間やバナッハ空間の閉凸集合に対して定義された均衡問題は Blum–Oettli [1] によって詳しい考察がなされ、凸最小化問題やナッシュ均衡、相補性問題、不動点問題等、多くの非線形問題を一般化していることが示されている。

均衡問題に対する解近似の理論は、主にヒルベルト空間やバナッハ空間を舞台としてさまざまな手法が提案されてきた。とくに、均衡問題のリゾルベントと呼ばれる作用素がもつ性質として、均衡問題の解の集合がリゾルベントの不動点集合と一致するという事実があり、これを架け橋として均衡問題の解近似に不動点近似の手法の多くが適用可能となる。ヒルベルト空間における均衡問題のリゾルベント [1] は次のように定義される。 K をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とすると、 $f: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ のリゾルベント $R_f: H \rightarrow 2^K$ を $x \in H$ に対して

$$R_f(x) = \left\{ z \in K \mid \inf_{y \in K} f(z, y) + \langle z - x, y - z \rangle \geq 0 \right\} \quad (1)$$

で定義する。この作用素に対して、次が成り立つ:

2020 Mathematics Subject Classification. 90C33, 90C48, 49K27.

定理 1.1 (Combettes–Hirstoaga [2]). K をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, $f: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ が次を満たすとする.

- (E1) 任意の $y \in K$ に対して $f(y, y) = 0$;
- (E2) 任意の $y, z \in K$ に対して $f(y, z) + f(z, y) \leq 0$;
- (E3) 任意の $y \in K$ に対して $f(y, \cdot): K \rightarrow \mathbb{R}$ は下半連続凸関数;
- (E4) 任意の $x, y, z \in K$ に対して $\limsup_{t \downarrow 0} f(tx + (1-t)y, z) \leq f(y, z)$.

このとき (1) で定義されたリゾルベント $R_f: H \rightarrow 2^K$ について, 次が成り立つ.

- 任意の $x \in X$ に対して $R_f x$ は一点集合となり, したがって $R_f: H \rightarrow K$ が一価写像として定義される;
- R_f は firmly nonexpansive 写像である;
- $\text{Equil } f$ は R_f の不動点集合 $\text{Fix } R_f$ と一致する.

不動点近似法の研究については, 近年, 完備測地距離空間上の写像に対する研究が急速に発展している. とくに, アダマール空間とも呼ばれる完備 CAT(0) 空間における不動点近似法は多くの研究がなされており, 従来のヒルベルト空間での近似法を含む形で近似列の収束性が証明されている.

本研究では, 収縮射影法と呼ばれる不動点近似法に基づいた手法を扱う. 次の定理は収縮射影法で生成された点列の収束性を示した定理であり, [11] で証明された写像族に対する共通不動点近似定理から得られる結果である.

定理 1.2 (Takahashi–Takeuchi–Kubota [11]). ヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合 C に対し, $T: C \rightarrow C$ を不動点集合 $\text{Fix } T$ が空でない非拡大写像とする. $u \in H$ に対し, 点列 $\{x_n\} \subset C$ を次のように定める: $x_1 \in C, C_1 = C$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C_{n+1} = \{x \in C \mid \|x - Tx_n\| \leq \|x - x_n\|\} \cap C_n,$$

$$x_{n+1} = P_{C_{n+1}} u$$

とする. このとき, $\{x_n\}$ は $P_{\text{Fix } T} u \in \text{Fix } T$ へと強収束する. ただし, $P_K: H \rightarrow K$ は H から空でない閉凸集合 K への距離射影である.

さらに最近の結果では, 完備 CAT(0) 空間よりも一般的な空間である完備 CAT(1) 空間上の不動点近似法についても多くの知見が得られている. また, 距離射影の正確な値が計算できない場合についての考察として, 誤差上限の値を用いた点列の近似性評価に関する結果も得られている. [5, 4, 6].

不動点近似法の研究と同様に, 均衡問題についても完備測地距離空間への一般化が進められている. Kimura–Kishi [9] によって定義された完備 CAT(0) 空間における均衡問題のリゾルベントは, 空間の曲率に適合した摂動関数を用いることで完備 CAT(1) 空間上のリゾルベントへ拡張された [7]. すなわち, 完備 CAT(1) 空間 X の空でない部分集合 K 上で定義された二変数関数

$f: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, そのリゾルベント R_f を, 各 $x \in X$ に対して

$$R_f x = \left\{ z \in K \mid \inf_{y \in K} (f(z, y) - \log \cos d(x, y) + \log \cos d(x, z)) \geq 0 \right\}$$

と定義する. その性質については定理 2.2 および定理 2.3 で詳細を述べる.

本稿では, 完備 CAT(1) 空間上で設定された均衡問題に対し, そのリゾルベントを用いた解近似について考察する. 近似点列の生成においては, 閉凸集合への距離射影が正確に計算できない状況を想定し, 事前に与えた誤差上限の値を越えない範囲で誤差の発生を許すことにする. 主結果においては, そのような状況においても近似点列が一定の性質をもち, 解近似の手法として十分に実用的であることを示した. さらに, 誤差上限が 0 に収束する場合においては近似列自身も均衡問題の解に収束することを示した.

2 準備

X を距離空間とする. $x, y \in X$ に対し, 写像 $c: [0, 1] \rightarrow X$ は次の条件をみたすとき x, y を端点とする測地線と呼ばれる.

- $c(0) = x, c(1) = y$;
- $s, t \in [0, 1]$ に対して $d(c(s), c(t)) = |s - t|$.

$r \in]0, \infty]$ とするとき, $d(x, y) < r$ をみたす任意の 2 点 $x, y \in X$ に対してこれらを端点とする測地線が存在するとき, X を r 測地距離空間という. とくに, ∞ 測地距離空間は任意の $x, y \in X$ に対してそれらを端点とする測地線が存在する空間であり, 単に測地距離空間と呼ばれる.

一般に, 与えられた 2 点 $x, y \in X$ に対してそれらを端点とする測地線は一意的とは限らない. とくに x, y を端点とする測地線 c が一意に定められるとき, c の像を $[x, y]$ とあらわす. またこのとき, x と y の凸結合が自然に定義される. すなわち, $t \in [0, 1]$ に対して $(1 - t)x \oplus ty = c(t) \in [x, y]$ と定義する. $w_t = (1 - t)x \oplus ty$ は $d(x, w_t) = td(x, y)$ および $d(w_t, y) = (1 - t)d(x, y)$ をみたす.

X を r 測地距離空間とし, $C \subset X$ が任意の $x, y \in C$ に対して $d(x, y) < r$ をみたすとする. このとき, 任意の $x, y \in C$ に対して x, y を端点とする測地線が存在するが, すべての測地線の像が C に含まれるとき, C は凸であるという. また, 任意の $x, y \in E$ に対して $d(x, y) < r$ をみたす $E \subset X$ に対し, E を含む X の凸部分集合すべての共通部分を E の凸包といい, $\text{co } E$ であらわす.

X を π 測地距離空間とし, $d(x, y) < \pi$ をみたす任意の $x, y \in X$ に対して, x, y を端点とする測地線が一意的に定められると仮定する. また, \mathbb{S}^2 を 2 次元単位球面とする. \mathbb{S}^2 は大円距離 $d_{\mathbb{S}^2}$ によって π 測地距離空間となり, X と同様に $d_{\mathbb{S}^2}(u, v) < \pi$ をみたす任意の $u, v \in \mathbb{S}^2$ に対して, u, v を端点とする測地線が一意的に定められる. $x, y, z \in X$ が $d(y, z) + d(z, x) + d(x, y) < 2\pi$ をみたすとき, x, y, z を頂点とする測地三角形を

$$\Delta(x, y, z) = [y, z] \cup [z, x] \cup [x, y]$$

で定義する. さらに, \mathbb{S}^2 上の 3 点 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{S}^2$ を

$$d_{\mathbb{S}^2}(\bar{y}, \bar{z}) = d(y, z), \quad d_{\mathbb{S}^2}(\bar{z}, \bar{x}) = d(z, x), \quad d_{\mathbb{S}^2}(\bar{x}, \bar{y}) = d(x, y)$$

をみたすように取れる. $\bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = [\bar{y}, \bar{z}] \cup [\bar{z}, \bar{x}] \cup [\bar{x}, \bar{y}]$ を $\Delta(x, y, z)$ の比較三角形という. $p \in \Delta(x, y, z)$ とすると, p は三角形の 3 辺のいずれかの上にある. 例えば $p \in [x, y]$ とすると, $t \in [0, 1]$ によって $p = (1-t)x \oplus ty$ とあらわせる. このとき, 比較三角形 $\bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 上の点 $\bar{p} = (1-t)\bar{x} \oplus t\bar{y}$ を p の比較点という. $d(y, z) + d(z, x) + d(x, y) < 2\pi$ をみたす任意の $x, y, z \in X$ に対し, 任意の $p, q \in \Delta(x, y, z)$ とその比較点 $\bar{p}, \bar{q} \in \bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ が CAT(1) 不等式と呼ばれる次の不等式

$$d(p, q) \leq d_{\mathbb{S}^2}(\bar{p}, \bar{q})$$

をみたすとき X を CAT(1) 空間という.

CAT(1) 空間 X において, $x, y, z \in X$ が $d(y, z) + d(z, x) + d(x, y) < 2\pi$ をみたすとき, $\Delta(x, y, z)$ の比較三角形 $\bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ を考えると, \mathbb{S}^2 における球面余弦定理から次の等式が成り立つ: $t \in [0, 1]$ に対して

$$\begin{aligned} \cos d_{\mathbb{S}^2}((1-t)\bar{x} \oplus t\bar{y}, \bar{z}) \sin d_{\mathbb{S}^2}(\bar{x}, \bar{y}) \\ = \cos d_{\mathbb{S}^2}(\bar{x}, \bar{z}) \sin((1-t)d_{\mathbb{S}^2}(\bar{x}, \bar{y})) + \cos d_{\mathbb{S}^2}(\bar{y}, \bar{z}) \sin(td_{\mathbb{S}^2}(\bar{x}, \bar{y})). \end{aligned}$$

よって, CAT(1) 不等式と比較三角形の定義から

$$\cos d((1-t)x \oplus ty, z) \sin d(x, y) \geq \cos d(x, z) \sin((1-t)d(x, y)) + \cos d(y, z) \sin(td(x, y))$$

が成り立つ.

距離空間 X 上の写像 $T: X \rightarrow X$ を考える. $z \in X$ が $z = Tz$ をみたすとき, z を T の不動点といい, T の不動点全体を $\text{Fix } T$ であらわす. すなわち,

$$\text{Fix } T = \{z \in X \mid z = Tz\}.$$

不動点をもつ写像 T に対し, T が *quasinonexpansive* であるとは, 任意の $x \in X$ と $z \in \text{Fix } T$ に対して

$$d(Tx, z) \leq d(x, z)$$

をみたすことをいう.

X を CAT(1) 空間とする. 任意の $x, y \in X$ に対して $d(x, y) < \pi/2$ が成り立つとき, X は *admissible* であるという. また, X の任意の有限部分集合 $E \subset X$ に対し, 任意の連続写像 $T: \text{cl co } E \rightarrow \text{cl co } E$ が不動点をもつとき, X は *convex hull finite property* [10] をもつという.

admissible な CAT(1) 空間 X に対し, 写像 $T: X \rightarrow X$ が *spherically nonspreading of sum type* であるとは, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$2 \cos d(Tx, Ty) \geq \cos d(Tx, y) + \cos d(x, Ty)$$

が成り立つことをいう。 T が不動点をもつとき、 T が spherically nonspreading of sum type であるならば T は quasinonexpansive である。 実際、不動点をもつ T が spherically nonspreading of sum type のとき、 $x \in X$ と $z \in \text{Fix } T$ に対し

$$2 \cos d(Tx, z) \geq \cos d(Tx, z) + \cos d(x, z)$$

が成り立つことから $\cos d(Tx, z) \geq \cos d(x, z)$ が成り立ち、よって $d(Tx, z) \leq d(x, z)$ 、すなわち T は quasinonexpansive となる。

X を admissible な完備 CAT(1) 空間とし、 $C \subset X$ を空でない閉凸集合とする。このとき、任意の $x \in X$ に対して

$$d(x, y_x) = d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y)$$

をみたす $y_x \in C$ が一意に存在することが知られている。これを用いて X から C への距離射影 $P_C: X \rightarrow C$ を $P_C x = y_x$ で定義する。

完備 CAT(1) 空間の包含関係に付いて単調減少な閉凸集合列と、対応する距離射影列について、次の定理が成り立つ。

定理 2.1. X を admissible な完備 CAT(1) 空間とし、 X の空でない閉凸集合列 $\{C_n\}$ が $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$ かつ $C_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$ をみたすとする。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して X から C_n への距離射影を P_{C_n} とするとき、任意の $u \in X$ に対して

$$P_{C_0} u = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{C_n} u$$

が成り立つ。

距離空間 X 上の関数については、通常の方法で下半連続性が定義される。すなわち、関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は、

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

がつねに成り立つときに下半連続であるという。さらに、 X が CAT(1) 空間のとき、任意の二点に対してそれらを結ぶ測地線が一意に定まる。つまり、 $x, y \in X$ と $t \in]0, 1[$ に対して $tx \oplus (1-t)y \in X$ が定義される。この事実から、 X 上の凸関数を次のように定義できる。関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が凸であるとは、任意の $x, y \in X$ と $t \in]0, 1[$ に対して

$$f(tx \oplus (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

が成り立つことをいう。

2 変数関数 f に対する均衡問題を考察するにあたり、 f に対するリゾルベント作用素は重要な役割を果たす。リゾルベント作用素は以下の定理によって導入され、その基本的性質が示される。

定理 2.2 (Kimura [7]). X を convex hull finite property をもつ admissible な完備 CAT(1) 空間とし、 K を X の空でない閉凸部分集合とする。 $f: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ は (E1)–(E4) をみたすとする。各

$x \in X$ に対して, $R_f x \subset K$ を

$$R_f x = \left\{ z \in K \mid \inf_{y \in K} (f(z, y) - \log \cos d(x, y) + \log \cos d(x, z)) \geq 0 \right\} \quad (2)$$

と定義するとき, 次が成り立つ.

- (i) 任意の $x \in X$ に対して $R_f x$ は一点集合となり, したがって $R_f: X \rightarrow K$ が一価写像として定義される;
- (ii) 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して

$$\frac{\cos d(x_1, R_f x_2)}{\cos d(x_1, R_f x_1)} + \frac{\cos d(x_2, R_f x_1)}{\cos d(x_2, R_f x_2)} \leq 2 \cos d(R_f x_1, R_f x_2),$$

が成り立ち, したがって R_f は spherically nonspreading of sum type である.

- (iii) $\text{Fix } R_f = \text{Equil } f$ であり, この集合は閉かつ凸である.

定理 2.3 (Kimura [8]). X, K, f , および R_f を前定理と同様とするとき, 次が成り立つ:

- (i) $x \in X$ と $w \in K$ が $w \neq R_f x$ をみたすとき,

$$0 \leq f(R_f x, w) + \frac{d(w, R_f x)}{\sin d(w, R_f x)} \left(\cos d(w, R_f x) - \frac{\cos d(x, w)}{\cos d(x, R_f x)} \right);$$

- (ii) $x \in K$ と $z \in \text{Equil } f$ に対し

$$\cos d(x, R_f x) \cos d(z, R_f x) \geq \cos d(x, z).$$

注意 2.4. 定理 2.2, 定理 2.3 において, 空間 X が convex hull finite property をもつという仮定は, リゾルベント作用素の定義域が X 全体になることを証明することのみに利用される. したがって, 別の仮定でこのことが証明できる場合は convex hull finite property を仮定する必要はない.

3 均衡問題の解近似

本稿の主結果である, 完備 CAT(1) 空間における均衡問題の解近似手法について述べる. 収縮射影法に基づいて生成された近似点列は, あらかじめ設定された誤差上限に応じてその近似性能が評価されている.

定理 3.1. X を admissible な完備 CAT(1) 空間とし, 次の条件を仮定する:

- X は convex hull finite property をもつ;
- 任意の $u, v \in X$ に対して, 集合 $\{x \in X \mid d(u, x) \leq d(v, x)\}$ は凸集合である.

空でない閉凸集合 $K \subset X$ 上で定義された $f: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ について $\text{Equil } f \neq \emptyset$ であり, さらに次の条件をみたすものとする:

- (E1) 任意の $y \in K$ に対して $f(y, y) = 0$;
- (E2) 任意の $y, z \in K$ に対して $f(y, z) + f(z, y) \leq 0$;
- (E3) 任意の $y \in K$ に対して $f(y, \cdot): K \rightarrow \mathbb{R}$ は下半連続凸関数;
- (E4) 任意の $x, y, z \in K$ に対して $\limsup_{t \downarrow 0} f(tx \oplus (1-t)y, z) \leq f(y, z)$.

実数列 $\{\epsilon_n\}$, $\{\lambda_n\}$ がそれぞれ $\inf_{n \in \mathbb{N}} \epsilon_n \geq 0$ および $\inf_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n > 0$ をみたすとする. また, $\epsilon_0 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n$, $\lambda_0 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$ とする. $u \in X$ に対し, 点列 $\{x_n\} \subset K$ と K の閉凸部分集合列 $\{C_n\}$ を次のように帰納的に定める: $x_1 = u$, $C_1 = K$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C_{n+1} = \{z \in X \mid d(R_{\lambda_n f} x_n, z) \leq d(x_n, z)\} \cap C_n$$

で定義された C_{n+1} に対して, $x_{n+1} \in C_{n+1}$ を

$$\cos d(u, x_{n+1}) \geq \cos d(u, C_{n+1}) \cos \epsilon_{n+1}$$

をみたすようにとる. ここで $R_{\lambda_n f}$ は (2) によって定義された $\lambda_n f$ のリゾルベント作用素である. このとき

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(R_{\lambda_n f} x_n, x_n) \leq 2\epsilon_0$$

が成り立ち, さらに任意の $y \in K$ に対して

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(R_{\lambda_n f} x_n, y) \geq -\frac{\pi \sin \epsilon_0}{\lambda_0}$$

が成り立つ. とくに, $\epsilon_0 = 0$ のときは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = P_{\text{Equil } f} u \in \text{Equil } f$$

となる. ここで, $P_{\text{Equil } f}: X \rightarrow \text{Equil } f$ は距離射影である.

証明. 最初に, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して C_n は $\text{Equil } f \subset C_n$ をみたす閉凸集合であることおよび $x_n \in K$ が well-defined であることを帰納法で示す. まず $C_1 = K$ より閉凸であり, $\text{Equil } f \subset C_1$ が成り立つ. また, $x_1 \in K$ も定義されている. 次に, $k \in \mathbb{N}$ に対して C_k が $\text{Equil } f \subset C_k$ をみたす閉凸集合でありかつ $x_k \in K$ が定義されていると仮定し, $n = k + 1$ の場合を考えよう. $R_{\lambda_k f}$ は quasinonexpansive なので, $z \in \text{Equil } f$ に対して $d(R_{\lambda_k f} x_k, z) \leq d(x_k, z)$ が成り立つ. $z \in \text{Equil } f \subset C_k$ でもあるから, $z \in C_{k+1}$ が成り立つ. よって $\text{Equil } f \subset C_{k+1}$ が示された. さらに, C_{k+1} はその定義と C_k が閉であることより明らかに閉集合であり, 空間の仮定と C_k が凸であることから C_{k+1} も凸である. よって

$$d(u, p) = d(u, C_{k+1})$$

をみたす $p \in C_{k+1}$ が一意に存在する. このことから,

$$\cos d(u, x_{k+1}) \geq \cos d(u, C_{k+1}) \cos \epsilon_{k+1}$$

をみたく $x_{k+1} \in C_{k+1}$ が少なくとも一つ存在することがわかり, $x_{k+1} \in K$ が well-defined であることがわかった.

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\emptyset \neq \text{Equil } f \subset C_n$ より C_n は空でない閉凸集合である. C_n への距離射影 $P_{C_n}: X \rightarrow C_n$ を用いて, $p_n = P_{C_n} u$ とすると, $d(u, p_n) = d(u, C_n)$ である. このとき $p_n, x_n \in C_n$ であるから, $t \in]0, 1[$ に対して $tp_n \oplus (1-t)x_n \in C_n$. よって

$$\begin{aligned} & \cos d(u, p_n) \sin d(p_n, x_n) \\ & \geq \cos d(u, tp_n \oplus (1-t)x_n) \sin d(p_n, x_n) \\ & \geq \cos d(u, p_n) \sin(td(p_n, x_n)) + \cos d(u, x_n) \sin((1-t)d(p_n, x_n)) \end{aligned}$$

となることから

$$\sin d(p_n, x_n) - \sin(td(p_n, x_n)) \geq \sin((1-t)d(p_n, x_n)) \frac{\cos d(u, x_n)}{\cos d(u, p_n)}.$$

$p_n \neq x_n$ の場合は, 両辺 $2 \sin\left(\frac{1-t}{2}d(p_n, x_n)\right)$ で割って

$$\cos\left(\frac{1+t}{2}d(p_n, x_n)\right) \geq \cos\left(\frac{1-t}{2}d(p_n, x_n)\right) \frac{\cos d(u, x_n)}{\cos d(u, p_n)}$$

が得られ, $t \rightarrow 1$ として

$$\cos d(p_n, x_n) \geq \frac{\cos d(u, x_n)}{\cos d(u, p_n)}$$

を得る. ここで x_n の取り方から

$$\cos d(u, x_n) \geq \cos d(u, C_n) \cos \epsilon_n = \cos d(u, p_n) \cos \epsilon_n$$

より $\cos d(p_n, x_n) \geq \cos \epsilon_n$, すなわち, $p_n = x_n$ の場合も含めて $d(p_n, x_n) \leq \epsilon_n$ を得る. さらに $p_{n+1} \in C_{n+1}$ より

$$\begin{aligned} d(R_{\lambda_n f} x_n, x_n) & \leq d(R_{\lambda_n f} x_n, p_{n+1}) + d(p_{n+1}, x_n) \\ & \leq 2d(x_n, p_{n+1}) \\ & \leq 2(d(x_n, p_n) + d(p_n, p_{n+1})) \\ & \leq 2\epsilon_n + 2d(p_n, p_{n+1}). \end{aligned}$$

ここで, $C_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ とし, $P_{C_0}: X \rightarrow C_0$ を距離射影すると, 定理 2.1 より

$$p_n = P_{C_n} u \rightarrow P_{C_0} u$$

が成り立つ. よって $\lim_{n \rightarrow \infty} d(p_n, p_{n+1}) = 0$ であり, したがって

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(R_{\lambda_n f} x_n, x_n) \leq 2\epsilon_0$$

が得られる. 一方, 定理 2.3 より, $y \neq R_{\lambda_n f} x_n$ をみたく任意の $y \in K$ に対して

$$0 \leq \lambda_n f(R_{\lambda_n f} x_n, y) + \frac{d(y, R_{\lambda_n f} x_n)}{\sin d(y, R_{\lambda_n f} x_n)} \left(\cos d(y, R_{\lambda_n f} x_n) - \frac{\cos d(x_n, y)}{\cos d(x_n, R_{\lambda_n f} x_n)} \right)$$

が成り立つ。また,

$$\begin{aligned}
& \cos d(y, R_{\lambda_n f} x_n) - \frac{\cos d(x_n, y)}{\cos d(x_n, R_{\lambda_n f} x_n)} \\
& \leq \cos d(y, R_{\lambda_n f} x_n) - \cos d(x_n, y) \\
& \leq 2 \sin \frac{d(y, R_{\lambda_n f} x_n) + d(x_n, y)}{2} \sin \frac{d(x_n, y) - d(y, R_{\lambda_n f} x_n)}{2} \\
& \leq 2 \sin \frac{d(x_n, y) - d(y, R_{\lambda_n f} x_n)}{2} \\
& \leq 2 \sin \frac{d(x_n, R_{\lambda_n f} x_n)}{2}.
\end{aligned}$$

一方, $0 < d(y, R_{\lambda_n f} x_n) < \pi/2$ より $d(y, R_{\lambda_n f} x_n)/\sin d(y, R_{\lambda_n f} x_n) < \pi/2$ であることから

$$0 \leq \lambda_n f(R_{\lambda_n f} x_n, y) + \pi \sin \frac{d(x_n, R_{\lambda_n f} x_n)}{2},$$

すなわち,

$$f(R_{\lambda_n f} x_n, y) \geq -\frac{\pi}{\lambda_n} \sin \frac{d(x_n, R_{\lambda_n f} x_n)}{2}$$

となる。なおこの式は $y = R_{\lambda_n f} x_n$ のときも明らかに成り立つので, 任意の $y \in K$ で成り立つ。したがって,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \rightarrow \infty} f(R_{\lambda_n f} x_n, y) & \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\pi}{\lambda_n} \sin \frac{d(x_n, R_{\lambda_n f} x_n)}{2} \right) \\
& = -\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{\lambda_n} \sin \frac{d(x_n, R_{\lambda_n f} x_n)}{2} \right) \\
& \geq -\frac{\pi}{\lambda_0} \sin \frac{\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, R_{\lambda_n f} x_n)}{2} \\
& \geq -\frac{\pi \sin \epsilon_0}{\lambda_0}
\end{aligned}$$

を得る。

とくに $\epsilon_0 = 0$ のときは,

$$0 \leq d(x_n, P_{C_0} u) \leq d(x_n, p_n) + d(p_n, P_{C_0} u) \leq \epsilon_n + d(p_n, P_{C_0} u) \rightarrow 0$$

より $x_n \rightarrow P_{C_0} u$ が得られる。また,

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(R_{\lambda_n f} x_n, x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(R_{\lambda_n f} x_n, x_n) \leq 2\epsilon_0 = 0$$

より $\lim_{n \rightarrow \infty} d(R_{\lambda_n f} x_n, x_n) = 0$ であることから, $R_{\lambda_n f} x_n \rightarrow P_{C_0} u$ も得られる。したがって, 任意の $y \in K$ に対して

$$\begin{aligned}
0 = -\frac{\pi \sin \epsilon_0}{\lambda_0} & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(R_{\lambda_n f} x_n, y) \\
& \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (-f(y, R_{\lambda_n f} x_n)) \\
& \leq -\limsup_{n \rightarrow \infty} f(y, R_{\lambda_n f} x_n) \\
& \leq -f(y, P_{C_0} u).
\end{aligned}$$

ここで, 任意の $w \in K$ と $t \in]0, 1[$ に対して $w_t = tw \oplus (1-t)P_{C_0}u$ とすると, $w_t \in K$ であり, よって

$$\begin{aligned} 0 \leq f(w_t, w_t) &= f(w_t, tw \oplus (1-t)P_{C_0}u) \\ &\leq tf(w_t, w) + (1-t)f(w_t, P_{C_0}u) \\ &\leq tf(w_t, w). \end{aligned}$$

よって $f(w_t, w) \geq 0$ であり, $t \rightarrow 0$ とすると,

$$0 \leq \limsup_{t \downarrow 0} f(w_t, w) \leq f(P_{C_0}u, w)$$

となる. $w \in K$ は任意なので, $P_{C_0}u \in \text{Equil } f$ が得られる. さらに, $\text{Equil } f \subset C_0$ であることから $P_{C_0}u = P_{\text{Equil } f}u$ が成り立ち, 定理の後半が示された. \square

4 凸最小化問題への応用

X を admissible な完備 CAT(1) 空間, K を X の空でない閉凸部分集合とし, 下半連続凸関数 $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ に対する最小化問題, すなわち,

$$g(x_0) = \inf_{x \in K} g(x)$$

をみたく x_0 を解とする問題を考える. この関数 g を用いて, $f: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ を各 $x, y \in K$ に対して

$$f(x, y) = g(y) - g(x)$$

と定義すると, 最小化問題の解は f に対する均衡問題の解と一致する. また, f が条件 (E1)–(E4) をすべてみたすことも容易にわかる. さらに, (2) で定義される f のリゾルベントは, 凸関数 g に対するリゾルベントの一つである次の写像 R_g と一致する. ここで $R_g: X \rightarrow K$ は $x \in X$ に対し,

$$R_g x = \operatorname{argmin}_{x \in X} (g(y) - \log \cos d(y, x)) \quad (3)$$

で定義される. この写像の定義域が X 全体となることや, その詳細な性質については [3] で示されている.

これらの事実を用いると, 定理 3.1 から次の定理が得られる. 注意 2.4 で述べたことから, 空間に convex hull finite property を仮定する必要はないことに注意せよ.

定理 4.1. X を admissible な完備 CAT(1) 空間とし, 任意の $u, v \in X$ に対して, 集合 $\{x \in X \mid d(u, x) \leq d(v, x)\}$ は凸集合であると仮定する. K を X の空でない閉凸集合とし, $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ を下半連続な凸関数で $\operatorname{argmin} g \neq \emptyset$ とする. 実数列 $\{\epsilon_n\}, \{\lambda_n\}$ は定理 3.1 と同様に取る. $u \in X$ に対し, 点列 $\{x_n\} \subset K$ と K の閉凸部分集合列 $\{C_n\}$ を次のように帰納的に定める: $x_1 = u, C_1 = K$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C_{n+1} = \{z \in X \mid d(R_{\lambda_n g} x_n, z) \leq d(x_n, z)\} \cap C_n$$

で定義された C_{n+1} に対して, $x_{n+1} \in C_{n+1}$ を

$$\cos d(u, x_{n+1}) \geq \cos d(u, C_{n+1}) \cos \epsilon_{n+1}$$

をみたすようにとる. ここで $R_{\lambda_n g}$ は (3) によって定義された $\lambda_n g$ のリゾルベント作用素である. このとき

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(R_{\lambda_n g} x_n, x_n) \leq 2\epsilon_0$$

が成り立ち, さらに

$$\inf_{y \in X} g(y) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} g(R_{\lambda_n g} x_n) \leq \inf_{y \in X} g(y) + \frac{\pi \sin \epsilon_0}{\lambda_0}$$

が成り立つ. とくに, $\epsilon_0 = 0$ のときは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = P_{\operatorname{argmin} g} u \in \operatorname{argmin} g,$$

すなわち, $\{x_n\}$ は g に関する凸最小化問題の解に収束する. ここで, $P_{\operatorname{argmin} g}: X \rightarrow \operatorname{argmin} g$ は距離射影である.

謝辞. 本研究は JSPS 科研費 JP21K03316 の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student **63** (1994), 123–145.
- [2] P. L. Combettes and S. A. Hirstoaga, *Equilibrium programming in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **6** (2005), 117–136.
- [3] T. Kajimura and Y. Kimura, *A new definition of resolvents for convex functions on complete geodesic spaces*, Study on nonlinear analysis and convex analysis, RIMS Kôkyûroku, vol. 2112, Kyoto University, Kyoto, 2019, pp. 141–147.
- [4] Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of nonexpansive mapping with nonsummable errors in a geodesic space*, Fixed point theory and its applications, Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2013, pp. 157–163.
- [5] Y. Kimura, *A shrinking projection method for nonexpansive mappings with nonsummable errors in a Hadamard space*, Ann. Oper. Res. **243** (2016), 89–94.
- [6] Y. Kimura, *An approximation method with nonsummable errors for convex minimization problems*, Linear and Nonlinear Analysis **3** (2017), 401–407.
- [7] Y. Kimura, *Resolvents of equilibrium problems on a complete geodesic space*, Carpathian Journal of Mathematics **37** (2021), 463–476.
- [8] Y. Kimura, *Equilibrium problems and the proximal point algorithm on a complete geodesic space*, Study on nonlinear analysis and convex analysis, RIMS Kôkyûroku, vol. 2194, Kyoto University, Kyoto, 2021.

- [9] Y. Kimura and Y. Kishi, *Equilibrium problems and their resolvents in Hadamard spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **19** (2018), 1503–1513.
- [10] S. Shabanian and S. M. Vaezpour, *A minimax inequality and its applications to fixed point theorems in CAT(0) spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2011), 9.
- [11] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.

Yasunori Kimura
Department of Information Science
Toho University
Japan
Email: yasunori@is.sci.toho-u.ac.jp

スタンダードコンパクト Clifford–Klein 形を持つ 既約対称空間の分類

東條広一 (理化学研究所革新知能統合研究センター)*

1 導入

1.1 背景

G をリー群, H を G の閉部分群, Γ を G の離散部分群とする. Γ が G/H に固有不連続かつ固定点自由に作用するとき, 両側剰余類 $\Gamma \backslash G/H$ は自然な多様体構造を持つ. このとき, その多様体 $\Gamma \backslash G/H$ は G/H の *Clifford–Klein 形* と呼ばれ, Γ は G/H の不連続群と呼ばれる.

1980 年代後半に, 擬リーマン等質空間に対する Clifford–Klein 形の系統的な研究が小林俊行氏によって始められた. この分野における重要な問題の一つは次である.

Problem 1.1 ([Ko89]). どのような等質空間がコンパクト Clifford–Klein 形を持つか?

本稿では, G/H が簡約型の場合に焦点をあてる. すなわち, $G \supset H$ はともに線型簡約リー群である (詳細は [Ko89] を参照). このとき, G/H には G が等長に作用するような擬リーマン多様体の構造が自然に入る. H がコンパクトのとき, G/H は常にコンパクト Clifford–Klein 形を持つことが知られている ([Bo63]). 一方, H が非コンパクトのとき, G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持つとは限らない ([CM62]). これは, 離散群の等長的な作用が必ずしも固有不連続にならないためである. 大きな不連続群を構成する有効な手法として不連続群の連続類似を用いるものがある.

Definition 1.2 (スタンダード [KK16]). G/H を簡約型等質空間とし, Γ を G/H の不連続群とする. Clifford–Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ がスタンダードであるとは, Γ を含み, G/H

* koichi.tojo@riken.jp

に固有に作用する G の簡約部分群が存在することをいう。

ここで、リー群 G の多様体 M への作用 $G \curvearrowright M$ が固有であるとは、 $G \times M \rightarrow M \times M$, $(g, m) \mapsto (g \cdot m, m)$ が固有写像であることをいう。

次の連続類似を用いることでいくつかの等質空間がコンパクト Clifford–Klein 形を持つことが知られている。

Fact 1.3 ([Ko89]). G/H を簡約型等質空間とする。 G/H に固有かつ余コンパクトに作用する G の簡約部分群 L が存在したとすると、 L の torsion-free な一様格子 Γ を取ることによって標準的なコンパクト Clifford–Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ が得られる。

Fact 1.3 によって Problem 1.1 に対してそのような L を持つ G/H に対して肯定的な答えが得られる。逆に次の予想が小林氏によって提出された。

Conjecture 1.4 ([Ko01, Conjecture 4.3], [KY05, Conjecture 3.3.10]). G/H を簡約型等質空間とする。 G/H がコンパクト Clifford–Klein 形を持つならば、 G/H は標準的なコンパクト Clifford–Klein 形を持つ。

Remark 1.5. Conjecture 1.4 は、「すべてのコンパクト Clifford–Klein 形が標準的」という主張とは異なることに注意する。標準的なコンパクト Clifford–Klein 形の deformation が標準的でないコンパクト Clifford–Klein 形を生成しうることが知られている ([G85, Ko98]).

現在まで Conjecture 1.4 に対する反例は知られていない。一方でこの予想を支持する証拠が多く得られている ([Ko89], [KO90], [Ko92a], [Ko92b], [Z94], [Li95], [Ben96], [LMZ95], [Co94], [Ma97], [OW00], [KY05], [Ok13], [Th], [Mo15]).

もし Conjecture 1.4 が正しいと証明されれば、次の問に対する答えが簡約型等質空間について Problem 1.1 に対する解を与える。

Question 1.6. 標準的なコンパクト Clifford–Klein 形を持つ簡約型等質空間 G/H を分類せよ。

1.2 主結果

本稿の目的は G/H が既約対称空間である場合について Question 1.6 に答えることである。

G/H が対称空間である場合について、小林氏は表 1 にある 5 系列と 7 つの散発的な擬リーマン対称空間がコンパクト Clifford–Klein 形を持つことを示した。

Fact 1.7 ([KY05, Corollary 3.3.7]). 表 1 にある対称空間 G/H はスタンダードなコンパクト Clifford–Klein 形を持つ。ここで n は正の整数である。

表 1 固有かつ余コンパクトに作用する簡約部分群 L を持つ対称空間 G/H ([KY05]).

G/H	L	G/H	L
$SU(2, 2n)/Sp(1, n)$	$U(1, 2n)$	$SO(4, 4)/SO(4, 1) \times SO(3)$	$Spin(4, 3)$
$SU(2, 2n)/U(1, 2n)$	$Sp(1, n)$	$SO(4, 3)/SO(4, 1) \times SO(2)$	$G_{2(2)}$
$SO(2, 2n)/U(1, n)$	$SO(1, 2n)$	$SO(8, \mathbb{C})/SO(7, \mathbb{C})$	$Spin(1, 7)$
$SO(2, 2n)/SO(1, 2n)$	$U(1, n)$	$SO(8, \mathbb{C})/SO(7, 1)$	$Spin(7, \mathbb{C})$
$SO(4, 4n)/SO(3, 4n)$	$Sp(1, n)$	$SO^*(8)/U(3, 1)$	$Spin(1, 6)$
$SO(8, 8)/SO(7, 8)$	$Spin(1, 8)$	$SO^*(8)/SO^*(6) \times SO^*(2)$	$Spin(1, 6)$

Remark 1.8. $SO(6, 2)/U(3, 1)$, $SO^*(8)/U(3, 1)$, $SO^*(8)/SO^*(6) \times SO^*(2)$ は互いに局所同型である。

既約対称空間は次の三つのタイプに大別される：

- 群多様体 $(G' \times G')/\text{diag } G'$. ここで G' は単純リー群か 1 次元リー群,
- リーマン対称空間 G/K (K はコンパクト). ここで G は単純リー群,
- 擬リーマン対称空間 G/H (H は非コンパクト). ここで G は単純リー群.

最初の 2 つのタイプについて Question 1.6 には肯定的な答えが知られている。実際, Fact 1.3 において簡約部分群 L をそれぞれ次のようにとればよい：

- $L = G' \times \{e\}$,
- $L = G$.

従って, 3 つ目のタイプに焦点をあてる。この場合, Question 1.6 に対する答えは以下のようなになる。

Theorem 1.9. G を線型半単純リー群とし, G/H を既約対称空間とする。このとき G/H がスタンダードなコンパクト Clifford–Klein 形を持つことと, G/H が次のいずれかと局所同型であることは同値である。

- 群多様体 $G' \times G' / \text{diag } G'$,
- リーマン対称空間 G/K ,
- 表 1 にある等質空間.

1.3 証明の key idea

以下 Theorem 1.9 の証明の key idea について述べる. G/H が標準的なコンパクト Clifford–Klein 形 $\Gamma \backslash G/H$ を持つとする. このとき G の簡約部分群 $L \supset \Gamma$ であって G/H に固有かつ余コンパクトに作用するものがとれる. このとき L は半単純としてよいことが知られている (Fact 2.5). G, L のリー代数をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{l}$ とすると, $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$ となる. さらに \mathfrak{g} は自然表現によって $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ に実現されているとすると合成によって \mathfrak{l} の表現 $\rho: \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ が得られる. 従って, G/H を固定したとき, 次が成り立つ.

標準的なコンパクト Clifford–Klein 形の存在
 \iff “いくつかの条件” を満たす半単純リー代数の表現の存在.

すなわち標準的なコンパクト Clifford–Klein 形の分類は, ある種の条件を満たす半単純リー代数の表現の分類に帰着される. 次の 2 つの key idea によって表現の候補を絞ることで分類が達成される.

- (i) 表現の “大きな” イdealへの制限の既約成分の次元に上界を与えること,
- (ii) ある種の構造を持つリー代数への表現による埋め込み可能判定.

(i) について: \mathfrak{l} は半単純であるから $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{l}_k$ と非コンパクト単純イdealの直和でかける. このとき “大きな” イdeal \mathfrak{l}_1 とそのイdealへの表現の制限 $(\mathfrak{l}_1, \rho|_{\mathfrak{l}_1})$ を決定することを考える. ここで大きさはカルタン分解 $\mathfrak{l} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ をもつ簡約リー代数に対し, 非コンパクト次元 $\dim \mathfrak{p}$ と実ランク (\mathfrak{p} の極大可換部分空間 \mathfrak{a} の次元) $\dim \mathfrak{a}$ の比

$$S(\mathfrak{l}) := \frac{\dim \mathfrak{p}}{\dim \mathfrak{a}}$$

によって測る. この意味でもっとも大きな単純イdealを \mathfrak{l}_1 とする. さらに “いくつかの条件” を組み合わせることで, 次の不等式が得られる.

$$S(\mathfrak{l}) \leq S(\mathfrak{l}_1).$$

$\dim \rho$ は $S(\mathfrak{l})$ を用いて上から評価できるため、 π を $\rho|_{\mathfrak{l}_1}$ の既約成分とすると、比較的小さい正定数 C が存在して、次の不等式が成り立つ。

$$\dim \pi \leq C \cdot S(\mathfrak{l}_1).$$

この不等式は取り得る単純リー代数とその既約表現のペア (\mathfrak{l}_1, π) に厳しい制約を与えるためそのようなペアは列挙可能である。

(ii) について：“いくつかの条件” 中の重要な条件の一つに、表現 $\rho: \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ に対し、像 $\rho(\mathfrak{l})$ が $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ のより小さいリー代数 \mathfrak{g} に含まれることが挙げられる。例えば $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p, q)$ ($p + q = n$) のとき、up to $\text{Int}(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))$ で次の二つが成り立つことが必要である。

$$\rho(\mathfrak{l}) \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), \quad \rho(\mathfrak{l}) \subset \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}).$$

半単純リー代数の表現 ρ が既約の場合に対しては岩堀氏による判定条件を用いることで上記条件が成り立つか否か判定できる ([Iw59])。しかし、我々は表現 ρ が既約とは限らない場合についても考察する必要がある。[To2] では岩堀氏による判定条件を既約とは限らない場合に一般化を行った (Proposition 3.13)。これを用いることで候補となるペア (\mathfrak{l}_1, π) を絞ることができる。

2 準備

この節では Question 1.6 を考察する上で重要となる固有性および余コンパクト性に関する小林氏による判定条件を復習し、それを用いてリー代数を用いて Question 1.6 を再定式化する。

2.1 固有性と余コンパクト性に関する判定条件

G を線型簡約リー群とし、 H, L を G の簡約部分群とする。ここでは簡単のために G のカルタン対合 θ を $\theta(H) = H, \theta(L) = L$ となるようにとれたと仮定する^{*1}。対応するカルタン分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ とし、 \mathfrak{p} の極大可換部分空間 \mathfrak{a} を固定する。 $\mathfrak{a}_{\mathfrak{h}} := \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{l}} := \mathfrak{a} \cap \mathfrak{l}$ とおく。このとき次が成り立つ。

Fact 2.1 (固有性判定条件 [Ko89, Theorem 4.1])。次の G, H, L に関する条件は同値である。

^{*1} G の内部自己同型によって H, L がこの条件を満たすように動かせる。このとき L の G/H への作用の固有性には影響しない

- (i) L の G/H への自然な作用は固有である.
- (ii) H の G/L への自然な作用は固有である.
- (iii) $W \cdot \mathfrak{a}_{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{a}_{\mathfrak{l}} = \{0\}$.

ここで $W := W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ は \mathfrak{g} の \mathfrak{a} に関する制限ルート系のワイル群である.

$\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} := \dim \mathfrak{a}$ とすると上記条件 (iii) から次が従う.

Remark 2.2 ([Ko89, Corollary 4.2]). 次の不等式が成り立つ.

$$\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{h} + \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{l} \leq \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}.$$

余コンパクト性に関する判定条件を記述するために線型簡約群の非コンパクト次元の定義を思い出そう. カルタン分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を持つ Lie 代数 \mathfrak{g} に対し, その非コンパクト次元 $d(\mathfrak{g})$ を次で定める.

$$d(\mathfrak{g}) := \dim \mathfrak{p}.$$

このとき次が成り立つ,

Fact 2.3 (余コンパクト性判定条件 [Ko89, Theorem 4.7]). Fact 2.1 と同じ設定の下で, L は G/H に固有に作用すると仮定する. このとき G, H, L に関する次の 2 条件は同値である.

- (i) $L \backslash G/H$ はコンパクトである.
- (ii) $d(\mathfrak{g}) = d(\mathfrak{h}) + d(\mathfrak{l})$.

三つ組 (G, H, L) が standard なコンパクト Clifford–Klein 形を誘導するとき, Remark 2.2 において等式が成り立つことが知られている.

Fact 2.4 ([BJT20, Proposition 3]). G を線型半単純リー群とし, H, L をその簡約部分群とする. L が G/H に固有かつ余コンパクトに作用するならば, 次の等式が成り立つ.

$$\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{h} + \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{l} = \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}.$$

また次の事実より, L は半単純リー群と仮定してもよいことがわかる.

Fact 2.5 (Corollary to [BL92, Corollary 3], see also [Mo17, Proposition 5.3]). G を線型半単純リー群, H を非コンパクトな G の簡約部分群とする. G/H がコンパクト Clifford–Klein 形を持つならば, H の中心はコンパクトである.

2.2 リー代数による定式化

前節の Facts 2.1, 2.3 により, Question 1.6 はリー代数の条件によって以下で述べる Question 2.9 のように記述できる. これに対する答えとして Theorem 2.10 を与えることで Theorem 1.9 が従うことを見る.

Setting 2.6. Φ で三つ組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{l})$ 全体の集合を表すとする. ただし, \mathfrak{g} は非コンパクト実単純リー代数, $\mathfrak{h}, \mathfrak{l}$ は非コンパクトな \mathfrak{g} の簡約部分代数である.

Definition 2.7. $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i, \mathfrak{l}_i) \in \Phi$ ($i = 1, 2$) が同値であるとは次の条件 (*) が成り立つことをいう:

(*) $g, g' \in \text{Int}(\mathfrak{g}_1)$ とリー代数同型写像 $\phi: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ が存在して $\phi(g(\mathfrak{h}_1)) = \mathfrak{h}_2$ かつ $\phi(g'(\mathfrak{l}_1)) = \mathfrak{l}_2$.

これは Φ における同値関係を定める.

Remark 2.8. 固有性判定条件, 余コンパクト性判定条件は Φ の同値類集合において意味を持つ. 実際, 単純リー代数のカルタン対合は内部自己同型を除いて一意であるので, 2つの判定条件は単純リー代数の間の同型写像によって引き継がれる.

Question 2.9. up to equivalence (*) で次の 3 条件を満たす三つ組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{l})$ を分類せよ:

- (i) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は対称対.
- (ii) \mathfrak{l} は半単純でコンパクトイデアルを持たない.
- (iii) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{l})$ は固有性判定条件 Fact 2.1(iii) と余コンパクト性判定条件 Fact 2.3(ii) を満たす.

上記 (ii) の条件について半単純性に Fact 2.5 を用いた.

この間に対する答えとして次が得られる:

Theorem 2.10 ([To2]). 上記 3 条件を満たす Φ の同値類集合は, 表 1 から誘導される三つ組によって尽くされる. ただし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 2)$ の場合は単純でないので除く.

Theorem 1.9 は Theorem 2.10 の系として得られる.

本稿では, Theorem 2.10 の証明の詳細には踏み入らず, その分類の戦略について記す.

3 分類の戦略

3.1 無限小化等質空間 (tangential homogeneous space) との関係

簡約型等質空間 G/H に対して, その無限小化等質空間 G_θ/H_θ が定まる. 無限小化等質空間のコンパクト Clifford–Klein 形の存在は, スタンダードなコンパクト Clifford–Klein 形の存在の必要条件となる (Fact 3.7). これを用いて次のようにスタンダードなコンパクト Clifford–Klein 形を持つ対称空間の候補を絞ることができる.

Proposition 3.1 ([To21, To1]). G を単純リー群, G/H を対称空間で H は非コンパクトであるとする. G/H がスタンダードなコンパクト Clifford–Klein 形を持つとすると G/H は Table 1 にあるものか以下の対称空間に局所同型である.

- $SO(p, q+1)/SO(p, q)$ ($1 \leq q < HR(p)$),
- $SO(p, q+1)/SO(p, 1) \times SO(q)$ ($1 \leq q < HR(p)$),
- $SU(2p, 2q)/SP(p, q)$ ($1 \leq q \leq p$),
- $E_{6(-14)}/F_{4(-20)}$

ここで $HR(p)$ は Definition 3.2 で与えられる Hurwitz–Radon 数を表す.

Definition 3.2 (Hurwitz–Radon 数 [A62]). 正の整数 n は $n = 2^k(2\ell + 1)$, $k = 4\alpha + \beta$ ($k, \ell, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 0 \leq \beta \leq 3$) と一意的に書ける. このとき, n の Hurwitz–Radon 数 $HR(n)$ を次で定義する.

$$HR(n) := 8\alpha + 2^\beta.$$

Definition 3.3 (カルタン運動群, [KY05, §5.1]). G を線型簡約リー群とし, θ を G のカルタン対合とする. このとき, G のカルタン運動群 G_θ が次で定義される.

$$G_\theta := K \ltimes_{\text{Ad}} \mathfrak{p}.$$

ここで, $K = G^\theta$ は G の極大コンパクト部分群で $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}^{-\theta}$ である.

G/H を簡約型等質空間とすると, G のカルタン対合 θ を $\theta|_H$ がまた H のカルタン対合になるように取れる. このとき G_θ の閉部分群 $H_\theta := K_H \ltimes \mathfrak{p}_H$ が得られる. ここで $K_H = K \cap H$, $\mathfrak{p}_H = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ である.

Definition 3.4 ([KY05, Definition 5.12]). G_θ/H_θ を G/H の無限小化等質空間 (tangential homogeneous space) と呼ぶ.

Remark 3.5. G/H が対称空間なら G_θ/H_θ もそうである.

無限小化等質空間に対しては, コンパクト Clifford–Klein 形を持つための判定条件が [KY05] によって与えられている. これを [Ber57] によって分類されている既約対称空間に対して, 適用・計算することで部分的な分類が [To21, To1] によってなされた. その結果と次の 2 つの事実を組み合わせることで Proposition 3.1 が証明される.

Fact 3.6 ([Ko89, Example 4.11]). n を正の整数とする. 対称空間 $Sp(2n, \mathbb{R})/Sp(n, \mathbb{C})$ はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない.

Fact 3.7 ([KY05, Theorem 5.3.2]). G/H を簡約型等質空間とする. G/H がスタンダードなコンパクト Clifford–Klein 形を持つならば, その無限小化等質空間 G_θ/H_θ もコンパクト Clifford–Klein 形を持つ.

3.2 主要単純因子の表現の次元の上界

Question 2.9 の条件を満たす三つ組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{l})$ が存在すると, いくつかの条件を満たす半単純リー代数の表現が得られる. その表現を分類することで逆に三つ組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{l})$ の分類が得られる. より正確には次が成り立つ.

Proposition 3.8. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を対称対であって $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ は自然表現によって実現されているとする. このとき, リー代数 \mathfrak{l}' であって, 三つ組 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{l}')$ が Question 2.9 の条件 (ii), (iii) を満たすものが存在することと, 半単純リー代数 \mathfrak{l} とその忠実な表現 $\rho: \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ であって次を満たすものが存在することは同値である.

- (i) $\rho(\mathfrak{l}) \subset \mathfrak{g}$,
- (ii) $\rho(\mathfrak{l})$ は \mathfrak{g} の簡約部分リー代数,
- (iii) $W \cdot \mathfrak{a}_{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{a}_{\rho(\mathfrak{l})} = \{0\}$,
- (iv) $d(\mathfrak{l}) = d(\mathfrak{g}) - d(\mathfrak{h})$.

以下, 半単純リー代数とその忠実な表現のペア (\mathfrak{l}, ρ) で Proposition 3.8 の条件を満たすものを分類する手法を述べる.

3.2.1 主要単純因子とその性質

Proposition 3.8 の条件から従う (\mathfrak{l}, ρ) に対する数値的な必要条件を考えたい. そのために “主要単純因子”(Definition 3.11) を導入し, その性質を見る.

Notation 3.9. \mathfrak{g} を非コンパクト簡約リー代数とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ をそのカルタン分解とする. このとき $S(\mathfrak{g})$ を非コンパクト次元と実ランクの比で定める. すなわち,

$$S(\mathfrak{g}) := \frac{d(\mathfrak{g})}{\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}}.$$

Remark 3.10. 表 2 にあるように $S(\mathfrak{g})$ の値は, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ は半整数, その他の単純リー代数は整数となるが, この幾何的な意味については筆者は知らない.

Definition 3.11. \mathfrak{l} を簡約リー代数とし, $\mathfrak{l} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{l}^{ss}$ をレビ分解とする. ここで, \mathfrak{z} は \mathfrak{g} の中心で \mathfrak{l}^{ss} は \mathfrak{l} の半単純部分代数である.

$$\mathfrak{l}^{ss} = \mathfrak{l}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{l}_k$$

を次の条件を満たす非コンパクト単純イデアルへの分解であるとする;

$$S(\mathfrak{l}_i) \geq S(\mathfrak{l}_{i+1}) \quad (i = 1, \dots, k-1).$$

このとき \mathfrak{l}_1 を \mathfrak{l} の主要単純因子と呼ぶ.

$\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} - \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{h} = 1$ のときには Fact 2.4 より, \mathfrak{l} は単純リー代数 $\mathfrak{so}(k, 1)$, $\mathfrak{su}(k, 1)$, $\mathfrak{sp}(k, 1)$ ($k \geq 1$), $f_{4(-20)}$ のいずれかと同型としてよい. 一方で $\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} - \text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{h} \geq 2$ のときには \mathfrak{l} は単純とは限らないため主要単純因子を用いる.

このとき不等式の簡単な議論によって次が成り立つことがわかる.

Lemma 3.12.

$$S(\mathfrak{l}^{ss}) \leq S(\mathfrak{l}_1).$$

この不等式を用いて, 主要単純因子 \mathfrak{l}_1 への制限 $\rho|_{\mathfrak{l}_1}$ の任意の既約成分 π の次元の上界を与えることができる.

3.2.2 分類の計算例

主要単純因子の考え方をを用いてペア (\mathfrak{l}, ρ) の候補を絞ることを考える. ここでは, このことを Proposition 3.1 にある候補の一つである $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{su}(2p, 2q), \mathfrak{sp}(p, q))$ を例に

表 2 単純リー代数 \mathfrak{g} の非コンパクト次元 $d(\mathfrak{g})$ と実ランク $\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ の比 $S(\mathfrak{g})$

\mathfrak{g}	$\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$	$d(\mathfrak{g})$	$S(\mathfrak{g}) := \frac{d(\mathfrak{g})}{\text{rank}_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}}$
$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ ($n \geq 2$)	$n - 1$	$n^2 - 1$	$n + 1$
$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ ($n \geq 2$)	$n - 1$	$\frac{(n-1)(n+2)}{2}$	$\frac{n+2}{2}$
$\mathfrak{su}^*(2n)$ ($n \geq 2$)	$n - 1$	$(n - 1)(2n + 1)$	$2n + 1$
$\mathfrak{su}(k, \ell)$ ($k \geq \ell \geq 1$)	ℓ	$2k\ell$	$2k$
$\mathfrak{so}(2n + 1, \mathbb{C})$ ($n \geq 2$)	n	$n(2n + 1)$	$2n + 1$
$\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ ($n \geq 4$)	n	$n(2n - 1)$	$2n - 1$
$\mathfrak{so}(k, \ell)$ ($3 \leq k \leq \ell \geq 1$)	ℓ	$k\ell$	k
$\mathfrak{so}^*(4n)$ ($n \geq 3$)	n	$2n(2n - 1)$	$2(2n - 1)$
$\mathfrak{so}^*(4n + 2)$ ($n \geq 2$)	n	$2n(2n + 1)$	$2(2n + 1)$
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ ($n \geq 3$)	n	$n(2n + 1)$	$2n + 1$
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ ($n \geq 3$)	n	$n(n + 1)$	$n + 1$
$\mathfrak{sp}(k, \ell)$ ($k \geq \ell \geq 1$)	ℓ	$4k\ell$	$4k$
$\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$	2	14	7
$\mathfrak{g}_{2(2)}$	2	8	4
$\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}}$	4	52	13
$\mathfrak{f}_{4(4)}$	4	28	7
$\mathfrak{f}_{4(-20)}$	1	16	16
$\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}}$	6	78	13
$\mathfrak{e}_{6(6)}$	6	42	7
$\mathfrak{e}_{6(2)}$	4	40	10
$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	2	32	16
$\mathfrak{e}_{6(-26)}$	2	26	13
$\mathfrak{e}_7^{\mathbb{C}}$	7	133	19
$\mathfrak{e}_{7(7)}$	7	70	10
$\mathfrak{e}_{7(-5)}$	4	64	16
$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	3	54	18
$\mathfrak{e}_8^{\mathbb{C}}$	8	248	31
$\mathfrak{e}_{8(8)}$	8	128	16
$\mathfrak{e}_{8(-24)}$	4	112	28

とって説明する. この場合には Lemma 3.12 より次の不等式が成り立つ.

$$\dim \pi \leq \dim \rho \leq S(\mathfrak{l}^{ss}) \leq S(\mathfrak{l}_1).$$

この不等式は主要単純因子と $\rho|_{\mathfrak{l}_1}$ の既約成分のペア (\mathfrak{l}_1, π) に対して, 強い制約を与えている. 実際, 上記不等式を満たすペアは次の表 3 のように列挙できる.

表 3 単純リー代数 \mathfrak{l}_1 とその既約表現 π で不等式 $\dim \pi \leq S(\mathfrak{l}_1)$ を満たすもの. 以下の π はそれぞれ \mathfrak{l}_1 の自然表現を表す.

\mathfrak{l}_1	$\dim \pi$	$S(\mathfrak{l}_1)$
$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ ($n \geq 2$)	n	$n + 1$
$\mathfrak{su}^*(2n)$ ($n \geq 2$)	$2n$	$2n + 1$
$\mathfrak{su}(k, \ell)$ ($2 \leq k \geq \ell \geq 1$)	$k + \ell$	$2k$
$\mathfrak{so}(2n + 1, \mathbb{C})$ ($n \geq 2$)	$2n + 1$	$2n + 1$
$\mathfrak{so}^*(4n + 2)$ ($n \geq 1$)	$4n + 2$	$4n + 2$
$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ ($n \geq 2$)	$2n$	$2n + 1$
$\mathfrak{sp}(k, \ell)$ ($k \geq \ell \geq 1$)	$2(k + \ell)$	$4k$
$\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$	7	7

ただし, $(\mathfrak{l}, \rho), (\mathfrak{l}', \rho')$ は, リー代数同型 $\varphi: \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{l}'$ が存在して, $\rho' \circ \varphi$ と ρ が \mathfrak{l} の表現として同値であるとき同一視する.

3.3 岩堀の埋め込み判定条件の一般化

Proposition 3.8 の条件 (i) は半単純リー代数の表現が \mathfrak{g} への埋め込みを誘導するか否かを問うている. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ で表現が既約の場合には最高ウェイトから判定する方法が [Iw59] によって与えられている. この節では $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{su}^*(2m), \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}), \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}), \mathfrak{su}(p, q)$ に対し, 既約とは限らない表現が \mathfrak{g} への埋め込みを誘導するかを最高ウェイトと重複度を用いて判定できることを見る (Propositions 3.13, 3.14).

3.3.1 岩堀の埋め込み判定条件の一般化

記号を準備する. \mathfrak{g} を実半単純リー代数とし, $\text{Irr}(\mathfrak{g})$ で \mathfrak{g} の有限次元複素既約表現の同値類集合を表すとする. 表現 $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ と $\pi \in \text{Irr}(\mathfrak{g})$ に対し, その重複度を

$m_\pi := \dim \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\pi, \rho)$ と書く. $\text{Irr}(\mathfrak{g})$ の部分集合 $\text{Irr}^c(\mathfrak{g})$ を次で定義する.

$$\text{Irr}^c(\mathfrak{g}) := \{\rho \in \text{Irr}(\mathfrak{g}) \mid \bar{\rho} \simeq \rho\}.$$

ここで, $\bar{\rho}$ は ρ の複素共役表現を表す. [Iw59, §9] で与えられる次の写像 index を用いる.

$$\text{index}: \text{Irr}^c(\mathfrak{g}) \rightarrow \{\pm 1\}.$$

その値は, 既約表現の最高ウェイトが与えられると簡単に計算できる (実際の値については例えば [On04, Table 5] を参照).

Proposition 3.13 ([To2]). $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を複素半単純リー代数とし, τ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の反正則な対合とし, $\rho: \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\tau} \rightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ を表現とする. \mathfrak{m} をリー代数 $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{su}^*(2m)$, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(m, \mathbb{C})$ のいずれかとする. ただし, n が偶数のとき $m := \frac{1}{2}n$ である. このとき, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, τ , ρ に対する次の 2 条件は同値である:

- (i) ある $\alpha \in \text{Int}(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))$ が存在して, $\alpha(\rho(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\tau})) \subset \mathfrak{m}$,
- (ii) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\sigma}$ の表現として $\rho \simeq \bar{\rho}$ であり, 任意の $\pi \in \text{Irr}^c(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\sigma})$ に対し, $(\varepsilon \text{index } \pi)^{m_\pi} = 1$ が成り立つ.

ここで, ε と σ は \mathfrak{m} に応じて次で与えられる:

\mathfrak{m}	ε	σ
$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$	+1	τ
$\mathfrak{su}^*(2m)$	-1	τ
$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$	+1	θ
$\mathfrak{sp}(m, \mathbb{C})$	-1	θ

ここで θ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のカルタン対合を表す.

Proposition 3.14 (既約表現の場合は [On04, Theorem 3, §7] を参照). $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を複素半単純リー代数とし, τ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の反正則な対合とし, $\rho: \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\tau} \rightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ を表現とする. このとき次の 2 条件は同値である.

- (i) ある $\alpha \in \text{Int}(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}))$ と $p + q = n$ を満たす $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して, $\alpha(\rho(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\tau})) \subset \mathfrak{su}(p, q)$,
- (ii) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\tau}$ の表現として $\rho \simeq \bar{\rho}^{\vee}$.

3.3.2 分類の計算例

Propositions 3.13, 3.14 の結果を用いて Proposition 3.8 の条件を満たすペア (\mathfrak{l}, ρ) をさらに絞ることができる. このことを $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{su}(2p, 2q), \mathfrak{sp}(p, q))$ を例にとって説明する.

Proposition 3.14 を用いることで制限 $\rho|_{\mathfrak{l}_1}$ の任意の既約成分 π に対する制約を与えることができる. 実際, 表現の次元の議論を組み合わせることによって (\mathfrak{l}_1, π) は次を満たすことがわかる:

$$\pi \simeq \bar{\pi}^\vee.$$

表 3 のうちでこれを満たすものは以下に限られる:

表 4 表 3 のうちで $\pi \simeq \bar{\pi}^\vee$ を満たす (\mathfrak{l}_1, π)

\mathfrak{l}_1	$\dim \pi$	$S(\mathfrak{l}_1)$
$\mathfrak{su}(k, \ell) (2 \leq k \geq \ell \geq 1)$	$k + \ell$	$2k$
$\mathfrak{so}^*(4n + 2) (n \geq 1)$	$4n + 2$	$4n + 2$
$\mathfrak{sp}(k, \ell) (k \geq \ell \geq 1)$	$2(k + \ell)$	$4k$

さらに $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対する固有性の条件 Proposition 3.8 (iii) を詳細に見ることで候補となる (\mathfrak{l}_1, π) を絞ることができ, 結果として, $q = 1$, $(\mathfrak{l}, \rho) = (\mathfrak{su}(2p, 1), \text{自然表現})$ となることが示される.

他の古典型対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に対しても同様の議論によってペア (\mathfrak{l}, ρ) の分類ができる.

参考文献

- [A62] J. F. ADAMS, *Vector fields on spheres* Ann. Math. **75**, No.3 (1962), 603–632.
- [Ben96] Y. BENOIST, *Actions propres sur les espaces homogènes réductifs*, Ann. of Math. (2) **144** (1996), 315–347.
- [BL92] Y. BENOIST, F. LABOURIE, *Sur les espaces homogènes modèles de variétés compactes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math, **76** (1992), 99–109.
- [Ber57] M. BERGER, *Les espaces symétriques non compacts*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **74** (1957), 85–177.

- [BJT20] M. BOCHEŃSKI, P. JASTRZEBSKI, A. TRALLE, *Nonexistence of standard compact Clifford–Klein forms of homogeneous spaces of exceptional Lie groups*, Math. Comp. **89** (2020), 1487–1499.
- [Bo63] A. BOREL, *Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces*, Topology **2** (1963), 111–122.
- [CM62] E. CALABI AND L. MARKUS, *Relativistic space forms*, Ann. of Math. **75** (1962), 63–76.
- [Co94] K. CORLETTE, *Harmonic maps, rigidity and Hodge theory*, ICM-94, Proceedings (1994), 465–471.
- [G85] W. GOLDMAN, *Nonstandard Lorentz space forms*, J. Differential Geometry **21** (1985), 301–308.
- [Iw59] N. IWAHORI, *On real irreducible representations of Lie algebras*, Nagoya Math. J. **14** (1959), 59–83.
- [KK16] F. KASSEL, T. KOBAYASHI, *Poincaré series for non-Riemannian locally symmetric spaces*, Adv. Math. **287** (2016), 123–236.
- [Ko89] T. KOBAYASHI, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. **285** (1989), 249–263.
- [Ko92a] T. KOBAYASHI, *A necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms of homogeneous spaces of reductive type*, Duke Math. J. **67** (1992), 653–664.
- [Ko92b] T. KOBAYASHI, *Discontinuous groups acting on homogeneous spaces of reductive type*, Representation Theory of Lie Groups and Lie Algebras at Fuji-Kawaguchiko, 1990 August–September, eds. T. Kawazoe, T. Oshima and S. Sano, World Scientific (1992), 59–75.
- [Ko98] T. KOBAYASHI, *Deformation of compact Clifford–Klein forms of indefinite-Riemannian homogeneous manifolds*, Math. Ann. **310** (1998), 394–408.
- [Ko01] T. KOBAYASHI, *Discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces*, Mathematics Unlimited-2001 and Beyond, (eds. B. Engquist and W. Schmid), Springer, Berlin (2001), 723–747.
- [KO90] T. KOBAYASHI, K. ONO, *Note on Hirzebruch’s proportionality principle*, J. Fac. Soc. Univ. of Tokyo **37** (1990), 71–87.
- [KY05] T. KOBAYASHI, T. YOSHINO, *Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces—revisited*, Pure Appl. Math. Q. **1**, No.3 (2005), 591–663.

- [LMZ95] F. LABOURIE, S. MOZES, R. J. ZIMMER, *On manifolds locally modelled on non-Riemannian homogeneous spaces*, *Geom. Funct. Anal.* **5** (1995), No.6, 955–965.
- [Li95] R. LIPSMAN, *Proper actions and a compactness condition*, *J. Lie Theory* **5** (1995), 25–39.
- [Ma97] G. A. MARGULIS, *Existence of compact quotients of homogeneous spaces, measurably proper actions, and decay of matrix coefficients*, *Bul. Soc. math. France* **125** (1997), 447–456.
- [Mo15] Y. MORITA, *A topological necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms*, *J. Differential Geometry* **100** (2015), 533–545.
- [Mo17] Y. MORITA, *Homogeneous spaces of nonreductive type that do not model any compact manifold*, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **53**, No.2 (2017), 287–298.
- [OW00] H. OH, D. WITTE, *New examples of compact Clifford–Klein forms of homogeneous spaces of $SO(2, n)$* , *Int. Math. Res. Notice* **5** (2000), 235–251.
- [Ok13] T. OKUDA, *Classification of semisimple symmetric spaces with proper $SL(2, \mathbb{R})$ -actions*, *J. Differential Geom.* **94** (2013), 301–342.
- [On04] A. L. ONISHCHIK, *Lectures on real semisimple Lie algebras and their representations*, *ESI Lectures in Mathematics and Physics*, 2004.
- [Th] N. THOLOZAN, *Volume and non-existence of compact Clifford–Klein forms*, arXiv:1511.09448v2, preprint.
- [To19] K. TOJO, *Classification of irreducible symmetric spaces which admit standard compact Clifford–Klein forms*, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **95**, No.2 (2019), 11–15.
- [To21] K. TOJO, *Obstructions to the existence of compact Clifford–Klein forms for tangential symmetric spaces*, *Int. J. Math.* (2021), DOI: 10.1142/S0129167X21500749.
- [To1] K. TOJO, *Application of obstructions to the existence of compact Clifford–Klein forms for tangential symmetric spaces to exceptional cases* (unpublished).
- [To2] K. TOJO, *Continuous analogue of the existence problem of compact Clifford–Klein forms* (査読中).
- [Z94] R. J. ZIMMER, *Discrete groups and non-Riemannian homogenous spaces*, *J. Am. Math. Soc.* **7** (1994), 159–168.

「スタンダードコンパクト Clifford–Klein 形を持つ既約対称空間の分類」の正誤表

- 訂正箇所：Definition 3.11
(誤)：ここで、 \mathfrak{z} は \mathfrak{g} の中心で
(正)：ここで、 \mathfrak{z} は \mathfrak{l} の中心で
- 訂正箇所：§3.3.2 分類の計算例，下から 3 行目
(誤)：結果として、 $q = 1$, $(\mathfrak{l}, \rho) = (\mathfrak{su}(2p, 1)$, 自然表現)
(正)：結果として、 $q = 1$, $(\mathfrak{l}, \rho) = (\mathfrak{su}(2p, 1)$, 自然表現 \oplus 自明表現)

3変数階数8のある線形偏微分方程式系と その特異制限の特殊関数

落合 啓之 (九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所)*

概 要

4つのパラメータを持つ3変数階数8の新しい線形偏微分方程式系を定義した。この方程式系をある特異直線に制限した常微分方程式は Dotsenko-Fateev の方程式とも、2つの Gauss の超幾何微分方程式のテンソル積とも middle convolution で移り合えることを示した。この研究は、蛭子彰仁(千葉工大)・原岡喜重(熊本大)・金子昌信(九大)・佐々木武(神戸大)・吉田正章(九大)との共同研究に基づく。

この報告は、論文 [2] に基づく。この報告文ではなるべく論文には書いていないことを書いてみよう。

1. 3変数

1.1. いきなり主定理を書いてみよう。

定理 1. 3つの微分作用素

$$\begin{aligned} E_1 &= (1 - t_2^2)\partial_{22} + 2(t_1 - t_2t_3)\partial_{23} + (1 - t_3^2)\partial_{33} + a_{11}t_1\partial_1 + a_{12}t_2\partial_2 + a_{13}t_3\partial_3 + a_{10}, \\ E_2 &= (1 - t_3^2)\partial_{33} + 2(t_2 - t_3t_1)\partial_{31} + (1 - t_1^2)\partial_{11} + a_{21}t_1\partial_1 + a_{22}t_2\partial_2 + a_{23}t_3\partial_3 + a_{20}, \\ E_3 &= (1 - t_1^2)\partial_{11} + 2(t_3 - t_1t_2)\partial_{12} + (1 - t_2^2)\partial_{22} + a_{31}t_1\partial_1 + a_{32}t_2\partial_2 + a_{33}t_3\partial_3 + a_{30} \end{aligned}$$

が階数8の微分方程式系を定めるための必要十分条件は、パラメータ $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ($i = 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, 3$) が次の関係式を満たすことである：

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0, \quad a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32}. \quad (1)$$

ここで、設定を少し丁寧に説明する。3つの独立変数 $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{C}^3$ を持つ未知関数 $u = u(t_1, t_2, t_3)$ に対する斉次連立線形偏微分方程式

$$E_1u = E_2u = E_3u = 0 \quad (2)$$

を考えている。方向偏微分やその合成に略記号 $\partial_i = \frac{\partial}{\partial t_i}, \partial_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j}$ を用いている。微分方程式系 (2) は \mathbb{C}^3 の部分集合

$$\{t_1 = \pm 1\} \cup \{t_2 = \pm 1\} \cup \{t_3 = \pm 1\} \cup \{1 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 + 2t_1t_2t_3 = 0\} \quad (3)$$

を特異集合とし、特異集合の外では解は局所的に有限次元の線形空間(局所系)を成す。D 加群の言葉では holonomic system、外微分形式の言葉では Pfaff 系とも呼ばれるものである。12個のパラメータ a_{ij} が一般の (generic な) 値の時には、解の階数は8より

* 〒 819-0395 福岡市西区元岡 744 九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所
e-mail: ochiai@imi.kyushu-u.ac.jp
web: <https://user.math.kyushu-u.ac.jp/index.php?ochiai>

も下がるが、パラメータがいい塩梅に調整されている時、可能な限りの最大の次元 8 になることができる。この条件を与えたのが上の定理 1 である。

1.2. ここで議論したいこと

以下、定理の条件を満たす微分方程式系を考える。パラメータを

$$a_1 := a_{10}, a_2 := a_{20}, a_3 := a_{30}, a_0 := a_{12}(= a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32}) \quad (4)$$

と置く。微分方程式系に残っているパラメータは $a := (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^4$ の 4 つである。微分方程式系を $Z_3(a)$ と書く。これらの微分方程式系 $Z_3(a)$ は新しいものである、例えば Appell-Lauricella, Heckman-Opdam, Gelfand とは異なる、と期待しているが、そのことの厳密な証明はまだない。 $Z_3(a)$ の各特異集合 (divisor) に沿った特性指数 (characteristic exponent) は決定していて [2, Proposition 1.2]、特性指数や特異集合の configuration などのデータは $Z_3(a)$ が既存のものとは異なることを示唆している。この $Z_3(a)$ の性質、あるいは微分方程式系 $Z_3(a)$ の解の性質を知りたいのであるが、それは将来の課題である。偏微分方程式系を知りたいけど、それは(できていないという理由で)放っておいて、以下では 1 次元部分空間に制限した常微分方程式を調べよう。

2. 常微分方程式

2.1. 常微分方程式 $Z(a)$

Definition 2. \mathbb{C}^3 上の $Z_3(a)$ を $\{t_2 = t_3 = 1\}$ という特異集合に制限した常微分方程式を考える。独立変数は $t := t_1$ と略記する。微分方程式も微分作用素もどちらも $Z(a)$ と書くことにする。

命題 3. 微分作用素¹ $Z(a)$ を正規形で書き表す：

$$Z(a) = p_0 \partial^4 + p_1 \partial^3 + p_2 \partial^2 + p_3 \partial + p_4. \quad (5)$$

ここで $\partial = d/dt$ であり、 p_i は独立変数 t とパラメータの多項式である。その具体形は

$$\begin{aligned} p_0 &= 2(t+1)^2(t-1)^3, \\ p_1 &= -4(t+1)(t-1)^2\{(2+a_0) + (a_0-2)t\}, \\ p_2 &= 2(t-1)\{(a_0^2 - 2a_1 + 6a_0 + 2 + a_2 + a_3) + (3a_0^2 + 4a_0 - 4 + 2a_1)t \\ &\quad + (a_0^2 - 4a_0 + 2 - a_2 - a_3)t^2\}, \\ p_3 &= (-4a_0^2 - 8a_0 + 4a_0a_1 + 4a_1 - (2a_0 + 4)(a_2 + a_3)) \\ &\quad + (-2a_0^3 - 6a_0^2 - 4a_0a_1 - 4a_1 + 4(a_2 + a_3))t + 2a_0(a_0 + a_2 + a_3)t^2, \\ p_4 &= 2a_2a_3t + (a_1 - a_2 - a_3)(a_0 + 2)^2 - 2a_2a_3. \end{aligned}$$

$Z(a)$ のリーマンスキームやアクセサリパラメータは次の節で触れる。

¹本来は、微分方程式と微分作用素を別の記号に区別して書くべきなのですが、記号を 2 倍覚えなといけなくなるので、今回のようにたくさん方程式を次々と扱いたい状況では双方を同じ記号で書く方がわかりやすいだろうという理由です。

2.2. 常微分方程式 $\tilde{Z}(A)$

$Z(a)$ の独立変数, 従属変数, パラメータ変数にそれぞれ簡易な変換を施すことによって微分作用素の見かけを変更する。

(i) 独立変数：古い方が t , 新しい方が x . 変換は $t = 1 - 2x$, $x = \frac{1-t}{2}$.

(ii) 従属変数：古い方を z , 新しい方を w と書くと、変換は $z = (t-1)^{A_0 - \frac{1}{2}} w$.

(iii) パラメータ：古い方が a_0, a_1, a_2, a_3 , 新しい方が A_0, A_1, A_2, A_3 . 変換は

$$a_0 = 2A_0 - 3, \quad a_1 = A_1^2 - (A_0 - 1)^2, \quad a_2 = A_2^2 - (A_0 - 1)^2, \quad a_3 = A_3^2 - (A_0 - 1)^2. \quad (6)$$

(iv) 微分作用素²の名前：古い方を $Z(a)$, 新しい方を $\tilde{Z}(A)$ とする。

$$\tilde{Z}(A) = \frac{1}{2}(t-1)^{-A_0 - \frac{1}{2}} \circ Z(a) \circ (t-1)^{A_0 - \frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Lemma 4. 微分作用素 $\tilde{Z}(A)$ を正規形で書き表す：

$$\tilde{Z}(A) = x^2(x-1)^2\partial^4 + m_1(x)\partial^3 + m_2(x)\partial^2 + m_3(x)\partial + m_4(x) \quad (8)$$

ここで $\partial = d/dx$ であり, m_i は独立変数 x とパラメータの多項式である。具体形は

$$m_1 = 4x(x-1)(2x-1),$$

$$m_2 = \frac{1}{4}(4A_0^2x - 4A_0^2 - 4A_1^2x - 4A_2^2x^2 + 4A_2^2x - 4A_3^2x^2 + 4A_3^2x + 58x^2 - 58x + 9),$$

$$m_3 = \frac{1}{2}(2A_0^2 - 2A_1^2 - 4A_2^2x + 2A_2^2 - 4A_3^2x + 2A_3^2 + 10x - 5),$$

$$m_4 = (A_2 - \frac{1}{2})(A_2 + \frac{1}{2})(A_3 - \frac{1}{2})(A_3 + \frac{1}{2}).$$

2.3. 対称性

Lemma 5. 微分作用素 $\tilde{Z}(A)$ はパラメータ変更

$$A_j \rightarrow -A_j \quad (j = 0, 1, 2, 3) \quad \text{ならびに} \quad A_2 \leftrightarrow A_3 \quad (9)$$

で不変である。また、独立変数とパラメータの変更を合わせた変換

$$(x, A_0, A_1) \leftrightarrow (1-x, A_1, A_0) \quad (10)$$

でも不変である。これらの生成する群の位数 64 であり、位数 8 の非可換群の 2 つの直積である。

$\tilde{Z}(A)$ は 3 つの特異点 $x = 0, 1, \infty$ を持ち、3 点とも確定特異点である。リーマンスキームは

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = 0 & x = 1 & t = \infty \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} + A_2 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} - A_2 \\ \frac{1}{2} + A_0 & \frac{1}{2} + A_1 & \frac{1}{2} + A_3 \\ \frac{1}{2} - A_0 & \frac{1}{2} - A_1 & \frac{1}{2} - A_3 \end{array} \right\} \quad (11)$$

² 同じ関数で捻る随伴と比べると、左側に $\frac{1}{2}(t-1)^{-1}$ がかかっている。微分方程式としては同じなのだが、微分作用素としては異なるので、参考のため明記している。

でありアクセサリ・パラメータの個数は1つである。 m_3 に定数を加えることでリーマンスキームは変わらない。

2.4. 変数選択の気持ち

少し変数を変えるだけで、例えば、1次式で変更する程度でもこれらの微分作用素の見かけは大幅に変わるので、見やすさ、わかりやすさ、長さなどの観点から表示を変更する利点はある。ところが、どういう変数を選ぶべきなのかに関して一通りに定まる方針はない。

1. 独立変数 t は $t \mapsto -t$ という対称性が見やすい利点がある。独立変数 x ではその対称性が $x \mapsto 1-x$ となるので、さほどわかりやすくはなくなる。ただし、Gauss の超幾何関数の経験から、その対称性の扱いに馴染んでいるため、 x 変数でもさほど不便を感じないという面もある。一方で、特異点 $x = 0$ での局所的な様子を見たい時、例えば局所解や特性指数などは、当然のことながら t 変数よりも x 変数の方が見やすい。特異点の位置を $x = 0, 1, \infty$ とするやり方を Gauss で慣れている場合³は方程式をいじっている時も解の様子を無意識に活用してその直感を生かしている、という事情がある (c.f., p7 の打ち明け話)。もちろん、局所パラメータであるというだけの制約であれば x の代わりに $x/(x-1)$ でも良いわけで、より優れた表示を与えるための変数選択の自由度はまだ残る。我々はリーマンスキームを参照にしつつ、3点のうちの2点の対称性から独立変数を選択している。また、後に可約性を論ずるときには、この4階の作用素が2階の作用素を部分や商に含むことを議論する場合があります、そのときにも特異点の位置が Gauss の場合と同一の $x = 0, 1, \infty$ に揃えておくことに利点がある。このように良い表示であるかどうかは、何に使うか、既存のどの理論や特殊関数と合わせるか、という近所付き合い的な側面も無視できない。

2. 従属変数に関しては、Gauss の超幾何以来、冪関数で捻るのは定番中の定番である。これによって局所指数を各点ごとに一斉に平行移動することができる。局所指数が変わるということは冪関数で捻る変換は局所モノドロミーを変更しているので、D 加群としては同型ではないし、方程式や作用素の既約性も保たれない。ただし、明示公式の点からは微妙な側面があり、冪関数で捻ることで局所解の様子はわかることが多い。その利点もあり、便利に頻用されている。

シフトする量にあたる複素数を $\alpha \in \mathbb{C}$ とする。冪関数 $(x-1)^\alpha$ で捻る、つまり、 $(x-1)^\alpha \circ P \circ (x-1)^{-\alpha}$ を計算するには、変換される前の作用素を $x-1$ と $(x-1)\partial$ の積の線形和の形に書くと簡明であり、その時、「 $x-1$ はそのまま、オイラー作用素 $(x-1)\partial$ は $(x-1)\partial - \alpha$ に」うつす代数同型になる。したがって、 $(x-1)^\alpha x^\beta$ で捻るような計算をするときには、上のように $(x-1)^\alpha$ で捻る変換した後で、作用素を x と $x\partial$ の冪の積の線形和の形に書き直して、その後に x^β で捻る変換をすると良い。この、単なる書き直しは多項式の2項展開程度の手間なので、手計算でも計算機などを援用しての計算も難しくないが、繰り返していくと式が膨れ上がる。逆に α を上手に選べば式がシュッと短くなることもある。また、例えば $x\partial$ の冪を作るときに x の冪が足りないときには、元の微分作用素に適切な x の冪をかけるという調整⁴を行う。微分方程

³Gegenbauer 多項式や Legendre 多項式のように $1, -1$ に特異点がある特殊関数に慣れている人は別の感想があるだろうが。

⁴例えば $((x-1)\partial)^2$ を x と $x\partial$ で書こうとすると、このままでは書けないので、左から x^2 をかけて、 $x^2((x-1)\partial)^2 = (x-1)^2(x\partial)^2 + (x-1)(x\partial)$ のように計算することになる。代入と展開だけなので易しいはずなのだが、非可換性に伴うシフトの影響もあって面倒でもある。

式としては全く同じものなのであるが、微分作用素としては異なるものなので、注意が必要である。特に、方程式の可約性、昇降演算子 (shift operator, contiguity relation) を扱うときは、左から簡明な多項式を掛け算することが問題を見かけ上変えてしまう、あるいは本質的に変えてしまうことがあるので、意識する必要がある。

3. 冪関数で捻ることの類似として、**middle convolution**(中間的な偏屈重みに対応した畳み込み作用) で微分作用素を変換することもできる。分数階微分、オイラー変換とも呼ばれる。例えば ∂^α という記号で表される捻る操作を考えよう。上の冪関数で捻る操作の類似で言えば、変換される前の作用素を ∂ と $x\partial$ の冪の積の線形和で書いておいて、「 ∂ はそのまま $x\partial$ は $x\partial + \alpha$ に」うつす代数同型である。これら 2,3 は広義に従属変数を変換することにあたる。

4. 最後にパラメータの変更について述べる。これは作用素全体のモジュライ空間の座標の選択にあたる。モジュライ、つまりものの集まりは集合論的あるいは代数幾何的に決まっているのでその多様体をどのような座標で表すかは本来は本質的ではないはずである。しかし、パラメータの個数が3つや4つのように多いときは、方程式の見かけはパラメータの取り方でガラリと変わる。また、今の場合、 a 変数でリーマンスキームを記述すると平方根が出てきて式が複雑になるし意味も取りづらい。 A 変数で書くと局所指数は全てパラメータの1次式であり、例えば、2つの指数の差が整数という条件も簡明に書くことができる。どういうパラメータを選べば良いのかは先験的にはわからないので、表示やデータを見ながら試行錯誤するしかない。

なお、研究の途中でパラメータを変えると過去に計算したノートや数式処理での出力と混乱が生ずる可能性があるのが意外に苦しい。特に、共同研究で作業を分担したりやりとりしている時には、伝達を聞き落としたり、参照ファイルのバージョンを取り違えたりすることで思わぬ不整合やミスの原因にもなる。やや幸いなことに、今回の方程式は十分に複雑で、generic に誤るとすぐに式が統制不能なサイズに膨れ上がるため、何かがおかしいと気がつくことができる。ただし、おかしいとわかってても何が原因なのかを特定するのにたくさんの時間や労力が必要となったこともある。

3. 3つの常微分方程式がある意味で同値

3.1. 主定理

上で与えた $\tilde{Z}(A)$ は“残念ながら”新しい微分方程式ではなく、既知の微分方程式から得られるものであることが判明する。その答えは、

定理 6. 次の3つの微分方程式は *middle convolution* で移りあえる。

- $\tilde{Z}(A)$.
- Gauss の超幾何微分方程式の2つの直積。
- Dotsenko-Fateev 方程式。

これは抽象的な議論で同型の存在が証明できるのではなく、具体的に計算をして確かめることで得られた。どのようなパラメータでつながっているかを含め、以下で詳述する。

3.2. $\tilde{Z}(A)$ の別表示

微分作用素を $\partial = \frac{d}{dx}$ と $\theta = x\partial$ の多項式の形に書き換える。

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(A) &= p_0(\theta) + \partial \circ p_1(\theta) + \partial^2 \circ p_2(\theta), \\ p_0(\theta) &= (\theta + \frac{1}{2} - A_2)(\theta + \frac{1}{2} + A_2)(\theta + \frac{1}{2} - A_3)(\theta + \frac{1}{2} + A_3) \\ p_1(\theta) &= -\theta(2\theta^2 + A_1^2 - A_0^2 - A_2^2 - A_3^2 + \frac{1}{2}), \\ p_2(\theta) &= (\theta - \frac{1}{2} + A_0)(\theta - \frac{1}{2} - A_0).\end{aligned}$$

この表示から middle convolution は簡単に計算できる。

$$\partial^{\frac{1}{2}} \circ \tilde{Z}(A) \circ \partial^{-\frac{1}{2}} = p_0(\theta + \frac{1}{2}) + \partial \circ p_1(\theta + \frac{1}{2}) + \partial^2 \circ p_2(\theta + \frac{1}{2}) \quad (12)$$

$$=: mc_{-\frac{1}{2}}(\tilde{Z}(A)), \quad (13)$$

$$\begin{aligned}\partial^{A_2+\frac{1}{2}} \circ \tilde{Z}(A) \circ \partial^{-A_2-\frac{1}{2}} &= p_0(\theta + A_2 + \frac{1}{2}) + \partial \circ p_1(\theta + A_2 + \frac{1}{2}) + \partial^2 \circ p_2(\theta + A_2 + \frac{1}{2}) \\ &= \partial \circ mc_{-\frac{1}{2}-A_2}(\tilde{Z}(A)),\end{aligned} \quad (14)$$

$$mc_{-\frac{1}{2}-A_2}(\tilde{Z}(A)) := x \frac{p_0(\theta + A_2 + \frac{1}{2})}{\theta + 1} + p_1(\theta + A_2 + \frac{1}{2}) + \partial \circ p_2(\theta + A_2 + \frac{1}{2}). \quad (15)$$

式(14)の説明を行う。分数階微分作用素での随伴を行なったとき、 $p_0(\theta + A_2 + \frac{1}{2})$ が $\theta + 1 = \partial \circ x$ で割り切れるので、作用素全体が左から ∂ で割り切れる。したがって、 $mc_{-\frac{1}{2}-A_2}(\tilde{Z}(A))$ は3階の微分作用素である。

3.3. Gauss の超幾何関数の2つの積

ここでさらにパラメータに関する記号を導入する。

$$A_{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} := \frac{\varepsilon_0 A_0 + \varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2 A_2 + \varepsilon_3 A_3 + 1}{2} \quad \varepsilon_j = \pm.$$

とする。

定理 7. a, b, c をパラメータとする Gauss の超幾何関数を ${}_2F_1(a, b, c; x)$ と書く。積 ${}_2F_1(A_{++++}, A_{++++}, 1 + A_0; x) {}_2F_1(A_{----}, A_{----}, 1 - A_0; x)$ の満たす微分方程式は $mc_{-\frac{1}{2}}(\tilde{Z}(A))$ である。

厳密な議論は論文 [2, §5.2] を見てもらうことにして、ここではリーマンスキームを見てみよう。 ${}_2F_1$ のリーマンスキームのテンソル積を計算する⁵と、

$$\begin{aligned}& \left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 0 & 0 & A_{++++} \\ -A_0 & -A_1 & A_{++++} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 0 & 0 & A_{----} \\ A_0 & A_1 & A_{----} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 0 & 0 & A_{++++} + A_{----} \\ A_0 & A_1 & A_{++++} + A_{----} \\ -A_0 & -A_1 & A_{++++} + A_{----} \\ 1 & 1 & A_{++++} + A_{----} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 0 & 0 & 1 + A_2 \\ 1 & 1 & 1 - A_2 \\ A_0 & A_1 & 1 + A_3 \\ -A_0 & -A_1 & 1 - A_3 \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

⁵なお、言い忘れたが、この論文を通して、パラメータ A_0, A_1, A_2, A_3 は generic な場合を考える。特に、パラメータの値が特定の値になることによる整数差が生じないものと仮定する。

この計算結果は $mc_{-\frac{1}{2}}(\tilde{Z}(A))$ のリーマンスキームと一致している。ただし、考えている微分方程式はアクセサリパラメータを1つ持つので、これだけでは定理7の証明にはならない。アクセサリパラメータの値が一致することは奇跡に見えるのだが、おそらく何らかの理由があるのだろう。我々はそれを計算で確かめただけで、真の理由はわかってはいない。打ち明け話をすれば我々はこの定理を局所解の構成 [2, 第2部, p27-] をしたことでたまたま発見した。現在では解を使わずに方程式だけで証明を与えることができている。

課題 8. 既知の関数の積は既知の関数と言って良いか？ある微分方程式が既知の微分方程式のテンソル積であることをどうやって判定できるか？論文では *Gauss* の超幾何の2つの積の場合を少し考察した。これによれば、テンソル積は一般に $x = 0, 1, \infty$ 以外の見かけの特異点を持つ。そのような見かけの特異点を持たないように2つの *Gauss* の超幾何のパラメータがアレンジされたものが我々の扱っている「特別な」積にあたる。実際、*Gauss* 2つであれば6つのパラメータがあるが、余次元2の条件のもとでこの現象が起こっている。

3.4. Dotsenko-Fateev

名前のついた特殊関数や微分方程式は、何らかの先行研究で登場したことがあるオブジェクトである。ここで扱う Dotsenko-Fateev の微分方程式 [1] は、共形場理論で登場する積分で表される特殊関数を特徴づける3階の常微分方程式である：

$$S = S(a, b, c, g) = x^2(x-1)^2\partial^3 + s_1\partial^2 + s_2\partial + s_3,$$

ここで $\partial := d/dx$ と略記する。パラメータは $a, b, c, g \in \mathbb{C}$ の4つである。

$$s_1 = -(x-1)x\{(3a+3b+6c+2g)x - (3a+3c+g)\},$$

$$s_2 = s_{22}x^2 + s_{21}x + s_{20},$$

$$s_{22} = 2a^2 + 4ab + 12ac + 3ag + a + 2b^2 + 12bc + 3bg + b + 12c^2 + 8cg + 6c + g^2 + g,$$

$$s_{21} = -4a^2 - 4ab - 16ac - 4ag - 2a - 8bc - 2bg - 12c^2 - 8cg - 6c - g^2 - g$$

$$s_{20} = (a+c)(2a+2c+g+1),$$

$$s_3 = -c(2a+2b+2c+g+2)\{2(a+b+2c+g+1)x - (2a+2c+g+1)\}.$$

定理 9. $mc_{-\frac{1}{2}-A_2}(\tilde{Z}(A))$ を冪関数で捻った

$$x^{A_0+A_2}(x-1)^{A_1+A_2} \circ mc_{-\frac{1}{2}-A_2}(\tilde{Z}(A)) \circ x^{-A_0-A_2}(x-1)^{-A_1-A_2} \quad (16)$$

は、Dotsenko-Fateev $S(a, b, c, g)$ でパラメータを

$$a = A_{++++} - 1, \quad b = A_{-+++} - 1, \quad c = A_{+++-} - 1, \quad g = -2A_2 \quad (17)$$

としたものと一致する。

なお、パラメータの逆変換は

$$A_0 = \frac{2a+2c+g+2}{2}, \quad A_1 = \frac{2b+2c+g+2}{2}, \quad A_2 = \frac{-g}{2}, \quad A_3 = \frac{2a+2b+g+2}{2}$$

である。2つの定理7, 9から、定理6が従う。

3.5. 定理の内容の解釈

middle convolution で移り合える方程式の中で最も次数の低いものが存在する。今の場合は3階の Dotsenko-Fateev がそうである。これは、middle convolution で移り合えるものの中では、何らかの意味で「最も簡単な」方程式を与えていると期待できる。ところが今の方程式の場合には、4階の方程式のうちの一つが2階の方程式のテンソル積という、middle convolution とはまた別の意味で「簡単な」方程式になっているという現象が起こっている。

課題 10. こういった現象は他にもあるか？

3.6. おまけ

Dotsenko-Fateev にしか興味がない読者の便利のために、我々の方程式 $\tilde{Z}(A)$ を経由しない形で定理の主張を述べておくと：

定理 11. *Dotsenko-Fateev* 方程式は、2つの *Gauss* の超幾何微分方程式のテンソル積の *middle convolution* を冪関数で捻ったものと一致する。具体的には *Gauss* の超幾何関数の積 $u(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} A_{++++}, A_{++--} \\ 1 + A_0 \end{matrix}; x\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix} A_{--++}, A_{----} \\ 1 - A_0 \end{matrix}; x\right)$ から作った $x^{A_0+A_2}(x-1)^{A_1+A_2}\partial^{A_2}u$ は *Dotsenko-Fateev* 方程式の解である。

参考文献

- [1] V.I.S. Dotsenko, V.A. Fateev: Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2D statistical models. Nucl. Phys. B240[FS12], 312-348 (1984)
- [2] Akihito Ebisu, Yoshishige Haraoka, Masanobu Kaneko, Hiroyuki Ochiai, Takeshi Sasaki, and Masaaki Yoshida, A study of a Fuchsian system of rank 8 in 3 variables and the ordinary differential equations as its restrictions, math arXiv:2005.04465.
- [3] Tomoyoshi Ibukiyama, On differential operators on automorphic forms and invariant pluri-harmonic polynomials, Comment. Math. Univ. St. Paul., 48 (1999), 103–118.
- [4] Tomoyoshi Ibukiyama, Takako Kuzumaki and Hiroyuki Ochiai, Holonomic systems of Gegenbauer type polynomials of matrix arguments related with Siegel modular forms, J. Math. Soc. Japan Vol. 64 No.1(2012), 273–316. doi: 10.2969/jmsj/06410273.
- [5] Ryosuke Nakahama, Construction of intertwining operators between holomorphic discrete series representations, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, SIGMA, 15, 036. 101 pages (2019).
- [6] Toshio Oshima, Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations, MSJ Memoirs 28, 日本数学会, 2012年11月 ISBN: 978-4864970167.

A. 補足：由来

冒頭に挙げた偏微分作用素の由来を述べる。やや長い。保型形式に作用する微分作用素は Rankin-Cohen が最も典型的なものである。多変数の場合も構成しやすい保型形式 (Eisenstein 級数など) から別の保型形式を構成するなどの応用の動機から、保型形式に作用する微分作用素の具体形の研究が昔からなされてきている [3]. これらの微分作用素のシンボルはある種の微分方程式系で特徴付けられる。設定ごとに計算してみるとルート系に付随した超幾何関数 (超幾何多項式) が得られることがしばしばある [4], [5]. 一方で、どうやらそうはならぬような例を Ibukiyama-Zagier が見つけている。こ

れらは2つの離散パラメータを持つが、パラメータを連続化し、さらに2つ付け加えて4パラメータとしたのが冒頭の定理の偏微分方程式系である。したがって、4パラメータの方程式系は、保型形式、あるいは、同じことだが、離散系表現の間の制限絡作用素として登場するかどうかは分かっていない。(多分、登場しない。)つまり方程式の幾何学的な由来ははっきりしない。

ただし、方程式のシンボルは元のものと同じであり、それを反映して、特異集合の定義方程式のうち、不思議な形をした2次式は

$$1 - t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 + 2t_1t_2t_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & t_3 & t_2 \\ t_3 & 1 & t_1 \\ t_2 & t_1 & 1 \end{pmatrix}$$

という由来を持つ。2次の主小行列式は $1 - t_i^2$ であり、これが線形の特異集合の定義方程式である。このことは、3次の正定値実対称行列のなす錐に対角行列がスカラー倍で作用し、その作用に関して共変な関数を扱っていることを示唆している。3次の対称行列が6次元線形空間をなし、その上の関数で各行各列に関する斉次条件を満たしているものは3変数の関数を定めることが期待できる。ただし我々の解析は群 $GL(3)$ の作用や、リー環 $\mathfrak{gl}(3)$ のルートベクトルの作用や、Weyl 群 S_3 の作用を有効に活かしていない。これも今後の課題である。

実数直線 \mathbb{R} の Ellis コンパクト化と $L^\infty(\mathbb{R})$ の調和解析

国定 亮一

1 導入

本講演では実数直線 \mathbb{R} 上の有界可測関数のなす Banach 空間 $L^\infty(\mathbb{R})$ について調和解析の理論の視点から考察する. 本研究の基盤となるのは $L^\infty(\mathbb{R})$ の閉部分環である, \mathbb{R} 上の有界な一様連続関数全体のなす空間 $C_{bu}(\mathbb{R})$ である. $L^\infty(\mathbb{R})$ という空間を関数解析的に取り扱うに際して問題となるのは, 変数の平行移動による関数の変換 $L^\infty(\mathbb{R}) \ni \psi(x) \mapsto \psi_s(x) := \psi(x+s)$ が s に関してノルム連続にならないことである. これは指数 $1 \leq p < \infty$ に関する L^p -空間 $L^p(\mathbb{R})$ とは大きく異なる点である. 一方で $\psi \in C_{bu}(\mathbb{R})$ であるならば, 上記の写像は連続になる. そこで $L^\infty(\mathbb{R})$ に関する結果を導くのに一旦 $C_{bu}(\mathbb{R})$ 上で議論して得た結果を $L^\infty(\mathbb{R})$ 上に拡張するというのが一つの方法となる. まず $C_{bu}(\mathbb{R})$ やその双対空間 $C_{bu}(\mathbb{R})^*$ の研究において有用な \mathbb{R} の一様 Stone-Čech コンパクト化 $\beta_u\mathbb{R}$ を導入する ([1]). これは分野により他にも Ellis コンパクト化や Samuel-Smirnov コンパクト化などと様々な名前と呼ばれている ([5, 12, 13]). 特に調和解析の観点からは \mathbb{R} の加法によるそれ自身への作用が $\beta_u\mathbb{R}$ 上に (連続に) 拡張されることが重要である. すなわち, $\beta_u\mathbb{R}$ には同相写像からなる 1-助変数変換群 $\{\tau^s\}_{s \in \mathbb{R}}$ が自然に定まり, 組 $(\beta_u\mathbb{R}, \{\tau^s\}_{s \in \mathbb{R}})$ は連続な流れになる ([1, 14]). 本講演では, $C_{bu}(\mathbb{R})^*$ の元の $L^\infty(\mathbb{R})$ 上への特別な性質を持つ拡張が存在するための条件をこの流れの構造を用いて与える. またその具体例として, $L^\infty(\mathbb{R})$ 上の強不変平均 (topologically invariant mean) が得られることを示す. さらに応用として強不変平均を用いて定義される総和法である概収束 (almost convergence) に関する結果を提示する.

2 一様空間 X の一様 Stone-Čech コンパクト化

一般に完全正則な位相空間 X に対して, コンパクト空間 K と連続写像 $\alpha : X \rightarrow K$ で像 $\alpha(X)$ が K で稠密になるものの組 (K, α) を X のコンパクト化と呼ぶ. 以下, 一般に $C(X)$ を X 上の連続関数全体のなす環, $C_b(X)$ を X 上の有界な連続関数全体のなす環とする. α に対応して環の準同型 α^* を以下で定義する.

$$\alpha^* : C(K) \rightarrow C_b(X), \quad \psi \mapsto \psi \circ \alpha$$

すると, $\alpha(X)$ が K で稠密なることより, α^* は環の中への等長写像になる. したがって, 像 $\alpha^*(C(K))$ は $C_b(X)$ の閉部分環である.

可換 Banach 環論における Gelfand-Naimark の定理によれば, 逆に $C_b(X)$ の閉部分環 A が与えられたとすると, それに対して X のコンパクト化 (X_A, j_A) を対応させることができる. これは上で述べた X のコンパクト化から $C_b(X)$ の閉部分環への対応の逆対応になっており, 特に $j_A^*(C(X_A)) = A$ が成立する.

以下の命題が示すように, X のコンパクト化は $C_b(X)$ の閉部分環により分類することができる.

命題 1 ([1]). $(K_1, \alpha_1), (K_2, \alpha_2)$ をそれぞれ X のコンパクト化とする. $\alpha_{21} \circ \alpha_1 = \alpha_2$ を満たす連続写像 $\alpha_{21} : K_1 \rightarrow K_2$ が存在するための必要十分条件は

$$\alpha_2^*(C(K_2)) \subseteq \alpha_1^*(C(K_1))$$

が成立することである. この写像 α_{21} は存在すれば一意であり, かつ全射である. また, 単射であるための必要十分条件は等号が成立することである.

特に $C_b(X)$ に対応するコンパクト化が有名な X の Stone-Čech のコンパクト化 βX であり, X の任意のコンパクト化は βX の全射連続写像の像として得られる. Stone-Čech のコンパクト化の同値な特徴づけとして様々なものが知られているが, そのうちの一つを以下に述べる (詳しくは [3] 参照).

命題 2. K をコンパクト空間とし, $h : X \rightarrow K$ を連続写像とする. このとき, $h = \bar{h} \circ \alpha$

を満たす連続写像 $\bar{h} : \beta X \rightarrow K$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & K \\ \alpha \downarrow & \nearrow & \\ \beta X & & \end{array}$$

一般に一様空間 X に対して, $C_{bu}(X)$ を X 上の有界な一様連続関数全体のなす環とする. これはもちろん $C_b(\mathbb{R})$ の閉部分環である. これに対応する X のコンパクト化を X の一様 Stone-Čech のコンパクト化と呼び, $\beta_u X$ と書くことにする. すなわち, コンパクト空間 $\beta_u X$ と連続写像 $\alpha : X \rightarrow \beta_u X$ で, $\alpha(X)$ が $\beta_u X$ で稠密であり,

$$\alpha^* : C(\beta_u X) \rightarrow C_{bu}(X), \quad \psi \mapsto \psi \circ \alpha$$

が環の上への等長写像になるものが存在する. 特に X が半位相半群 (semitopological semigroup) の構造を持つとき, $\beta_u X$ を Ellis コンパクト化と呼ぶことがある ([12]). これは Stone-Čech のコンパクト化と同様の以下の特徴づけをもつ.

命題 3. X を一様空間とし, K をコンパクト空間とする. $h : X \rightarrow K$ は一様連続写像とする. このとき, $h = \bar{h} \circ \alpha$ を満たす連続写像 $\bar{h} : \beta_u X \rightarrow K$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & K \\ \alpha \downarrow & \nearrow & \\ \beta_u X & & \end{array}$$

3 \mathbb{R} の一様 Stone-Čech コンパクト化 $\beta_u \mathbb{R}$ とその上の連続な流れ

以下, \mathbb{R} の一様 Stone-Čech コンパクト化を考える. \mathbb{R} の一様構造は通常のユークリッド距離から導かれるものを考える. まず $\beta_u \mathbb{R}$ 上に \mathbb{R} の加法構造 $(\mathbb{R}, +)$ から導かれるそれ自身への作用を拡張することを考える.

\mathbb{R} の加法を,

$$\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \pi(x, y) = x + y$$

とおく. これを \mathbb{R} のそれ自身への加法による作用と考える. 時刻 s での写像を $\tau^s(y) := \pi(s, y)$ ($s \in \mathbb{R}$) とおき, $\mathbb{R} \hookrightarrow \beta_u \mathbb{R}$ と埋め込んで考えると,

$$\tau^s : \mathbb{R} \longrightarrow \beta_u \mathbb{R}$$

は \mathbb{R} から $\beta_u\mathbb{R}$ への一様連続写像なので, τ^s は $\beta_u\mathbb{R}$ 上の連続写像 $\tau^s : \beta_u\mathbb{R} \rightarrow \beta_u\mathbb{R}$ に拡張される.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tau^s} & \beta_u\mathbb{R} \\ \alpha \downarrow & \nearrow & \\ \beta_u\mathbb{R} & & \end{array}$$

このとき, $\beta_u\mathbb{R}$ 上の写像の族 $\{\tau^s\}_{s \in \mathbb{R}}$ は $\beta_u\mathbb{R}$ 上の連続な流れを定める. すなわち,

$$\pi : \mathbb{R} \times \beta_u\mathbb{R} \rightarrow \beta_u\mathbb{R}, \quad \pi(s, \omega) := \tau^s \omega \quad (s \in \mathbb{R}, \omega \in \beta_u\mathbb{R})$$

は連続であり, また τ^s は $\beta_u\mathbb{R}$ 上の同相写像であり, 以下が成立する.

$$\tau^0 = id_{\beta_u\mathbb{R}} \text{ (恒等写像)}, \quad \tau^{s+s'} = \tau^s \circ \tau^{s'} \quad (s, s' \in \mathbb{R}).$$

以下, 簡単のため, τ^s を単に τ^s と記す. 上記の構成は [1] による. この方法は抽象的で一般の局所コンパクト群に対しても適用できるという利点があるが, これとは異なるより具体的な $(\beta_u\mathbb{R}, \{\tau^s\}_{s \in \mathbb{R}})$ の構成法が [14] で与えられている.

4 $C_{bu}(\mathbb{R})$ の双対空間 $C_{bu}(\mathbb{R})^*$ と $\beta_u\mathbb{R}$ 上の Baire 測度

\mathbb{R} の一様 Stone-Ćech コンパクト化 $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \beta_u\mathbb{R}$ において

$$\alpha^* : C(\beta_u\mathbb{R}) \rightarrow C_{bu}(\mathbb{R}), \quad \psi \mapsto \psi \circ \alpha$$

は Banach 空間の間の等長同型を与えていた. したがって, Riesz の表現定理によれば

$$C_{bu}(\mathbb{R})^* \cong C(\beta_u\mathbb{R}) \cong M(\beta_u\mathbb{R})$$

の等長同型が成立している. ここで $M(\beta_u\mathbb{R})$ は $\beta_u\mathbb{R}$ 上の Baire 測度全体のなす空間である. より詳しく述べると, 与えられた $\varphi \in C_{bu}(\mathbb{R})^*$ に対して, ある $\mu \in M(\beta_u\mathbb{R})$ が対応して

$$\varphi(\psi) = \int_{\beta_u\mathbb{R}} \alpha^{*-1} \psi(\omega) d\mu(\omega)$$

が任意の $\psi \in C_{bu}(\mathbb{R})$ に対して成立する.

任意の $\psi \in C_{bu}(\mathbb{R})^*$ に対して以下の関係式が成立する. 任意の $f \in L^1(\mathbb{R}), \psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ に対して,

$$\begin{aligned}\varphi(f * \psi) &= \varphi\left(\int_{\mathbb{R}} \psi(x-t)f(t)dt\right) \\ &= \varphi\left(\int_{\mathbb{R}} \psi_{-t}(x)f(t)dt\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(\psi_{-t})f(t)dt\end{aligned}\tag{1}$$

ここで

$$f * \psi(x) := \int_{\mathbb{R}} \psi(x-t)f(t)dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

は f と ψ の合成積である. これは要するに有界線形汎関数 φ と積分の可換性であり, $f * \psi$ を Banach 空間に値をとる写像 $\mathbb{R} \ni s \mapsto \psi_s \in C_{bu}(\mathbb{R})$ に関する Bochner 積分と考えれば, φ の連続性から従う (例えば [16]). なお, この写像の Bochner 可積分性 (強可測性) はその連続性により保証される.

今, $\varphi \in C_{bu}(\mathbb{R})^*$ を $L^\infty(\mathbb{R})$ 上に拡張することを考える. 一般に Hahn-Banach の拡張定理により, φ は $L^\infty(\mathbb{R})$ 上の有界線形汎関数 φ_1 に $\|\varphi_1\| = \|\varphi\|$ を満たすように拡張できる. しかしそれは一般に (1) の関係式を満たさない. ところが以下で述べるように, $\beta_u\mathbb{R}$ 上の連続な流れの構造とある種調和する測度のクラスを導入し, $\varphi \in C_{bu}(\mathbb{R})^*$ に対応する $\mu \in M(\beta_u\mathbb{R})$ がそのクラスに属するとき, (1) を満たすような $L^\infty(\mathbb{R})$ 上へのノルムを保つ拡張が存在することが示される.

$\beta_u\mathbb{R}$ の Baire 集合族を $\mathcal{B}(\beta_u\mathbb{R})$ とおく. 任意の $E \in \mathcal{B}(\beta_u\mathbb{R})$ に対して, E を $\omega \in \beta_u\mathbb{R}$ の軌道 $o(\omega) := \{\tau^s\omega : s \in \mathbb{R}\}$ 上に制限したものを E_ω とおく. すなわち, $E_\omega = E \cap o(\omega)$ である. $\beta_u\mathbb{R}$ の Baire 集合 E で $m(E_\omega) = 0$ が任意の $\omega \in \beta_u\mathbb{R}$ に対して成立するもの全体のなす族を $\mathcal{B}_0(\beta_u\mathbb{R})$ とおく. ここで m は \mathbb{R} の Lebesgue 測度である. $\mathcal{B}_0(\beta_u\mathbb{R})$ は $\mathcal{B}(\beta_u\mathbb{R})$ の部分代数である. $\beta_u\mathbb{R}$ 上の Baire 測度 μ で $\mu(E) = 0$ が任意の $E \in \mathcal{B}_0(\beta_u\mathbb{R})$ に対して成立するとき, $\mu \ll' m$ と書くことにする. これは \mathbb{R} 上の有界な Baire 測度に関する絶対連続性のある種の一般化になっていると考えられる. 実際, $\mathbb{R} \cong \alpha(\mathbb{R}) \subseteq \beta_u\mathbb{R}$ 上に μ が乗っている場合は, $\mu \ll' m$ は通常の意味での絶対連続性 $\mu \ll m$ と同値であることが定義から分かる. このとき, 以下の結果が成立する.

定理 1 (Kunisada). $\varphi \in C_{bu}(\mathbb{R})^*$ とする. もし, φ に対応する $\mu \in M(\beta_u\mathbb{R})$ が $\mu \ll' m$ を満たすならば, φ の $L^\infty(\mathbb{R})$ 上への拡張 $\varphi_1 \in L^\infty(\mathbb{R})^*$ で以下を満たすものが存在する.

$$(1) \|\varphi_1\| = \|\varphi\|$$

$$(2) \varphi_1(f * \psi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\psi_{-t})f(t)dt \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall \psi \in L^\infty(\mathbb{R})$$

今, $\mu \ll' m$ を満たしている $\mu \in M(\beta_u \mathbb{R})$ の例として, 不変測度を取り上げる. ここで $\mu \in M(\beta_u \mathbb{R})$ が不変であるとは次を意味する. 任意の $E \in \mathcal{B}(\beta_u \mathbb{R})$ と任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $\mu(\tau^{-s}E) = \mu(E)$ が成立する. ここで, $\tau^{-s}E = \{\tau^{-s}E : s \in \mathbb{R}\}$ である. 同様にして, $\varphi \in C_{bu}(\mathbb{R})^*$ が不変であるとは, $\varphi(\psi_s) = \varphi(\psi)$ が任意の $\psi \in C_{bu}(\mathbb{R})$ と任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して成立することと定義する. すると, $\varphi \in C_{bu}(\mathbb{R})^*$ が不変であるための必要十分条件は, 対応する $\mu \in M(\beta_u \mathbb{R})$ が不変測度であることが容易に示される. これらに関して以下の結果が成立する.

定理 2 (Kunisada). $\beta_u \mathbb{R}$ 上の Baire 測度 μ が不変ならば, $\mu \ll' m$ が成立する.

系 1 (Kunisada). $\varphi \in C_{bu}(\mathbb{R})^*$ が不変ならば, φ の拡張となる $\varphi_1 \in L^\infty(\mathbb{R})^*$ で以下を満たすものが存在する.

$$(1) \|\varphi_1\| = \|\varphi\|$$

$$(2) \varphi_1(f * \psi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\psi_{-t})f(t)dt \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall \psi \in L^\infty(\mathbb{R})$$

$$(3) \varphi_1(\psi_s) = \varphi_1(\psi) \quad \forall \psi \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

ここで系 1 で示された $L^\infty(\mathbb{R})^*$ の元と関連する重要な概念である不変平均 (invariant mean) と強不変平均 (topologically invariant mean) について述べる. 一般に $\varphi_1 \in L^\infty(\mathbb{R})^*$ が以下の条件を満たすとき $L^\infty(\mathbb{R})$ 上の平均 (mean) と呼ぶ.

$$(4) \varphi_1 \geq 0 \quad (\text{i.e., } \varphi_1(\psi) \geq 0 \text{ whenever } \psi \geq 0)$$

$$(5) \|\varphi_1\| = 1$$

$\varphi_1 \in L^\infty(\mathbb{R})^*$ が (3), (4), (5) を満たすとき $L^\infty(\mathbb{R})$ 上の不変平均と呼ぶ. また (2), (3), (4), (5) を満たすとき強不変平均 ([4, 10]) と呼ぶ. 強不変性は不変性よりも真に強い条件であることが知られている ([10]). [6, 7, 15] では上記の定義とは異なるが, $L^\infty(\mathbb{R})$ 上の強不変平均と同値な概念が扱われている. これらは局所コンパクト位相群に関する従順性 (amenability) と呼ばれる性質と深く関係した概念であり, 一般の局所コンパクト位相群に対しても同様の概念を定義できる. 特に離散群上では不変平均と強不変平均の概念は一致することが知られている ([10] 参照).

5 総和法への応用

本節では前節にて紹介した $L^\infty(\mathbb{R})$ 上の強不変平均の応用について述べる. 総和法や測度論の観点から見て少なからず興味深い結果であろうと思う. まずは Lorentz (1948) により導入された数列に関する古典的な総和法である概収束 (almost convergence) という概念を紹介する ([8]). 加法群 \mathbb{Z} に対して, $l_\infty := L^\infty(\mathbb{Z})$ 上の不変平均を l_∞ の双対空間 l_∞^* の元 φ で以下の条件を満たすものと定義する.

- (1) $\varphi(\psi_n) = \varphi(\psi) \quad \forall \psi \in l_\infty \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
- (2) $\varphi \geq 0$ (i.e., $\varphi(\psi) \geq 0$ whenever $\psi \geq 0$)
- (3) $\|\varphi\| = 1$

ここで, $\psi_n(x) = \psi(x+n)$ である. l_∞ 上の不変平均全体のなす集合を $\mathcal{T}(\mathbb{Z})$ とおく. $\psi \in l_\infty$ に対して, ψ が実数 α に概収束するとは, 任意の $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{Z})$ に対して

$$\varphi(\psi) = \alpha$$

が成立することであると定義される. これが成立するための以下のような解析的な条件が知られている.

定理 3 (Lorentz [8]). $\psi \in l_\infty$ が実数 α に概収束するための必要十分条件は

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \psi(n+i) = \alpha \quad (n \geq 0 \text{ に関して一様}) \quad (2)$$

が成立することである.

この右辺は $n=0$ に関しては

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \psi(i) = \alpha$$

であるから, ψ の概収束は ψ の Cesàro 収束よりは強い主張になっている. 変数を平行移動した関数に関して一様に Cesàro 収束するという意味で概収束は一様 Cesàro 収束とも言うべきものである. さて前節で考察した $L^\infty(\mathbb{R})$ 上の強不変平均の概念を用いれば, $L^\infty(\mathbb{R})$ の元に対しても l_∞ のケースと同様にして概収束の概念を定義することができる. $L^\infty(\mathbb{R})$ 上の強不変平均全体のなす集合を $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ とおく.

定義 1 (Kunisada [7]). $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ が実数 α に概収束するとは, 任意の $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{R})$ に対して $\varphi(\psi) = \alpha$ が成立することである.

$\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ の概収束に関しても上記 (2) と類似の解析的条件が成立する.

定理 4 (Kunisada [7]). $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ が実数 α に概収束するための必要十分条件は

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_x^{x+\theta} \psi(t) dt = \alpha \quad (x \geq 0 \text{ に関して一様}) \quad (3)$$

が成立することである.

以下では, ψ が概収束するための上記 (3) とは異なる必要十分条件を, 調和解析の観点から導出し, 導かれる帰結について考察する. 以下, $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ が実数 α に概収束することを, $\psi \xrightarrow{ac} \alpha$ と記す.

今, $L^\infty(\mathbb{R})$ の概収束する関数全体のなす集合 $E(\mathbb{R})$ を考えると, これは明らかに $L^\infty(\mathbb{R})$ の (ノルム) 閉部分空間である. 任意の $\psi \in E(\mathbb{R})$ に対して, $\psi \xrightarrow{ac} \alpha$ とすると, $\psi - \alpha \xrightarrow{ac} 0$ となる. したがって, $E(\mathbb{R})$ の元 0 に概収束するもの全体のなす部分空間を $E_0(\mathbb{R})$ とおくと,

$$E(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus E_0(\mathbb{R}), \quad \psi = \alpha + (\psi - \alpha)$$

の分解が成立している. したがって $E(\mathbb{R})$ の代わりに $E_0(\mathbb{R})$ を調べれば十分である. 特に定義より, $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ の生成する $L^\infty(\mathbb{R})$ の閉部分空間を $T(\mathbb{R})$ とおくと,

$$E_0(\mathbb{R})^\perp = T(\mathbb{R})$$

が成立している. ここで $L^\infty(\mathbb{R})$ の部分空間 E に対して, $E^\perp \subseteq L^\infty(\mathbb{R})^*$ は E の零化部分空間 (annihilator) を表わしているとする. すなわち,

$$E^\perp = \{\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})^* : \varphi(\phi) = 0 \ \forall \phi \in E\}$$

である.

以上のように, 概収束の研究は $T(\mathbb{R})$ の零化部分空間の研究という問題に還元される. Forelli, Muhly らは古典的な局所コンパクト可換群上の調和解析の理論におけるスペクトル合成の理論を, 連続な流れが定まっている一般の位相空間上へと拡張した ([2, 9]). 特に Forelli は \mathbb{R} や円周 \mathbb{T} における理論の一般化として, そのような位相空間上の不変測度や解析的測度などの概念を定義し, それらの零化部分空間を用いた特徴づけを与えた. この結果を, 今扱っている特別な連続な流れ $(\beta_u \mathbb{R}, \{\tau^s\}_{s \in \mathbb{R}})$ に適用すれば, $E_0(\mathbb{R})$ の $L^\infty(\mathbb{R})$ のスペクトルの概念を用いた特徴づけを得ることができる. その結果を提示するため, まずは $L^\infty(\mathbb{R})$ の元のスペクトルの定義を述べる (詳しくは [11] 参照). Φ を $L^\infty(\mathbb{R})$ の弱*

閉不変部分空間とする. すなわち, Φ は $L^\infty(\mathbb{R})$ の部分空間であり, 弱*位相で閉じており, かつ $\psi \in \Phi$ ならば $\psi_s \in \Phi (s \in \mathbb{R})$ である. まず Φ のスペクトル $\sigma(\Phi)$ を

$$\{\alpha \in \mathbb{R} : e^{i\alpha x} \in \Phi\}$$

と定義する. 特に $\sigma(\Phi)$ は \mathbb{R} の閉集合になる. そして $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ に対して, ψ のスペクトル $\sigma(\psi)$ を $\sigma(\Phi(\psi))$ と定義する. ここで $\Phi(\psi)$ は, ψ を含む $L^\infty(\mathbb{R})$ の最小の弱*閉不変部分空間である.

以下ではスペクトルが求まる $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ の例をいくつか挙げる. μ が \mathbb{R} 上の有界な Baire 測度とするとき, その Fourier-Stieltjes 変換

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} d\mu(x) \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

は $L^\infty(\mathbb{R})$ の元であり,

$$\sigma(\hat{\mu}) = \text{supp } \mu$$

となる ([11]). ここで $\text{supp } \mu$ は測度 μ の台である.

次に

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{i\alpha_i x} \quad (\text{一様有界かつ各点収束})$$

と表わされる $L^\infty(\mathbb{R})$ の関数 ψ を考える. ここで, 一様有界とは, 部分和 $\psi_n(x) := \sum_{i=1}^n c_i e^{i\alpha_i x}$ の系列 $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ が $\sup_{n \geq 1} \|\psi_n\|_\infty < \infty$ を満たすことである. このとき次が成立する.

$$\sigma(\psi) \subseteq \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$$

それでは, 以下に上述の $E_0(\mathbb{R})$ のスペクトルの概念を用いた特徴づけを述べる. \mathbb{R} の任意の閉集合 C に対して,

$$E_C := \{\psi \in L^\infty(\mathbb{R}) : \sigma(\psi) \subseteq C\}$$

と定義する. 特に E_C は $L^\infty(\mathbb{R})$ の弱*閉不変部分空間になっている.

定理 5 (Kunisada). 以下が成立する.

$$E_0(\mathbb{R}) = \overline{\text{li}}_{L^\infty(\mathbb{R})} \bigcup_{U \in \mathfrak{B}(0)} E_{U^c} \quad (\mathfrak{B}(0) \text{ は } 0 \text{ の } \mathbb{R} \text{ における開近傍系})$$

ここで $L^\infty(\mathbb{R})$ の部分集合 A に対して $\overline{\text{li}}_{L^\infty(\mathbb{R})} A$ は A の $L^\infty(\mathbb{R})$ の一様ノルムに関する線形閉包を表わす.

この結果より、上で挙げた二つの例に関して以下の結果を導くことができる。

定理 6 (Kunisada). \mathbb{R} 上の任意の有界 Baire 測度 μ に対してその Fourier-Stieltjes 変換

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} d\mu(x) \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

は $\hat{\mu} \xrightarrow{ac} \mu(\{0\})$ を満たす。

定理 7 (Kunisada). $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ ($\alpha_1 = 0$) が 0 を集積点に持たないとする。

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{i\alpha_i x} \quad (\text{一様有界かつ各点収束}) \quad (4)$$

ならば $\psi \xrightarrow{ac} c_1$ が成立する。

指数の可算和で表現される関数としては Dirichlet 級数が代表的なものとして挙げられる。定理 7 の系として以下の結果を得る。

系 2 (Kunisada). $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を係数とする Dirichlet 級数

$$\psi(s) = \frac{a_1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \cdots + \frac{a_n}{n^s} + \cdots = \frac{a_1}{1^\sigma} e^{-it \log 1} + \frac{a_2}{2^\sigma} e^{-it \log 2} + \cdots + \frac{a_n}{n^\sigma} e^{-it \log n} + \cdots$$

が $\operatorname{Re} s = \sigma$ 上で一様有界かつ各点収束しているとする。このとき、 $\psi_\sigma(t) := \psi(s)$ ($s = \sigma + it$) は $\psi_\sigma \xrightarrow{ac} a_1$ を満たす。

最後に定理 7 の測度論的な観点からの解釈について触れておく。 $E(\mathbb{R})$ 上の有界線形汎関数 $m_0 : E(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ を、各 $\psi \in E(\mathbb{R})$ に対して、 $\psi \xrightarrow{ac} \alpha$ とするとき、 $m_0(\psi) = \alpha$ で定義する。Hahn-Banach の拡張定理を用いて m_0 を $L^\infty(\mathbb{R})$ 上の平均 $m : L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ に拡張する。今、 \mathbb{R} の可測関数全体のなす集合を $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ とするとき、 $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ 上の有限加法的測度 ν を

$$\nu : \mathcal{M}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1], \quad \nu(A) = m(I_A)$$

で定義する。ここで I_A は $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ に関する特性関数である。すると、任意の $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ に対して

$$m(\psi) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) d\nu(x)$$

が成立する。以上の準備の下、定理 7 が有限加法的測度 ν に関する一種の有界収束定理と見なせることに注意する。実際、定理 4 より

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha x} d\nu(x) = \begin{cases} 1 & \alpha = 0, \\ 0 & \alpha \neq 0. \end{cases}$$

が成立しているから、定理 7 の仮定を満たす $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$ に対して (4) より

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) d\nu(x) &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{i\alpha_i x} d\nu(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha_i x} d\nu(x) \\ &= c_1 \end{aligned} \tag{5}$$

が成立する. よく知られているように (5) は ν が加算加法的であるか (有界収束定理), または ν が有限加法的であっても, (4) が一様収束ならばもちろん成立する. 一方で定理 7 はスペクトルに関する付加的な位相的条件の下, ν が有限加法的であっても, 一様有界かつ各点収束ならば, 和と積分の交換が可能であることを主張している.

参考文献

- [1] E. Akin, *Recurrence in Topological dynamics*, Plenum Press, New York, 1997.
- [2] F. Forelli, *Analytic and quasi-invariant measures*, Acta Math. **118**, (1967), 33-59.
- [3] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Springer, Berlin, 1976.
- [4] A. Hulanicki, *Means and Folner condition on locally compact groups*, Studia Math. **27** (1966), 87-104.
- [5] M. Isabel Garrido, Ana S. Meroño, *The Samuel realcompactification of a metric space*, J. Math. Anal. Appl. **456** (2017), no. 2, 1013–1039.
- [6] R. Kunisada, *Invariant linear functionals on $L^\infty(\mathbb{R}_+)$* , J. Math. Anal. Appl. **481** (2020), 123452.
- [7] R. Kunisada, *Convolution invariant linear functionals and applications to summability methods*, preprint, arXiv: 2003.06876, 2020.
- [8] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent series*, Acta Math. **80** (1948), 167-190.
- [9] P. Muhly, *Function algebras and flows*, Acta Sci. Math. (Szeged) **35** (1973), 111-121 .
- [10] A. T. Paterson, *Amenability*, American Mathematical Society, 1988.
- [11] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*. New York, Interscience, 1962.
- [12] W. Ruppert, *Compact Semitopological Semigroups*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

- [13] Pierre Samuel, *Ultrafilters and compactifications of uniform spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948) 100–132.
- [14] J. Tanaka, *Flows in fibers*, Trans. Amer. Math. Soc. **343** (1994) 779–804.
- [15] F. Sukochev, A. Usachev, D. Zanin, *Generalized limits with additional invariance properties and their applications to noncommutative geometry*, Adv. Math. **239** (2013), 164-189.
- [16] K. Yoshida, *Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1965.

強非対称性公開鍵共有の数学的定式化とその 応用

Mathematical Formulation of Strongly Asymmetric Public Key Agreement and Its Applications

† 入山聖史 Satoshi Iriyama
† 東京理科大学 Tokyo University of Science
† iriyama@is.noda.tus.ac.jp

Abstract

In this study, we introduce a class of public key agreements(PKA) with asymmetric algorithms for sender and receiver. The well-known Diffie–Hellman symmetric public key agreement belongs to the subclass of it, and can be modified to asymmetric one. We discuss on its protocol and conditions to share the key for cipher information transmission. The performance of asymmetric PKA is also shown.

1 Introduction

The Diffie–Hellman(D-H) [1] public key agreement (PKA) protocol and RSA [2] asymmetric cryptography are two of the most known algorithms for the literature of data protection, and they are still utilized not only for key agreement but also for various scenes (e.g., digital signature) along with algorithms such as ElGamal[3], Elliptic curve D-H[4], etc. However, recent increase in the computational power of eavesdroppers, the small key lengths of D-H or RSA are no longer safe[5]. Even for longer keys, these algorithms are expected to become vulnerable in the near future because of Shor’s quantum algorithm for both the integer factorization problem and discrete logarithm problem[6].

As a solution against these threats, studies of a modern PKA and asymmetric cryptography are widely spread. Algorithms based on multivariate polynomial equations[7, 8] and lattices[9, 10] are the most well known ones. In 2019, NIST announced 26 public key cryptographic algorithms as candidates for the standardization of post-quantum-cryptographic systems[11]. The lattice based ones, such as NewHope[12] and NTRU[13], and the multivariate polynomial based digital signature algorithms such as GeMSS[14] are included in the list.

In this study, we introduce a class of strongly asymmetric public key agreement(SAPKA)[15, 16, 17, 18] based on non-commutative algebra. The scheme is very general, and it has many subclasses depending on the parameters. We explain the definition and give some examples, recent results and an implementation as its application.

2 Cryptosystem and Public Key Agreement

Mathematical framework of cryptosystem is essentially based on a correspondence of keys between encryption and decryption. For any plain texts and private key for encryption, at least one key for decryption is required. Let \mathcal{P} be a set of plain texts, and \mathcal{C} a set of ciphered texts. A set of keys used for both encryption and decryption is denoted as \mathcal{K} . Then encryption is given for plain texts by a map with encryption key $k \in \mathcal{K}$ as $E_k : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$, and the decryption D is also given as $D_k : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}$. Let \mathcal{E} be a set of encryptions, and \mathcal{D} a set of decryptions.

Definition 1 *A quintuplet $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ is called a cryptosystem if for all $e \in \mathcal{K}$, there exists $d \in \mathcal{K}$ such that for all $p \in \mathcal{P}$*

$$D_d(E_e(p)) = p, \quad D_d \in \mathcal{D}, E_e \in \mathcal{E}$$

Public key agreement(PKA) is a special class of cryptosystem. Two interlocutors a sender(A) and a receiver(B) produce a secret shared key (SSK) by exchanging public information and combining it with private one. Let \mathcal{X}_A (\mathcal{X}_B) be a set of private keys of A (B), and \mathcal{Y}_A (\mathcal{Y}_B) a set of public information of A (B), respectively. For a cryptosystem \mathcal{C} , we provide a PKA if there exist functions $k_A : \mathcal{X}_A \times \mathcal{X}_B \rightarrow \mathcal{K}$ and $k_B : \mathcal{X}_B \times$

$\mathcal{Y}_A \rightarrow \mathcal{K}$ such that for all $x_A \in \mathcal{X}_A, x_B \in \mathcal{X}_B$, there exist $y_A \in \mathcal{Y}_A, y_B \in \mathcal{Y}_B$ such that

$$K_{AB} = k_A(x_A, y_B) = k_B(x_B, y_A) = K_{BA}$$

and for all $p \in \mathcal{P}$

$$D_{K_{BA}}(E_{K_{AB}}(p)) = p, \quad E_k \in \mathcal{E}, D_k \in \mathcal{D}$$

Such cryptographic algorithms are called *asymmetric* because the private information possessed by A and B are different and not shared. The main new features of this new class of PKA algorithms are the following:

- Recipient public keys are distinguished from sender public keys
- B has more than one public key (*multiple public keys*)
- The unique public key used by A depends on those of the recipient.

The splitting of the public information into multiple public keys implies levels of security, flexibility and variety of concrete realizations which cannot be found in the standard PKA algorithms. The construction of these algorithms does not depend on sophisticated mathematical structures, e.g. groups associated to elliptic curves or complex theorems of number theory. This implies a drastic decrease in implementation complexity and increase in velocity.

2.1 Notations and Public Ingredients

Let \mathbb{N} be the natural integers, \mathcal{P} , a semigroup (noted multiplicatively, with 1) and $\alpha \in \mathcal{P}$, an element of \mathcal{P} which is the (commutative) semigroup generated by α : $\mathcal{P}_0(\alpha) \equiv \mathcal{P}_0(\alpha) := \{\alpha^n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}$

2.2 Frameworks of the algorithm

Step (0; preparation) B constructs the following maps:

$$N_{B,1} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \quad \text{easily invertible map}$$

$$N_{B,3} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \quad \text{easily invertible map}$$

$$\hat{x}_{B,1}, \hat{x}_{B,2}, \hat{x}_{B,3}, \hat{x}_{B,4} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

arbitrary functions satisfying the *compatibility conditions*

$$\hat{x}_{B,1}\hat{x}_{B,2}|_{\mathcal{P}_0} = \hat{x}_{B,3}\hat{x}_{B,4}|_{\mathcal{P}_0}$$

$$N_{B,1}\hat{x}_{B,2}|_{\mathcal{P}_0} \text{ is an homomorphism : } \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{P}$$

Step (1) Using the functions constructed in Step (0), B constructs:

(i) *The Secret Key of B*, i.e. the function:

$$\hat{x}_B \equiv \hat{x}_{B,3}N_{B,3}$$

(ii) *The Public Keys of B*, i.e. the functions:

$$\hat{x}_{B,1}N_{B,1}^{-1}$$

$$N_{B,3}^{-1}\hat{x}_{B,4}$$

and the element of \mathcal{P}

$$N_{B,1}\hat{x}_{B,2}(\alpha)$$

Step (2) B sends his public keys to A

Step (3A) A chooses her *Secret Key*: a natural integer $x_A \in \mathbb{N}$.

Step (3B) using α , x_A and the public key $N_{B,3}^{-1}\hat{x}_{B,4}$ of B , A computes her public key: $y_A \equiv N_{B,3}^{-1}\hat{x}_{B,4}(\alpha^{x_A})$

Step (4): A sends her public key y_A to B .

Step (5): *Computation of the SSK*: $\kappa = x_{B,1}x_{B,2}(\alpha^{x_A}) = x_{B,3}x_{B,4}(\alpha^{x_A})$

Step (5A): A computes:

$$\begin{aligned} x_{B,1}N_{B,1}^{-1}[N_{B,1}x_{B,2}(\alpha)]^{x_A} &= x_{B,1}N_{B,1}^{-1}[N_{B,1}x_{B,2}(\alpha^{x_A})] \\ &= x_{B,1}x_{B,2}(\alpha^{x_A}) \\ &= \kappa \end{aligned}$$

Notice that, in order to calculate κ , A uses public keys of B different from the one used to produce y_A .

Step (5B): B computes

$$\begin{aligned} \hat{x}_B(y_A) &= x_{B,3}N_{B,3}(y_A) \\ &= x_{B,3}N_{B,3}(N_{B,3}^{-1}x_{B,4})(\alpha^{x_A}) \\ &= x_{B,3}x_{B,4}(\alpha^{x_A}) \\ &= \kappa \end{aligned}$$

2.3 Scalar toy model

In this section, we show a scalar toy model and its attacks. Any field \mathbb{F} in which, for each $x \in \mathbb{F}$, the computation of x^{-1} is efficient. A typical choice is $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$.

Step (0): Definition of the functions

Fix $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{F}$ and define:

$$\hat{x}_{B,2}(y) \equiv y^{x_2}$$

$$\hat{x}_{B,1}(y) \equiv y^{x_1}$$

$$\hat{x}_{B,3}(y) \equiv y^{x_3}$$

$$\hat{x}_{B,4}(y) \equiv y^{x_4}$$

$$N_{B,1} \equiv id$$

$$N_{B,3} \equiv id$$

1–st Compatibility condition:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{B,1}\hat{x}_{B,2}(y) &= \hat{x}_{B,1}(y^{x_2}) = (y^{x_2})^{x_1} \\ &= y^{x_2x_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{B,3}\hat{x}_{B,4}(y) &= \hat{x}_{B,3}(y^{x_4}) = (y^{x_4})^{x_3} \\ &= y^{x_4x_3} \end{aligned}$$

This gives the easily satisfiable condition:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{B,1}\hat{x}_{B,2} &= \hat{x}_{B,3}\hat{x}_{B,4} \Leftrightarrow \\ x_1x_2 &= x_3x_4 =: \bar{x} \end{aligned}$$

2–d Compatibility condition:

$$\begin{aligned} N_{B,1}\hat{x}_{B,2}(A^n) &= \hat{x}_{B,2}(A^n) = (A^n)^{x_2} = A^{nx_2} \\ &= (A^{x_2})^n = (x_{B,2}(A))^n \\ &= N_{B,1}\hat{x}_{B,2}(A)^n \end{aligned}$$

Thus $N_{B,1}\hat{x}_{B,2}|_{\mathcal{P}_0}$ is an homomorphism, as required.
Public Keys of B :

$$\begin{aligned}\hat{x}_{B,1}N_{B,1}^{-1}(y) &= \hat{x}_{B,1}(y) = y^{x_1} \\ N_{B,3}^{-1}\hat{x}_{B,4}(y) &= N_{B,3}^{-1}(y^{x_4}) = y^{x_4} \\ N_{B,1}\hat{x}_{B,2}(A) &= \hat{x}_{B,2}(A) = A^{x_2}\end{aligned}$$

Secret Key of B :

$$\hat{x}_B(y) = \hat{x}_{B,3}N_{B,3}(y) = y^{x_3}$$

Thus to give the function \hat{x}_B is equivalent to give the number x_3 .

Secret Key of A :

$$x_A \in \mathbb{N}$$

Public Key of A :

$$y_A = N_{B,3}^{-1}\hat{x}_{B,4}(A^{x_A}) = A^{x_A x_4}$$

A constructs the SSK:

$$\begin{aligned}x_{B,1}N_{B,1}^{-1}[N_{B,1}x_{B,2}(A)]^{x_A} &= x_{B,1}[x_{B,2}(A)]^{x_A} \\ &= x_{B,1}x_{B,2}(A^{x_A}) \\ &= A^{x_A x_1 x_2} = \kappa\end{aligned}$$

B constructs the SSK:

$$\hat{x}_B(y_A) = \hat{x}_B(A^{x_A x_4}) = A^{x_A x_4 x_3} = \kappa$$

The SSK is the same because of the compatibility condition $x_1 x_2 = x_4 x_3$.

2.4 Breaking complexity

The eavesdropper, called Eve (E) knows the public parameters and the public keys:

$$A \in \mathbb{F} ; x_1 \in \mathbb{F} ; x_4 \in \mathbb{F} ; A^{x_2} \in \mathbb{F} ; y_A = A^{x_A x_4} \in \mathbb{F}$$

If E can compute the logarithm in \mathbb{F} , then she can recover $x_A x_4 = \lg_A y_A$. Since E knows x_4 , she recovers x_A knowing A^{x_2} , x_1 , x_A , she can compute the SSK

$$(A^{x_2})^{x_A x_1} = A^{x_A x_1 x_2} = \kappa$$

Thus the breaking complexity of this algorithm is equivalent to the logarithm in \mathbb{F} . This means that the above toy realization does not bring a real gain with respect to the standard PKA algorithms.

2.5 A strongly asymmetric version of the Diffie–Hellman algorithm

The public keys of B are

$$y_{B,1} \equiv a\alpha^{x_B}$$

$$y_{B,2} \equiv a^{x_B^{-1}}\alpha$$

The secret key of A is $x_A \in \mathbb{N}$, and the public key of A is $y_A := y_{B,2}^{x_A}$. Finally the SSK κ is $\kappa := a^{x_A}\alpha^{x_A x_B}$. A computes the SSK using $y_{B,1}$ as $y_{B,1}^{x_A} = (a\alpha^{x_B})^{x_A} = a^{x_A}\alpha^{x_A x_B}$, and B computes the SSK using y_A as $y_A^{x_B} = (a^{x_A x_B^{-1}}\alpha^{x_A})^{x_B} = a^{x_A}\alpha^{x_A x_B} = \kappa$.

2.6 The Diffie–Hellman algorithm

The Diffie–Hellman algorithm is recovered by choosing $a = 1$, which gives

$$y_{B,1} = y_B \equiv \alpha^{x_B}$$

$$y_{B,2} = \alpha$$

$$y_A = \alpha^{x_A}$$

$$\kappa = \alpha^{x_A x_B}$$

2.7 Beyond the discrete logarithm: a simple example

B fixes the following functions:

- A polynomial of degree n

$$Q_n(y) = \sum_{j=0}^n a_j y^j ; a_j \in \mathbb{F} , j \in \{0, 1, \dots, n\}$$

- A polynomial of degree 1

$$P_2(y) := a_2 y + b_2 ; a_2, b_2 \in \mathbb{F}$$

- Two natural integers and a scalar

$$N_{B,3} , n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$x_{B,3} \in \mathbb{F}$$

With these ingredients B constructs:

$$\hat{x}_{B,2}(y) = P_2(y^{n_2}) = a_2 y^{n_2} + b_2$$

$$\hat{x}_{B,3}(z) = z^{x_{B,3}}$$

$$\hat{x}_{B,4}(y) = c^{Q_n(y)} = c^{\sum_{j=0}^n a_j y^j}$$

$$\hat{N}_{B,3}(z) = z^{N_{B,3}}$$

$$\hat{N}_{B,1} = P_2^{-1} \Leftrightarrow \hat{N}_{B,1}^{-1} = P_2$$

$$\hat{x}_{B,1}(z) = c^{x_{B,3} Q_n\left(\left(\frac{z}{a_2} - \frac{b_2}{a_2}\right)^{n_2^{-1}}\right)}$$

This choice satisfies the compatibility conditions:

$$\hat{x}_{B,3} \hat{x}_{B,4}(y) = c^{x_{B,3} Q_n(y)} = \hat{x}_{B,1} \hat{x}_{B,2}(y)$$

$$\hat{x}_{B,1} \hat{x}_{B,2} = \hat{x}_{B,3} \hat{x}_{B,4}$$

Public Keys of B is the public parameter α and

$$\hat{N}_{B,1} \hat{x}_{B,2}(\alpha) = P_2^{-1} P_2(\alpha^{n_2}) = \alpha^{n_2}$$

$$\hat{N}_{B,3}^{-1} \hat{x}_{B,4}(y) = \prod_{j=0}^n (c^{N_{B,3}^{-1} a_j}) y^j$$

B sends to A the $n + 1$ numbers: $\hat{N}_{B,3}^{-1} \hat{x}_{B,4} \equiv (c^{N_{B,3}^{-1} a_n}, \dots, c^{N_{B,3}^{-1} a_0})$.

$$\hat{x}_{B,1} \hat{N}_{B,1}^{-1}(y) = \prod_{j=0}^n (c^{x_{B,3} a_j}) y^{j n_2^{-1}} \Leftrightarrow$$

$$\hat{x}_{B,1} \hat{N}_{B,1}^{-1} \equiv (c^{N_{B,3}^{-1} a_n}, \dots, c^{N_{B,3}^{-1} a_0}, n_2)$$

Public Key of A is

$$y_A = \hat{N}_{B,3}^{-1} \hat{x}_{B,4}(\alpha^{x_A}) = \prod_{j=0}^n (c^{N_{B,3}^{-1} a_j}) (\alpha^{x_A})^j$$

Therefore the SSK becomes

$$\kappa = \hat{x}_{B,1} \hat{x}_{B,2}(\alpha^{x_A}) = \hat{x}_{B,3} \hat{x}_{B,4}(\alpha^{x_A}) = c^{x_{B,3} Q_n(\alpha^{x_A})}$$

Taking the following $n + 2$ logarithms

$$\log \alpha, \log c^{N_{B,3}^{-1}a_n}, \dots, \log c^{N_{B,3}^{-1}a_0}$$

E (eavesdropper) reduces the problem to the algebraic equation

$$\log y_A = \sum_{j=0}^n (\log c^{N_{B,3}^{-1}a_j})(\alpha^{x_A})^j$$

of degree n in the unknown $y = \alpha^{x_A}$. E knows:

- the coefficients of the equation
- at least one solution in the field \mathbb{F} exists.

Therefore E has to:

- find all solutions of this equation in \mathbb{F}
- for each of them (at most n) compute the logarithm $\log \alpha^{x_A}$.

From this E deduces a possible candidate for x_A :

$$x_A = \frac{\log \alpha^{x_A}}{\log \alpha}$$

After that, she proceeds by exhaustive search.

Supposing zero cost for the logarithms and the exhaustive search, then the breaking complexity is equivalent to find all the roots in the finite field \mathbb{F} of the algebraic equation of degree n with coefficients in \mathbb{F} . No general solution method is known for $n \geq 5$.

3 SAA-5

In [15, 16], a new scheme of public key agreement based on non-commutative algebra called a strongly-asymmetric public key agreement (SAPKA) was introduced. Concrete realizations of the above-mentioned general scheme, called strongly-asymmetric algorithm 3 (SAA-3) and strongly-asymmetric algorithm 4 (SAA-4), were constructed in the [17].

The algorithms SAA-3 and SAA-4 are based on a public parameter α , and in them, a receiver B is required to send a matrix basket to a sender A consisting of matrices commuting with one of his secret keys x_B . A has to choose her secret key x_A from this basket. The SAA-5 is an improved algorithm of these SAA-3 and 4 detailed are given in [18]

3.1 Public Parameters

The public parameters of the algorithm are:

- a natural integer $d \in \mathbb{N}$;
- a finite field \mathbb{F} (typically $\mathbb{F} := \mathbb{Z}_p$, where p is a large prime number);
- a finite set $I \subset \mathbb{N}$.

All scalar multiplications (in particular exponentiations) are meant in \mathbb{F} , and we use the convention:

$$0^x := 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{F}$$

The $d \times d$ matrices with entries in \mathbb{F} are denoted $M(d; \mathbb{F})$, and the term *matrix* is used as a synonym of *element of $M(d; \mathbb{F})$* . Matrix multiplications are meant in the standard sense, while matrix exponentiations are meant in the Schur sense, i.e., element-wise: if c is either an element of \mathbb{F} or a matrix $c = (c_{ij})$ and $M = (M_{a,b})$ is a matrix, the symbol $c^{\circ M}$ denoting the matrix:

$$(c^{\circ M})_{a,b} := \begin{cases} c^{M_{a,b}} & \text{scalar case} \\ c_{a,b}^{M_{a,b}} & \text{matrix case} \end{cases} \quad ; \quad a, b \in \{1, \dots, d\}$$

is called *the Schur exponentiation of c by M* . Similarly, the Schur logarithm (in any basis) of a matrix M is defined componentwise on the entries of M . Since in this paper, all logarithms considered are of the Schur-type, we simply write \log to denote the Schur logarithm.

3.2 Keys

3.2.1 Secret Keys of B

They are matrices:

1. the main secret key of B :

$$x_B \in M(d; \mathbb{F})$$

2. additional secret keys of B :

$$\{A_j \in M(d; \mathbb{F}) : j \in I\} \quad ; \quad N_B \in M(d; \mathbb{F}) \quad ; \quad c \in M(d; \mathbb{F})$$

The only conditions to be satisfied by the secret keys of B are:

- N_B must be invertible;
- $c = c_0^{\circ c_1} =: c_0^{\circ \log c}$ with $\log c$ non Schur-invertible and:

$$c_{a,g} = c_{b,g}, \quad \forall a, b$$

- The A_j ($j \in I$) are non-invertible.

3.2.2 Secret Key of A

A chooses arbitrarily her secret key:

$$x_A \equiv (x_{A,j})_{j \in I} \quad ; \quad x_{A,j} \in M(d; \mathbb{F}), \quad \forall j \in I$$

3.2.3 SSK

The SSK is:

$$\kappa := c^{\circ(Q(x_A)x_B)}$$

where $Q \equiv (A_j)_{j \in I}$ is the linear map given by:

$$x \equiv (x_j)_{j \in I} \in M(d; \mathbb{F})^{|I|} \mapsto Q(x) := \sum_{j \in I} x_j A_j \in M(d; \mathbb{F})$$

where here and in the following, $|I|$ denotes the cardinality of the set I . Thus, the coefficients of κ are:

$$\kappa_{a,g} := c^{[Q(x_A)x_B]_{a,g}} = \left(c^{\circ Q(x_A)x_B} \right)_{a,g}, \quad a, g \in \{1, \dots, d\}$$

3.2.4 Public Keys of B

The public keys of B are given by the finite set of matrices:

$$\{y_{B,2;j} , y_{B,3;j} \in M(d; \mathbb{F}) : j \in I\}$$

constructed, using the secret keys of B , as follows.

For all $j \in I$ and $a, b \in \{1, \dots, d\}$:

$$y_{B,2;j;a,b} := c^{(A_j N_B)_{a,b}} = (c^{\circ A_j N_B})_{a,b}$$

$$y_{B,3;j;a,b} := c^{(A_j x_B)_{a,b}} = (c^{\circ A_j x_B})_{a,b}$$

3.2.5 Public Key of A

For all $a, g \in \{1, \dots, d\}$

$$y_A := (y_{A;a,g}) \in M(d; \mathbb{F}) \quad ; \quad y_{A;a,g} = c^{[Q(x_A)N_B]_{a,g}} = (c^{\circ Q(x_A)N_B})_{a,g}$$

can be computed uniquely in terms of the public keys $(y_{B,2;j})$ of B and of the secret key of A as follows. For each $a, g \in \{1, \dots, d\}$, A computes:

$$\begin{aligned} y_{A;a,g} &= \prod_{j \in I} \prod_{b \in \{1, \dots, d\}} (y_{B,2;j;b,g})^{(x_{A,j})_{a,b}} = \prod_{j \in I} \prod_{b \in \{1, \dots, d\}} (c^{(A_j N_B)_{b,g}})^{(x_{A,j})_{a,b}} \\ &= \prod_{j \in I} \prod_{b \in \{1, \dots, d\}} (c^{(x_{A,j})_{a,b} (A_j N_B)_{b,g}}) = c^{\sum_{j \in I} \sum_{b \in \{1, \dots, d\}} [x_{A,j}]_{a,b} (A_j N_B)_{b,g}} \\ &= c^{\sum_{j \in I} [x_{A,j} A_j N_B]_{a,g}} = c^{[\sum_j x_{A,j} A_j N_B]_{a,g}} = c^{[Q(x_A)N_B]_{a,g}} = (c^{\circ Q(x_A)N_B})_{a,g} \end{aligned}$$

4 Protocol

B computes the SSK using the public key of A and his own secret keys.

First step: B uses his secret key N_B to *clean the noise* calculating, for each $a, g \in \{1, \dots, d\}$:

$$\prod_{b \in \{1, \dots, d\}} (y_{A;a,b})^{(N_B^{-1})_{b,g}} = \prod_{b \in \{1, \dots, d\}} (c^{[Q(x_A)N_B]_{a,b}})^{(N_B^{-1})_{b,g}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{b \in \{1, \dots, d\}} \left(c^{[Q(x_A)N_B]_{a,b}(N_B^{-1})_{b,g}} \right) = c^{\sum_b [Q(x_A)N_B]_{a,b}(N_B^{-1})_{b,g}} \\
&= c^{([Q(x_A)N_B]N_B^{-1})_{a,g}} = c^{(Q(x_A))_{a,g}} = \left(c^{\circ Q(x_A)} \right)_{a,g} \quad (1)
\end{aligned}$$

Second step: Starting from (1), B inserts his main secret key calculating, for each $a, g \in \{1, \dots, d\}$:

$$\begin{aligned}
&\prod_{b \in \{1, \dots, d\}} \left(\left(c^{\circ Q(x_A)} \right)_{a,b} \right)^{(x_B)_{b,g}} = \prod_{b \in \{1, \dots, d\}} c^{Q(x_A)_{a,b}(x_B)_{b,g}} \\
&= c^{\sum_{b \in \{1, \dots, d\}} Q(x_A)_{a,b}(x_B)_{b,g}} = c^{(Q(x_A)x_B)_{a,g}} = \left(c^{\circ Q(x_A)x_B} \right)_{a,g} = \kappa_{a,g}
\end{aligned}$$

Using the public keys $(y_{B,3;j})$ of B and her own secret key, A computes the SSK calculating, for each $a, g \in \{1, \dots, d\}$:

$$\begin{aligned}
&\prod_{j \in I} \prod_{b \in \{1, \dots, d\}} (y_{B,3;j;b,g})^{(x_{A,j})_{a,b}} = \prod_{j \in I} \prod_{b \in \{1, \dots, d\}} (c^{(A_j x_B)_{b,g}})^{(x_{A,j})_{a,b}} \\
&= \prod_{j \in I} \prod_{b \in \{1, \dots, d\}} (c^{(x_{A,j})_{a,b}(A_j x_B)_{b,g}}) = \prod_{j \in I} \prod_{b \in \{1, \dots, d\}} c^{(x_{A,j})_{a,b}(A_j x_B)_{b,g}} \\
&= \prod_{j \in I} c^{\sum_b (x_{A,j})_{a,b}(A_j x_B)_{b,g}} = \prod_{j \in I} c^{[x_{A,j} A_j x_B]_{a,g}} \\
&= c^{\sum_{j \in I} [x_{A,j} A_j x_B]_{a,g}} = \left(c^{\sum_{j \in I} x_{A,j} A_j x_B} \right)_{a,g} = \left(c^{Q(x_A)x_B} \right)_{a,g}
\end{aligned}$$

Finally, we show the experimental result in which we compare SAA-5 with D-H. Table 1 and Figure 1 shows our result of comparison with D-H. Java codes of the algorithms can be referred in https://github.com/jimbobmij/project_KSM

5 Conclusions

In this study, the mathematical framework of strongly asymmetric public key agreement which has several families based on non-commutative algebra. Some specific parameters achieve effective implementations over a long key length.

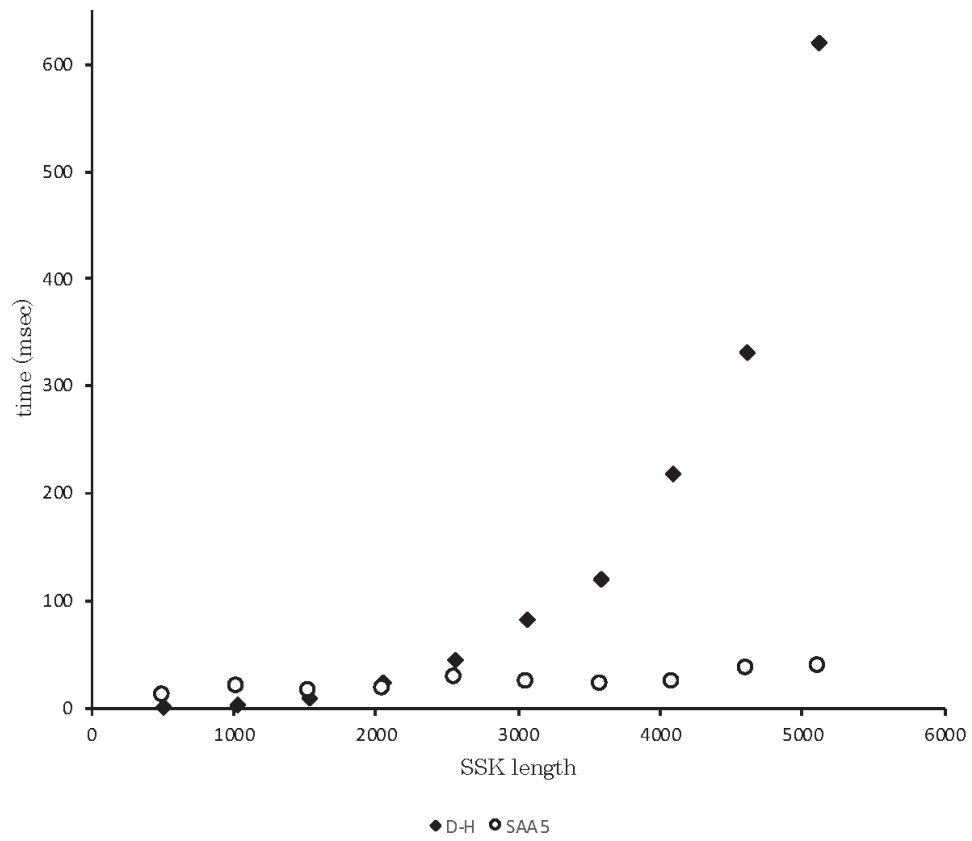


Figure 1: Comparison of the time to generate SSK.

SSK Length (bit)	SAA-5 (msec)	D-H (msec)
512	12.45	1.45
1024	20.63	3.37
1536	16.19	10.87
2048	18.10	24.21
2560	28.77	45.68
3072	23.54	83.39
3584	23.35	120.29
4096	24.42	219.90
4608	38.12	332.46
5120	39.58	620.86

Table 1: Comparison of the time to generate the secret shared key (SSK).

References

- [1] W. Diffie and M. E. Hellman, New Directions in Cryptography, IEEE Transactions on Information Theory, vol.IT-22, No.6, pp.644-654, Nov, 1976
- [2] Rivest, R.L.; Shamir, A.; Adleman, L. Method for obtaining digital signatures and public key cryptosystems. *Commun. ACM* **1978** *21*, 120–126.
- [3] ElGamal, T. A public key cryptosystem and a signature scheme based on discrete logarithms. *IEEE Trans. Inf. Theory* **1985**, *31*, 469–472.
- [4] Koblitz, N. Elliptic curve cryptosystems. *Math. Comput.* **1987**, *48*, 203–209.
- [5] Adrian, D.; Bhargavan, K.; Durumeric, Z.; Gaudry, P.; Green, M.; Halderman, J.A.; Heninger, N.; Springall, D.; Thome, E.; Valenta, L.; et al. Imperfect Forward Secrecy: How Diffie-Hellman Fails in

- Practice. In Proceedings of the 22nd ACM SIGSAC Conference on Computer and Communications Security, Denver, CO, USA, 12–16 October 2015; pp. 5–17.
- [6] Shor, P. Polynomial-time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. *SIAM J. Comput.* **1997**, *25*, 1484–1509.
- [7] Patarin, J. Hidden fields equations (HFE) and isomorphisms of polynomials (IP): Two new families of asymmetric algorithms. In *Proceedings of the International Conference on the Theory and Applications of Cryptographic Techniques, Saragossa, Spain, 12–16 May 1996*: Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 1996; pp. 33–48.
- [8] Porras, J.; Baena, J.; Ding, J. ZHFE, a new multivariate public key encryption scheme. In Proceedings of the International Workshop on Post-Quantum Cryptography, Waterloo, ON, Canada, October 2014; pp. 229–245.
- [9] Ajtai, M.; Dwork, C. A public-key cryptosystem with worst-case/average-case equivalence. In Proceedings of the 50th ACM Symposium on Theory of Computing, El Paso, TX, USA, 4–6 May 1997; pp. 284–293.
- [10] Khot, S. Hardness of approximating the shortest vector problem in lattices. *J. ACM (JACM)* **2005**, *52*, 789–808.
- [11] Post-Quantum Cryptography Competition Round 2 Submissions. Available online: <https://csrc.nist.gov/projects/post-quantum-cryptography/round-2-submissions> (accessed on 24 July 2020).
- [12] Alkim, E.; Ducas, L.; Poppelmann, T.; Schwabe, P. Post-quantum key exchange—A new hope. In Proceedings of the 25th USENIX Security Symposium (USENIX Security 16), Austin, TX, USA, 10–12 August 2016; pp. 327–343.
- [13] Hoffstein, J.; Pipher, J.; Silverman, J.H. NTRU: A ring-based public key cryptosystem. In Proceedings of the International Algorithmic

Number Theory Symposium, Portland, OR, USA, 21–25 June 1998; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 1998; pp. 267–288.

- [14] Casanova, A.; Faugere, J.C.; Macario-Rat, G.; Patarin, J.; Perret, L.; Ryckeghem, J.; GeMSS: A great multivariate short signature.
- [15] Accardi, L.; Iriyama, S.; Regoli, M.; Ohya, M. *Strongly Asymmetric Public Key Agreement Algorithms*. Technical Report ISEC2011-20; IEICE: Tokyo, Japan, 2011; pp. 115–121.
- [16] Accardi, L.; Iriyama, S.; Regoli, M.; Ohya, M. *Strongly Asymmetric Public Key Agreement Algorithms*; Technical Report ISEC2011-20; IEICE: Tokyo, Japan, 2011; pp. 111–114.
- [17] Accardi, L.; Regoli, M. On a class of strongly asymmetric PKA algorithms. *J. of Math. Crypt.* 2015; DOI: <https://doi.org/10.1515/jmc-2015-0019>
- [18] Accardi, L., Iriyama, S., Jimbo, K., Regoli, M. (2019). A New Class of Strongly Asymmetric PKA Algorithms: SAA-5. *Cryptography*, 3(1), 9. DOI:10.3390/cryptography3010009

KMS states of Toeplitz algebras of graphs

武石 拓也

京都工芸繊維大学

本講演では、graph-Toeplitz 環における KMS 状態の振る舞いについて説明する。講演は C. Bruce との共著論文である [6] と、現在準備中の論文 [15] に基づくが、先行研究についても必要に応じて詳細に説明を加える。[6] の内容は多岐にわたるため、本講演では一般のグラフの場合の I 型 KMS 状態の構造、有限グラフの場合の III 型 KMS 状態の構造、有限グラフの場合にそれらの KMS 状態間の関係、の 3 つのトピックに絞って説明する。

1 背景

1.1 作用素環

はじめに、作用素環の定義や共通の問題意識について述べる。本節の詳細については [12] などを参照されたい。複素ヒルベルト空間 \mathcal{H} に対して、 \mathcal{H} 上の有界線形作用素全体のなす Banach 空間を $B(\mathcal{H})$ を表記する。 $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ は Banach 空間であることに加えて、作用素の合成による環の構造と、共役作用素をとる演算 $T \mapsto T^*$ があり、Banach $*$ -代数とよばれる構造を持っている。

定義 1.1. $B(\mathcal{H})$ の部分代数であって、 $*$ -演算とノルム位相で閉じているものを C^* -環と呼ぶ。また、 $B(\mathcal{H})$ の部分代数であって、 $*$ -演算と弱位相で閉じているものを von Neumann 環と呼ぶ。

作用素環論における研究対象は定義 1.1 にある C^* -環と von Neumann 環である。ヒルベルト空間 \mathcal{H} は、通常は可分無限次元のヒルベルト空間を想定している。また、 C^* -環には抽象的な特徴づけが存在し [12, Chapter 2]、Banach $*$ -環であってノルムが C^* -条件と呼ばれるものを満たせば、 $B(\mathcal{H})$ に埋め込めることが知られている。この事実を用いることで、群などと同様に生成元と関係式から C^* -環を定義することもできる。

C^* -環の例として次のものが挙げられる。

例 1.2. X を局所コンパクトハウスドルフ空間とし、 $C_0(X)$ を無限遠で 0 に減衰する連続関数全体とする。 $C_0(X)$ は最大値ノルムによって C^* -環となる。

作用素環論では、環に単位元が存在するとは限らない。例 1.2 においては、 $C_0(X)$ が単位元を持つことと X がコンパクトであることは同値であり、またこのとき、単位元は定数関数 1 である。 C^* -環が単位元を持つとき、単位的であるという。また、可換な C^* -環は連続関数環と同型になることが知られている [12, Theorem 2.1.10]。そのため、非可換な C^* -環が主な研究の対象となる。

本講演では C^* -環を中心的に扱うが、議論の過程で von Neumann 環も登場する。von Neumann 環には常に単位元が存在することが知られている。

定義 1.3. von Neumann 環 M であって、中心が自明であるもの、すなわち

$$\{a \in M \mid ax = xa \text{ for all } x \in M\} = \mathbb{C}1$$

であるものを因子環という。

任意の von Neumann 環は因子環の直積分に分解できることから、von Neumann 環を調べる上では因子環が特に重要である。因子環には、I 型、II₁ 型、II_∞ 型、III_λ 型 ($0 \leq \lambda \leq 1$) という分類がある。

作用素環論で重要とされる問題として、作用素環の同型・非同型を決定するという問題が挙げられる。作用素環は他の数学的対象（例えば、群や力学系など）をもとに構成することができるが、異なる数学的対象から構成された C*-環が非同型かどうかという問題は一般に難しい問題である。例えば von Neumann 環論では、単射的可分 II₁ 型因子環の同型類がただ一つしか存在しないことが知られており、その結果として、可算従順 ICC 群 Γ の群 von Neumann 環 $L\Gamma$ はすべて同型になる。このような背景から、作用素環論では同型・非同型を決定する問題に興味を持たれている。

本講演では有向グラフから C*-環（正確には、後に定義する C*-力学系）を構成し、グラフの情報が C*-環にどのように反映されているかを調べる。その結果として C*-力学系の非同型を決定することにもつながるが、グラフの不変量がどのような形態で現れるかということ自体に興味がある。

1.2 KMS 状態

本講演では、C*-環を単独で考えるのではなく、さらに実数の加法群 \mathbb{R} の作用を考える。この \mathbb{R} の作用は時間発展と呼ばれる。C*-環 A に時間発展 $\sigma: \mathbb{R} \curvearrowright A$ が定まっているとき、 (A, σ) は C*-力学系と呼ばれる。KMS 状態に関する詳細は [4, Chapter 5.3] を参照のこと。

定義 1.4. C*-環 A 上の有界線形汎関数 $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$ であって、ノルムが 1 であり、 $\varphi(a^*a) \geq 0$ を満たすもののことを、 A 上の状態と呼ぶ。

定義 1.5. (A, σ) を C*-力学系とし、 β を正の実数とする。 A 上の状態 φ が KMS_β 状態であるとは、任意の $a, b \in A$ に対して、連続関数 $F_{a,b}: \bar{D}_\beta \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して、 $F_{a,b}$ は D_β において正則であり、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$F_{a,b}(t) = \varphi(a\sigma_t(b)), \quad F_{a,b}(t + i\beta) = \varphi(\sigma_t(b)a)$$

を満たすことである。ここで、

$$D_\beta = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im } z < \beta\}, \quad \bar{D}_\beta = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im } z \leq \beta\}$$

であり、これらは帯状領域と呼ばれる。

C*-環論による量子統計力学の文脈では、C*-環上の状態は物理状態と考えられており、KMS 状態は平衡状態と考えられている (β は温度の逆数であり、逆温度とよぶ)。本講演で登場する C*-力学系が何らかの物理現象と関係しているわけではないが、KMS 状態の振る舞いは独特の現象をもたらすため、物理と切り離された文脈でもよく研究されている。

(A, σ) を C*-力学系とし、 β を正の実数とする。 KMS_β 状態全体の集合を $\text{KMS}_\beta(A, \sigma)$ と表記する。 $\text{KMS}_\beta(A, \sigma)$ は A^* 内で凸集合である (A が単位的であれば弱*-コンパクトである)。凸集

合 $\text{KMS}_\beta(A, \sigma)$ の「形」は、 β を変化させると不連続的に変化することがある。 $\text{KMS}_\beta(A, \sigma)$ の形が変わるとき、相転移が起こるといい、相転移が起こる逆温度 β を臨界逆温度とよぶ。

KMS 状態の研究では、すべての逆温度 β における KMS_β 状態をすべて決定することで、相転移現象を見つけることが一つの目標となる。ただし、すべての KMS 状態を知るためには、 $\text{KMS}_\beta(A, \sigma)$ の端点集合 $\text{ex KMS}_\beta(A, \sigma)$ を決定すれば十分であることが知られている [3, Chapter 4]。そのため、KMS 状態の研究では端点 KMS 状態のみを研究することが多い。KMS 状態 φ が端点であることと、その GNS 表現 π_φ の生成する von Neumann 環 $\pi_\varphi(A)''$ が因子環であることは同値である [4, Theorem 5.3.30]。端点 KMS 状態に対応する因子環の型を KMS 状態の型と呼ぶ。

また、実際は KMS_β 状態は $\beta \leq 0$ に対しても定義される。実際、[6, Section 7] では負の逆温度における KMS 状態の振る舞いも調べており、興味深い現象も潜んでいるが、本講演では割愛する。

1.3 分配関数

この節の事実は [5, Section 2] に基づく。端点 KMS 状態が I 型であるとき、分配関数と呼ばれる複素関数 $Z_\varphi(s)$ が定義される。 (A, σ) を C^* -力学系とし、 $\varphi \in \text{ex KMS}_\beta(A, \sigma)$ とし、 φ は I 型であるとする。このとき、 φ の GNS 表現から、次を満たす三つ組 (π, \mathcal{H}, H) が対応する： \mathcal{H} はヒルベルト空間で、 $\pi: A \rightarrow B(\mathcal{H})$ は A の既約表現である。 H は \mathcal{H} 上の（有界とは限らない）自己共役作用素であって、正值かつスペクトラムに 0 を含み、 $\text{Ad}(e^{itH}) \circ \pi = \pi \circ \sigma_t$ が任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ。この三つ組は上記の条件によって、ユニタリ同値を除きただ 1 つに定まる。このときの自己共役作用素 H はハミルトニアンと呼ばれる。

I 型 KMS 状態 φ に対応する三つ組が (π, \mathcal{H}, H) であるとき、

$$\varphi(a) = \frac{\text{Tr}(e^{-\beta H} \pi(A))}{\text{Tr}(e^{-\beta H})} \quad (a \in A) \quad (1.6)$$

が成り立つ。式 (1.6) の右辺の分母が分配関数である。より正確には、次のように定義する。

定義 1.7. 上記の状況において、

$$\beta_\varphi = \inf\{\beta' > 0 \mid \text{Tr}(e^{-\beta' H}) < \infty\}$$

と定める (β_φ は臨界逆温度という)。関数

$$Z_\varphi(s) = \text{Tr}(e^{-sH}) \quad (s \in \mathbb{C}, \text{Re } s > \beta_\varphi)$$

を φ の分配関数という。

I 型の KMS 状態 $\varphi \in \text{ex KMS}_\beta(A, \sigma)$ が 1 つ見つかり、その分配関数が収束する範囲において、共通のハミルトニアンを持つ I 型 KMS 状態の系列 $\{\varphi_{\beta'}\}_{\beta' > \beta_\varphi}$ を見つけることができる。具体的には、式 (1.6) の右辺の β を β' に置き換えたものが $\varphi_{\beta'}$ の定義である。これらの KMS 状態には共通の分配関数に対応している。状態から分配関数が決まるという定義の仕方は、物理的には奇妙ではある。しかし、厳密な定義をするにはそうせざるを得ないというだけのことで、1 つの分配関数と実際に対応しているのは、単独の KMS 状態ではなく KMS 状態の系列であるといえる。

また、分配関数は複素関数として定義するものの（実際に [5] では留数を調べる議論が含まれているが）、本講演では実軸上での振る舞いのみが関係する。分配関数の定義は、本質的な部分は [8] によってなされており、[5, Section 2] はそれを一般の C^* -力学系に対して拡張したものである。

1.4 graph-Toeplitz C^* -環

定義 1.8. グラフとは、 $E = (E^0, E^1, s, r)$ であって、 E^0 と E^1 は集合であり、 s と r はそれぞれ E^1 から E^0 への写像であるようなもののことである。 E^0 の元を頂点といい、 E^1 の元を辺という。

本講演では、グラフは常に有向グラフを指すものとする。辺 $e \in E^1$ に対して、 $s(e)$ は辺の始点を表し、 $r(e)$ は辺の終点を表すものと解釈する。まず、グラフに関して基本的な用語や記号を定義する。 E をグラフとする。 E 内の長さ n の道とは、辺の列 $\mu = e_0 \cdots e_{n-1}$ であって、 $r(e_i) = s(e_{i+1})$ ($0 \leq i \leq n-2$) を満たすもののことである。 E 内の長さ n の道全体の集合を E^n と表記し、また $E^* = \bigcup_{n \geq 0} E^n$ と定める。集合 E^* は有限の長さの道全体である。頂点 $v, w \in E^0$ に対して、 vE^n は v を始点とする長さ n の道全体を表し、 $E^n w$ は w を終点とする長さ n の道全体を表し、 $vE^n w$ は v を始点とし w を終点とする長さ n の道全体を表す。同様に vE^* , $E^* w$, $vE^* w$ も定義される。 $E^0 \times E^0$ 行列 $A_E = [wE^1 v]_{v, w \in E^0}$ を E の隣接行列という。ただし、集合 X に対して、その濃度は $|X|$ と表記する。 E^0 と E^1 がともに有限集合であるとき、 E は有限グラフであるという。

定義 1.9. グラフ E に対して、その graph-Toeplitz 環 $\mathcal{TC}^*(E)$ とは、各頂点に対応する射影 p_v ($v \in E^0$) と各辺に対応する部分等長作用素 s_e ($e \in E^1$) によって生成され、関係式

$$\begin{aligned} s_e^* s_e &= p_{r(e)} \quad (e \in E^1), \quad (s_e s_e^*)(s_f s_f^*) = 0 \quad (e, f \in E^1 \text{ with } e \neq f), \\ p_v p_w &= 0 \quad (v, w \in E^0 \text{ with } v \neq w), \quad \sum_{e \in vE^1} s_e s_e^* \leq p_v \quad (v \in E^0) \end{aligned}$$

を満たす普遍 C^* -環である。また、これらの関係式に加えて

$$\sum_{e \in vE^1} s_e s_e^* = p_v \quad (v \in E^0 \text{ with } 0 < |vE^1| < \infty)$$

を満たす普遍 C^* -環はグラフ C^* -環と呼び、 $C^*(E)$ と表す。

普遍 C^* -環とは、与えられた生成元によって生成され、与えられた関係式を満たす C^* -環 A であって、 C^* -環 B が同じ生成元によって生成され、同じ関係式を満たすならば、 A から B に自然な全射が存在するという性質で特徴づけられる C^* -環である。これは例えば、群を生成元と関係式によって定義する方法と同じである。

グラフ E に対して、graph-Toeplitz 環やグラフ C^* -環が単位的であることと、 E^0 が有限集合であることは同値である。また、 $\mathcal{TC}^*(E)$ や $C^*(E)$ にはゲージ作用と呼ばれる次の時間発展 σ を考える：

$$\sigma_t(s_e) = e^{it} s_e, \quad \sigma_t(p_v) = p_v \quad (t \in \mathbb{R}, e \in E^1, v \in E^0).$$

この作用に関して、KMS 状態の振る舞いを調べるのが本講演の目的である。

例 1.10. E をただ 1 つの頂点とただ 1 つの辺からなるグラフとする. つまり, $E^0 = \{v\}, E^1 = \{e\}$ で, $s(e) = r(e) = v$ である. このとき, $\mathcal{TC}^*(E)$ は Toeplitz 環と呼ばれる C^* -環と同型である. Toeplitz 環は 1 つの等長作用素から普遍的に生成される C^* -環であり, 非常に基本的な C^* -環として広く知られている. また, $C^*(E)$ は円周 \mathbb{T} 上の連続関数環 $C(\mathbb{T})$ と同型である. $\mathcal{TC}^*(E)$ の KMS 状態の構造は簡単で, すべての逆温度 $\beta > 0$ に対して, $(\mathcal{TC}^*(E), \sigma)$ にはただ 1 つの KMS_β 状態が存在し, しかもそれは I 型である.

例 1.11. E をただ 1 つの頂点と n 本の辺からなるグラフとする. このとき, $C^*(E)$ は Cuntz 環と呼ばれる C^* -環と同型であり, $\mathcal{TC}^*(E)$ は Cuntz-Toeplitz 環と呼ばれる C^* -環と同型である. Cuntz 環上の KMS 状態は Olesen–Pedersen によって決定されており [13], graph-Toeplitz 環の KMS 状態に関する先駆的な研究であると言える. 結論として, $(C^*(E), \sigma)$ は $\beta = \log n$ にただ 1 つの KMS_β 状態を持ち, それは $\text{III}_{1/n}$ 型である. また, 他の逆温度では KMS 状態を持たない. $\mathcal{TC}^*(E)$ 上の KMS 状態については次の章で別途説明する.

C^* -環論全体としては, グラフから構成される C^* -環についてはグラフ C^* -環のほうがより頻繁に研究されている. しかし, KMS 状態という視点からはグラフ C^* -環ではなく graph-Toeplitz 環を研究するほうが, 現象をあるべき形で捉えられることが多い. 本講演で紹介する KMS 状態の構造定理なども, グラフ C^* -環に関しては記述が不自然に煩雑になってしまうが, graph-Toeplitz 環ではきれいな記述が得られる. したがって, 本講演では graph-Toeplitz 環に主に着目する.

定義 1.9 より, 自然な全射 $\mathcal{TC}^*(E) \rightarrow C^*(E)$ が存在することがすぐに分かるが, この全射はゲージ作用に関して同変である. したがって, $(C^*(E), \sigma)$ 上の KMS_β 状態は, この全射を合成することで $(\mathcal{TC}^*(E), \sigma)$ 上の KMS_β 状態に拡張できる. KMS 状態がこの全射を経由するための条件は簡単に書き下せるので, graph-Toeplitz 環上の KMS 状態をすべて決定することができれば, グラフ C^* -環についても KMS 状態が決定できることになる.

2 既存の事実および主結果

この章の目的は本講演の主結果群を紹介することであるが, 分野全体のなかで主結果がどのように位置づけられるかを説明するために, 既存の事実と並列して紹介する.

2.1 有限強連結グラフの場合

graph-Toeplitz 環の KMS 状態の研究は, グラフが有限強連結である場合が最も基本的な場合となる. まずはこの場合に知られている既存の事実を紹介する.

定義 2.1. E をグラフとし, E^0 上の同値関係を

$$v \sim w \iff vE^*w \neq \emptyset \text{ and } wE^*v \neq \emptyset$$

により定める. この同値関係による同値類を E の強連結成分という. E の強連結成分全体の集合を $\pi(E)$ と表す. $\pi(E)$ が一点集合であるとき, E は強連結であるという.

有限強連結グラフの graph-Toeplitz 環の KMS 状態は以下のようになっている. 定理 2.2 の結果のうち, (2) は実質的には Enomoto–Fujii–Watatani [9] によるものであるが, 一般の強連結有限グラフに対しての定式化は Laca–Larsen–Neshveyev–Sims–Webster [10] の higher rank graph

に対する結果に含まれている．また，(1) は an Huef–Laca–Raeburn–Sims [1] による．有限サイズの行列 A に対して， $\rho(A)$ はそのスペクトル半径を表す．

定理 2.2 ([1], [9], [10]). E を有限強連結グラフとし， β を正の実数とする．このとき，以下が成り立つ：

- (1) $\beta > \log \rho(A_E)$ であるとき， $\text{ex KMS}_\beta(\mathcal{TC}^*(E), \sigma)$ と E^0 の間に自然な全単射が存在する．またこのとき，すべての端点 KMS_β 状態は I 型である．
- (2) $\beta = \log \rho(A_E)$ であるとき， $(\mathcal{TC}^*(E), \sigma)$ にはただ一つの KMS_β 状態が存在し，それは III_λ 型である．ただし， $\lambda = \rho(A_E)^{-s}$ であり， s は E 内のループの長さの最大公約数である．
- (3) $\beta < \log \rho(A_E)$ であるとき， $(\mathcal{TC}^*(E), \sigma)$ には KMS_β 状態が存在しない．

定理 2.2 の証明の骨子は次のとおりである．まず，(2) に関しては，このような KMS 状態は隣接行列 A_E の固有値 e^β の正の固有ベクトル（すべての成分が正であるベクトル）であって， ℓ^1 -ノルムが 1 であるものと 1 対 1 に対応する（この事実は [16, Theorem 2.7] から従う）．Perron–Frobenius の定理 [14, Theorem 1.5] より，隣接行列 A_E は $\rho(A)$ を固有値に持ち，しかも $\rho(A)$ は A の固有多項式の単根である．また，固有値 $\rho(A)$ には正の固有ベクトルが存在する．このことから，(2) の一意存在の部分は示される．(3) に関しては，Perron–Frobenius の定理の亜種である subinvariance theorem [14, Theorem 1.6] から KMS 状態の非存在が導かれる．このように，(2) および (3) に関しては隣接行列のスペクトル理論に帰着するところが鍵である．(1) に関しても，隣接行列 A_E が重要な役割を果たす． $\beta > \log \rho(A_E)$ であるとき，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta} A_E^n$ が収束することが鍵になる．本講演では次節で，分配関数を用いた説明を与える．

2.2 I 型 KMS 状態の決定

強連結有限グラフの場合は，KMS 状態の決定や臨界逆温度の記述を，すべて隣接行列という観点から説明することができた．グラフが無限である場合は，隣接行列のスペクトル理論を用いることは難しい．そのため，強連結有限グラフの場合に縮退していた現象は，グラフのどのような性質が本質なのかを再検討する必要がある．

graph-Toeplitz 環の端点 KMS 状態のうち，I 型のものに関しては完全な記述を与えることができる．これはグラフが有限であるかどうかに関わらず可能で，Carlsen–Larsen [7] の結果による．I 型 KMS 状態に関する我々の貢献は，1.3 節の分配関数の視点から Carlsen–Larsen の結果を整理したことと，臨界逆温度に関して upper Minkowski 次元を用いた記述を与えたことである．

定義 2.3. E をグラフとし， $v \in E^0$ を頂点とする．関数 $Z_v(s)$ ($s > 0$) を

$$Z_v(s) = \sum_{\mu \in E^*v} e^{-s|\mu|}$$

により定める．また，

$$\beta_v = \inf\{s > 0 \mid Z_v(s) < \infty\}$$

と定める．

関数 Z_v は [7, Equation 5.8] で導入されており ([1, Theorem 3.1] でも登場している)，そこでは fixed-target partition function と呼ばれている．この当時は分配関数に対する定義が確立され

ておらず、KMS 状態の振る舞いを決める役割を果たしている関数が大まかに「分配関数」と呼ばれていた。実際、[7]には他の種類の「分配関数」も登場する。Carlsen–Larsen の結果によって、I 型の KMS 状態は以下のように決定されている。

定理 2.4 ([7, Theorem 5.6]). E をグラフとし、 β を正の実数とする。このとき、 $(\mathcal{TC}^*(E), \sigma)$ の I 型の端点 KMS_β 状態と、頂点 $v \in E^0$ であって $Z_v(\beta) < \infty$ を満たすものが 1 対 1 に対応する。

定理 2.4 において、頂点 $v \in E^0$ に対応する KMS_β 状態を $\varphi_{\beta,v}$ と表記する。以下が本講演における主結果の 1 つ目である [6, Theorem 4.7].

定理 2.5. E をグラフとし、 β を正の実数とし、 $v \in E^0$ は $\beta_v < \beta$ を満たすとする。このとき、 $Z_v = Z_{\varphi_{\beta,v}}$ かつ $\beta_v = \beta_{\varphi_{\beta,v}}$ が成り立つ。

つまり、fixed-target partition function は 1.3 節の抽象的な分配関数と一致する。1.3 節の分配関数は一般の C^* -力学系に対して定義されているものであるから、分配関数のリスト $\{Z_v\}_{v \in E^0}$ は C^* -力学系 $(\mathcal{TC}^*(E), \sigma)$ の不変量になっていることが分かる。この帰結として、例えばグラフが有限であるときに、分配関数をすべて足し上げたものはグラフの道の母関数であるが、この母関数はこの C^* -力学系から取り出すことができるということがわかる [6, Section 6.1]. また、定理 2.5 の証明はより一般的なセッティングで、エタール亜群 C^* -環とその上の 1-cocycle から定まる時間発展に対して分配関数の公式を作り、それを適用するという流れになっている。

E が強連結有限グラフの場合、任意の $v \in E^0$ に対して、

$$Z_v(s) = \sum_{w \in E^0} \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ns} A_E^n \delta_v, \delta_w \right\rangle$$

が成り立つ。ここで、内積は $\ell^2(E^0)$ の内積を考えている。このことから、強連結有限グラフの場合は各分配関数 Z_v の収束と隣接行列を用いた冪級数の収束が同値になっていることが分かる。強連結有限グラフの場合は単一の冪級数の収束・発散に縮退していた現象が、実は個々の頂点ごとに冪級数が対応していて、それらの収束・発散が KMS 状態の振る舞いを決めていた、ということがここから見て取れる。また同様に、強連結有限グラフの場合には単一の臨界逆温度 ($\beta = \log \rho(A_E)$) しかなかったものが、一般のグラフでは個々の頂点ごとに臨界逆温度が現れる。しかもそれらは、隣接行列のスペクトル半径とは直接的には結びついていない。したがって、一般のグラフで通用するような臨界逆温度の記述を得たい、という自然な問題が生まれる。

我々は臨界逆温度に対して、グラフの「普遍被覆」を用いた幾何学的な記述を与えた。証明はさほど難しくはないため主定理には位置づけていないが、臨界逆温度に関して直感的な議論を可能にする面白い結果であると考えている [6, Definition 4.25 and Proposition 4.26].

定義 2.6. E をグラフとし、 $v \in E^0$ とする。 $T(E, v)$ を “directed cover of E^{op} based at v ” とする。すなわち、 $T(E, v)$ は rooted tree であって、 $T(E, v)^0 = E^*v$ であり、それぞれの (v を終点とする) 道の間に、片方の道がもう片方の道の最初に 1 つだけ辺をつけ足してできるものである場合に辺を置くと定める。また、 $T(E, v)$ の root は v (長さ 0 の道) である。

命題 2.7. E をグラフとし、 $v \in E^0$ とする。 $T(E, v)$ には「沈点が多すぎない」と仮定する。このとき、臨界逆温度 β_v は、 $T(E, v)$ の境界 $\partial T(E, v)$ の upper Minkowski 次元 $\dim^M \partial T(E, v)$ と等しい。

命題 2.7 の仮定は曖昧な書き方をしているが、正確な仮定は [6, Section 4.4] を参照されたい。例えば E が有限グラフである場合や、無限グラフであっても源点が有限個である場合には「 $T(E, v)$ に沈点が多すぎない」という仮定は満たされる。「普遍被覆」 $T(E, v)$ を用いて直感的な議論ができることがこの特徴付けの強みで、グラフが有限である場合であっても強連結でない場合にはこの特徴付けを用いたほうがわかりやすいことがある。実際に [6, Section 5] では有限グラフの場合に関して、普遍被覆を用いた議論を用いている。命題 2.7 の証明は Hadamard の定理を用いれば容易である。

例 2.8 ([6, Remark 5.11]). 普遍被覆を用いた議論の例を紹介する。 E をグラフとし、 $C \in \pi(E)$ とする。このとき、 C 内のどの頂点 $v \in C$ に対しても臨界逆温度 β_v の値は一定である。このことは、任意の $v, w \in C$ に対して、 $T(E, v)$ が $T(E, w)$ に埋め込めることから従う。

例 2.8 の事実自体は簡単であり、普遍被覆を用いずとも容易に示すことができる。この事実から、各頂点に対応していた臨界逆温度は、実際は各強連結成分に対応していることがわかる。この事実は次節で重要な役割を果たす。

また、用語に関しては [11] に従っている。ここでは「普遍被覆」という用語を用いて説明したが、正確にはグラフの普遍被覆は無向グラフに対する用語であり、有向グラフの場合に対応する概念が directed cover である。イメージとしては、 v を終点とするグラフ内のループをすべてほどいてできる木が「普遍被覆」である。

2.3 臨界逆温度における KMS 状態

この節と、次の節では有限グラフの場合に話を限定する。強連結グラフの場合は、各頂点に対応する I 型 KMS 状態があるほかに、臨界逆温度にただ一つの III 型 KMS 状態が存在した。強連結とは限らない一般の有限グラフの場合も各臨界逆温度には KMS 状態が存在し、この節ではその構造について説明する。臨界逆温度における KMS 状態の構造は強連結の場合と比較してかなり複雑で、強連結でないグラフを扱う上で面白いところである。

有限グラフの KMS 状態については、型の決定を除き an Huef–Laca–Raeburn–Sims [2] によって決定されている。我々の目標は型の決定であり、そのために彼らの定理を少し再構成した。ここで紹介する an Huef–Laca–Raeburn–Sims の定理は我々が再構成したバージョンである [6, Section 5.3]。はじめに記号を少し定義する。グラフ E と部分集合 $C \subset E^0$ に対して、隣接行列 A_E の $C \times C$ ブロックを A_C によって表す。強連結成分 $C \in A_C$ に対して、例 2.8 より、 β_v の値は $v \in C$ のとり方によらず一定であることから、この値を β_C と表記する。

定義 2.9 ([6, Definition 5.12]). 有限グラフ E の強連結成分 $C \in \pi(E)$ が極小 (minimal) であるとは、任意の強連結成分 $C' \in \pi(E)$ であって、 C' から C への道が存在するものに対して、 $C' = C$ であるか、 $\rho(A_{C'}) < \rho(A_C)$ であるかが成り立つことである。有限グラフ E の極小な強連結成分であって、 $\beta_C > 0$ であるもの全体の集合を $\pi_{\text{mc}}(E)$ と表す。

注 2.10. $C \in \pi_{\text{mc}}(E)$ であれば、 $\beta_C = \log \rho(A_C)$ である [6, Proposition 5.13]。

定理 2.11 ([2, Theorem 5.3], [6, Theorem 5.16]). E を有限グラフとする。 $(\mathcal{T}C^*(E), \sigma)$ の端点 KMS 状態であって、「 E^∞ に台を持つ」もの全体の集合と、 $\pi_{\text{mc}}(E)$ の間に自然な 1 対 1 対応が存在する。この対応において、極小強連結成分 $C \in \pi_{\text{mc}}(E)$ に対応する KMS 状態 ψ_C の逆温度

は β_C である.

「 E^∞ に台を持つ」という用語は、定義に準備が必要なためここでは定義しない. これは、「臨界逆温度の KMS 状態である」ということをより厳密に定義したものであり、また定理 2.12 を認めれば、これは III 型の KMS 状態であることと同値である.

我々は、定理 2.11 に登場する KMS 状態 ψ_C の型を決定した [6, Theorem 5.17]. それ以外の KMS 状態はすべて I 型であるので、これにより有限グラフの KMS 状態の構造は完全に決定されたといえる.

定理 2.12. 定理 2.11 において、端点 KMS 状態 ψ_C は III_λ 型である. ここで、 $\lambda = e^{-s\beta_C}$ であり、 s は C 内のループの長さの最大公約数である.

この定理は強連結の場合に帰着することにより証明される. したがって、von Neumann 環の不変量を計算するステップは [6] には含まれない.

2.4 極小でない強連結成分の役割

この節は [15] に基づく. また、有限グラフの場合に話を限定する. 有限グラフの graph-Toeplitz 環の KMS 状態は、I 型のは頂点と対応し、III 型のは極小強連結成分と対応することをこれまでに見てきた. この対応関係から、2つの自然な疑問が生まれる. 1つは、頂点に対応する KMS 状態と連結成分に対応する KMS 状態にはどのような関係があるだろうか? ということである. たとえば、頂点 v が極小連結成分 C に属しているときは、I 型 KMS 状態 $\varphi_{\beta,v}$ には何らかの方法で III 型 KMS 状態 ψ_C と対応するであろうと期待できる. しかし、 v が極小連結成分に属していないときは、そもそもどのような対応関係が期待できるのかということも自明ではない. 2つ目は、極小でない強連結成分は KMS 構造においてどのような役割を果たしているか? ということである. KMS 状態の構造定理からは極小でない連結成分の役割を見ることができないが、これらの連結成分は何の役割も持っていないのであろうか? これら 2つの疑問は互いに関係しており、すべての連結成分が III 型 KMS 状態に対応しているわけではないことが原因となっている.

方針として、次のようなことを考える. 頂点 $v \in E^0$ に対して、弱*-位相に関する極限 $\varphi_v = \lim_{\beta \rightarrow \beta_v + 0} \varphi_{\beta,v}$ を考える. 実際にはこの極限が存在すること自体も主定理の一部である (極限の存在を示すことだけであれば、他に簡単な方法がある可能性が高いが). このとき、 φ_v は KMS_{β_v} 状態であるが、端点であるとは限らない. したがって、

$$\varphi_v = \sum_{C \in \pi_{v, \text{mc}}(E)} \lambda_C \psi_C$$

と凸結合に分解する. ここで、係数 λ_C は総和が 1 であるような非負の実数であり、 $\pi_{v, \text{mc}}(E)$ は極小連結成分 $C \in \pi_{\text{mc}}(E)$ であって、 C から v への道が存在し、かつ $\beta_C = \beta_v$ であるようなもの全体の集合である. このとき、各 λ_C が正となるような必要十分条件を与えることが目標である. $\lambda_C > 0$ となる極小強連結成分のみがこの凸結合に真に関与しているので、これらの極小連結成分が頂点 v に「KMS 状態の構造の意味で関係している」連結成分であるといえる. ただし、 $\beta = 0$ における KMS 状態の取り扱いを避けるために、 $\beta_v > 0$ となるような頂点のみをここでは考える.

主定理を記述するために、グラフ E から「連結成分のグラフ」を作る. 一般に、グラフの各強連結成分を一点につぶすことで、ループのないグラフを作ることができる. ここではさらに、連結成分の間の辺の数も不要な情報なので、それらもつぶしたグラフを作る.

定義 2.13. E を有限グラフとし, $C_0 \in \pi(E)$ とする. グラフ $B(E, C_0)$ を次のように定める: 頂点集合 $B(E, C_0)^0$ は, $C \in \pi(E)$ であって, C から C_0 への道が存在するもの全体と定める. $C, C' \in B(E, C_0)$ に対して, C' 内の頂点から C 内の頂点への E 内の辺が存在するときに, C' を始点とし C を終点とする辺を置く.

以下, E や C_0 が文脈上明らかであるときは, $B(E, C_0)$ は単に B と表記する. 主定理を記述するために, B 内の道に関する性質を 1 つ定義する.

定義 2.14. E を有限グラフとし, $C_0 \in \pi(E)$, $v \in C_0$ とする. また, $B = B(E, C_0)$ とする. $C \in B^0$ が臨界連結成分 (critical component) であるとは, $\rho(A_C) = e^{\beta v}$ を満たすことである. $\mu \in B^*$ に対して, μ が B 内を通る臨界連結成分全体の集合を $\text{crit}(\mu)$ で表す. B 内の道 $\mu \in B^*$ が極大 (maximal) であるとは,

$$|\text{crit}(\mu)| = \max\{|\text{crit}(\nu)| : \nu \in B^*C_0\}$$

を満たすことである.

そして, 以下がこの節の主定理である [15, Theorem 3.24].

定理 2.15. E を有限グラフとし, $v \in E^0$ とし, $\beta_v > 0$ であるとする. $C_0 \in \pi(E)$ を v の属する強連結成分とする. φ_v の凸結合分解を

$$\varphi_v = \sum_{C \in \pi_{v, \text{mc}}(E)} \lambda_C \psi_C$$

とおく. このとき, $\lambda_C > 0$ であることと, C から C_0 への極大な道が B 内で存在することは同値である.

定理 2.15 において, 各極小連結成分 $C \in \pi_{v, \text{mc}}(E)$ は臨界連結成分である. 定理 2.15 の主張は, C から C_0 への B 内の道で, その中の臨界連結成分の個数を最大化するものが存在するときに, またそのときに限り, C は定理 2.15 内の凸結合分解に関与する (つまり v と「関係している») というものである. 極大な道 $\mu \in CB^*C_0$ に現れる臨界連結成分は, C を除いては極小ではない. これが冒頭で述べた, 極小でない強連結成分の役割である. 臨界連結成分は何らかの KMS 状態に対応するわけではないが, 極小連結成分から頂点への道の間にとれくらの臨界連結成分が現れるかが, その極小連結成分が凸結合に現れるかどうかに関係している.

参考文献

- [1] A. an Huef, M. Laca, I. Raeburn, and A. Sims, *KMS states on the C^* -algebras of finite graphs*, J. Math. Anal. Appl. **405** (2013), no. 2, 388–399.
- [2] ———, *KMS states on the C^* -algebras of reducible graphs*, Ergodic Theory Dynam. Systems **35** (2015), no. 8, 2535–2558.
- [3] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 1*, Second, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, New York (1987). C^* - and W^* -algebras, symmetry groups, decomposition of states.

- [4] ———, *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 2*, Second, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin (1997). Equilibrium states. Models in quantum statistical mechanics.
- [5] C. Bruce, M. Laca, and T. Takeishi, *Partition functions as C^* -dynamical invariants and actions of congruence monoids*, *Comm. Math. Phys.* **382** (2021), no. 2, 1165–1203.
- [6] C. Bruce and T. Takeishi, *C^* -dynamical invariants and Toeplitz algebras of graphs*, arXiv:2103.02816 (2021).
- [7] T. M. Carlsen and N. S. Larsen, *Partial actions and KMS states on relative graph C^* -algebras*, *J. Funct. Anal.* **271** (2016), no. 8, 2090–2132.
- [8] A. Connes, C. Consani, and M. Marcolli, *Noncommutative geometry and motives: the thermodynamics of endomotives*, *Adv. Math.* **214** (2007), no. 2, 761–831.
- [9] M. Enomoto, M. Fujii, and Y. Watatani, *KMS states for gauge action on O_A* , *Math. Japon.* **29** (1984), no. 4, 607–619.
- [10] M. Laca, N. S. Larsen, S. Neshveyev, A. Sims, and S. B. G. Webster, *Von Neumann algebras of strongly connected higher-rank graphs*, *Math. Ann.* **363** (2015), no. 1-2, 657–678.
- [11] R. Lyons and Y. Peres, *Probability on trees and networks*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, vol. 42, Cambridge University Press, New York (2016).
- [12] G. J. Murphy, *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press, Inc., Boston, MA (1990).
- [13] D. Olesen and G. K. Pedersen, *Some C^* -dynamical systems with a single KMS state*, *Math. Scand.* **42** (1978), no. 1, 111–118.
- [14] E. Seneta, *Non-negative matrices and Markov chains*, Springer Series in Statistics, Springer, New York (2006). Revised reprint of the second (1981) edition.
- [15] T. Takeishi, *Limits of KMS states on Toeplitz algebras of finite graphs*, in preparation.
- [16] K. Thomsen, *KMS weights on graph C^* -algebras*, *Adv. Math.* **309** (2017), 334–391.

KMS states of Toeplitz algebras of graphs

武石 拓也

京都工芸繊維大学

正誤表

KMS 状態の定義 (定義 1.5)

誤 : $\bar{D}_\beta = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im } z < \beta\}$

正 : $\bar{D}_\beta = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \text{Im } z \leq \beta\}$