第58回実函数論・函数解析学
合同シンポジウム
講演集

期日：2019年8月26日(月)–8月28日(水)
会場：九州大学 伊都キャンパス

まえがき

本講演集は，2019 年 8 月 26 日 (月) から 8 月 28 日 (水) までの 3 日間にわたり，九州大学伊都キャンパスで開催された第 58 回実函数論・函数解析学合同シンポジウムの講演集です.

本シンポジウムの開催のために多くの方々にご協力をいただきましたが，関係者各位のご尽力によって，講演者の方々の素晴らしい論文を本講演集で発表することができました．各グループの責任者の方々，講演者の皆様，本シンポジウム参加者の皆様方に深く感謝いたします.

特に，会場責任者の廣島文生先生をはじめとする九州大学の皆様には大変お世話になりました．ここに深く感謝の意を表します.

なお，本シンポジウムの講演会場の運営，および講演集の作成には，下記の科学研究費補助金の援助を受けています.

基盤研究 (B)（代表 廣島 文生）研究課題番号：16H03942
「測度論的手法による無限次元解析と
場の量子論のスペクトル解析への応用」

基盤研究 (C)（代表 谷口 健二）研究課題番号：16K05071
「標準 Whittaker 加群の構造解析」

山崎 教昭 （神奈川大学・工学部）
谷口 健二 （青山学院大学・理工学部）

第58回実函数論・函数解析学合同シンポジウム
プログラム

期日：2019年8月26日 (月) 13:30 〜 8月28日 (水) 11:45
会場：九州大学伊都キャンパス
ウエスト1号館 4階 IMI オーディトリアム (W1-D-413)
〒819-0395 福岡市西区元岡 744
http://www.kyushu-u.ac.jp/ja/campus/ito/

8月26日 (月)

13:30–14:30: 小松 尭 (神奈川大学)
"量子ウォークの定常性と局在性"

14:45–15:45: 神澤 健雄 (東京理科大学・理工学部情報科学科)
"Algebraic and Lyapunov Reducibilities and the analysis of Linear Dynamical Systems and Quantum Systems"

16:00–17:00: 古清水 大直 (米子工業高等専門学校)
"微分可能な関数の空間における等距離写像について"

8月27日 (火)

9:30–10:30: 綿谷 安男 (九州大学大学院・数理学研究院)
"ヒルベルト空間の部分空間の配置と箙のヒルベルト表現"

10:45–11:45: 熊ノ郷 直人 (工学院大学・情報学部)
"放物型の相空間 Feynman 経路積分と滑らかな汎函数微分"

13:45–14:45: 菱田 俊明 (名古屋大学・多元数理科学研究科)
"Evolution operator arising from flow past a rigid body"

15:00–16:00: 田内 大渡 (東京大学大学院・数理科学研究科)
"Group actions with finite orbits on flag varieties and representations of reductive groups"

16:15–17:15: 西山 享 (青山学院大学・理工学部)
"ある積分核作用素のフーリエ変換とその解析接続"

懇親会：19:00–21:00
会場：博多百年蔵
https://www.ishikura-shuzou.co.jp/news/1336/

8 月 28 日 (水)

9:30–10:30: 水田 義弘 (広島大学・名誉教授)

“Herz-Morrey-Musielak-Orlicz 空間”

10:45–11:45: 北 廣男 (鹿児島大学・名誉教授)

“Orlicz 空間の拡張とその構造について”

開催責任者：山崎 教昭 (神奈川大学・工学部)

谷口 健二 (青山学院大学・理学部)

会場責任者：廣島 文生 (九州大学大学院・数理学研究院)

目次

小松 尭 (神奈川大学)
量子ウォークの定常性と局在性 ····· 1

神澤 健雄 (東京理科大学・理工学部情報科学科)
Algebraic and Lyapunov Reducibilities and the analysis of
Linear Dynamical Systems and Quantum Systems ····· 21

古清水 大直 (米子工業高等専門学校)
微分可能な関数の空間における等距離写像について ····· 39

綿谷 安男 (九州大学大学院・数理学研究院)
ヒルベルト空間の部分空間の配置と箙のヒルベルト表現 ····· 52

熊ノ郷 直人 (工学院大学・情報学部)
放物型の相空間 Feynman 経路積分と滑らかな汎函数微分 ····· 64

菱田 俊明 (名古屋大学・多元数理科学研究科)
Evolution operator arising from flow past a rigid body ····· 77

田内 大渡 (東京大学大学院・数理科学研究科)
Group actions with finite orbits on flag varieties and
representations of reductive groups ····· 92

西山 享 (青山学院大学・理工学部)
ある積分核作用素のフーリエ変換とその解析接続 ····· 103

水田 義弘 (広島大学・名誉教授)
Herz-Morrey-Musielak-Orlicz 空間 ····· 115

北 廣男 (鹿児島大学・名誉教授)
Orlicz 空間の拡張とその構造について ····· 129

量子ウォークの定常性と局在性

小松 尭　(神奈川大学 · 非常勤講師)*

概 要

本稿では, 量子ウォークの 2 つ の性質に焦点を当てる. 1 つ目は, 量子ウォークの定常性に関して考察する. 量子ウォークの定常性は, 時間発展作用素が誘導する測度列が時間に関して不変な性質をもつことを意味する. また, そのような測度は定常測度とよばれ, 量子ウォークの固有値問題を満たす一般化固有関数の解を見つけることで, 定常測度が構成されることを紹介する. 2 つ目は, 通常のランダムウォークでは見られない局在性である. この性質と量子ウォークの時間発展作用素の固有値が密接に関わっていることを見ていく. なお, 定常性に関する結果は, 横浜国立大学の今野紀雄氏との共同研究であり, 局在性に関する結果は, 東北大学の楯辰哉氏との共同研究によるものである.

1　はじめに

量子ウォークは通常のランダムウォークの量子版 (非可換類似物) として導入され, 量子コンピュータ周辺の分野 [1, 3, 29, 32] より 2000 年頃から本格的に始まった新しい研究分野である. また, 量子アルゴリズムの基本モデルとしても注目を集めており, 近年では, 量子情報の分野のみならず, 量子物理, 量子生物などの分野等でも活発に研究され始めている. 例えば, 量子ウォークの実現方法の様々な提案 [2], 強相関電子系 [28], トポロジカル絶縁体 [10, 27], 放射性廃棄物の低減 [4, 22, 23], 光学 [5, 24] などにも盛んに研究されている. 量子ウォークの歴史等に関しては, [18] や [31] を参照されたい. 量子ウォークには, 離散時間と連続時間があるが, 本稿では離散時間のみを扱い, 以後, 量子ウォークとよぶことにする.

通常の古典ランダムウォークとの大きな違いは, 量子ウォーカーの存在確率が量子ウォーカーの内部状態によって定められている点である. それゆえに, 量子ウォークの確率測度の長時間挙動は, 古典ランダムウォークの挙動とは大きく異っている [16]. 例えば, 次の異なった性質が見られる. 1 つ目は, 時刻 n におけるランダムウォークの標準偏差が $\sqrt{n}$ のオーダーであるのに対して, 量子ウォークの標準偏差は n のオーダーで広がっている (**線型的拡散**). 2 つ目は, 量子ウォーカーが原点から遠くに広がっていく一方で, 出発点にとどまり続ける現象 (**局在化現象**) が見られる. このような, 量子ウォーカーの長時間挙動にランダムウォーカーとの著しく異なる点が見られる.

本稿の目的は, 量子ウォークの時間発展作用素から誘導される測度列がもつ, **定常性と局在性**に焦点を当てる.

- 定常性とは, 測度列が時刻に対して不変なことである. 粗く言えば, 長時間経た後に, 時間に対して変わらない定常状態に対応する.

- 局在性とは, 量子ウォーカーが長時間経った後でも遠方に逃げていくのではなく, ある点に居続けるという性質である. 最たる例は, 1 次元 3 状態のレイジー量子ウォークで見られる. 図 1 では, 原点に居続ける量子ウォーカーの存在が確認できる.

*E-mail: pt121199vy@kanagawa-u.ac.jp

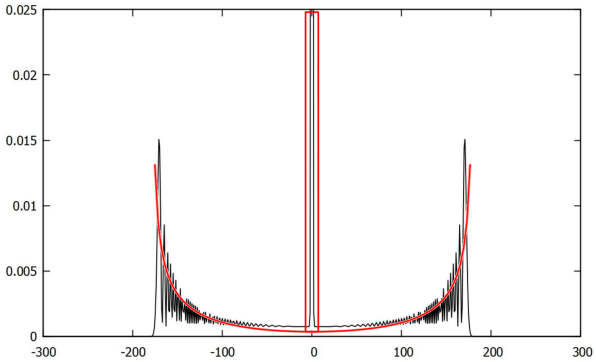


図 1: 1 次元 3 状態のレイジー量子ウォークの局在化現象

本稿の構成は次の通りである. 第 2 節では, 最もよく研究されているモデルである $\mathbb{Z}$ 上の量子ウォークの定義及び弱極限収束定理を紹介する. 第 3 節では, 量子ウォークの定常性に関する得られた結果を報告する. 最後の節では, 通常のランダムウォークでは見られない局在化現象と固有値の関係を紹介する.

2　空間一様な 2 状態の量子ウォーク

本節では, 典型的な量子ウォークのモデルである, $\mathbb{Z}$ 上の空間一様な 2 状態の量子ウォークについて紹介する. ただし, $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合とする.

古典ランダムウォークのウォーカーは, $\mathbb{Z}$ 上を単位時間当たりに, 確率 p で左に, 確率 q で右へ移動する. このとき, 時刻 n で位置 $x \in \mathbb{Z}$ にいる確率 $\mu_n(x)$ は以下で定義された.

$$\mu_{n+1}(x) = p\mu_n(x+1) + q\mu_n(x-1). \tag{1}$$

ただし, p, q は $p + q = 1$ を満たす非負実数とする. 一方, 量子ウォークは, ウォーカーが内部状態をもちながら格子点を移動するモデルとして定義されている. 前節でも述べたように, ウォーカーの存在確率を決めるのは, 各格子点にあるウォーカーの内部状態である. そこで, 時刻 n, 位置 x における量子ウォーカーの状態を $\Psi_n(x) \in \mathbb{C}^2$ と書くことにする. 状態 Ψ_n は以下のヒルベルト空間に属しているものとする.

$$\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2) = \left\{ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \ : \ \sum_{x\in\mathbb{Z}} \|f(x)\|^2_{\mathbb{C}^2} < \infty \right\}.$$

ここで, $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^2}$ は $\mathbb{C}^2$ の標準ノルムである.

2.1　量子ウォークの定義と例

古典ランダムウォークの時間発展の式 (1) に対応するものを考える. 量子ウォークの時間発展を定義するに当たって重要な役割を果たすのが, 次の 2×2 のユニタリ行列 C である.

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(2).$$

このユニタリ行列は**コイン行列**とよばれている. コイン行列 C を $C = P + Q$ と分解する. ただし, $P, Q \in M_2(\mathbb{C})$ は以下の行列で与えられる.

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}.$$

ウォーカーの内部状態が時間とともに刻々と変化していく様子は, ヒルベルト空間 $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^2)$ 上の時間発展作用素 U_C によって次のように記述される.

$$\Psi_{n+1}(x) \equiv (U_C\Psi_n)(x) = P\Psi_n(x+1) + Q\Psi_n(x-1) \qquad (\Psi_n \in \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^2),\ x \in \mathbb{Z}). \quad (2)$$

上記の時間発展の式 (2) から, 行列 P, Q は, 古典ランダムウォークの実数 p, q に対応しているものと考えることができる. また, コイン行列の以下の性質 (ユニタリ性) から時間発展作用素 U_C はユニタリ作用素になることがわかる.

$$P^*P + Q^*Q = PP^* + QQ^* = I, \qquad PQ^* = QP^* = O.$$

ここからは, 初期状態 φ (時刻 0 での状態) が原点だけに存在している場合を考える. ただし, 初期状態 φ は以下で与えられる集合 $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^2$ の元である.

$$\mathcal{S} = \left\{\varphi \in \mathbb{C}^2 \ :\ \|\varphi\|_{\mathbb{C}^2} = 1\right\}.$$

また, 関数 $\delta_x \otimes \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^2)$ を以下で定義する.

$$(\delta_x \otimes \varphi)(y) = \begin{cases} \varphi & (x = y) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}.$$

このとき, 時刻 $n \in \mathbb{Z}_{\geq}$, 位置 $x \in \mathbb{Z}$ における確率測度 $p_n(x;\varphi)$ は以下で与えられる. ここで, $\mathbb{Z}_{\geq} = \{0,1,2,\ldots\}$ とする.

$$p_n(x;\varphi) = \|U_C^n(\delta_0 \otimes \varphi)(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 \quad (\varphi \in \mathcal{S}).$$

量子ウォークの時間発展作用素の定義に現れるコイン行列 C は, 主に 2 つの重要な役割を担っている. 1 つ目は, コイン行列のユニタリ性から確率が以下のように保存されることである.

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}} p_n(x;\varphi) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \|U_C^n(\delta_0 \otimes \varphi)(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 = \|\varphi\|_{\mathbb{C}^2}^2 = 1.$$

2 つ目の役割は, コイン行列の情報を用いて, ウォーカの状態を変えることにある. 例えば, コイン行列 C は**波の透過と反射**に関する情報を与えているものと解釈できる. すなわち, η_1 を左波, η_2 を右波と思うことにする. ただし, $\{\eta_1,\eta_2\}$ を $\mathbb{C}^2$ の標準基底とする.

$$\underbrace{|L\rangle}_{\text{左向きの波}} := \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underbrace{|R\rangle}_{\text{右向きの波}} := \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

それぞれの基底に, コイン行列 C を施すことで以下の式を得る.

$$\begin{cases} C\,|L\rangle = C\,\eta_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = a\,|L\rangle + c\,|R\rangle\,, \\ C\,|R\rangle = C\,\eta_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = b\,|L\rangle + d\,|R\rangle\,. \end{cases}$$

これより, a は左波が透過する係数を与え, c は左波が反射し右波になる係数を与えている. 同様に, b は右波が反射し左波になる係数を与え, d は右波が透過する係数を与えていることが見てとれる (図 2, 3 を参照).

まず, 簡単なコイン行列から定義される量子ウォークのダイナミクスを見ていくことにする.

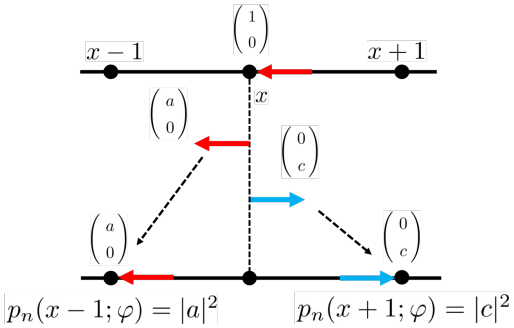


図 2: 左波のダイナミクス

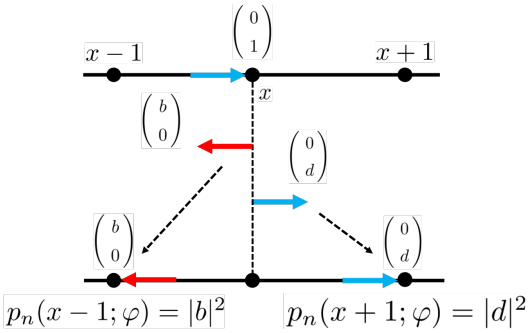


図 3: 右波のダイナミクス

例 1 (自由量子ウォーク)**.** 次のコイン行列で与えられる量子ウォークは, 自由量子ウォークとよばれている.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

自由量子ウォークは, 波が完全透過するモデルになっている. すなわち, 左波は必ず透過し左波のまま左の方向に進み, 右波も必ず透過し右波のまま右方向に進む (図 4を参照). $PQ = QP = O$ より, $U_C^n(\delta_0 \otimes \varphi) = \delta_{-n} \otimes P^n\varphi + \delta_n \otimes Q^n\varphi$ が成り立っている. また, 以下に注意する.

$$P^n\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q^n\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

これより, 時刻 $n \in \mathbb{Z}_{\geq}$ での確率分布は以下のようになる.

$$p_n(x;\varphi) = \begin{cases} |\varphi_2|^2 & x = n, \\ |\varphi_1|^2 & x = -n, \\ 0 & x \neq \pm n. \end{cases}$$

例 2 (停留量子ウォーク)**.** 次のコイン行列で与えられる量子ウォークは, 停留量子ウォークとよばれている.

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

停留量子ウォークは, 波が完全反射するモデルになっている. すなわち, 左波は必ず反射し右波になり, 右波も必ず反射し左波になる (図 5を参照). まず, 以下の関係式が成り立っている.

$$P^2 = Q^2 = O, \quad PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad QP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

これより, 以下を得る.

$$U_C^2(\delta_0 \otimes \varphi) = \delta_0 \otimes PQ\varphi + \delta_0 \otimes QP\varphi = \delta_0 \otimes \varphi.$$

従って, 時刻 $n \in \mathbb{Z}_{\geq}$ での確率分布は以下のようになる.

$$p_{2n}(x;\varphi) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}, \quad p_{2n+1}(x;\varphi) = \begin{cases} |\varphi_1|^2 & x = 1 \\ |\varphi_2|^2 & x = -1 \\ 0 & x \neq \pm 1 \end{cases}.$$

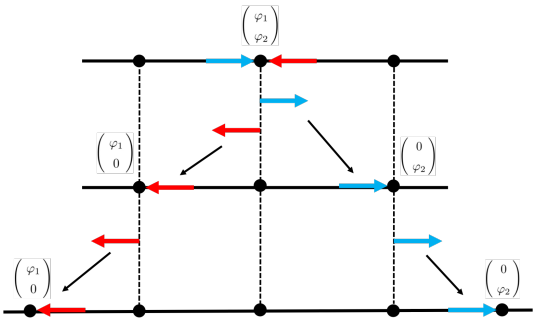


図 4: 自由量子ウォークのダイナミクス

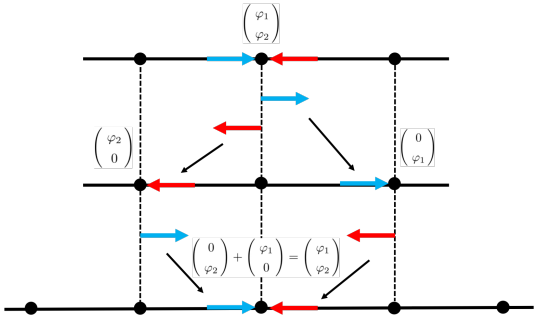


図 5: 停留量子ウォークのダイナミクス

2.2 $\mathbb{Z}$ 上の空間一様な量子ウォークの弱収束極限定理

本節では, $\mathbb{Z}$ 上の空間一様な量子ウォークの弱収束極限定理を紹介する. 古典ランダムウォークの量子版として導入された量子ウォークは, ランダムウォークとは異なった振る舞いを見せることで知られている [15, 16]. 例えば, ランダムウォークの確率測度が二項分布で表され, 出発点の確率が高い巣峰型であるのに対して, 量子ウォークの確率測度は, 出発点の確率が最も低く, 端点に近い場所の確率が高い逆釣鐘型となっている. 量子ウォークの研究における最も基本的かつ重要な問題は, 確率測度の時間無限大での極限分布を導出することにある.

$|a| = 0, 1$ の場合は, 例 1 と例 2 で見た. ここからは, $0 < |a| < 1$ を満たすコイン行列から定義される量子ウォークの振る舞いを見ていくことにする. 以下の定理は, 横浜国立大学の今野紀雄氏によって示された極限定理である. 極限定理に現れる密度関数 $f_K(\xi; a)$ は, $\mathbb{Z}$ 上の多状態モデルの極限の密度関数にも現れ, 中心極限定理のガウス分布に対応するものである.

定理 1 (弱収束極限定理 [15, 16])**.** $0 < |a| < 1$ と仮定する. 任意の初期状態 $\varphi = {}^T[\,\varphi_1, \varphi_2\,] \in \mathcal{S}$ に対して, 以下を得る.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\xi_1 \le \frac{x}{n} \le \xi_2} p_n(x;\varphi) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f_K(\xi;a)\left\{1 - \left(|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2 + \frac{2\mathfrak{Re}(a\bar{b}\varphi_1\overline{\varphi_2})}{|a|^2}\right)\xi\right\} d\xi.$$

ただし, 密度関数 $f_K(\xi; a)$ は次で与えられる関数である.

$$f_K(\xi;a) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-|a|^2}}{\pi(1-\xi^2)(\sqrt{|a|^2-\xi^2})} & \xi \in (-a, a) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}.$$

古典の場合に対応する分散が n のオーダーで大きくなるのに対し, 量子ウォークの場合は n^2 のオーダーで大きくなっている. また, 弱収束極限定理に現れる関数がユニタリ行列 C と初期状態 φ の取り方に依存していることが分かる. 従って, 分布の対称性が保たれるような条件を導出することも基本的な興味としてある. $\mathcal{S}$ の部分集合 $\mathcal{S}_{sym}$ と $\mathcal{S}_\perp$ を導入する.

$$\mathcal{S}_{sym} = \left\{\varphi \in \mathcal{S} : \text{任意の } n \in \mathbb{N} \text{ と } x \in \mathbb{Z} \text{ に対して, } p_n(x;\varphi) = p_n(-x;\varphi)\right\},$$

$$\mathcal{S}_\perp = \left\{\varphi = \begin{bmatrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{bmatrix} \in \mathcal{S} : |\varphi_1| = |\varphi_2| = \frac{1}{\sqrt{2}},\ a\varphi_1\overline{b\varphi_2} + \overline{a\varphi_1}b\varphi_2 = 0\right\}.$$

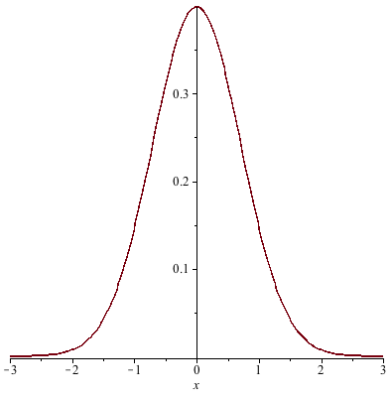


図 6: ランダムウォークの極限分布

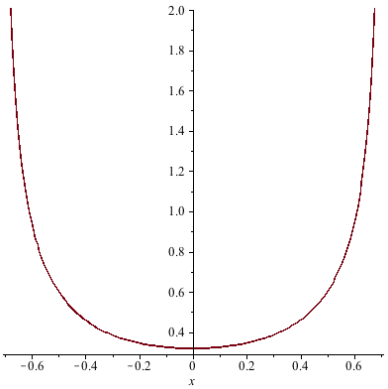


図 7: 量子ウォークの極限分布

定理 2 (分布の対称性 [16])**.** $0 < |a| < 1$ とする. 式 (2) で定義される量子ウォークが対称な分布をもつためには以下が成り立てば良い.

$$\mathcal{S}_{sym} = \mathcal{S}_{\perp}.$$

本稿では扱わないが, 空間非一様な量子ウォークの研究もされており, 最近では, スペクトル · 散乱理論の観点からも研究が盛んに行われている [25, 26, 30].

3 量子ウォークの定常性

ここからは, d $(d \geq 1)$ 次元整数格子上の内部自由度 $2d$ の量子ウォークを扱う. 本節では, 振幅を $\ell^2(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^{2d})$ 上の関数としての枠組みで考えるのではなく, 一般の関数空間 $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^{2d})$ で振幅を捉えることに注意する. ただし, $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^{2d})$ は以下で与える.

$$\mathrm{Map}(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^{2d}) = \left\{ f : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{C}^{2d} \right\}.$$

従って, 一般的には確率測度にならないものも考察することになる. すなわち, ℓ^∞ クラスのものなども我々の研究対象となる. 典型的な例である一様測度は, ℓ^2 空間には入らないが, ℓ^∞ 空間には属する. そこで, 測度の記号を $p_n(x;\varphi)$ ではなく, μ_n と表記することにする.

時刻 $n \in \mathbb{Z}_{\geq}$, 位置 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^d$ の振幅 $\Psi_n(\boldsymbol{x})$ $(\Psi_n \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^{2d}))$ は $2d$ 次元の複素ベクトルとなるので, 以下のように表現する.

$$\Psi_n(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \Psi_n^1(\boldsymbol{x}) \\ \Psi_n^2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \Psi_n^{2d}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2d}. \tag{3}$$

$\mathbb{R}_{\geq} = [0, \infty)$ とする. このとき, 量子ウォークの測度 $\mu_n : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq}$ は振幅 Ψ_n の情報を用いて, 以下で与えられる.

$$\mu_n(\boldsymbol{x}) = \|\Psi_n(\boldsymbol{x})\|^2_{\mathbb{C}^{2d}}.$$

ただし, $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^{2d}}$ は $\mathbb{C}^{2d}$ の標準ノルムである. また, 量子ウォークの時間発展作用素 U_C から誘導される測度全体の集合を $\mathcal{M}(U_C)$ と表記する. このとき, 振幅から測度の関係を次の写像 ϕ

を用いて考察する.

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathrm{Map}(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^{2d}) \setminus \{\mathbf{0}\} & \longrightarrow & \mathcal{M}(U_C) \\ \cup & & \cup \\ \Psi & \longmapsto & \mu \end{array}$$

を次で与える.

$$\phi(\Psi)(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{2d} \|\Psi^j(\boldsymbol{x})\|_{\mathbb{C}}^2 = \mu(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^d).$$

ただし, $\mathbf{0}$ は零関数のこととする. これより, $\mu := \phi(\Psi) \in \mathcal{M}(U_C)$ であることに注意する.

3.1 定常測度の定義と例

量子ウォークの性質を調べるに当たって, 量子ウォークの時間発展作用素 (ユニタリ作用素) から誘導される測度列 $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq}}$ の性質を調べることは非常に重要である. 本節では, 量子ウォークの定常性に焦点を当てる. この性質を満たす測度は, **定常測度**とよばれており, 時間に関して不変な測度である. すなわち,

$$\mu_0 = \mu_1 = \cdots = \mu_n = \cdots \qquad (n \in \mathbb{Z}_{\geq}).$$

いい換えると, 定常測度は時刻 $n \in \mathbb{Z}_{\geq}$ に依存しない $\mathbb{Z}^d$ 上の非負実数値関数のことである. 定常測度全体の集合 $\mathcal{M}_s(U_C)$ を以下のようにおく.

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}_s(U_C) \\ &= \Big\{ \mu \in \mathcal{M}(U_C) \ : \ \text{任意の } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ に対して,} \\ &\qquad \phi\big(U_C^n \Psi_0\big) = \mu \text{ を満たす} \Psi_0 \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^{2d}) \text{ が存在する} \Big\}. \end{aligned}$$

一般的に, 空間一様な正則グラフ上の量子ウォークにおいて一様測度が存在することが知られている [17]. 従って, $\mathcal{M}_s(U_C) \neq \emptyset$ が成り立つ. 本稿で紹介する結果は, 以下の量子ウォークの固有値問題

$$U_C \Psi = \lambda \Psi \quad (\lambda \in S^1, \ \Psi \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^{2d})) \tag{4}$$

を満たす一般化固有関数をみつけることで定常測度が構成されている. ただし, $S^1 \subset \mathbb{C}$ を複素単位円とする. すなわち,

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1 \}.$$

固有値問題 (4) を考える理由は, 以下が成り立つからである.

$$\mu_n(\boldsymbol{x}) = \phi(\Psi_n)(\boldsymbol{x}) = \phi(U_C^n \Psi_0)(\boldsymbol{x}) = \phi(\lambda^n \Psi_0)(\boldsymbol{x}) = \phi(\Psi_0)(\boldsymbol{x}) = \mu_0(\boldsymbol{x}).$$

すなわち, $\phi(\Psi_0) \in \mathcal{M}_s(U_C)$ となる.

一般的に, 2 つの違うコイン行列をとってくれば, 定常測度の集合も異なる. 例えば, 次の 2 種類 (単位行列, アダマール行列) のコイン行列から誘導される空間一様な量子ウォーク U_{C_1} と U_H を考えることにする.

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

このとき, 以下が成り立つことが知られている [20].

$$\mathcal{M}_s(U_{C_1}) = \mathcal{M}_{unif}(U_{C_1}), \quad \mathcal{M}_s(U_H) \supsetneq \mathcal{M}_{unif}(U_H).$$

ただし, $\mathcal{M}_{unif}(U_C)$ は一様測度全体の集合とする. すなわち,

$$\mathcal{M}_{unif}(U_C) = \Big\{ \mu_c \in \mathcal{M}(U_C) \ : \ \mu_c(x) = c \ (x \in \mathbb{Z}) \\ \text{を満たす } c > 0 \text{ が存在する} \Big\}.$$

一様測度は, 空間的に周期が 1 とみなせる. より一般に, 以下の集合を定義する.

$$\mathcal{M}^{(m)}_{s,period}(U_C) = \{\mu \in \mathcal{M}_s(U_C) \ : \ \mu(x+m) = \mu(x) \ (x \in \mathbb{Z})\}.$$

以下に, 注意する.

$$\mathcal{M}_{unif}(U_C) = \mathcal{M}^{(1)}_{s,period}(U_C) \subset \mathcal{M}_{s,period}(U_C) \subset \mathcal{M}_s(U_C),$$

ただし, $\mathcal{M}_{s,period}(U_C)$ は以下で与えられる.

$$\mathcal{M}_{s,period}(U_C) = \bigcup_{m \geq 1} \mathcal{M}^{(m)}_{s,period}(U_C).$$

3.2 アダマールウォークの固有値問題から誘導される定常測度

量子ウォークの固有値問題から誘導される定常測度の集合 $\widetilde{\mathcal{M}_s(U_C)}$ を決定することが目標である.

$$\widetilde{\mathcal{M}_s(U_C)} = \bigcup_{\lambda \in S^1} \mathcal{M}^{(\lambda)}_s(U_C).$$

ただし, $\mathcal{M}_s(U_C)$ の部分集合 $\mathcal{M}^{(\lambda)}_s(U_C)$ を以下で与える. 各 $\lambda \in S^1$ に対して,

$$\mathcal{M}^{(\lambda)}_s(U_C) = \{\mu \in \mathcal{M}_s(U_C) \ : \ \mu = \phi(\Psi) \ s.t. \ U_C\Psi = \lambda\Psi\}.$$

ここでは, 一般化固有関数を求めることで定常測度を構成していることに注意する.

1 次元格子上のアダマールウォークの固有値問題から定まる定常測度は 3 種類のクラスに分類されることをみる [13]. すなわち, 1 つ目は多項式タイプの定常測度, 2 つ目は有界タイプの定常測度, 最後の 3 つ目は指数タイプの定常測度にそれぞれ分解される. さらに, 有界タイプの定常測度の中には, 空間的に周期性をもった測度が存在することを紹介する.

3.2.1 転送行列

量子ウォークの固有値問題から誘導される定常測度の集合 $\widetilde{\mathcal{M}_s(U_C)}$ を調べるに当たって, 転送行列が有効な道具であることを述べる. この転送行列は, $\mathbb{Z}$ 上の 2 状態の空間非一様な量子ウォークの定常測度を導出するために Kawai et al. [9] によって導入された手法である. 固有値問題 $U_C\Psi = \lambda\Psi$ は次と同値である.

$$\lambda \begin{bmatrix} \Psi^L(x) \\ \Psi^R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \ \Psi^L(x+1) + b \ \Psi^R(x+1) \\ c \ \Psi^L(x-1) + d \ \Psi^R(x-1) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

ただし, $a \neq 0$ とする. また, $\Psi^L(x)$ は, 式 (3) における $\Psi^1_n(\boldsymbol{x})$ に対応し, $\Psi^R(x)$ は $\Psi^2_n(\boldsymbol{x})$ に対応している. このとき, C のユニタリ性より, $d \neq 0$ が成り立つことに注意する. 式 (5) より, 以下の関係式を得る.

$$\begin{cases} \bullet \begin{bmatrix} \Psi^L(x) \\ \Psi^R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda^2 - bc}{\lambda a} & -\dfrac{bd}{\lambda a} \\ \dfrac{c}{\lambda} & \dfrac{d}{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^L(x-1) \\ \Psi^R(x-1) \end{bmatrix} \\ \bullet \begin{bmatrix} \Psi^L(x) \\ \Psi^R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{\lambda} & \dfrac{b}{\lambda} \\ -\dfrac{ac}{\lambda d} & \dfrac{\lambda^2 - bc}{\lambda d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^L(x+1) \\ \Psi^R(x+1) \end{bmatrix} \end{cases}.$$

ここで, $T_\lambda^+(C), T_\lambda^-(C)$ を次のようにおく.

$$T_\lambda^+(C) = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda^2 - bc}{\lambda a} & -\dfrac{bd}{\lambda a} \\ \dfrac{c}{\lambda} & \dfrac{d}{\lambda} \end{bmatrix}, \quad T_\lambda^-(C) = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{\lambda} & \dfrac{b}{\lambda} \\ -\dfrac{ac}{\lambda d} & \dfrac{\lambda^2 - bc}{\lambda d} \end{bmatrix}.$$

すると, 以下が成り立つ.

$$\begin{bmatrix} \Psi^L(x) \\ \Psi^R(x) \end{bmatrix} = T_\lambda^+(C) \begin{bmatrix} \Psi^L(x-1) \\ \Psi^R(x-1) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Psi^L(x) \\ \Psi^R(x) \end{bmatrix} = T_\lambda^-(C) \begin{bmatrix} \Psi^L(x+1) \\ \Psi^R(x+1) \end{bmatrix}.$$

これらの行列 $T_\lambda^+(C), T_\lambda^-(C)$ は**転送行列**とよばれている. 転送行列の間には, 次のような関係式が成り立つ.

$$T_\lambda^+(C)\, T_\lambda^-(C) = T_\lambda^-(C)\, T_\lambda^+(C) = I.$$

ただし, I は単位行列とする. 以上の議論は, 次のようにまとめられる.

定理 3 (転送行列と定常測度 [9])**.** 次のコイン行列 C で与えられる空間一様な量子ウォークを考える.

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

ただし, $a \neq 0$ とする. このとき, 固有値問題 $U_C\Psi = \lambda\Psi$ の解は, 転送行列を用いて次のように与えられる.

$$\Psi(x) = \begin{cases} (T_\lambda^+(C))^x \Psi(0) & (x \geq 1) \\ \Psi(0) & (x = 0) \\ (T_\lambda^-(C))^{|x|} \Psi(0) & (x \leq -1) \end{cases}.$$

これより, 定常測度は $\mu(x) = \phi(\Psi)(x)$ $(x \in \mathbb{Z})$ で与えられる. 例えば, $T_\lambda^\pm(C)$ がユニタリ行列になっているならば $\mu(x) = \phi(\Psi)(x)$ は一様測度になる.

例 3. アダマールウォークの転送行列は以下で与えられる.

$$T_\lambda^+(H) = \begin{bmatrix} \dfrac{2\lambda^2 - 1}{\sqrt{2}\lambda} & \dfrac{1}{\sqrt{2}\lambda} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\lambda} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}\lambda} \end{bmatrix}, \; T_\lambda^-(H) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}\lambda} & \dfrac{1}{\sqrt{2}\lambda} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\lambda} & -\dfrac{2\lambda^2 - 1}{\sqrt{2}\lambda} \end{bmatrix}.$$

3.3 各 $\widetilde{K_j}$ における定常測度

固有値問題の式 (5) から, アダマールウォークに関する以下の三項間漸化式が得られる.

$$\lambda\Psi^j(x+2) + \sqrt{2}\left(1 - \lambda^2\right)\Psi^j(x+1) - \lambda\Psi^j(x) = 0 \qquad (j = L,\ R). \tag{6}$$

上記の式 (6) から, 次の特性方程式が定義できる.

$$x^2 - \sqrt{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)x - 1 = 0.$$

重要な点は, 定数項の係数の絶対値が 1 になっていることである. 特性方程式の解を Λ_+ と Λ_- とおく. すると, 以下の 3 つのタイプに分類されることがわかる.

- タイプ 1 : $|\Lambda_+| = |\Lambda_-|, \Lambda_+ = \Lambda_-$
- タイプ 2 : $|\Lambda_+| = |\Lambda_-|, \Lambda_+ \neq \Lambda_-$.
- タイプ 3 : $|\Lambda_+| > 1 > |\Lambda_-| > 0$ or $|\Lambda_-| > 1 > |\Lambda_+| > 0$.

1 次元アダマールウォークの固有値問題から誘導される定常測度に関する結果を紹介するために, $K = [0, 2\pi)$ の部分集合 K_1, K_2 と K_3 を用意する.

$$K_1 = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}, \qquad K_2 = [0, \pi/4) \cup (3\pi/4, 5\pi/4) \cup (7\pi/4, 2\pi),$$

$$K_3 = K \setminus (K_1 \cup K_2).$$

さらに, 複素単位円 S^1 の部分集合 $\widetilde{K_j} \subset S^1$ を以下のように定義する.

$$\widetilde{K_j} = \{e^{i\theta} : \theta \in K_j\}, \qquad (j = 1, 2, 3).$$

注意 1. 固有値問題 $U_H \Psi = e^{i\theta}\Psi$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ を満たす $\theta \in K$ に対して, 以下が成り立つ.

$$T_\lambda^+(H),\ T_\lambda^-(H) \in U(2) \Longleftrightarrow \theta = 0,\ \pi.$$

これより, $\lambda = \pm 1$ のとき, $U_H\Psi = \pm\Psi$ を満たす関数 $\Psi \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ に誘導される定常測度は, 原点におく初期情報 $\Psi(0)$ に依存せず一様測度になる. すなわち, 以下を得る.

$$\phi(\Psi) \in \mathcal{M}_{unif}(U_H).$$

上記のそれぞれのタイプから, 以下の 3 種類の定常測度が登場する. 1 つ目は, 2 次多項式タイプの定常測度で, その集合は以下で与えられる.

$$\mathcal{M}_{s,qp}(U_C) = \left\{ \mu \in \mathcal{M}_s(U_C) \ :\ 0 < \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\mu(x)}{|x|^2} < +\infty \right\}.$$

2 つ目は, 有界タイプの定常測度で, その集合は以下で与えられる.

$$\mathcal{M}_{s,bdd}(U_C) = \{\mu \in \mathcal{M}_s(U_C) \ :\ \exists C > 0 \ s.t.\ \mu(x) \leq C \ (x \in \mathbb{Z})\}.$$

最後の 3 つ目は, 指数タイプの定常測度で, その集合は以下で与えられる.

$$\mathcal{M}_{s,exp}(U_C) = \Big\{ \mu \in \mathcal{M}_s(U_C) \ :\ \exists\, c_+,\ c_- > 0\ (c_+, c_- \neq 1)\ s.t. \\ 0 < \lim_{x \to +\infty} \frac{\mu(x)}{c_+^x} < +\infty, \quad 0 < \lim_{x \to -\infty} \frac{\mu(x)}{c_-^x} < +\infty \Big\}.$$

3.3.1 多項式タイプの定常測度

複素単位円 S^1 上の部分集合 $\widetilde{K_1}$ では, 2 次多項式タイプの定常測度になることをみる. さらに, $\Psi(0)$ の取り方によっては一様測度が現れることを紹介する. 原点に設定する初期情報 $\Psi(0)$ $(\Psi \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2) \setminus \{\mathbf{0}\})$ を以下のように記述する.

$$\Psi(0) = \begin{bmatrix} \Psi^L(0) \\ \Psi^R(0) \end{bmatrix} = \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C})\,.$$

命題 1 (2 次多項式タイプの定常測度 [13])**.** $\lambda \in S^1$ を $U_H\Psi = \lambda\Psi$ を満たすものとし, $\lambda = e^{i\theta}$ $(\theta \in K)$ とおく. このとき, 以下の主張を得る.

(1) 特性方程式の解が重解 $\Lambda_+ = \Lambda_-$ となる $\lambda \in S^1$ は, 以下で与えられる.

$$\lambda_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad \lambda_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \qquad \lambda_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}, \qquad \lambda_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

(2) (*a*) $\theta = \pi/4,\ 5\pi/4 \in K_1$ に対して, 固有値問題 $U_H\Psi = e^{i\theta}\Psi$ を満たす関数 $\Psi \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ に誘導される定常測度は以下のようになる.

$$\begin{cases} \phi(\Psi) \in \mathcal{M}_{s,qp}(U_H) & \cdots\cdots\ |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 \neq 2\,\mathrm{Im}(\varphi_1\overline{\varphi_2}) \text{ のとき}, \\ \phi(\Psi) \in \mathcal{M}_{unif}(U_H) & \cdots\cdots\ |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 = 2\,\mathrm{Im}(\varphi_1\overline{\varphi_2}) \text{ のとき}. \end{cases}$$

(*b*) $\theta = 3\pi/4,\ 7\pi/4 \in K_1$ に対して, 固有値問題 $U_H\Psi = e^{i\theta}\Psi$ を満たす関数 $\Psi \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ に誘導される定常測度は以下のようになる

$$\begin{cases} \phi(\Psi) \in \mathcal{M}_{s,qp}(U_H) & \cdots\cdots\ |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 \neq -2\,\mathrm{Im}(\varphi_1\overline{\varphi_2}) \text{ のとき}, \\ \phi(\Psi) \in \mathcal{M}_{unif}(U_H) & \cdots\cdots\ |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 = -2\,\mathrm{Im}(\varphi_1\overline{\varphi_2}) \text{ のとき}. \end{cases}$$

転送行列を用いると, 次のように表現できることに注意する.

$$\phi(\Psi)(x) = \begin{cases} \|(T_\lambda^+(H))^x\varphi\|_{\mathbb{C}^2}^2 & (x \geq 1) \\ \|\varphi\|_{\mathbb{C}^2}^2 & (x = 0) \\ \|(T_\lambda^-(H))^{|x|}\varphi\|_{\mathbb{C}^2}^2 & (x \leq -1) \end{cases}.$$

このとき, 命題 1 に現れた以下の条件を詳しく調べる.

$$|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 = 2\,\mathrm{Im}(\varphi_1\overline{\varphi_2}), \qquad |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 = -2\,\mathrm{Im}(\varphi_1\overline{\varphi_2}).$$

系 1 (一様測度になるための条件 [13])**.** 各 $\theta \in K_1$ に対して, $\phi(\Psi)$ が一様測度になるための必要十分条件が得られる.

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4}$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\phi(\Psi) \in \mathcal{M}_{unif}(U_H) \Longleftrightarrow \varphi \in S_{unif}^{(1)}.$$

(2) $\theta = \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\phi(\Psi) \in \mathcal{M}_{unif}(U_H) \Longleftrightarrow \varphi \in S_{unif}^{(2)},$$

ただし, $k = 1, 2$ に対して $S_{unif}^{(k)}$ を以下のように与える.

$$S_{unif}^{(k)} = \left\{ \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 : |\varphi_1| = |\varphi_2|, \arg(\varphi_1) - \arg(\varphi_2) = \frac{(2k-1)\pi}{2} + 2n\pi\ (n \in \mathbb{Z}) \right\}.$$

3.3.2 有界タイプの定常測度

複素単位円 S^1 上の部分集合 $\widetilde{K_2}$ では, 有界タイプの定常測度になることをみる. さらに, 有界タイプの定常測度の中には空間的に周期性をもった測度が存在することを紹介する.

命題 2 (有界タイプの定常測度 [13])**.** $\theta \in K_2$ に対して, 以下を得る.

(1) $|\Lambda_+| = |\Lambda_-| \quad (\Lambda_+ \neq \Lambda_-)$.

(2) $|\varphi_1|, |\varphi_2| < \infty$ と仮定する. このとき, 固有値問題 $U_H\Psi = e^{i\theta}\Psi$ を満たす関数 $\Psi \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ に誘導される定常測度は有界性をもった定常測度となる. すなわち, 以下を得る.

$$\phi(\Psi) \in \mathcal{M}_{s,bdd}(U_H).$$

命題 2 の (1) より, 以下が成り立つ.

$$|\Lambda_+| = |\Lambda_-| = 1 \ (\theta \in K_2).$$

従って, 以下を満たす $\xi_j \in (0, 2\pi)$ が存在する.

$$\Lambda_+ \cdot \overline{\Lambda_-} = \begin{cases} e^{i\xi_1} & \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4} < \theta \leq \pi\right) \\ e^{i\xi_2} & \left(\pi \leq \theta < \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4} < \theta < 2\pi\right) \end{cases}.$$

ただし, ξ_1 と ξ_2 は以下で与えられる.

$$\cos\xi_1 = 1 - 2\cos 2\theta, \qquad \sin\xi_1 = -2\sqrt{2\cos 2\theta}\sin\theta, \qquad e^{i\xi_2} = e^{-i\xi_1}.$$

各 $\mu \in \bigcup_{\lambda \in \widetilde{K_2}} \mathcal{M}_s^{(\lambda)}(U_H)$ に対して, $\mu(x)$ は次のような形をしている.

$$\mu(x) = \begin{cases} \left|\frac{1}{\Lambda_+ - \Lambda_-}\right|^2 \left(W_1(\varphi_1, \varphi_2, \theta) - 2\,\mathrm{Re}\left((\Lambda_+ \cdot \overline{\Lambda_-})^x W_2(\varphi_1, \varphi_2, \theta)\right)\right) & x \geq 1, \\ |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 & x = 0, \\ \left|\frac{1}{\Lambda_+ - \Lambda_-}\right|^2 \left(W_3(\varphi_1, \varphi_2, \theta) - 2\,\mathrm{Re}\left((\Lambda_+ \cdot \overline{\Lambda_-})^x W_4(\varphi_1, \varphi_2, \theta)\right)\right) & x \leq -1. \end{cases}$$

$W_i(\varphi_1, \varphi_2, \theta)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ は, 初期情報 φ と $\theta \in K$ のみに依存している関数である. 具体的な形は, [13] を参照されたい. また, 以下に注意する.

$$\left|\frac{1}{\Lambda_+ - \Lambda_-}\right|^2 = \frac{1}{4\cos 2\theta} \qquad (\theta \in K_2).$$

注意 2. $\theta \in K_2$ として, $\theta = 0$ もしくは π を取ってくる. このとき, 次が成り立つ.

$$W_2(\varphi_1, \varphi_2, \theta) = 0, \qquad W_4(\varphi_1, \varphi_2, \theta) = 0 \qquad \left(\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2\right).$$

注意 3. $W_2(\varphi_1, \varphi_2, \theta) = 0$ と仮定する. このとき, 以下を得る.

$$W_1(\varphi_1, \varphi_2, \theta) = 4\cos 2\theta(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) \neq 0.$$

$W_4(\varphi_1, \varphi_2, \theta) = 0$ と仮定する. このとき, 以下を得る.

$$W_3(\varphi_1, \varphi_2, \theta) = 4\cos 2\theta(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) \neq 0.$$

次を満たす $m_{min} \in \mathbb{N}$ を定常測度 μ の周期とよぶことにする.

$$m_{min} = \min_m\{m \in \mathbb{N} : \mu(x + m) = \mu(x) \ (x \in \mathbb{Z})\}.$$

定理 4 (定常測度の周期性 [13])**.** $\theta \in K_2$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

(1) $W_2(\varphi_1, \varphi_2, \theta) = 0$ かつ $W_4(\varphi_1, \varphi_2, \theta) = 0$ であると仮定する. このとき, 以下を得る.

$$\mu \in \mathcal{M}^{(1)}_{s,period}(U_H) = \mathcal{M}_{unif}(U_H).$$

(2) $W_2(\varphi_1, \varphi_2, \theta) \neq 0$ かつ $W_4(\varphi_1, \varphi_2, \theta) \neq 0$ であると仮定する. $\mu \in \bigcup_{\lambda \in \widetilde{K_2}} \mathcal{M}^{(\lambda)}_s(U_H)$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\mu\text{が空間的に周期性をもつ} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2n\pi}{\xi_1} \in \mathbb{N} & \left(0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4} < \theta \leq \pi\right) \\ \dfrac{2n\pi}{\xi_2} \in \mathbb{N} & \left(\pi \leq \theta < \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4} < \theta < 2\pi\right) \end{cases}.$$

ただし, $n \in \mathbb{N}$.

従って, 定常測度 μ の周期は以下で定まる.

$$m_{min} = \min_m \left\{ m \in \mathbb{N} : m = \frac{2n\pi}{\xi_j}\ (n \in \mathbb{N}) \right\}.$$

例 4. $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のケースを考える.

$$\Lambda_+ = e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad \Lambda_- = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \qquad \Lambda_+ \cdot \overline{\Lambda_-} = e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

このとき, 以下を得る.

$$m_{min} = \min_m \left\{ m \in \mathbb{N} \ :\ m = 2n\pi \times \frac{2}{3\pi}\ (n \in \mathbb{N}) \right\} = 4.$$

すなわち, $U_H\Psi = e^{i\frac{\pi}{6}}\Psi$ から誘導される定常測度は周期 4 をもつ.

$$\phi(\Psi) \in \mathcal{M}^{(4)}_{s,period}(U_H).$$

3.3.3 指数タイプの定常測度と主結果

複素単位円 S^1 上の部分集合 $\widetilde{K_3}$ では, 指数タイプの定常測度になることをみる. そして, これらの命題 1, 2 と 3 を利用すると, 目標であった $\widetilde{\mathcal{M}_s(U_C)}$ が 3 つに分解できることが示される.

命題 3 (指数タイプの定常測度 [13])**.** $\theta \in K_3$ とする.

(1) $\theta \in K_3$ に対して, 以下を得る.

$$\begin{cases} |\Lambda_+| > 1 > |\Lambda_-| > 0 & \left(\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5\pi}{4} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}\right), \\ |\Lambda_-| > 1 > |\Lambda_+| > 0 & \left(\dfrac{\pi}{2} \leq \theta < \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{2} \leq \theta < \dfrac{7\pi}{4}\right). \end{cases}$$

(2) 固有値問題 $U_H\Psi = e^{i\theta}\Psi$ を満たす関数 $\Psi \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ に誘導される定常測度は指数タイプの定常測度となる. すなわち, 以下を得る.

$$\phi(\Psi) \in \mathcal{M}_{s,exp}(U_H).$$

命題 1, 2, 3 から以下を得る.

定理 5 (アダマールウォークの 3 種類の定常測度 [13])**.** $\mathbb{Z}$ 上のアダマールウォークの固有値問題から得られる定常測度を考える. このとき, 以下を得る.

$$\widetilde{\mathcal{M}_s(U_H)} = \widetilde{\mathcal{M}_{s,qp}(U_H)} \cup \widetilde{\mathcal{M}_{s,bdd}(U_H)} \cup \widetilde{\mathcal{M}_{s,exp}(U_H)}.$$

ただし,

$$\widetilde{\mathcal{M}_{s,j}(U_H)} = \mathcal{M}_{s,j}(U_H) \cap \widetilde{\mathcal{M}_s(U_H)} \qquad (j = qp, bdd, exp).$$

注意 4. 本稿では, 空間一様な 1 次元 2 状態の量子ウォークの定常測度に関する議論を行なった. 他のモデルに対しても研究されている. 例えば, 空間非一様なモデルでは [*9*, *19*], レイジーモデルは [*8*] を参照されたい.

3.4 高次元格子上の定常測度

本節では, 量子ウォークの特徴的な現象の一つである局在化に着目し, 定常確率測度を構成する. 例えば, 標準モデルのグローバーウォークやレイジー · グローバーウォークは局在化が起こる典型的な例である. ここで, $\mathbb{Z}^d$ 上の標準モデルの量子ウォークとレイジーモデルの量子ウォークは以下のモデルのことである. $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_d\}$ を $\mathbb{Z}^d$ の標準基底, $\{\eta_1, \ldots, \eta_D\}$ を $\mathbb{C}^D$ の標準基底とし, P_i を 1 次元部分空間 $\mathbb{C}\eta_i$ への直交射影とする.

標準モデルの量子ウォーク : 内部自由度を $D = 2d$ とする. このとき, 以下の時間発展作用素 U_C で与えられる空間一様な量子ウォークを**標準モデル**とよぶことにする.

$$(U_C f)(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{d} \Big(P_{2i-1} C f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i) + P_{2i} C f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i) \Big).$$

すなわち, 標準モデルの量子ウォークとは, ウォーカーが $2d$ 個の隣接点に移動するモデルである.

レイジーモデルの量子ウォーク : 内部自由度を $D = 2d + 1$ とする. このとき, 以下の時間発展作用素 U_C で与えられる空間一様な量子ウォークを**レイジーモデル**とよぶことにする.

$$(U_C f)(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{d} \Big(P_i C f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i) + P_{(i+1)+d} C f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e}_i) \Big) + P_{d+1} C f(\boldsymbol{x}).$$

すなわち, 標準モデルに留まる項を付けたものである. ここでは, 標準モデルのグローバーウォークから得られる結果のみを紹介する.

3.4.1 フーリエ変換

関数 f を $f : [-\pi, \pi)^d \longrightarrow \mathbb{C}^{2d}$ とし, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \cdots, k_d) \in [-\pi, \pi)^d$ とする. このとき, 関数 f の Fourier 変換は以下で与えられる.

$$(\mathcal{F} f)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi)^d} e^{i\langle \boldsymbol{x}, \mathbf{k} \rangle} f(\mathbf{k})\, d\mathbf{k} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^d).$$

ただし, $\langle \boldsymbol{x}, \mathbf{k} \rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の標準内積である. また, その逆変換 $\mathcal{F}^*$ は

$$\hat{g}(\mathbf{k}) \equiv (\mathcal{F}^* g)(\mathbf{k}) = \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^d} e^{-i\langle \boldsymbol{x}, \mathbf{k} \rangle}\, g(\boldsymbol{x}) \quad \Big(g \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^{2d}),\ \mathbf{k} \in [-\pi, \pi)^d \Big)$$

となる. この設定のもとで, 振幅 Ψ_n を Fourier 逆変換したものを $\hat{\Psi}_n(\mathbf{k})$ とおく. このとき, 以下の関係式が導かれる.

$$\hat{\Psi}_{n+1}(\mathbf{k}) = \hat{U}_C(\mathbf{k})\hat{\Psi}_n(\mathbf{k}).$$

ただし, $D \times D$ の行列 $\hat{U}_C(\mathbf{k})$ は以下で与えられるユニタリ行列である.

$$\hat{U}_C(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^{d} \Big(e^{ik_j} P_{2j-1} C + e^{-ik_j} P_{2j} C \Big).$$

3.4.2 局在化と定常確率測度

本節では, 次の D 次のコイン行列 $C = G_D$ で与えられるグローバーウォークが主役になる.

$$G_D = \frac{2}{D} J - I. \tag{7}$$

ただし, D 次の行列 J はすべての成分が 1 の行列とする. ユニタリ行列 G_D で与えられる空間一様な量子ウォークは**グローバーウォーク**とよばれている. $\mathbb{Z}$ 上のレイジーモデルのグローバーウォークや $\mathbb{Z}^2$ 上の標準モデルのグローバーウォークは, 空間一様な 2 状態の量子ウォークでは現れなかった**局在化**が起こる [6, 7]. ここで, 点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^d$ で初期状態 φ において, 量子ウォークに局在化が起こるとは，以下で定義される.

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(\boldsymbol{x}) > 0.$$

量子ウォークの局在化は時間発展作用素の固有値の存在と密接にかかわっている. 例えば, Tate [33] によって以下の定理が示されている.

定理 6 (局在化と固有値の関係 [33])**.** U を $\ell^2(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^D)$ 上の周期的ユニタリ推移作用素とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) U が固有値 ω をもつことと, $\hat{U}(z)$ が任意の $z \in T^d$ に対して固有値 ω をもつことは同値である.

(2) U が点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^d$ において, 初期状態 φ で局在化をもつことと, $spec(U)_p \neq \emptyset$ は同値である.

周期的ユニタリ推移作用素等の定義は [33] を参照されたい. 定理 6 は, 周期的ユニタリ推移作用素 U が局在化をもつか否かの議論を行うのに役に立つ.

$\mathbb{Z}^d$ 上の標準モデルのグローバーウォークにおいて, $\hat{U}_{G_{2d}}(\mathbf{k})$ は波数 $\mathbf{k}$ に依存しない固有値として ± 1 をもつことが知られている [14]. 固有値 1 の固有関数を $\hat{\Psi}(\mathbf{k})$ とおく. このとき, $\hat{U}_{G_{2d}}(\mathbf{k})$ の固有値 1 の固有関数 $\hat{\Psi}(\mathbf{k})$ は以下のように具体的に記述できる.

補題 1. $X_j = e^{ik_j}$ とし, $\overline{X_j} = e^{-ik_j}$ とする. このとき, $\hat{\Psi}(\boldsymbol{k})$ 以下のように記述できる.[1]

$$\hat{\Psi}(\boldsymbol{k}) = \begin{bmatrix} (1+X_1)\prod_{l=2}^{d}(1+\overline{X_l})(1+X_l) \\ (1+\overline{X_1})\prod_{l=2}^{d}(1+\overline{X_l})(1+X_l) \\ \vdots \\ (1+X_j)\prod_{l\neq j}(1+\overline{X_l})(1+X_l) \\ (1+\overline{X_j})\prod_{l\neq j}(1+\overline{X_l})(1+X_l) \\ \vdots \\ (1+X_d)\prod_{l=1}^{d-1}(1+\overline{X_l})(1+X_l) \\ (1+\overline{X_d})\prod_{l=1}^{d-1}(1+\overline{X_l})(1+X_l) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

[1] 同様に, 固有値 -1 の固有関数も計算できる. また, $\mathbb{Z}^d$ 上のレイジーモデルのグローバーウォークにおいて, $\hat{U}_{G_{2d+1}}(\mathbf{k})$ は波数 $\mathbf{k}$ に依存しない固有値として 1 をもつ (固有値 -1 はもたない) ことがしられている [14].

各 $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{Z}^d$ に対して, $\mathbb{Z}^d$ の部分集合 $K_{\boldsymbol{u}}^d \subset \mathbb{Z}^d$ を以下で与える.[2]

$$K_{\boldsymbol{u}}^d = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - u_i)^2} \leq \sqrt{d} \right\}.$$

例 5 ($K_{\boldsymbol{0}}^2$)**.** $K_{\boldsymbol{0}}^2 = \Big\{(0,0),\ (\pm 1, \pm 1),\ (\pm 1, 0),\ (0, \pm 1)\Big\}$.

各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^d$ に対して, 式 (8) と Fourier 変換 $\mathcal{F}$ を用いて以下のように関数 $\Psi_s^{(\boldsymbol{0})}$ を定義する.

$$\Psi_s^{(\boldsymbol{0})}(\boldsymbol{x}) \equiv (\mathcal{F}\hat{\Psi})(\boldsymbol{x}).$$

ここで, $\boldsymbol{0} = (0, \ldots, 0)$ は $\mathbb{Z}^d$ の原点とする. さらに, 各 $\boldsymbol{c} \in K_{\boldsymbol{0}}^d$ に対して, $2d$ 次元複素ベクトル $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{c}}$ を

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{c}} \equiv \Psi_s^{(\boldsymbol{0})}(\boldsymbol{c})$$

で与える. また, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^d$ に対して, 関数 $\Psi_s^{(\boldsymbol{u})} : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{C}^{2d}$ を次で定義する.

$$\Psi_s^{(\boldsymbol{u})}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{c} \in K_{\boldsymbol{0}}^d} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{c}} \delta_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}). \tag{9}$$

式 (9) の意味は, ウォーカーが $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^d$ のまわりで重み (複素ベクトル) $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{c}}$ をもっている状況である. このとき, 関数 $\Psi_s^{(\boldsymbol{u})}$ の台 $\mathrm{supp}\left(\Psi_s^{(\boldsymbol{u})}\right)$ は $\mathbb{Z}^d$ の有限部分集合となる. すなわち,

$$\mathrm{supp}\left(\Psi_s^{(\boldsymbol{u})}\right) = K_{\boldsymbol{u}}^d.$$

例 6 ($d = 2$ における $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{c}}$)**.**

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} = &\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \delta_{(0,0)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \delta_{(0,1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_{(1,0)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_{(0,-1)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_{(-1,-1)} \\
&+ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_{(-1,0)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_{(1,1)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_{(1,-1)} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_{(-1,1)}.
\end{aligned}$$

このとき, $\mathbb{Z}^d$ 上の標準モデルのグローバーウォークの定常測度を与える振幅 $\Psi \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^{2d})$ は以下で求まる.

定理 7 (定常振幅 [12])**.** $\{\varphi_{\boldsymbol{u}}\}_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^d}$ を $\varphi \equiv \boldsymbol{0}$ でない任意の複素点列とする. ここで, $\varphi \equiv \boldsymbol{0}$ は $\varphi_{\boldsymbol{u}} = 0$ ($\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^d$) を意味する. 関数 $\Psi_s^{(\varphi)}(\boldsymbol{x})$ を次で定義する.

$$\Psi_s^{(\varphi)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^d} \varphi_{\boldsymbol{u}}\, \Psi_s^{(\boldsymbol{u})}(\boldsymbol{x}). \tag{10}$$

このとき, $\Psi_s^{(\varphi)}(\boldsymbol{x})$ は $U_{G_{2d}}$ の固有値 1 の固有関数となる. 従って, 系として

$$\phi(\Psi_s^{(\varphi)}) \in \mathcal{M}_s(U_{G_{2d}}).$$

を得る.

[2] ${}^{\#}K_{\boldsymbol{u}}^d = 3^d$ が成り立つ. ただし, ${}^{\#}X$ は集合 X の元の個数である.

また, レイジー · グローバーウォークの結果，および三角格子上のグローバーウォークの定常測度に関する結果も同様に得ることができる.

例 7 ($\mathbb{Z}^2$ 上の標準モデルのグローバーウォークの定常確率測度)**.** 簡単のため, 線形和として原点のみの和を考える. また, 式 (10) の $\varphi_{\boldsymbol{u}}$ として正規化定数 $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ をとってくる. このとき, 以下の測度 μ は定常確率測度になっている.

$$\begin{aligned}\mu(x_1,x_2) &= \|\Psi_s^{(\varphi)}(x_1,x_2)\|_{\mathbb{C}^4} \\ &= \Big(\frac{1}{3}\delta_{(0,0)} + \frac{1}{8}\big(\delta_{(0,1)} + \delta_{(0,-1)} + \delta_{(1,0)} + \delta_{(-1,0)}\big) \\ &\quad + \frac{1}{24}\big(\delta_{(1,-1)} + \delta_{(-1,1)} + \delta_{(1,1)} + \delta_{(-1,-1)}\big)\Big)(x_1,x_2).\end{aligned}$$

定理 7 内の $\varphi_{\boldsymbol{u}}$ として有界な関数をとってくれば，振幅 $\Psi_s^{(\varphi)}$ は ℓ^∞ 関数になる. また, 振幅の台を有限にすれば $\Psi_s^{(\varphi)}$ は ℓ^2 関数になる. 状況に応じて, 振幅が属する関数のクラスは変わる. この結果は, 1 次元アダマールウォークの定常測度で得た結果とは大きく異なる.

4 量子ウォークの局在性

前節では, 量子ウォーク特有の性質である局在化現象を利用して, 定常確率測度を構成した. 本節では, 前節で利用した局在化に関する結果を説明する. ここでは, ヒルベルト空間 $\ell^2(\mathbb{Z}^d,\mathbb{C}^D)$ 上の時間発展作用素を考える.

$$\ell^2(\mathbb{Z}^d,\mathbb{C}^D) = \left\{ f:\mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{C}^D \ :\ \|f\|^2 := \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^d} \|f(\boldsymbol{x})|_{\mathbb{C}^D}^2 < \infty \right\}.$$

量子ウォークの長時間挙動において, 通常の古典ランダムウォークでは見られない**局在化**とよばれる現象があり, 時間発展作用素 (ユニタリ作用素) の固有値の存在と密接に関わっている (前節 定理 6 を参照). この現象は, Mackay et al. [21] らによって正方格子上のグローバーウォークのシミュレーションで発見され, Inui et al. [6] らによって解明された. その後, 1 次元 3 状態のレイジー · グローバーウォー クにおいても局在化が起こることが報告されている. すなわち, 標準モデルの量子ウォークに留まる項を付け加えると局在化が起きることが発見された. さらに, 標準モデルの量子ウォークに欠陥 (不純物) を与えたケースにおいても局在化が引き起こされることが知られている.

本稿では, グローバータイプの量子ウォークの結果を紹介する. より詳しい内容は. Komatsu and Tate [14] を参照されたい.

式 (7) で与えられる行列 G_D は $(G_D)^2 = I$ を満たしてるのが特徴である. そこで, グローバーウォークを含む以下の量子ウォークに焦点を当てる. コイン行列 C をスカラー行列でない $D\times D$ のユニタリ行列とする.

- **グローバータイプ** : コイン行列 C が $C^2 = I$ を満たすとする. この C に付随する U_C で与えられる量子ウォークをグローバータイプとよぶことにする.

注意 5. $C^2 = I$ なので, 固有値として ±1 をもつ. 固有値 1 の固有空間を $\varepsilon(1)$ とおき, 固有値 -1 の固有空間を $\varepsilon(-1)$ とする.

各 $i\in\{1,2,\dots,d\}$ に対して, ヒルベルト空間 $\ell^2(\mathbb{Z}^d,\mathbb{C}^D)$ 上のシフト作用素 τ_i を以下で与える.

$$(\tau_i f)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_i) \quad (f\in\ell^2(\mathbb{Z}^d,\mathbb{C}^D),\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^d).$$

ただし, $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_d\}$ は $\mathbb{Z}^d$ の標準基底とする. さらに, $\alpha = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \boldsymbol{e}_i \in \mathbb{Z}^d$ に対して,

$$\tau^{\alpha} = \tau_1^{\alpha_1} \cdots \tau_d^{\alpha_d}$$

とする. このとき, コイン行列 C を用いて定義されるグローバータイプの時間発展作用素 $U_C : \ell^2(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^D) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}^d, \mathbb{C}^D)$ を考える.

$$U_C = \sum_{\alpha \in S} \tau^{\alpha} P_{\alpha} C, \tag{11}$$

ただし, $\{P_\alpha\}_{\alpha \in S}$ は以下を満たす $\mathbb{C}^D$ 上の直交射影の族とする.

$$P_\alpha P_\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \quad P_\alpha^2 = P_\alpha, \quad \sum_{\alpha \in S} P_\alpha = I.$$

式 (11) に現れる $\mathbb{Z}^d$ の有限部分集合 S は, 以下を満たしているものである.

$$\text{任意の } \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^d, \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^d \setminus (\boldsymbol{x} + S), \varphi \in \mathbb{C}^D \text{に対して}, (U_C(\delta_{\boldsymbol{x}} \otimes \varphi))(\boldsymbol{y}) = 0.$$

以後, この $\mathbb{Z}^d$ の有限部分集合 S を**ステップ集合**とよぶことにする. ステップ集合 S は, 時間発展作用素により, ウォーカーが次の時刻に移動する場所を教えてくれるものである. 標準モデルの量子ウォークは, 隣接する $2d$ 個の点に移動するモデルであった. すなわち, 標準モデルの量子ウォークのステップ集合 S は $S = \{\pm\boldsymbol{e}_1, \pm\boldsymbol{e}_2, \cdots, \pm\boldsymbol{e}_d\}$ である. 一方, レイジーモデルのステップ集合 S は $S = \{\boldsymbol{0}, \pm\boldsymbol{e}_1, \pm\boldsymbol{e}_2, \cdots, \pm\boldsymbol{e}_d\}$ となる. 次の定理を示すために, ステップ集合に以下の対称性を課す.

仮定 1. $\alpha \in S \Longrightarrow -\alpha \in S$.

定理 8 (グローバータイプの局在化 [14])**.** ステップ集合 S が仮定 1 を満たしているとする. また, U_C を上の式 (11) で与えられるグローバータイプの時間発展作用素とする. このとき, 任意の $\phi \in \varepsilon(1)$ と $\alpha \in S$ に対して $\|P_\alpha \phi\|_{\mathbb{C}^D}^2 = \|P_{-\alpha}\phi\|_{\mathbb{C}^D}^2$ を満たしているならば, U_C は固有値 1 をもつ. 同様に, 任意の $\phi \in \varepsilon(-1)$ と $\alpha \in S$ に対して $\|P_\alpha \phi\|_{\mathbb{C}^D}^2 = \|P_{-\alpha}\phi\|_{\mathbb{C}^D}^2$ を満たしているならば, U_C は固有値 -1 をもつ.

例 8. $d \geq 2$ とする. d 次元整数格子上の標準モデルのグローバーウォークは固有値 ± 1 をもつ. それ以外に, 固有値はもたない.

例 9. $d \geq 1$ とする. d 次元整数格子上のレイジーモデルのグローバーウォークは固有値 1 をもつ. それ以外に, 固有値はもたない.

次のステップ集合 S を考える.

$$S = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, u_3\}, \qquad u_3 = (-1, -1). \tag{12}$$

注意 6. 定理 8 では, ステップ集合に対称性を課した. 例えば, 三角格子上の標準モデルの量子ウォークはステップ集合としては対称性があり, 固有値 ± 1 をもつ [*14*]. 一方で, 式 (12) で与えられるステップ集合 S は非対称な三角格子上の量子ウォーク [*11*] になっており, 固有値をもたなことが簡単な計算からチェックできる. このように, ステップ集合に対称性が失われると, 固有値をもたないことがある.

参考文献

[1] A. Ambainis, *Quantum walks and their algorithmic applications*, International Journal of Quantum Information 1, 507-518 (2003).

[2] A. Crespi, R. Osellame, R. Ramponi, V. Giovannetti, R. Fazio, L. Sansoni, F. De Nicola and F. S. P. Mataloni, *Anderson localization of entangled photons in an integrated quantum walk*, Nature Photonics, **7**, 322-328 (2013).

[3] L. Grover, *A fast quantum mechanical algorithm for database search*, Proceeding of the 28th ACM Symposium on Theory of Computing, 212-219 (1996).

[4] A. Ichihara, L. Matsuoka, Y. Kurosaki and K. Yokoyama, *An analytic formula for describing the transient rotational dynamics of diatomic molecules in an optical frequency comb*, Chin. J. Phys., **51**, 1230-1240 (2013).

[5] Y. Ide, N. Konno, S. Matsutani and H. Mitsuhashi, *New theory of diffusive and coherent nature of optical wave via a quantum walk*, Annals of Physics, **383**, 164-180 (2017).

[6] N. Inui, Y. Konishi and N. Konno, *Localization of two-dimensional quantum walks*, Phys. Rev. A **69**, 052323 (2004).

[7] N. Inui, N. Konno and E. Segawa, *One-dimensional three-state quantum walk*, Phys. Rev. E **72**, 056112 (2005).

[8] H. Kawai, T. Komatsu and N. Konno, *Stationary measures of three-state quantum walks on the one-dimensional lattice*, Yokohama Math. J. **63**, 59-74 (2017).

[9] H. Kawai, T. Komatsu and N. Konno, *Stationary measure for two-state space-inhomogeneous quantum walk in one dimension*, Yokohama Math. J. **64**, 111-130 (2018).

[10] T. Kitagawa, *Topological phenomena in quantum walks: elementary introduction to the physics of topological phases*, Quantum Inf. Process. **11**, 1107-1148 (2012).

[11] B. Kollár, M. Štefaňák, T. Kiss and I. Jex, *Recurrences in three-state quantum walks on a plane*, Phys. Rev. A **82**, 012303 (2010).

[12] T. Komatsu and N. Konno, *Stationary amplitudes of quantum walks on the higher-dimensional integer lattice*, Quantum Inf. Process. **16**, 291 (2017).

[13] T. Komatsu and N. Konno, *Stationary measure induced by the eigenvalue problem of the one-dimensional Hadamard walk*, arXiv:1905.00330 (2019).

[14] T. Komatsu and T. Tate, *Eigenvalues of quantum walks of Grover and Fourier types*, J. Fourier Anal. Appl. (in press)

[15] N. Konno, *Quantum random walks in one dimension*, Quantum Inf. Process.**1**, 345-354 (2002).

[16] N. Konno, *A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk*, J. Math. Soc. Japan **57**, pp.1179-1195 (2005).

[17] N. Konno, *The uniform measure for discrete-time quantum walks in one dimension*. Quantum Inf. Process. **13**, pp.1103-1125 (2014).

[18] 今野紀雄, 量子ウォークの数理, 数学, 69 巻 1 号, 70-90 (2017).

[19] N. Konno, T. Luczak and E. Segawa, *Limit measures of inhomogeneous discrete-time quantum walks in one dimension*, Quantum Inf. Process. **12**, 33-53 (2013).

[20] N. Konno and M. Takei, *The non-uniform stationary measure for discrete-time quantum walks in one dimension*, Quantum Inf. Comput. **15**, pp.1060-1075 (2015).

[21] T. D. Mackay, S. D. Bartlett, L. T. Stephenson and B. C. Sanders, *Quantum walks in higher dimensions*, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 2745-2753 (2002).

[22] L. Matsuoka, T. Kasajima, M. Hashimoto and K. Yokoyama, *Numerical study on quantum walks implemented on cascade rotational transitions in a diatomic molecule*, J. Korean Phys. Soc., **59**, 2897-2900 (2011).

[23] L. Matsuoka and K. Yokoyama, *Physical implementation of quantum cellular automaton in a diatomic molecule*, J. Compu. Theo. Nanosci., **10**, 1617-1620 (2013).

[24] M. Mohseni, P. Rebentrost, S. Lloyd and A. Aspuru-Guzik, *Environment-assisted quantum walks in photosynthetic energy transfer*. The Journal of Chemical Physics, **129**, 174106 (2008).

[25] H. Morioka, *Generalized eigenfunctions and scattering matrices for position-dependent quantum walks*, Rev. Math. Phys., (2019).

[26] H. Morioka and E. Segawa, *Detection of edge defects by embedded eigenvalues of quantum walks*, arXiv:1805.11742v2(2018).

[27] H. Obuse and N. Kawakami, *Topological phases and delocalization of quantum walks in random environments*, Phys. Rev. B, **84**, 195139 (2011).

[28] T. Oka, N. Konno, R. Arita and H. Aoki, *Breakdown of an electric-field driven system: a mapping to a quantum walk*, Phys. Rev. Lett., **94**, 100602 (2005).

[29] N. Shenvi, J. Kempe and K. B. Whaley, *Quantum random-walk search algorithm*, Phys. Rev. A, **67**, 052307 (2003).

[30] A. Suzuki, *Asymptotic velocity of a position-dependent quantum walk*, Quantum Inf. Process. **15**, 103-119 (2016).

[31] 鈴木章斗, 量子ウォークの弱収束定理とスペクトル散乱理論, 数理解析研究所講究録, 第 2023 巻, 86-108 (2017).

[32] M. Szegedy, *Quantum speed-up of Markov chain based algorithms*, Proc. 45th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 32-41 (2004) .

[33] T. Tate, *Eigenvalues, absolute continuity and localizations for periodic unitary transition operators*, arXiv:1411.4215v2 (2017).

Algebraic and Lyapunov Reducibilities and the analysis of Linear Dynamical Systems and Quantum Systems

Takeo Kamizawa

Abstract

The analysis of linear dynamical systems can be difficult even for the simplicity of the linear structure. In this article we will study two main approaches for the analysis of linear systems: the algebraic reducibility and the Lyapunov reducibility. The algebraic approach concerns, roughly speaking, the reductions of the system into smaller invariant parts, and the Lyapunov approach tries to transform the system into another kinematically similar system so that the coefficient is time-invariant. These techniques can reduce our systems and help us analyse these complex structures further. In addition, we apply these techniques to the analysis of open quantum systems.

1 Linear Dynamical Systems

Let us consider a linear differential equation:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{1}$$

or a linear difference equation:

$$\boldsymbol{x}(t+1) = A(t)\boldsymbol{x}(t), \tag{2}$$

where $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{C}^n$ and $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ is bounded with respect to $t \in \mathcal{I}$ ($\mathcal{I}$ is either $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_0^+$ in this article). Even these equations are linear, i.e. the structures are relatively simple, the analysis of these systems can be difficult depending on the structure of $A(t)$. For instance, there are only a few classes such that the solution to the linear differential equation (1) is known to be written in a closed form. What can we do in order to analyse linear differential or difference equations in detail? There can be several approaches for this problem:

1. If the generator is constant, i.e. $A(t) = A = \text{const.}$, then it is well-known that the fundamental matrix solutions $\Phi(t, t_0)$ to (1) and (2) are given by $\Phi(t, t_0) = \exp(A(t - t_0))$ and $\Phi(t, t_0) = A^{t-t_0}$, respectively.

2. If the generator $A(t)$ can be brought into a block-diagonal form by some constant S:

$$S^{-1}A(t)S = \begin{bmatrix} Q_{11}(t) & & \\ & \ddots & \\ & & Q_{ss}(t) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

then the total dynamics (1) or (2) is decomposed into s independent components. This decomposition simplifies the structure of the dynamics and our analysis becomes easier.

3. If there is some change of basis $\boldsymbol{x}(t) = P(t)\boldsymbol{y}(t)$ such that the transformed equation

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}(t) = B(t)\boldsymbol{y}(t) \tag{4}$$

or

$$\boldsymbol{y}(t+1) = B(t)\boldsymbol{y}(t), \tag{5}$$

has some constant generator (i.e. $B(t) = B = \text{const.}$), then one can compute the fundamental matrix solution of the transformed equation, so finally the solution to the original equation is obtained.

The second approach is connected with the algebraic structure of the associative algebra $\mathcal{A}$ generated by $A(t)$, and this will be called the algebraic reducibility. On the other hand, the third approach was developed by Lyapunov, so this will be called the Lyapunov reducibility.

The main purpose of this article is to summarise the ideas of the algebraic and Lyapunov reducibilities, propose some criteria of reducibilities, and apply these techniques to the analysis of open quantum systems.

2 Algebraic Reducibility

2.1 Block-Diagonal Reduction of Generator

Let us consider the dynamics given in (1) or (2). The main idea for the algebraic reducibility is to find invariant subspaces with respect to $A(t)$ so that all the trajectories starting from each of them stay inside for all the time. In finite-dimensional cases, this is realised when the generator $A(t)$ is block-triangularised under some basis, i.e. there is some constant matrix S such that

$$S^{-1}A(t)S = \begin{bmatrix} Q_{11}(t) & \cdots & Q_{1s}(t) \\ & \ddots & \vdots \\ & & Q_{ss}(t) \end{bmatrix}$$

for some block matrices $Q_{ij}(t)$. Moreover, if the system is block-diagonalised, i.e. there is some constant matrix S such that

$$S^{-1}A(t)S = \begin{bmatrix} Q_{11}(t) & & \\ & \ddots & \\ & & Q_{ss}(t) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

we are able to consider the original system as a union of s independent subsystems which are smaller in dimension. Thus, the analysis of the linear dynamics becomes much easier. However, it is not always possible to bring the generator $A(t)$ into a block-diagonal form. When is the block-diagonalisation available? A key object is the 'algebra genetated by $A(t)$'.

2.2 Linear Decomposition of Generator

In order to construct the algebra $\mathcal{A}$ generated by $A(t)$, it is useful to 'separate' the time-dependent factor from $A(t)$. A simple observation similar to that in Theorem 2 in [34] can show that the generator $A(t)$ can be represented as a linear combination of basis matrices.

Theorem 1. *Suppose $A(t)$ in (1) is bounded and piecewise continuous for $t \in \mathcal{I}$. Then there are linearly independent constant operators $A_1, \ldots, A_r$ ($r \leq n^2$) and time-dependent scalar functions $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_r(t)$ such that*

$$A(t) = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k(t) A_k. \tag{7}$$

2.3 Shemesh Criterion

The first criterion for the algebraic reducibility introduced in this article is the (generalised) 'Shemesh criterion', which is a method to determine the existence of a common eigenvector for matrices. The importance of the existence of a common eigenvector is that, if the generator $A(t)$ is represented as (7) and if there is some common eigenvector $\boldsymbol{x}$ for $A_1, \ldots, A_r$, then the matrix $P = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}]$ can block-triangularise the generator $A(t)$ for all t:

$$P^{-1} A(t) P = \left[\begin{array}{c|ccc} * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{array}\right] \quad (* \text{ denotes some number}),$$

where $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1} \in \mathbb{C}^n$ are some vectors such that $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}\}$ is an orthogonal basis of $\mathbb{C}^n$. Then, on the subspace spanned by $\boldsymbol{x}$, the linear equation (1) or (2) is one-dimensional, on which the solution can be computed in a closed form.

Shemesh [43] established a necessary and sufficient condition for the existence of a common eigenvector for two matrices. Jamiołkowski and Pastuszak [24] showed a generalisation of the Shemesh criterion for an arbitrary number of matrices.

Theorem 2. *(Generalised Shemesh criterion [24]). Let $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ and*

$$\mathcal{N}(A_1, \ldots, A_r) = \bigcap_{k_i, l_i \geq 0}^{n-1} \ker \left[A_1^{k_1} \cdots A_r^{k_r}, A_1^{l_1} \cdots A_r^{l_r} \right] \tag{8}$$

where the intersection is taken so that $\sum_i k_i \neq 0$, $\sum_i l_i \neq 0$. Then, $\mathcal{N}(A_1, \ldots, A_r)$ is the maximal common invariant subspace containing all common eigenvectors. Therefore, $A_1, \ldots, A_r$ have a common eigenvector if and only if $\mathcal{N}(A_1, \ldots, A_r) \neq \{\mathbf{0}\}$. Moreover,

$$\mathcal{N}(A_1, \ldots, A_r) = \ker \sum_{k_i, l_i = 0}^{n-1} \left[A_1^{k_1} \cdots A_r^{k_r}, A_1^{l_1} \cdots A_r^{l_r} \right]^* \left[A_1^{k_1} \cdots A_r^{k_r}, A_1^{l_1} \cdots A_r^{l_r} \right], \tag{9}$$

where the summation is taken so that $\sum_i k_i \neq 0$, $\sum_i l_i \neq 0$.

An important point of the (generalised) Shemesh criterion is that the computation of the RHS of (9) can be done 'effectively', i.e. the procedure can decide the existence of a common eigenvector step-by-step in a finite number of steps.

2.4 Associative Algebra and Wedderburn Decomposition

For discussing the block-diagonal reducibility of $A(t)$, let us introduce the concept of 'associative algebras'. Throughout this article, an algebra $\mathcal{A}$ is defined as a linear space over a field which is closed under a bilinear map the so-called multiplication, and if additionally the associative law is satisfied with respect to the multiplication, the algebra is said to be an associative algebra. We only consider associative algebras in the sequel, so we simply say 'algebras' instead of 'associative algebras'. For an algebra $\mathcal{A}$, we define the centre of $\mathcal{A}$ by

$$Z(\mathcal{A}) = \{A \in \mathcal{A} \mid AB = BA \ (\forall B \in \mathcal{A})\}.$$

An element of an algebra $N \in \mathcal{A}$ is said to be nilpotent if there is some $j \in \mathbb{N}$ such that $N^j = O$. Moreover, an element $P \in \mathcal{A}$ is said to be properly nilpotent if PA is nilpotent for all $A \in \mathcal{A}$. The set of all properly nilpotent elements in $\mathcal{A}$ is called the radical of $\mathcal{A}$ and denoted by $\mathrm{rad}\mathcal{A}$. An algebra $\mathcal{A}$ is said to be semi-simple if $\mathrm{rad}\mathcal{A} = \{O\}$, where O is the additive identity of the algebra. An algebra which has no non-trivial ideal is called a simple algebra. According to Wedderburn [45], a semi-simple algebra can be decomposed into a direct sum of simple algebras:

Theorem 3. *(Wedderburn decomposition, cf. [11, 17, 40]). Let $\mathcal{A}$ be a finite-dimensional semi-simple algebra over $\mathbb{C}$. Then, there are simple algebras $\mathcal{A}_k$ such that*

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{k=1}^{s} \mathcal{A}_k, \tag{10}$$

which is unique up to the order.

Let $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ be a matrix. An A-invariant subspace $\mathfrak{V} \subset \mathbb{C}^n$ is a subspace such that $A\mathfrak{V} \subset \mathfrak{V}$. Obviously, $\{\mathbf{0}\}$ and $\mathbb{C}^n$ are invariant subspaces for any $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, so they are called the trivial invariant subspaces. For a set of matrices $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_r\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, a subspace $\mathfrak{V} \subset \mathbb{C}^n$ is said to be an $\mathcal{A}$-invariant subspace if $\mathfrak{V}$ is an invariant subspace for all $A_1, \ldots, A_r$. A set of matrices $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ is said to be $\mathcal{A}$-reducible (reducible, in short) if there is a non-trivial $\mathcal{A}$-invariant subspace and $\mathcal{A}$ is said to be irreducible, otherwise.

Theorem 4. *(Burnside's theorem on algebra, cf. [1, 11, 17]). The only irreducible subalgebra of $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ with $n \geq 2$ is $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ itself. In other words, for an algebra $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ with $n \geq 2$, there exists a non-trivial $\mathcal{A}$-invariant subspace.*

Since each simple subalgebra is isomorphic to the full matrix algebra $\mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$ for some n_k, we have the following statement:

Corollary 5. *The generator $A(t)$ in (1) or (2) can be block-diagonalised in the form (6) with $s \geq 2$ if and only if the algebra $\mathcal{A}$ generated by $A(t)$ is reducible and semi-simple.*

We say that an algebra $\mathcal{A}$ is completely reducible if $\mathcal{A}$ is reducible and semi-simple. At this point, we have the following questions:

- How to construct the algebra $\mathcal{A}$ generated by $A(t)$?
- How to check the reducibility of $\mathcal{A}$?
- How to check the semi-simplicity of $\mathcal{A}$?

In the following subsections, we will study 'effective' methods to answer these questions.

2.5 Construction of Basis of Algebra

As we have seen above, it is important to analyse the complete reducibility of the algebra generated by $A(t)$. Since the algebra generated by $A(t)$ is identical to the algebra generated by the constant operators $A_1, \ldots, A_r$ in (7), it is enough to construct a basis of the algebra $\mathcal{A}$ generated by $A_1, \ldots, A_r$ to check the reducibility of the algebra and test the semi-simplicity of $\mathcal{A}$.

Let us review how to construct a basis of the algebra $\mathcal{A}$ generated by some matrices $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. First, we are able to assume that $A_1, \ldots, A_r$ are linearly independent without loss of generality (because if, for instance, A_1 and A_2 are linearly dependent, the generated algebras $\mathcal{A}(A_1)$ and $\mathcal{A}(A_1, A_2)$ are identical). A simple and direct method for constructing a basis is the following:

Algorithm 6. *Let $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Step 1 *Set $\mathcal{B} = \{A_1, \ldots, A_r\}$.*

Step 2 *Compute $A_j A_k$ for some $j, k \in \{1, \ldots r\}$.*

Step 3 *Check whether $\mathcal{B} \cup \{A_j A_k\}$ is linearly independent. If so, add $A_j A_k$ into $\mathcal{B}$.*

Step 4 *Repeat Step 2 and 3 for all combinations of (j, k).*

Step 5 *Repeat similar processes for all possible combinations of indices with lengths $2, 3, 4, \ldots$.*

Step 6 *The obtained set $\mathcal{B}$ is a basis of $\mathcal{A}$.*

Note that Card$\mathcal{B} \leq n^2$. This procedure finishes in a finite number of steps because of the Cayley-Hamilton theorem, so the length of the products of matrices $A_{k_1} \cdots A_{k_\xi}$ ($k_j \in \{1, \ldots, r\}$) is bounded above. However, several better results on the upper bound for k_ξ have been reported by Paz [39]:

$$k_\xi \leq \left\lceil \frac{n^2 + 2}{3} \right\rceil \tag{11}$$

and another bound by Pappacena [37]:

$$k_\xi \leq n\sqrt{\frac{2n^2}{(n-1)} + \frac{1}{4}} + \frac{n}{2} - 2. \tag{12}$$

2.6 Discriminant of Algebra

Let $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ be an m-dimensional matrix algebra with $n \geq 2$. Recall that a matrix $P \in \mathcal{A}$ is said to be properly nilpotent if PA is nilpotent for all $A \in \mathcal{A}$, and P is properly nilpotent iff $\mathrm{tr}PA = 0$ for all $A \in \mathcal{A}$ due to the Dickson's theorem (cf. [9]). If we take a basis $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k=1}^m$ of $\mathcal{A}$, the matrices P and A have linear expansions:

$$P = \textstyle\sum_{k=1}^m \pi_k B_k, \quad A = \sum_{k=1}^m \alpha_k B_k,$$

where $\pi_k, \alpha_k \in \mathbb{C}$. For a fixed element $P \in \mathcal{A}$, it is easy to see that

$$\mathrm{tr}(PA) = \sum_{j,k=1}^{m} \pi_j \alpha_k \mathrm{tr}(B_j B_k) = 0$$

holds for all $A \in \mathcal{A}$ if and only if

$$\sum_{j=1}^{m} \pi_j \mathrm{tr}\,(B_j B_k) = 0 \ \ (\forall k \in \{1, \ldots, m\})$$

or in the matrix form:

$$D\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \mathrm{tr}\,(B_1 B_1) & \cdots & \mathrm{tr}\,(B_1 B_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{tr}\,(B_m B_1) & \cdots & \mathrm{tr}\,(B_m B_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_m \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{13}$$

If $P \neq O$ then D needs to be singular and this is also sufficient for (13) being satisfied. In other words, if D is non-singular then the only possible properly nilpotent element in $\mathcal{A}$ is the zero, (which means $\mathcal{A}$ is semi-simple). Therefore, the invertibility of D can be used as a criterion to distinguish if $\mathcal{A}$ is semi-simple or not.

Definition 7. Let $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ be an m-dimensional algebra and $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ be a basis of $\mathcal{A}$. The quantity

$$\mathrm{disc}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} = \det D$$

is called the discriminant of $\mathcal{A}$ with respect to $\mathcal{B}$, where D is the matrix in (13). The matrix D in (13) is called the discriminant matrix.

Theorem 8. *(cf. [36]). An algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ is semi-simple if and only if $\mathrm{disc}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} \neq 0$ for some basis $\mathcal{B}$ of $\mathcal{A}$.*

It is important to note that, since the invertibility of D does not depend on the choice of basis $\mathcal{B}$, the zeroness or non-zeroness of the discriminant is independent of the choice of basis. The discriminant of an algebra is a useful tool for determining if a given algebra is semi-simple or not. Using this fact, we have an effective algorithm for testing the complete reducibility as follows:

Algorithm 9. *Let $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ be an algebra.*

Step 1 *Compute a basis $\mathcal{B}$ of $\mathcal{A}$ by Algorithm 6.*

- *If $\dim \mathcal{A} = n^2$, then the algebra is irreducible due to the Burnside's theorem (Theorem 4), and the algorithm stops.*
- *If $\dim \mathcal{A} < n^2$, then the algebra is reducible. It means, indeed, the elements in $\mathcal{A}$ can be simultaneously block-triangularised in matrix representations, and go to the next step.*

Step 2 *With respect to the basis $\mathcal{B}$, compute the discriminant $\mathrm{disc}_{\mathcal{B}}\mathcal{A}$.*

- *If $\mathrm{disc}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} = 0$, then $\mathcal{A}$ is not semi-simple, so $\mathcal{A}$ is not completely reducible.*
- *If $\mathrm{disc}_{\mathcal{B}}\mathcal{A} \neq 0$, then $\mathcal{A}$ is semi-simple, so the algebra $\mathcal{A}$ is completely reducible. In the matrix representation all matrices in $\mathcal{A}$ are simultaneously block-diagonalised.*

The discriminant of an algebra was applied to the analysis of differential equations by e.g. Mitropolsky and Lopatin [36] and to the analysis of open quantum systems by the present author [26].

2.7 ALS-Criterion

Another effective method for the complete reducibility we introduce is the 'ALS-criterion'. The standard polynomial with $\ell(\in \mathbb{N})$ arguments is the polynomial:

$$S_\ell(X_1, \ldots, X_\ell) = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(\ell)},$$

where σ is a permutation and the summation is taken over all possible permutations. First of all, let us revise some properties of the standard polynomial (cf. [38]).

Lemma 10. *Let S_ℓ be the standard polynomial with ℓ arguments.*

1. *The standard polynomial S_ℓ is multilinear.*
2. *$S_\ell(\ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots) = -S_\ell(\ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots)$ for any pair of i, j.*

The following results by Amitsur and Levitzki [2] and Shapiro [42] play the crucial roles of the ALS-criterion:

Theorem 11. *(Amitsur-Levitzki theorem, cf. [2, 38]). The identity $S_{2n} = 0$ is satisfied on $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ but not on $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$. Moreover, the identity $S_{2n} = 0$ is the only multilinear identity of degree $2n$ on $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ up to a constant multiplication.*

Theorem 12. *(Shapiro's theorem [42]). Let π_ℓ be a polynomial in ℓ non-commuting variables with coefficients in $\mathbb{C}$. Suppose $\pi_\ell = 0$ is satisfied on $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ but not on $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{C})$ for some p. Let $A_1, \ldots, A_r$ be given $n \times n$ matrices over $\mathbb{C}$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(A_1, \ldots, A_r)$ be the algebra generated by $A_1, \ldots, A_r$ and suppose $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. The identity $\pi_\ell = 0$ is satisfied on $\mathcal{A}$ if and only if every matrices in $\mathcal{A}$ can be simultaneously block-diagonalised so that the size of each block is less than or equal to $p \times p$.*

Combining both the Amitsur-Levitzki theorem and the Shapiro's theorem, we obtain the following criterion, which we call the 'ALS-criterion'.

Theorem 13. *(ALS-criterion, cf. [23, 38]). Let $A_1, \ldots, A_r$ be given $n \times n$ matrices over $\mathbb{C}$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(A_1, \ldots, A_r)$ be the algebra generated by $A_1, \ldots, A_r$ and suppose $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Then, the followings are equivalent:*

- *$S_{2p} = 0$ on $\mathcal{A}$ for some p,*
- *$\mathcal{A}$ is completely reducible and the dimension of each (decomposed) subalgebra is no greater than p.*

Note especially that the algebra is automatically a *-algebra if the generating matrices $A_1, \ldots, A_r$ are normal. The ALS-criterion was applied to the analysis of differential equations and quantum mechanics by e.g. Jamiołkowski, Pastuszak and the present author [23, 38].

2.8 Eberly's Method for Computation of Decomposition

As we have seen above, we are able to effectively decide if an algebra $\mathcal{A}$ is semi-simple or not. If $\mathcal{A}$ is semi-simple, $\mathcal{A}$ can be decomposed into simple components according to the Wedderburn's

theorem (Theorem 3). Furthermore, in some cases we are also able to compute bases of simple components explicitly. Here we will study a technique to obtain bases of the simple components by Eberly [12, 13].

Let $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ be an associative algebra over $\mathbb{C}$. Recall that the centre $Z(\mathcal{A})$ of an algebra $\mathcal{A}$ is defined by

$$Z(\mathcal{A}) = \{A \in \mathcal{A} \mid AB = BA \ (\forall B \in \mathcal{A})\}.$$

It is known that the centre of a semi-simple algebra is a semi-simple subalgebra and it is commutative. Moreover, if $\mathcal{A}$ is semi-simple with the Wedderburn decomposition as (10), then we have

$$Z(\mathcal{A}) \simeq \bigoplus_{k=1}^{s} Z(\mathcal{A}_k) \tag{14}$$

and $\mathcal{A}_k = Z(\mathcal{A}_k)\mathcal{A}$ (cf. [5, 12, 22]). Thus, the computation of the explicit Wedderburn decomposition of $\mathcal{A}$ is reduced to the computation of the decomposition of $Z(\mathcal{A})$. In addition, suppose we have a basis $\mathcal{B}$ of $\mathcal{A}$ such that $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ for some number field $\mathbb{F}$ (finite extension of $\mathbb{Q}$). In this case, the algebra $\mathcal{A}$ over $\mathbb{C}$ can be considered as an algebra $\mathcal{A}_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{C}$, which is a scalar extension of the algebra $\mathcal{A}_{\mathbb{F}}$ over the number field $\mathbb{F}$.

Lemma 14. *(Lemma 3.2 [13]). If $\mathcal{A}$ is an m-dimensional semi-simple algebra over a number field $\mathbb{F}$, then there is an extension $\mathbb{E}$ of finite degree such that*

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{C} \simeq (\mathcal{C}_1 \otimes_{\mathbb{E}} \mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus (\mathcal{C}_s \otimes_{\mathbb{E}} \mathbb{C})$$

for some s, where $\mathcal{C}_1, \ldots \mathcal{C}_s$ are simple subalgebras of $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E}$ over $\mathbb{E}$.

Eberly called the field $\mathbb{E}$ in Lemma 14 a semi-splitting field for $\mathcal{A}$ over $\mathbb{F}$ (cf. [13]). For finding the decomposition of $Z(\mathcal{A})$, the concept of 'splitting elements' was introduced [12, 13]. An element $Q \in Z(\mathcal{A})$ is said to be a splitting element of $Z(\mathcal{A})$ if its minimal polynomial is square-free (i.e. there is no repeated factor) and the degree of it is $m_z \stackrel{\text{def}}{=} \dim Z(\mathcal{A})$.

Lemma 15. *(Lemma 2.1, 3.1 [12]). If $\mathbb{F}$ is a perfect field (i.e. every irreducible polynomial is separable over $\mathbb{F}$) with cardinality at least m_z, then $Z(\mathcal{A})$ contains a splitting element. Moreover, if $H \subset \mathbb{F}$ is some finite subset with $\mathrm{Card}H = \lceil cn(n-1) \rceil \geq m_z$ for some $c > 0$, the element $Q = \sum_{k=1}^{m_z} \lambda_k Q_k$ for some some random $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_z} \in H$ is a splitting element of $Z(\mathcal{A})$ with the probability of at least $1 - \frac{1}{c}$, where $\{Q_k\}_{k=1}^{m_z}$ is a basis of $Z(\mathcal{A})$.*

Due to the representation (14), there is an isomorphism ϕ such that $\phi(A) = (A_1, \ldots, A_s)$ for each $A \in Z(\mathcal{A})$, where $A_k \in Z(\mathcal{A}_k)$. Then, the minimal polynomial ψ_A of $A \in \mathcal{A}$ satisfies

$$\psi_A = \mathrm{lcm}(\psi_{A_1}, \ldots, \psi_{A_s}),$$

where ψ_X denotes the minimal polynomial of X. If $A \in Z(\mathcal{A})$ is a splitting element for $Z(\mathcal{A})$, Lemma 2.75 in [3] insists that $\psi_{A_1}, \ldots, \psi_{A_s}$ are pairwise relatively prime, so

$$\psi_A = \prod_{k=1}^{s} \psi_{A_k}.$$

Thus, for a splitting element A, there exist polynomials $g_1, \ldots, g_s \in \mathbb{F}[X]$ such that

$$g_j \equiv 1 \ \left(\mathrm{mod}\psi_{A_j}\right), \ g_k \equiv 0 \ \left(\mathrm{mod}\psi_{A_k}\right) \ (j \neq k),$$

and we can check that $g_1(A), \ldots, g_s(A)$ are the identity element of $Z(\mathcal{A}_1), \ldots, Z(\mathcal{A}_s)$, respectively.

With the considerations above, the procedure for the explicit decomposition by Eberly is summarised as follows:

Algorithm 16. *Let $\mathcal{A}$ be a semi-simple algebra.*

Step 1 *Compute a basis of $\mathcal{A}$ as in Algorithm 6. Let $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k=1}^{m}$ be the obtained basis.*

Step 2 *Compute the centre of $\mathcal{A}$ and a basis. This can be done by solving $ZB_k = B_kZ$ for all k for an unknown variable Z. Let $\mathcal{B}_z = \{Q_k\}_{k=1}^{m_z}$ be the obtained basis of the centre $Z(\mathcal{A})$. If $\mathcal{B}_z \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ for some number field $\mathbb{F}$, we proceed to the next step.*

Step 3 *Find a splitting element Q of $Z(\mathcal{A})$. This may be solved by choosing $\mu_1, \ldots \mu_{m_z} \in \mathbb{F}$ and constructing $Q = \sum_k \mu_k Q_k$.*

Step 4 *Compute the minimal polynomial ψ_Q of Q over $\mathbb{F}$.*

Step 5 *Compute the factorisation of ψ_Q into distinct monic irreducible polynomials $\psi_{Q_1}, \ldots \psi_{Q_s}$ over $\mathbb{F}$.*

Step 6 *Compute the polynomials $g_1, \ldots, g_s$ such that $\deg g_k < m_z$, $g_k \equiv 1 \ (mod \psi_{Q_k})$ and $g_j \equiv 0 \ (mod \psi_{Q_k})$ for all $j \neq k$. Set $E_k = g_k(Q)$ (this is the identity element of $\mathcal{A}_k$).*

Step 7 *For each $k = 1, \ldots, s$, compute a basis $\mathcal{B}_k$ of the algebra $\mathcal{A}_k = E_k\mathcal{A}$.*

Step 8 *The obtained bases $\mathcal{B}_1, \ldots \mathcal{B}_s$ are bases of simple algebras $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_s$ such that $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_s$.*

3 Lyapunov Reducibility

Another aspect for the reduction of the linear system (1) or (2) is so-called the Lyapunov reducibility. Consider the linear equation (1). For some change of basis $\boldsymbol{x}(t) = P(t)\boldsymbol{y}(t)$ such that $P(t)$ and $P^{-1}(t)$ are bounded on $\mathcal{I}$, the equation is transformed to

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}(t) = \left\{ P^{-1}(t)A(t)P(t) - P^{-1}(t)\left(\frac{d}{dt}P(t)\right)\right\}\boldsymbol{y}(t) = B(t)\boldsymbol{y}(t), \tag{15}$$

then the equations (1) and (15) are said to be kinematically similar. If, in addition, the coefficient $B(t) = B$ is constant, then the equation (15) can be solved as $\boldsymbol{y}(t) = \exp(B(t-t_0))\,\boldsymbol{y}_0$. Thus, finally we have $\boldsymbol{x}(t) = P(t)\exp(B(t-t_0))\,P^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0$ for the original differential equation (1). In this case, the equation (1) is said to be Lyapunov reducible (cf. [6, 19]). Erugin showed the following:

Theorem 17. *(Erugin's theorem [15]). The linear differential equation (1) is Lyapunov reducible if and only if there exist a constant matrix B and a nonsingular matrix $P(t)$ such that $P^{-1}(t)$ and $\frac{d}{dt}P(t)$ exist for all $t \in \mathcal{I}$ and the fundamental matrix solution $\Phi(t, t_0)$ is given by*

$$\Phi(t, t_0) = P(t)\exp(B(t-t_0))\,P^{-1}(t_0). \tag{16}$$

It is important to remark that any time-varying system (1) is Lyapunov reducible in fact [46]:

Theorem 18. *(Wu's Theorem [46]) Any linear time-varying system (1) is Lyapunov reducible.*

Despite the Wu's theorem, however, it is extremely difficult to obtain the closed form of the fundamental matrix solution Φ because it requires the complete a priori knowledge of Φ in general. In some special cases we can compute the closed form of Φ only with a partial information about Φ.

Similarly, one can consider the Lyapunov reducibility for a difference equation (2). For some change of basis $\boldsymbol{x}(t) = P(t)\boldsymbol{y}(t)$, the equation is transformed to

$$\boldsymbol{y}(t) = P^{-1}(t+1)A(t)P(t)\boldsymbol{y}(t) = B(t)\boldsymbol{y}(t). \tag{17}$$

If, in addition, the coefficient $B(t) = B$ is constant in time, then the equation (17) can be solved as $\boldsymbol{y}(t) = B^{t-t_0}\boldsymbol{y}(t_0)$. Thus, finally we have $\boldsymbol{x}(t) = P(t)B^{t-t_0}P(t_0)\boldsymbol{x}_0$ for the original difference equation (2). In this case, the equation (2) is said to be Lyapunov reducible (cf. [29]).

3.1 Periodic Systems

An important class for the Lyapunov reducible system is the periodic systems. The equation (1) or (2) is said to be periodic if there is some $\omega > 0$ such that $A(t+\omega) = A(t)$ for all $t \in \mathcal{I}$. In this case, it is known that (1) is Lyapunov reducible.

Let $\Phi(t, t_0)$ be the fundamental solution to the ω-periodic system (1). Since $\det \Phi(t, t_0) \neq 0$, there exists some M such that $\Phi(t+\omega, t_0) = \Phi(t, t_0) M$ for all t. Moreover, according to Lemma 8.11 [33], there exists some C such that $M = \exp\left(e^C\right)$. Let $P(t) = \Phi(t, t_0)\exp(-C(t-t_0))$. Then,

$$\begin{aligned} B(t) &= P^{-1}(t)A(t)P(t) + P^{-1}(t)\dot{P}(t) \\ &= C \text{ (const.)}, \end{aligned}$$

so the system is Lyapunov reducible and the solution is given by

$$\Phi(t, t_0) = P(t)\exp(C(t-t_0)).$$

In the discrete-time case (2), a periodic system is not necessarily Lyapunov reducible unlike the continuous-time case (cf. [4, 10]).

Theorem 19. *(Proposition 3.2 [4], Theorem 2 [10]). An ω-periodic system (2) is Lyapunov reducible, i.e. there is some ω-periodic transformation $P(t)$ such that $B = P(t+1)A(t)P^{-1}(t) =$ const., if and only if the rank of $\Phi(t_0 + k, t_0)$ is independent of t_0 for all $k = 1, \ldots, n$.*

3.2 Functionally Commutative Systems

Consider a linear differential equation (2). The equation (2) is said to be functionally commutative (or the Lappo-Danilevsky system [8, 16, 30]) if the condition

$$\left[A(t), \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau\right] = O \tag{18}$$

is satisfied for all $t \in \mathcal{I}$, where $[X, Y] = XY - YX$ is the commutator. In this case, it is known that the equation is Lyapunov reducible and the fundamental solution is given by

$$\Phi(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right).$$

Obviously, the condition (18) is satisfied if $A(t)$ is diagonal. In the 2×2 non-diagonal case, the relation (18) holds if and only if $A(t)$ has the form:

$$A(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1(t) + b_1\alpha_2(t) & \alpha_2(t) \\ b_2\alpha_2(t) & \alpha_1(t) \end{bmatrix},$$

where α_1, α_2 are time-dependent scalar functions and b_1, b_2 are constants (cf. [15, 16, 19]).

The functional commutativity was generalised by Fedorov [18] (see also [16, 19]). The idea lying under the generalisation is that we consider the functional commutativity not on the whole space $\mathbb{C}^n$ but on some non-zero invariant subspace. Let

$$\mathcal{K} = \bigcap_{t\in\mathcal{I}} \bigcap_{j=1}^{n-1} \ker \left[A(t), \left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau \right)^j \right]$$

and suppose $\mathcal{K} \neq \{\mathbf{0}\}$. Then, with a constant projection L onto $\mathcal{K}$, the equation (1) has a solution

$$\boldsymbol{x}(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau \right) L\boldsymbol{x}_0$$

for some initial condition $\boldsymbol{x}_0$.

A subclass of functionally commutative systems have been also studied. The equation (1) is said to be semi-proper if

$$[A(t), A(s)] = O \ \ (\forall s, t \in \mathcal{I}) \tag{19}$$

and we also say that the matrix function $A(\cdot)$ is semi-proper. Theorem 7.4.1 in [33] says that the semi-proper condition (19) is equivalent to the condition:

$$\left[A(t), \int_{s}^{t} A(\tau)d\tau \right] = O \ \ (\forall s, t \in \mathcal{I}).$$

Similar to the Fedorov's approach for solutions to a partially functionally commutative system, the present author constructed a criterion for the existence of a closed-form solution to a 'partially semi-proper' system in [28].

Theorem 20. *Consider a linear differential equation (1) and suppose the generator $A(t)$ has a representation as in (7). Let*

$$\mathcal{K}_S = \bigcap_{s,t\in\mathcal{I}} \bigcap_{j=1}^{n-1} \ker \left[A(t), \left(\int_{s}^{t} A(\tau)d\tau \right)^j \right]$$

Then, the equation is partially semi-proper (i.e. $\mathcal{K}_S \neq \{\mathbf{0}\}$) if and only if $\mathcal{N}(A_1, \ldots, A_r) \neq \{\mathbf{0}\}$, where $\mathcal{N}$ is the set defined in (8).

The equation (1) is said to be proper if there are scalar functions $g_k : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ ($k = 0, \ldots, p$ for some p) and a constant matrix G such that

$$A(t) = A_G(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{p} g_k(t)G^k \ \ (\forall t \in \mathcal{I}),$$

and we also say that the matrix function $A(\cdot)$ is proper. Any proper equation can be shown to be semi-proper, and it was proved in Theorem 5 [49] that $A(t)$ is a semi-proper matrix function if and only if there are proper matrix functions $A_{G_1}(t), \ldots, A_{G_q}(t)$ for some q such that

$$A(t) = \sum_{j=1}^{q} A_{G_j}(t) \tag{20}$$

with the commuting condition $[G_i, G_j] = O$ for all i, j. This decomposition is called the spatial decomposition [49, 50]. If $A(t)$ is semi-proper with the spatial decomposition (20), according to Theorem 4 [50], the fundamental matrix solution to (1) is given by

$$\Phi(t, t_0) = \prod_{j=1}^{q} \exp\left(\sum_{k=0}^{p_j} \int_{t_0}^{t} g_{jk}(\tau) d\tau G_j^k \right). \tag{21}$$

Zhu and Morales established an effective method to compute the solution (21) in [49, 50].

3.3 Wu-Horowitz-Dennison Systems

Consider a linear differential equation (1) and suppose $\dot{A}(t) = \frac{d}{dt}A(t)$ exists. Wu [47] showed that, if there is some constant operator D such that

$$\frac{d}{dt}A(t) = [D, A(t)] \ \ (\forall t \in \mathcal{I}), \tag{22}$$

then the equation (2) is Lyapunov reducible and the fundamental matrix solution is given by

$$\Phi\left(t, t_0\right) = \exp\left(D\left(t - t_0\right)\right) \exp\left(\left(A\left(t_0\right) - D\right)\left(t - t_0\right)\right)$$

(see also [46, 19, 25]).

Wu's result was extended in [48], and we say that the equation (1) is Wu-Horowitz-Dennison system [47] if thete exist a scalar function $h : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ and a constant matrix $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ such that $\dot{h}(t) = \frac{d}{dt}h(t)$ exists and

$$[D, A(t)] = \frac{\dot{A}(t)}{h(t)} - \frac{\dot{h}(t)}{h^2(t)}A(t) \ \ (\forall t \in \mathcal{I}). \tag{23}$$

Then, it was shown in [48] that the fundamental matrix solution to the equation (2) is given by

$$\Phi(t, t_0) = \exp\left(g(t)D\right) \exp\left(g(t)H\right),$$

where

$$\begin{aligned} H &= \left(\lim_{t \to t_0} \frac{A(t)}{h(t)} \right) - D \\ g(t) &= \int_{t_0}^{t} h(\tau) d\tau, \ g\left(t_0\right) = 0, \end{aligned}$$

and conversely this condition is also sufficient for (23) to hold. One can easily observe that the equation (22) is obtained by setting $h(t) = 1$ in (23).

3.4 Shifner-Erugin-Salakhova-Chebotarev Systems

Consider a linear differential equation (1). A type of solvable linear differential equations was considered by Shifner [44], where it was shown that the system

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \left(\alpha_1(t)A_1 + \alpha_2(t)A_2\right)\boldsymbol{x}(t) \tag{24}$$

with time-dependent scalar functions α_1, α_2 and constant opeators A_1, A_2 such that $[A_1, [A_2, A_1]] = O$ (second-order commutativity) is solvable in a closed form.

This result was extended by Erugin [14], Salakhova and Chebotarev [41]. We say that the equation (1) is a Shifner-Erugin-Salakhova-Chebotarev system if the generator $A(t)$ in (1) is represented as

$$A\left(t\right) = P\left(t\right) + Q\left(t\right),$$

where

$$\begin{aligned} P\left(t\right) &= \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\left(t\right) P_j \\ Q\left(t\right) &= \sum_{j=1}^{q} \mu_j(t) Q_j \end{aligned}$$

with some scalar functions $\lambda_j, \mu_j : \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ and constant operators P_j, Q_j satisfying

$$[P_j, P_k] = O,\ [Q_j, Q_k] = O\ \ (\forall j, k).$$

Then, it was shown that the following conditions are equivalent:

- $$[P(t), [Q(t), P(t)]] = O\ \ (\forall t \in \mathcal{I}).$$
- The fundamental matrix solution is given by

  $$\Phi\left(t\right) = e^{D(t)} e^{M(t)},$$

  where

  $$\begin{aligned} D\left(t\right) &= \int_{t_0}^{t} Q\left(\tau\right) d\tau \\ M\left(t\right) &= \int_{t_0}^{t} e^{D(\sigma)} P\left(\sigma\right) e^{-D(\sigma)} d\sigma \end{aligned}$$

  and

  $$\left[M\left(t\right), \frac{d}{dt} M\left(t\right)\right] = O$$

  for all $t \in \mathcal{I}$.

In the 2×2 cases, Merkys [35] showed that the non-commuting but second-order commuting relation holds iff A_1, A_2 in (24) have the forms:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a + 2mc & -m^2 c \\ c & a \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} b + nd & m(m-n)d \\ d & b \end{bmatrix}.$$

In this case, the linear system can be solved in a closed form according to the results above (see also [20]).

3.5 Perron-Vinograd Reduction Method

Consider the equation (1), and let $\Phi(t,t_0)=[\boldsymbol{x}_1(t),\ldots,\boldsymbol{x}_n(t)]$ be the fundamental matrix solution to the equation. Then, the Gram-Schmidt procedure can provide an orthonormal basis $\boldsymbol{u}_1(t),\ldots,\boldsymbol{u}_n(t)$ from $\boldsymbol{x}_1(t),\ldots,\boldsymbol{x}_n(t)$. Let $U=[\boldsymbol{u}_1(t),\ldots,\boldsymbol{u}_n(t)]$. Then, U is unitary and one can check that the change of variables $\boldsymbol{x}=U(t)\boldsymbol{y}$ can transform the generator into a triangular form:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}(t) &= \left\{U^*(t)A(t)U(t)-U^*(t)\left(\frac{d}{dt}U(t)\right)\right\}\boldsymbol{y}(t)\\ &= \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1n}(t)\\ & \ddots & \vdots\\ & & b_{nn}(t)\end{bmatrix},\end{aligned}$$

where the diagonal entries are non-negative real numbers, so the transformed system is simpler in structure for the analysis. This type of reduction is called the Perron-Vinograd triangulation (cf. [6, 8, 31]).

4 Open Quantum Systems

The modern theory of quantum systems is described by a certain type of dynamics on a Hilbert space $\mathcal{H}_S$ over $\mathbb{C}$ (S refers to the 'system'). According to the Schrödinger picture, if we ignore the environmental noise, the time-evolution of pure states on $\mathcal{H}_S$ is described by the differential equation the so-called Schrödinger equation:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\left|\varphi_t\right\rangle = H\left(t\right)\left|\varphi_t\right\rangle,$$

where $\hbar>0$ is some constant (Planck constant), $H\left(t\right)$ is a (time-dependent) self-adjoint operator (called the Hamiltonian) and $\left|\varphi_t\right\rangle\in\mathcal{H}_S$ on the time interval $\mathcal{I}$. In order to express more general situations, we introduce the so-called mixed states, and the set of all states on $\mathcal{H}_S$ is described as

$$\mathcal{S}\left(\mathcal{H}_S\right)=\left\{\rho\in\mathcal{B}^*\left(\mathcal{H}_S\right)\mid\rho\geq 0,\ \mathrm{tr}\rho=1\right\},$$

where $\mathcal{B}^*\left(\mathcal{H}_S\right)$ is the set of all bounded Hermitian operators on $\mathcal{H}_S$. The dynamics on $\mathcal{S}\left(\mathcal{H}_S\right)$ which is independent of the noise is given by the equation (the so-called von Neumann equation):

$$i\hbar\dot{\rho_t}=i\hbar\frac{d}{dt}\rho_t=\left[H\left(t\right),\rho_t\right], \tag{25}$$

where $\rho_t\in\mathcal{S}\left(\mathcal{H}_S\right)$ and $[A,B]=AB-BA$ is the commutator. A quantum system without noise from the environment, in other words a system such that the time-evolution on $\mathcal{S}\left(\mathcal{H}_S\right)$ is described by (25), is called a closed system.

However, usually it is extremely hard to avoid the influence of the noise from the environment so we have to consider the noise effect in general. In this case, the von Neumann equation is no longer satisfied and the master equation on $\mathcal{S}\left(\mathcal{H}_S\right)$ is in general expressed by the general linear equation

$$\dot{\rho_t}=L\left(t\right)\rho_t, \tag{26}$$

where $L(t) : \mathcal{L}(\mathcal{H}_S) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_S)$ is a linear operator called the generator. A quantum system with the influence from the environment is called an open system.

One of the most famous form of the generator $L(t)$ under the Markovian approximation is the well-known GKSL equation (Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad equation) [21, 32] on a finite-dimensional Hilbert space. Suppose $\mathcal{H}_S$ is n-dimensional ($n < \infty$ and in the sequel we assume so) and the generator $L(t) = L$ is time-independent. The GKSL equation has the form

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_t &= L\rho_t = -\frac{i}{\hbar}[H_S, \rho_t] + \mathfrak{D}\rho_t \\ \mathfrak{D}\rho_t &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n^2-1} \alpha_k \left\{[F_k\rho_t, F_k^*] + [F_k, \rho_t F_k^*]\right\}, \end{aligned} \tag{27}$$

where $\{F_k\}_{k=0}^{n^2-1}$ with $F_0 = I$ is a basis of $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$, α_k are non-negative constant scalars and H_S is the system Hamiltonian, which is constant. We can choose α_k and F_k so that $\alpha_k > 0$ for all $k = 1, \ldots, M$ for some $M(\leq n^2 - 1)$ and $\alpha_k = 0$ otherwise.

However, the analysis of open quantum systems can be difficult in general. The dynamical system with the equation (26) is structured by the generator $L(t)$ (which is an operator), and features of it arises in its eigensystem. If the dimension n of the base space is small such as $n = 1, 2, 3$, it is relatively easy to calculate the eigenvalues and eigenvectors. However, if $n \geq 5$, due to the Abel-Ruffini theorem, there is no general algebraically closed formula to compute the solutions of the characteristic polynomial of $L(t)$. Even worse, the operator $L(t)$ may not have eigenvalues if the dimension is infinite, so some alternative mathematical tools which does not rely upon a priori knowledge of eigensystems are required for analysing general higher-dimensional systems.

4.1 Reduction Methods and Open Quantum Systems

Let us consider applications of the reduction methods introduced above to open quantum systems.

Consider an n-dimensional complex Hilbert space $\mathcal{H}_S$. Then, the generator $L(t)$ has a matrix representation, which can be obtained by the 'vectorisation', where the vectorisation function is given by

$$\mathrm{vec}\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{11}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{nn}]^T.$$

For instance, the vectorisation of the GKSL master equation (27) reads

$$\begin{aligned} \mathrm{vec}\dot{\rho}_t &= \left[-\frac{i}{\hbar}\left(I \otimes H_S - H_S^T \otimes I\right) + \frac{1}{2}\sum_k \alpha_k \left(\overline{F}_k \otimes F_k - I \otimes F_k F_k^* - \overline{F}_k F_k^T \otimes I\right)\right] \mathrm{vec}\rho_t \\ &= \tilde{L}(t)\mathrm{vec}\rho_t, \end{aligned} \tag{28}$$

where we used the identity

$$\mathrm{vec}(XYZ) = \left(Z^T \otimes X\right)\mathrm{vec}Y,$$

so the $n^2 \times n^2$ matrix $\tilde{L}(t)$ is the matrix representation of $L(t)$ and we are able to apply the algebraic and Lyapunov reduction techniques to the linear differential equation (28) on $\mathbb{C}^{n^2}$.

4.2 Reducibility Criteria and Decoherence-Free Subspaces

The reduction criteria introduced in this article can be applied to more physical problems. At the end of this article, let us study the 'decoherence-free subspaces' and a criterion for the existence of such a subspace.

As discussed above, usually it is extremely difficult to prepare experiments protected completely from the surrounding environment. However, in some special cases, open quantum systems may have protected 'parts' from the surroundings, and the existence of such a part is quite beneficial in applications. For instance, in a quantum transmission process, if there is a protected part from noise, the data transmitted through this part does not change, while the data may be lost outside of the part.

There have been several formulations for the decoherence-free subspaces (cf. [27]), but in this article a decoherence-free subspace is defined as follows:

Definition 21. Suppose an open quantum system obeys the equation (26). A non-zero subspace $\mathcal{H}_{DFS}\,(\subset \mathcal{H}_S)$ is called a decoherence-free subspace (DFS) if $\mathcal{S}\,(\mathcal{H}_{DFS})$ is an invariant subset for the linear evolution operator $\Phi\,(t,t_0)$ of the equation (26) for all $t \in \mathcal{I}$ and $\Phi\,(t,t_0)$ is unitary on $\mathcal{S}\,(\mathcal{H}_{DFS})$.

For the criterion of the existence of a DFS, let us review another formulation of quantum dynamics, namely 'quantum channels'. Besides the description by master equations (26), one can view the state change as a mapping from one time to another, i.e. if a quantum state changes from the initial time t_0 through some time t, the relation between the initial state $\rho\,(t_0)$ and the final state $\rho\,(t)$ is described by a linear evolution operator $\Lambda = \Lambda\,(t,t_0)$ so that $\rho(t) = \Lambda\rho(t_0)$. Here, since Λ maps a positive semi-definite (PSD) operator to a PSD operator, it requires to be a positive map. Moreover, since states on a product space must also be mapped to some states, Λ is often assumed to be completely positive and trace-preserving (CPTP). If a map Λ is CPTP, according to Choi [7], there exists a representation:

$$\Lambda\rho_t = \sum_{j=1}^{\kappa} K_j \rho\,(t_0)\, K_j^*, \tag{29}$$

where $K_j \in \mathcal{B}_n\,(\mathcal{H}_S)$. The representation (29) is often called the Kraus representation and K_j's are called the Kraus operators in physics. This kind of CPTP maps are often called quantum channels and they represent evolutions between quantum states.

With the descriptions of state changes by quantum channels, we have the following statement for a criterion of the existence of a DFS:

Theorem 22. *(cf. [27]). Let $\mathcal{H}_S$ be an n-dimensional Hilbert space, Λ be a quantum channel and for operators $X_1,\ldots,X_\kappa \in \mathcal{B}\,(\mathcal{H}_S)$ let $\mathcal{N}\,(X_1,\ldots,X_\kappa)$ be the set as (8). There is a DFS with respect to Λ if and only if $\mathcal{N}\,(K_1,\ldots,K_r,K_1^*,\ldots,K_r^*) \neq \{\mathbf{0}\}$.*

The condition $\mathcal{N}\,(K_1,\ldots,K_r,K_1^*,\ldots,K_r^*) \neq \{\mathbf{0}\}$ in the theorem above can be checked effectively due to the generalised Shemesh criterion (Theorem 2), so an effective procedure can determine the existence of a DFS for an arbitrary quantum channel.

References

[1] A. Abian. *Linear Associative Algebras.* Pergamon Press, 1971.

[2] A. S. Amitsur and J. Levitzki. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1(4):449–463, 1950.

[3] T. Becker and V. Weispfenning. *Gröbner bases*. Springer, 1993.

[4] S. Bittanti and P. Colaneri. *Periodic systems: filtering and control*. Springer, 2009.

[5] M. R. Bremner. *Groups Complex. Cryptol.*, 3:47–66, 2011.

[6] B. F. Bylov, R. E. Bynograd, D. M. Grobman, and V. V. Nemycky. *Teorija Pokazatelej Lyapunova*. Nauka, 1966.

[7] M.-D. Choi. *Linear Algebra Appl.*, 10:285–290, 1975.

[8] B. P. Demidovich. *Lektsii po Matematicheskoy Teorii Ustoychivosti*. Nauka, 1967.

[9] L. E. Dickson. *Algebras and their Arithmetics*. University of Chicago Press, Chicago, USA, 1923.

[10] P. V. Dooren and P. J. Sreedhar. *Linear Algebra Appl.*, 212-213(1994):131–151, 1994.

[11] Y. A. Drozd and V. V. Kirichenko. *Finite Dimensional Algebras*. Springer, 1994.

[12] W. Eberly. *Comput. Complexity*, 1(2):183–210, 1991.

[13] W. Eberly. *Comput. Complexity*, 1(3):211–234, 1991.

[14] N. P. Erugin. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 5(4):377–380, 1941.

[15] N. P. Erugin. *Travaux Inst. Math. Steklov*, 13:3–96, 1946.

[16] N. P. Erugin. *Linear Systems of Ordinary Differential Equations*. Academic Press, 1966.

[17] D. R. Farenick. *Algebras of Linear Transformations*. Springer, 2001.

[18] F. I. Fedorov. *Dokl. Akad. Nauk BSSR*, 4:454–455, 1960.

[19] I. V. Gajshun. *Vvedenie v Teoriju Linejnyh Nestacionarnyh System*. URSS, 1999.

[20] P. Golokvosčius. *Lith. Math. J.*, 20(3):225–235, 1980.

[21] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan. *J. Math. Phys.*, 17(5):821–825, 1976.

[22] G. Ivanyos and L. Rónyai. Computations in associative and Lie algebras. In *Some tapas of computer algebra*, pages 91–120. Springer, 1999.

[23] A. Jamiołkowski, T. Kamizawa, and G. Pastuszak. *Int. J. Theor. Phys.*, 54(8):2662–2674, 2015.

[24] A. Jamiołkowski and G. Pastuszak. *Linear Multilinear Algebra*, 63:314–325, 2015.

[25] V. I. Kalenova, V. M. Morozov, and P. M. Sobolevskii. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 64(1):50–60, 2009.

[26] T. Kamizawa. *Open Syst. Inf. Dyn.*, 24:1750002, 2017.

[27] T. Kamizawa. *Int. J. Theor. Phys.*, 57(5):1272–1284, 2018.

[28] T. Kamizawa. *Far East J. Math. Sci.*, 107(1):183–192, 2018.

[29] J. Klamka, E. Ferenstein, A. Babiarz, and M. Niezabitowski. *Applied Mechanics and Materials*, 789-790(1):1027–1033, 2015.

[30] I. A. Lappo-Danilevski. *Primenenie funkcij ot matric k teorii linejnyh system obyknovennyh differencial'nyh uravnenij.* Gostehizdat, 1957.

[31] G. A. Lenov and N. V. Kuznetsov. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 17(4):1079–1107, 2007.

[32] G. Lindblad. *Comm. Math. Phys.*, 48(2):119–130, 1976.

[33] D. L. Lukes. *Differential equations: classical to controlled.* Academic Press, 1982.

[34] J. F. P. Martin. *SIAM J. Appl. Math.*, 15:1171–1183, 1967.

[35] V. M. Merkys. *Liet. Mat. Rinkinys*, 8(2):289–295, 1968.

[36] Y. A. Mitropolsky and A. K. Lopatin. *Nonlinear Mechanics, Groups and Symmetry.* Springer, 1995.

[37] C. J. Pappacena. *J. Algebra*, 197(2):535–545, 1997.

[38] G. Pastuszak, T. Kamizawa, and A. Jamiołkowski. *Open Syst. Inf. Dyn.*, 23:1650003, 2016.

[39] A. Paz. *Linear Multilinear Algebra*, 15(2):161–170, 1984.

[40] R. S. Pierce. *The Associative Algebra.* Springer, New York, USA, 1982.

[41] I. M. Salakhova and G. N. Chebotarev. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 16(3):230–234, 1960.

[42] J. H. Shapiro. *Linear Algebra Appl.*, 25:129–137, 1979.

[43] D. Shemesh. *Linear Algebra Appl.*, 62:11–18, 1984.

[44] L. M. Shifner. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat.*, 4:417–422, 1940.

[45] J. H. M. Wedderburn. *Proc. Lond. Math. Soc*, s2–6:77–118, 1908.

[46] M.-Y. Wu. *Int. J. Control*, 27(4):589–602, 1978.

[47] M.-Y. Wu. *Int. J. Control*, 31(1):11–20, 1980.

[48] M.-Y. Wu, I. Horowitz, and J. Dennison. *Int. J. Control*, 22(2):169–180, 1975.

[49] J. Zhu and C. H. Morales. *Linear Algebra Appl.*, 131:71–92, 1990.

[50] J. Zhu and C. H. Morales. *Linear Algebra Appl.*, 170:81–105, 1992.

微分可能な関数の空間における等距離写像について

古清水 大直（米子工業高等専門学校）

1　はじめに

線形空間から線形空間への「線形写像」や距離空間から距離空間への「等距離写像」は, それぞれの空間において構造を保つ写像であり, とても重要である. これらの 2 つの写像は異なる概念であるが, 全く独立しているわけではなく密接に関係している. 例えば, Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ を考える. $\mathbb{R}^n$ には通常の線形構造と距離構造をもつとする. このとき, $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への原点を保存する等距離写像は線形写像になることがわかる. このように, 線形距離空間から線形距離空間への写像が, ある構造や集合を保存したとすると, 他の構造や集合を自動的に保存することがある. このような問題は古くから様々な形で考えられており, 「保存問題」と呼ばれ, Banach 環に関連した研究が多数報告されている.

講演者はこの保存問題に関係して, 具体的な関数空間の間の「等距離写像」を特徴付ける問題について興味を持っている. 例えば, 1930 年代の Banach-Stone の定理「連続関数環の間の全射複素線形等距離写像は, 荷重合成作用素の形である」は有名である. これを機に様々な具体的な関数空間上の全射複素線形等距離写像を特徴付けに関する研究がなされてきた. 講演者は主に微分可能な関数からなる空間上の等距離写像について考え, いくつかの結果を得た.

2　定義といくつかの準備

定義 2.1. $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ をノルム空間とする. 写像 $T : E \to F$ が**等距離写像** *(isometry)* であるとは,

$$\|T(f) - T(g)\|_F = \|f - g\|_E \qquad (\forall f, g \in E)$$

が成り立つときをいう. 等距離写像というときには, 線形性は仮定しないことにする. 線形性が付加されるときは, **等長作用素** *(linear isometry)* ということがある.

X をコンパクト Hausdorff 空間とし, $C(X)$ を X 上の複素数値連続関数全体の集合とする. $C(X)$ は各点の和・スカラー積・積に関して多元環になり, ノルムを

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \qquad (f \in C(X))$$

と定義すると, Banach 環になる.

ここで, Banach-Stone の定理を述べておく. $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ とする.

定理 2.2 (Banach-Stone の定理)**.** X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とする. このとき, 全射複素線形等距離写像 $T : (C(X), \|\cdot\|_\infty) \to (C(Y), \|\cdot\|_\infty)$ は, 連続関数 $w : Y \to \mathbb{T}$ と同相写像 $\varphi : Y \to X$ を用いて,

$$T(f)(y) = w(y)f(\varphi(y)) \qquad (\forall y \in Y, \forall f \in C(X))$$

と表せる.

他にも L^p 空間や Hardy 空間 H^p $(1 \leq p \leq \infty)$, Bergman 空間, Bloch 空間などにおいて全射複素線形等距離写像の形が知られていて, そのほとんどが荷重合成作用素の形をしている ([12]).

本講演では, 微分可能な関数の空間について何種類かの等距離写像を考える. まず, 空間の定義をしておく. ここでは, 基本的には複素数値関数からなる空間を扱うことにする.

2.1 $C^{(n)}[0,1]$

正の整数 n に対して, $C^{(n)}[0,1]$ を閉区間 $[0,1]$ 上の複素数値 C^n 級関数全体の集合とする. $C^{(n)}[0,1]$ はもちろん各点の和・スカラー積に関して線形空間になるが, ここには様々なノルムを考えることができる. 例えば, 次のノルムがある.

$$\begin{aligned}
\|f\|_C &= \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{|f^{(k)}(t)|}{k!} : t \in [0,1]\right\} \\
\|f\|_\Sigma &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\|f^{(k)}\|_\infty}{k!} \\
\|f\|_M &= \max\left\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty, \ldots, \|f^{(n)}\|_\infty\right\} \qquad (f \in C^{(n)}[0,1]) \\
\|f\|_\sigma &= \sum_{k=0}^{n-1} |f^{(k)}(0)| + \|f^{(n)}\|_\infty \\
\|f\|_m &= \max\left\{|f(0)|, |f'(0)|, \ldots, |f^{(n-1)}(0)|, \|f^{(n)}\|_\infty\right\}
\end{aligned}$$

ここで, $\|\cdot\|_C$ と $\|\cdot\|_\Sigma$ は $C^{(n)}[0,1]$ を Banach 環にするノルムである. また, これらは互いに同値なノルムであるので, 位相線形空間としては同型である. しかし, ここでは等距離写像を扱うのでノルムが変われば等距離写像も変わる可能性があるためそれぞれについて考える必要がある.

2.2 $\mathbf{Lip}[0,1]$

閉区間 $[0,1]$ 上の Lipschitz 連続関数 f は, $[0,1]$ のほとんどいたるところ f' が存在して, f' は $[0,1]$ 上の本質的有界な可測関数になる. そこで, $[0,1]$ 上の本質的有界な可測関数全体の集合を $L^\infty[0,1]$ とかく. ただし, $[0,1]$ のほとんどいたるところ同じ関数は同じ元とみなす. $L^\infty[0,1]$ は $[0,1]$ のほとんどいたる点での和・スカラー積・積とノルム

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)| : t \in [0,1]\}$$

と, 複素共役による対合に関して, 単位元をもつ可換 C^* 環になる.

さて, $[0,1]$ 上の複素数値 Lipschitz 連続関数全体の集合を $\mathrm{Lip}[0,1]$ とかく. $\mathrm{Lip}[0,1]$ は $[0,1]$ の各点での和・スカラー積に関して線形空間になる. 線形空間 $\mathrm{Lip}[0,1]$ には, ノルムがいくつか考えられるが, 例えば次の 4 つのノルムがある.

$$\begin{aligned} \|f\|_\Sigma &= \|f\|_\infty + \|f'\|_{L^\infty} \\ \|f\|_M &= \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_{L^\infty}\} \\ \|f\|_\sigma &= |f(0)| + \|f'\|_{L^\infty} \\ \|f\|_m &= \max\{|f(0)|, \|f'\|_{L^\infty}\} \end{aligned} \qquad (f \in \mathrm{Lip}[0,1])$$

これらのノルムは互いに同値なノルムであり, $\mathrm{Lip}[0,1]$ はそれぞれのノルムに関して Banach 空間になる.

2.3 $\mathrm{AC}^p[0,1]$

閉区間 $[0,1]$ 上の絶対連続関数 f は, $[0,1]$ のほとんどいたるところ f' が存在して, f' は $[0,1]$ 上の可積分関数になる. $1 \le p < \infty$ に対して, $[0,1]$ 上の p 乗可積分関数全体の集合を $L^p[0,1]$ とかく. ただし, $[0,1]$ のほとんどいたるところ同じ関数は同じ元とみなす. $L^p[0,1]$ は $[0,1]$ のほとんどいたる点での和・スカラー積とノルム

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_0^1 |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

に関して Banach 空間になる.

ここで,

$$\mathrm{AC}^p[0,1] = \{f : [0,1] \text{ 上の複素数値絶対連続関数} : f' \in L^p[0,1]\}$$

とおく. $\mathrm{AC}^p[0,1]$ は $[0,1]$ の各点の和・スカラー積に関して線形空間になる. 線形空間 $\mathrm{AC}^p[0,1]$ にはノルムがいくつか考えられるが, 例えば次の 4 つのノルムがある.

$$\begin{aligned} \|f\|_\Sigma &= \|f\|_\infty + \|f'\|_{L^p} \\ \|f\|_M &= \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_{L^p}\} \\ \|f\|_\sigma &= |f(0)| + \|f'\|_{L^p} \\ \|f\|_m &= \max\{|f(0)|, \|f'\|_{L^p}\} \end{aligned} \qquad (f \in \mathrm{AC}^p[0,1])$$

これらのノルムは互いに同値なノルムであり, $\mathrm{AC}^p[0,1]$ はそれぞれのノルムに関して Banach 空間になる.

集合の包含関係は,

$$C^{(n)}[0,1] \subset C^{(1)}[0,1] \subset \mathrm{Lip}[0,1] \subset \mathrm{AC}^p[0,1] \subset \mathrm{AC}^1[0,1] \subset C([0,1])$$

となる. また, 記号の便宜上 $\mathrm{AC}^\infty[0,1] = \mathrm{Lip}[0,1]$ や $C^{(0)}[0,1] = C([0,1])$ と考えることがある.

3　複素線形等距離写像

様々な関数空間上の等距離写像がどのような形になっているかを紹介する. まずは, 複素線形等距離写像の話から始める.

3.1　全射の複素線形等距離写像

全射の複素線形等距離写像の特徴付けの問題は Banach-Stone の定理を皮切りに, いくつも結果が報告されている. 正則関数の空間 [14, 37] や作用素環 [34] に関するものなどもあるが, ここでは主に連続関数からなる集合やその部分集合を扱う.

さて, 関数空間における全射複素線形等距離写像の形を決定するために, 共役空間の単位球の端点を利用する方法がある.

定義 3.1. E をノルム空間とし, K を E の部分集合とする. $f \in E$ が K の**端点** *(extreme point)* であるとは,

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad (f_1, f_2 \in K) \quad \text{ならば,} \quad f = f_1 = f_2$$

が成り立つときをいう. また, K の端点全体の集合を $\mathrm{ext}(K)$ と表す.

$E_1 = \{f \in E : \|f\|_E \leq 1\}$ をノルム空間 E の閉単位球とする. ノルム空間の間の全射の線形等距離写像は閉単位球の端点を端点にうつすことが知られている. これより, E の共役空間 E^* の閉単位球 $E_1^* = \{\eta \in E^* : \|\eta\| \leq 1\}$ と共役作用素を考えると次のことが成り立つ.

命題 3.2. ノルム空間 E からノルム空間 F への全射複素線形等距離写像 T の共役作用素 $T^* : F^* \to E^*$ に対して,

$$T^*(\mathrm{ext}\, F_1^*) = \mathrm{ext}(E_1^*)$$

が成り立つ.

この事実より, 共役空間の端点の集合が分かると全射複素線形等距離写像の形を決められる可能性がある. 実際, Dunford and Schwartz [10] の著書において, Banach-Stone の定理はこの考え方により全射複素線形等距離写像を決定している.

また, 全射複素線形等距離写像について Nagasawa [35] や deLeeuw, Rudin and Wermer [9] が関数環上で述べていたり, Araujo and Font [1] は, $C_0(X)$ の部分空間の間の全射複素線形等距離写像について X のある集合上で荷重合成作用素の形になっていることを示し, Banach-Stone の定理を拡張した. ここで, $C_0(X)$ は局所コンパクト Hausdorff 空間 X 上の複素数値連続関数で無限遠点で 0 になるもの全体の集合とし, これは $\|\cdot\|_\infty$ により Banach 環になる.

さて, 微分可能な関数からなる空間上の全射複素線形等距離写像についての話をしよう. まず, $C^{(1)}[0,1]$ について, Cambern, Rao and Roy, Jarosz and Pathak は, 共役空間の端点を利用し, 次の定理を得ている.

定理 3.3 ([6, 39, 21])**.** $E \in \{C, \Sigma, M\}$ とする. 全射複素線形等距離写像 $T : (C^{(1)}[0,1], \|\cdot\|_E) \to (C^{(1)}[0,1], \|\cdot\|_E)$ は, 定数 $\lambda \in \mathbb{T}$ を用いて,

$$T(f)(t) = \lambda f(\varphi(t)) \qquad (\forall t \in [0,1],\, \forall f \in C^{(1)}[0,1])$$

と表せる. ただし, $\varphi(t) = t$ $(\forall t \in [0,1])$ または $\varphi(t) = 1 - t$ $(\forall t \in [0,1])$ である.

その後, 1981 年に Pathak が $\|\cdot\|_C$ に対して, $C^{(n)}[0,1]$ に拡張した.

定理 3.4 ([38])**.** 全射複素線形等距離写像 $T : (C^{(n)}[0,1], \|\cdot\|_C) \to (C^{(n)}[0,1], \|\cdot\|_C)$ は, 定数 $\lambda \in \mathbb{T}$ を用いて,

$$T(f)(t) = \lambda f(\varphi(t)) \qquad (\forall t \in [0,1],\, \forall f \in C^{(n)}[0,1])$$

と表せる. ただし, $\varphi(t) = t$ $(\forall t \in [0,1])$ または $\varphi(t) = 1 - t$ $(\forall t \in [0,1])$ である.

また, 講演者は別のノルムで以下の定理を導いた. ここで,

$$(Sg)(t) = \int_0^t g(s)\, ds \ (\forall t \in [0,1], \forall g \in C([0,1]))$$

とおく.

定理 3.5 ([26, 27])**.** $E \in \{\sigma, m\}$ とする. 全射複素線形等距離写像 $T : (C^{(n)}[0,1], \|\cdot\|_E) \to (C^{(n)}[0,1], \|\cdot\|_E)$ は, 連続関数 $w : [0,1] \to \mathbb{T}$, 同相写像 $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, 置換 $\tau : \{0,1,\ldots,n-1\} \to \{0,1,\ldots,n-1\}$ および定数 $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{T}$ を用いて,

$$T(f)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k f^{(\tau(k))}(0)}{k!} t^k + \left(S^n(w(f^{(n)} \circ \varphi))\right)(s) \qquad (\forall t \in [0,1],\, \forall f \in C^{(n)}[0,1])$$

と表せる.

これらの定理で注目すべき点は, 全射複素線形等距離写像が荷重合成作用素の形をしているか, していないかについてである. $\|\cdot\|_C, \|\cdot\|_\Sigma, \|\cdot\|_M$ については, 荷重合成作用素の形で, $\|\cdot\|_\sigma$ と $\|\cdot\|_m$ は荷重合成作用素の形でない. 講演者はノルムのどんな違いが等距離写像に影響しているかということにこのとき疑問をもった.

また, $\mathrm{Lip}[0,1]$ や $\mathrm{AC}^p[0,1]$ に関しても似たような結果が得られていて, $\|\cdot\|_\Sigma$ や $\|\cdot\|_M$ についての全射複素線形等距離写像は荷重合成作用素の形をしている ([6, 39, 21]). 講演者は $\|\cdot\|_\sigma$ と $\|\cdot\|_m$ については全射複素線形等距離写像は荷重合成作用素の形をしていないことを突き止めた.

定理 3.6 ([26, 27])**.** $(\mathrm{Lip}[0,1], \|\cdot\|_\sigma)$ または $(\mathrm{Lip}[0,1], \|\cdot\|_m)$ 上の全射複素線形等距離写像 T は, $L^\infty[0,1]$ から $L^\infty[0,1]$ の上への多元環同型写像 Φ と, $|w(x)| = 1\,(a.e.\, x \in [0,1])$ となる $w \in L^\infty[0,1]$ 及び定数 $\lambda \in \mathbb{T}$ を用いて,

$$T(f)(t) = \lambda f(0) + \int_0^t w(s)(\Phi f')(s)\, ds \qquad (\forall t \in [0,1], \forall f \in \mathrm{Lip}[0,1])$$

と表せる.

定理 3.7 ([28])**.** $(\mathrm{AC}^p[0,1], \|\cdot\|_\sigma)$ または $(\mathrm{AC}^p[0,1], \|\cdot\|_m)$ 上の全射複素線形等距離写像 T は, $L^p[0,1]$ 上の全射複素線形等距離写像 Ψ と定数 $\lambda \in \mathbb{T}$ を用いて,

$$T(f)(t) = \lambda f(0) + \int_0^t (\Psi f')(s)\, ds \qquad (\forall t \in [0,1], \forall f \in \mathrm{AC}^p[0,1])$$

と表せる.

定理 3.7 の証明については, $1 \leq p < \infty$ に対して, $1/p + 1/q = 1$ を満たす q をとる. ($p = 1$ のとき, $q = \infty$ と考える.) このとき, $(\mathrm{AC}^p[0,1], \|\cdot\|_\sigma)^*$ が $(\mathrm{AC}^q[0,1], \|\cdot\|_m)$ と等長同型であり, $(\mathrm{AC}^p[0,1], \|\cdot\|_m)^*$ が $(\mathrm{AC}^q[0,1], \|\cdot\|_\sigma)$ と等長同型になる. これらの事実をもとに既存の結果と以下に示す直積空間の端点に関する命題をうまく使うことにより特徴付けた.

直積空間の端点について, 次のことが知られている. $(A, \|\cdot\|_A), (B, \|\cdot\|_B)$ をノルム空間とする. 直積空間 $A \times B$ のノルムについて次の 2 つを考える.

$$\begin{aligned} \|(a,b)\|_\sigma &= \|a\|_A + \|b\|_B \\ \|(a,b)\|_m &= \max\{\|a\|_A, \|b\|_B\} \end{aligned} \qquad ((a,b) \in A \times B)$$

命題 3.8. $(a,b) \in A \times B$ とする.

(1) $(a,b) \in \mathrm{ext}((A \times B, \|\cdot\|_\sigma)_1)$ であるための必要十分条件は,「$a \in \mathrm{ext}(A_1)$, $b = 0$」または「$a = 0$, $b \in \mathrm{ext}(B_1)$」となることである.

(2) $(a,b) \in \mathrm{ext}((A \times B, \|\cdot\|_m)_1)$ であるための必要十分条件は, $a \in \mathrm{ext}(A_1)$ かつ $b \in \mathrm{ext}(B_1)$ となることである.

また, 定理 3.7 は Botelho and Jamison [5] によってベクトル値関数に拡張されている.

3.2 余次元 n 等長作用素, シフト作用素, 2-local isometry

次に全射でない複素線形等距離写像についての話をしよう. 1966 年に Holsztyński は $C(X)$ の間の全射とは限らない複素線形等距離写像について特徴付けされた.

定理 3.9 ([18])**.** X, Y をコンパクト Hausdorff 空間とする. 全射とは限らない複素線形等距離写像 $T : (C(X), \|\cdot\|_\infty) \to (C(Y), \|\cdot\|_\infty)$ は, Y の閉集合 Y_0, 連続関数 $w : Y_0 \to \mathbb{T}$ と全射連続写像 $\varphi : Y_0 \to X$ を用いて,

$$T(f)(y) = w(y) f(\varphi(y)) \qquad (\forall y \in Y_0, \forall f \in C(X))$$

と表せる.

また, Novinger [36] は $C_0(X)$ において述べていたり, ベクトル値関数については Cambern [7] が述べたりしている. Jiménez-Vargas and Villegas-Vallecillos [22] により, $(\mathrm{Lip}[0,1], \|\cdot\|_M)$ 上の全射でない複素線形等距離写像の特徴付けが得られている.

一般の全射でない複素線形等距離写像についての特徴付けは, 全射の複素線形等距離写像ほど結果がなく難しいと感じている. そこである条件をもつ（全射とは限らない）複素線形等距離写像の特徴付けについて考えてみる.

定義 3.10. E, F をノルム空間とする. 写像 $T : E \to F$ が**余次元 n 等長作用素** *(codimension n linear isometry)* とは, 以下のことを満たすときをいう.

(1) T は複素線形等距離写像である.

(2) 商空間 $F/T(E)$ が *(*線形空間として*)*n 次元である.

なお, $n = 0$ のとき, すなわち, 余次元 0 等長作用素は全射である.

余次元 n 等長作用素に関しては, 色々な関数空間で特徴付けされている. 例えば, Takahasi and Okayasu は以下のことを示した.

定理 3.11 ([40])**.** 余次元 n 等長作用素 $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ は, 全射になる.

Font [13] は単位元をもつ関数環を取り上げたり, Aruajo and Font [3] はベクトル値関数の連続関数の空間について, 結果を得ている. 他にも, [2, 20, 23, 17] などがある. 余次元 1 等長作用素の特別なものとして，シフト作用素というものもあり, その存在性についても問題になっている ([8, 19, 41, 15])**.**

また, 次の 2-local isometry に関することも近年, 報告がある.

定義 3.12. ノルム空間 $(E, \|\cdot\|_E)$ から $(F, \|\cdot\|_F)$ への写像 T が **2-local isometry** であるとは, 任意の $f, g \in E$ に対して,

$$T(f) = T_{f,g}(f) \quad \text{かつ} \quad T(g) = T_{f,g}(g)$$

となる全射複素線形等距離写像 $T_{f,g} : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ が存在するときをいう.

Győry [16] は $C_0(X)$ 上の 2-local isometry について考え, X により全射である場合とそうでない場合があることを述べた. また, 講演者らは $(C^{(n)}[0,1], \|\cdot\|_C)$ 上の 2-local isometry は全射であり, 荷重合成作用素の形をしていることを突き止めた ([25]).

4　全射等距離写像

ここまで複素線形性を仮定した等距離写像を扱ってきた. ここでは必ずしも線形とは限らない等距離写像を扱うが, 次の Mazur-Ulam の定理 [30] は, ノルム空間の間の原点を保存する全射の等距離写像は自動的に実線形写像であることを保証している.

定理 4.1 (Mazur-Ulam の定理)**.** E, F をノルム空間とし, $T : E \to F$ を全射の等距離写像とする. このとき, $T - T(0)$ は実線形である.

この定理により全射の等距離写像は, 本質的には全射実線形等距離写像であることがわかる. したがって, 全射実線形等距離写像の形を決定することについて考える.

全射実線形等距離写像については, Ellis [11] が単位元をもつ関数環で述べていたり, Miura [31] は単位元を持たない関数環において述べている. また, K., Miura, Takagi and Takahasi [29] は $C_0(X)$ のある複素線形部分空間おいて全射の実線形等距離写像を扱っている. それについて少し述べる.

定義 4.2. X を局所コンパクト Hausdorff 空間とし, A を $C_0(X)$ の複素線形部分空間とする. 任意の $x \in X$ に対して, $e_x \in A^*$ を $e_x(f) = f(x)$ $(\forall f \in A)$ と定める. このとき, $\mathrm{Ch}(A) = \{x \in X : e_x \in \mathrm{ext}(A_1^*)\}$ を A の **Choquet 境界**という.

A が X の点を**強分離**するとは, 任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して，$|f(x)| \neq |f(y)|$ となる $f \in A$ が存在するときをいう**.**

また, A が X の点を **3 点強分離**するとは, 任意の異なる 3 点 $x, y, z \in X$ に対して，$|f(x)| \neq |f(y)|$ かつ $f(z) = 0$ となる $f \in A$ が存在するときをいう**.**

定理 4.3 ([29])**.** X, Y を局所コンパクト Hausdorff 空間とする. A, B をそれぞれ $C_0(X), C_0(Y)$ の複素線形部分空間とする. A が X の点を 3 点強分離し, B が Y の点を強分離するとする. このとき, 全射実線形等距離写像 $T : (A, \|\cdot\|_\infty) \to (B, \|\cdot\|_\infty)$ は, $\mathrm{Ch}(B)$ の開かつ閉集合 K と連続関数 $w : \mathrm{Ch}(B) \to \mathbb{T}$ と同相写像 $\varphi : \mathrm{Ch}(B) \to \mathrm{Ch}(A)$ を用いて,

$$T(f)(y) = \begin{cases} w(y)f(\varphi(y)) & (y \in K) \\ w(y)\overline{f(\varphi(y))} & (y \in \mathrm{Ch}(B) \setminus K) \end{cases} \qquad (\forall f \in A)$$

と表せる.

このように, 複素共役の部分があるが, この空間での全射実線形等距離写像は荷重合成作用素の形をしているということが言える.

さて, 微分可能な関数の空間ではどうであろうか. ここで, $z \in \mathbb{C}$ に対して, $[z]^1 = z$, $[z]^{-1} = \overline{z}$ と定める.

定理 4.4 ([33])**.** 全射実線形等距離写像 $T : (C^{(1)}[0,1], \|\cdot\|_\Sigma) \to (C^{(1)}[0,1], \|\cdot\|_\Sigma)$ は, 定数 $\lambda \in \mathbb{T}$ と $\delta \in \{\pm 1\}$ を用いて,

$$T(f)(t) = \lambda[f(\varphi(t))]^\delta \qquad (\forall t \in [0,1],\ \forall f \in C^{(1)}[0,1])$$

と表せる. ただし, $\varphi(t) = t$ $(\forall t \in [0,1])$ または $\varphi(t) = 1 - t$ $(\forall t \in [0,1])$ である.

定理 4.5 ([32])**.** 全射実線形等距離写像 $T : (C^{(1)}[0,1], \|\cdot\|_m) \to (C^{(1)}[0,1], \|\cdot\|_m)$ は, 定数 $\lambda \in \mathbb{T}$, 連続関数 $\beta : [0,1] \to \mathbb{T}$, 同相写像 $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ と $\delta_0, \delta_1 \in \{\pm 1\}$ を用いて,

$$T(f)(t) = \lambda[f(0)]^{\delta_0} + \int_0^t \beta(s)[f'(\varphi(s))]^{\delta_1}\, ds \qquad (\forall t \in [0,1],\ \forall f \in C^{(1)}[0,1])$$

と表せる.

これは, もちろん全射複素線形等距離写像の形を含んでいる. ここで, 全射複素線形等距離写像のところでも触れたが, ノルムの違いにより荷重合成作用素の形になったりならなかったりする. それはなぜか. また, ノルムが変わるごとに議論するが, その証明方法は似ていてこれらを同時に扱う方法はないか. これらの考察から, ノルムを一般化し統一的に扱えないかということを考えてきた. そして, 川村一宏先生と三浦毅先生とともに $C^{(1)}[0,1]$ 上の $\|\cdot\|_C, \|\cdot\|_\Sigma, \|\cdot\|_\sigma$ を含むノルムを定義し, このノルムにおける $C^{(1)}[0,1]$ 上の全射実線形等距離写像を特徴付けた. このノルムを $C^{(n)}[0,1]$ で考えたもので述べることができたので, まとめてここで扱うことにする.

D を直積空間 $[0,1]^{n+1}$ の連結コンパクト集合とする. また, c_k $(\forall k \in \{0,1,2,\ldots,n\})$ を正の定数とする. このとき,

$$\|f\|_{<D>} = \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} c_k |f^{(k)}(r_k)| : (r_0, r_1, \ldots, r_n) \in D\right\} \qquad (f \in C^{(n)}[0,1])$$

とおく. すると,

$$D_1 = \{(r, r, \ldots, r) \in [0,1]^{n+1} : r \in [0,1]\}$$
$$D_2 = [0,1]^{n+1}$$
$$D_3 = \{0\}^n \times [0,1]$$

とおき, c_k を適当に定めることにより $\|f\|_{<D_1>} = \|f\|_C$ $\left(c_k = \dfrac{1}{k!}\right)$, $\|f\|_{<D_2>} = \|f\|_\Sigma$ $\left(c_k = \dfrac{1}{k!}\right)$, $\|f\|_{<D_3>} = \|f\|_\sigma$ $(c_k = 1)$ であることが分かる.

また, 任意の $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ に対して, $p_k : [0,1]^{n+1} \to [0,1]$ を第 k 成分への射影とする. すなわち,

$$p_k((r_0, r_1, \ldots, r_n)) = r_k \qquad (\forall (r_0, r_1, \ldots, r_n) \in [0,1]^{n+1})$$

とする. D は連結コンパクト集合なので, $p_k(D) = [a_k, b_k]$ $(a_k \leq b_k)$ とおく.

このノルムに関して, 以下の 2 つの命題が成り立つ.

命題 4.6. $\|\cdot\|_{<D>}$ が $C^{(n)}[0,1]$ のノルムになるための必要十分条件は, $\bigcup_{k=0}^{n} p_k(D) = [0,1]$ が成り立つことである.

命題 4.7. $p_n(D) = [0,1]$ とする. このとき, $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ が存在し,

$$K_1\|f\|_\Sigma \leq \|f\|_{<D>} \leq K_2\|f\|_\Sigma \qquad (\forall f \in C^{(n)}[0,1])$$

が成り立つ. よって, このとき $(C^{(n)}[0,1], \|\cdot\|_{<D>})$ は Banach 空間になる.

定理 4.8. D を $[0,1]^{n+1}$ の連結コンパクト集合とし, $\bigcup_{k=0}^{n} p_k(D) = [0,1]$ とする. このとき, 全射実線形等距離写像 $T : (C^{(n)}[0,1], \|\cdot\|_{<D>}) \to (C^{(n)}[0,1], \|\cdot\|_{<D>})$ は, 置換 $\tau : \{0, 1, \ldots, n\} \to \{0, 1, \ldots, n\}$ と各 $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ に対して, C^{n-k} 級関数 $\beta_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{C}$ $\left(|\beta_k| = \dfrac{c_{\tau(k)}}{c_k}\right)$, C^{n-k} 級微分同相写像 $\varphi_k : [a_k, b_k] \to [a_{\tau(k)}, b_{\tau(k)}]$ および $\delta_k \in \{\pm 1\}$ を用いて, すべての $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ に対して,

$$(T(f))^{(k)} = \beta_k[f^{(\tau(k))} \circ \varphi_k]^{\delta_k} \quad \text{on} \quad [a_k, b_k] \qquad (\forall f \in C^{(n)}[0,1])$$

と表せる.

$n = 1$ のとき, 置換 τ は恒等置換になることが分かり, Kawamura, K. and Miura の結果となる ([24]). また, $D_1 = \{(r, r, \ldots, r) \in [0,1]^{n+1} : r \in [0,1]\}$ のときも τ が恒等置換になることがわかり, 全射複素線形等距離写像の Pathak の定理 (定理 3.4) の拡張であることがわかる. さらに, $D_3 = \{0\}^n \times [0,1]$ のとき, $\tau(n) = n$ となり, 定理 3.5 の $\|\cdot\|_\sigma$ の拡張であることがわかる. なお, 置換 τ が恒等置換になる条件についてはまだはっきりと分かっていない.

さらに, 次のようなノルムに関しても全射実線形等距離写像の特徴付けが得られる.

系 4.9. $n = 2$, $c_0 = c_1 = c_2 = 1$, $D_4 = \{0\} \times [0,1] \times [0,1]$ とすると, ノルムは

$$\|f\|_{<D_4>} = |f(0)| + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty$$

である. このとき, 全射実線形等距離写像 $T : (C^{(2)}[0,1], \|\cdot\|_{<D_4>}) \to (C^{(2)}[0,1], \|\cdot\|_{<D_4>})$ は, 定数 λ, $\mu \in \mathbb{T}$ と $\delta_0, \delta_1 \in \{\pm 1\}$ を用いて,

$$T(f)(t) = \lambda[f(0)]^{\delta_0} + \mu[f(t) - f(0)]^{\delta_1} \qquad (\forall t \in [0,1], \forall f \in C^{(2)}[0,1])$$

または

$$T(f)(t) = \lambda[f(0)]^{\delta_0} + \mu[f(1-t) - f(1)]^{\delta_1} \qquad (\forall t \in [0,1], \forall f \in C^{(2)}[0,1])$$

と表せる.

5　おわりに

微分可能な関数の空間上の等距離写像について, すでに一部知られている結果もあるが様々な拡張が考えられる. ここで挙げる一例に類似して, 一般の n や他の微分可能な関数の空間やさらに一般化した空間, さらには全射実線形等距離写像や全射とは限らない等距離写像など, それらを組み合わせたりして各方面に考えることができる.

- 別のノルムでの問題やそのノルムの一般化
  例えば, $1 < p < \infty$ のとき, $C^{(1)}[0,1]$ において,

$$\|f\| = (\|f\|_\infty^p + \|f'\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}} \qquad (f \in C^{(1)}[0,1])$$

  の場合など.

- ベクトル値関数への拡張
  例えば, $(E, \|\cdot\|_E)$ を Banach 空間とし, $C^{(1)}([0,1], E)$ を $[0,1]$ 上の E に値をとる C^1 級関数全体とする. ノルムを

$$\|f\|_C = \sup\{\|f(t)\|_E + \|f'(t)\|_E \colon t \in [0,1]\} \qquad (f \in C^{(1)}([0,1], E))$$

  と定義すると, $(C^{(1)}([0,1], E), \|\cdot\|_C)$ は Banach 空間になる. 2009 年に Botelho and Jamison は以下のことを証明した.

  定理 5.1 ([4])**.** *E を有限次元 Hilbert 空間とする. このとき, 全射複素線形等距離写像 $T : (C^{(1)}([0,1], E), \|\cdot\|_C) \to (C^{(1)}([0,1], E), \|\cdot\|_C)$ は, 全射複素線形等距離写像 $U : E \to E$ と同相写像 $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ を用いて,*

$$T(f)(t) = U(f(\varphi(t))) \qquad (\forall t \in [0,1], \forall f \in C^{(1)}([0,1], E))$$

  と表せる.

参考文献

[1] J. Araujo and J. J. Font, *Linear isometries between subspaces of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 413–428.

[2] J. Araujo and J. J. Font, *Codimension* 1 *linear isometries on function algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 2273–2281.

[3] J. Araujo and J. J Font, *Finite codimensional isometries on spaces of vector-valued continuous functions* J. Math. Anal. Appl. **421** (2015), 186–205.

[4] F. Botelho and J. Jamison, *Surjective isometries on spaces of differentiable vector-valued functions*, Studia Math. **192** (2009), 39–50.

[5] F. Botelho and J. Jamison, *Surjective isometries on absolutely continuous functions vector valued function spaces*, Contemp. Math. **687** (2017), 55–65.

[6] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math. **25** (1965), 217–225.

[7] M. Cambern, *A Holsztyński theorem for spaces of continuous vector-valued functions*, Studia Math. **63** (1978), 213–217.

[8] R. M. Crownover, *Commutants of shifts on Banach spaces*, Michigan Math. J. **19** (1972), 233–247.

[9] K. deLeeuw, W. Rudin and J. Wermer, *The isometries of some function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 694–698.

[10] N. Dunford and J. T. Schwartz, "Linear operators. Part I. General theory.", With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle. Reprint of the 1958 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.

[11] A. J. Ellis, *Real characterization to function algebras amongst function spaces*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 381–385.

[12] R. J. Fleming and J. E. Jamison, "Isometries on Banach spaces; vol.1, function spaces", Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Math. **129**, Boca Raton 2003.

[13] J. J. Font, *Isometries between function algebras with finite codimensional range*, Manuscripta Math. **100** (1999), 13–21.

[14] F. Forelli, *The isometries of H^p*, Canad J. Math. **16** (1964), 721–728.

[15] A. Gutek, D. Hart, J. Jamison and M. Rajagopalan, *Shift operators on Banach spaces*, J. Funct. Anal. **101** (1991), 97–119.

[16] M. Győry, 2*-local isometries of* $C_0(X)$, Acta Sci. Math. (Szeged) **67** (2001), 735–746.

[17] O. Hatori and K. Kasuga, *Linear isometries of finite codimensions on Banach algebras of holomorphic functions*, Banach J. Math Anal. **3** (2009), 109–124.

[18] K. Holsztyński, *Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuous functions*, Studia. Math. **26** (1966), 133–136.

[19] J. R. Holub, *On shift operators*, Canad. Math. Bull. **31** (1988), 85–94.

[20] K. Izuchi, *Douglas algebras which admit codimension* 1 *linear isometries*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 2069–2074.

[21] K. Jarosz and V. D. Pathak, *Isometries between function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **305** (1988), 193–206.

[22] A. Jiménez-Vargas and M. Villegas-Vallecillos, *Into linear isometries between spaces of Lipschitz functions*, Houston J. Math. **34** (2008), 1165–1184.

[23] K. Kasuga, *There are no codimension* 1 *linear isometries on the ball and polydisk algebras*, Sci. Math. Jpn. **54** (2001), 387–390. **56** (2002), 69–70.

[24] K. Kawamura, H. Koshimizu and T. Miura, *Norms on* $C^{(1)}([0,1])$ *and their isometries*, Acta Sci. Math. (Szeged), **84** (2018), 239–261.

[25] K. Kawamura, H. Koshimizu and T. Miura, 2-*local isometries on* $C^{(n)}([0,1])$, to appear in Contemp. Math.

[26] H. Koshimizu, *Finite codimensional linear isometries on spaces of differentiable and Lipschitz functions*, Cent. Eur. J. Math., **9** (2011), 139–146.

[27] H. Koshimizu, *Linear isometries on spaces of continuously differentiable and Lipschitz continuous functions*, Nihonkai Math. J. **22** (2011), 73–90.

[28] H. Koshimizu, *Linear isometries on spaces consisting of absolutely continuous functions*, Acta Sci. Math. (Szeged) **80** (3–4) (2014), 581–590.

[29] H. Koshimizu, T. Miura, H. Takagi and S. -E. Takahasi, *Real-linear isometries between subspaces of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **413** (2014), 229–241.

[30] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 946–948.

[31] T. Miura, *Real linear isometries between function algebras*, Cent. Eur. J. Math. **9** (2011), 778–788.

[32] T. Miura, *Surjective isometries between function spaces*, Contemp. Math. **645** (2015), 231–239.

[33] T. Miura and H. Takagi, *Surjective isometries on the Banach space of continuously differentiable functions*, Contemp. Math. **687** (2017), 181–192.

[34] L. Molnár, "Selected preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces", Lecture Notes in Mathematics, 1895. Springer, Berlin, 2007.

[35] M. Nagasawa, *Isomorphism between commutative Banach algebras with an application to rings of analytic functions*, Kodai Math. Sep. Rep. **11** (1959), 182–188.

[36] W. Novinger, *Linear isometries of subspaces of continuous functions*, Studia Math. **53** (1975), 273–276.

[37] W. Novinger and D. Oberlin, *Linear isometries of some normed spaces of analytic functions*, Canad. J. Math. **37** (1985), 62–74.

[38] V. D. Pathak, *Isometries of $C^{(n)}[0,1]$*, Pacific J. Math. **94** (1981), 211–222.

[39] N. V. Rao and A. K. Roy, *Linear isometries of some function spaces*, Pacific J. Math. **38** (1971), 177–192.

[40] S. -E. Takahasi and T. Okayasu, *A note on finite codimensional linear isometries of $C(X)$ into $C(Y)$*, Internat. J. Math. Math. Sci. **18** (1995), 677–680.

[41] T. Takayama and J. Wada, *Isometric shift operators on the disc algebra*, Tokyo J. Math. **21** (1998), 115–120.

Hironao Koshimizu
National Institute of Technology, Yonago College, Yonago 683-8502, JAPAN
E-mail address: koshimizu@yonago-k.ac.jp

ヒルベルト空間の部分空間の配置と箙のヒルベルト表現

綿谷　安男（WATATANI, YASUO）　九大数理

Abstract. Hilbert 空間の n 個の部分空間の配置については、まだわかっていないことも多い。特に 1 個や 2 個や 3 個や 4 個の部分空間の配置の構造について、今までの研究の survey をおこなう。特に二つの直和に分かれない直既約な配置を考察する。Hilbert 空間上に作用する作用素の族を有向グラフ（箙 quiver) にそって表したものを quiver のヒルベルト表現といい、その中で二つの直和に分かれないようなものを直既約表現という。ヒルベルト表現の準同型環がスカラーになるものを推移的な表現という。これらの quiver のヒルベルト表現はディンキン図形に関連がある。また、部分空間の配置は、特別な quiver のヒルベルト表現ともみなせて、これらは密接に関係している。今回の内容はすべて榎本氏との共同研究である。名古屋大学で私が行った集中講義の（記録者の佐藤僚亮氏と植田好道氏による）講義ノートの助けを部分的にかりています。

1. Hilbert 空間の n 個の部分空間の配置

問題：「Hilbert 空間 H の中にある n 個の部分空間 $E_1, \dots E_n$ の配置（相対的位置関係）にはどんな種類のものがあるか？」

を考えよう。特に無限次元で直和に分解しない（直既約という）部分空間の配置を見つけよ。この問題は難しい。直和に分解しない部分空間の配置の存在については、部分空間の個数が 2 個以下なら無限次元の場合では存在しない、4 個以上の場合は無限次元の場合でも存在する。しかし 3 個の場合は存在すらわからない．なお，有限次元であれば 3 個や 4 個の部分空間の直既約な配置はすべて知られている。

鍵となるのは次のことばである：
1 個の部分空間：次元と余次元
2 個の部分空間：角度、operator range
3 個の部分空間：分配法則の破れ、２重三角形、５角形
4 個の部分空間：不足指数 (defect)

Definition. Hilbert 空間 H の中に n 個の部分空間 $E_1, \dots E_n$ があるとき $\mathcal{S} = (H|E_1, \dots, E_n)$ を H の n 個の部分空間の配置または系（a system of n subspaces in H or an n-subspace system in H）という。$\mathcal{S} = (H|E_1, \dots, E_n)$ が 0 とは、$H = 0$ であることである。

次に Hilbert 空間の部分空間の配置に対して異なる同値関係を考察する。

Definition. Hilbert 空間 H の n 個の部分空間の配置

$$\mathcal{S} = (H|E_1, \ldots, E_n), \quad \mathcal{S}' = (H'|E'_1, \ldots, E'_n)$$

に対して次のように三つの同値関係を定義する：

(1) $\mathcal{S} \cong_{\text{alg}} \mathcal{S}'$ （代数的同値）であることを $\varphi(E_i) = E'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ なる線型全単射 $\varphi : H \to H'$ が存在することで定める。
(2) $\mathcal{S} \cong_{\text{unit}} \mathcal{S}'$ （ユニタリ同値）であること を $\varphi(E_i) = E'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ なるユニタリー作用素 $\varphi : H \to H'$ が存在することで定める。
(3) $\mathcal{S} \cong_{\text{bd}} \mathcal{S}'$ （有界同値）であることを $\varphi(E_i) = E'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ なる有界線型可逆写像 $\varphi : H \to H'$ が存在すること，と定める。

もちろん、（ユニタリ同値）$\Longrightarrow$ （有界同値）$\Longrightarrow$ （代数的同値）だが、 一般に逆は成り立たない。

Definition. Hilbert 空間 H の n 個の部分空間の配置

$$\mathcal{S} = (H|E_1, \ldots, E_n), \quad \mathcal{S}' = (H'|E'_1, \ldots, E'_n)$$

に対してその直和の配置を

$$\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}' := (H \oplus H'|E_1 \oplus E'_1, \ldots, E_n \oplus E'_n).$$

で定義する。

Definition. Hilbert 空間 H の n 個の部分空間の配置 $\mathcal{S} = (H|E_1, \ldots, E_n)$ が分解可能（*decomposable*）とは $\mathcal{S}$ が 0 でない配置の直和に有界同値になることである。また n 個の部分空間の 0 でない配置 $\mathcal{S} = (H|E_1, \ldots, E_n)$ が直既約（*indecomposable*）とは分解可能ではないことである。

Example. $H = \mathbb{C}^2$ とし、角度 θ （$0 < \theta < \pi/2$）を固定する。 2 個の部分空間を

$$E_1 = \{\lambda(1, 0) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$

$$E_2 = \{\lambda(cos\theta, sin\theta) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$

できめると $(H; E_1, E_2)$ は

$$(\mathbb{C}^2; \mathbb{C} \oplus 0, 0 \oplus \mathbb{C}) \cong (\mathbb{C}; \mathbb{C}, 0) \oplus (\mathbb{C}; 0, \mathbb{C}).$$

と有界同値になるので $(H; E_1, E_2)$ は分解可能である。ここで e_1 と e_2 を部分空間 E_1 と E_2 への射影とする。e_1 と e_2 によって生成される C^*-環 $C^*(\{e_1, e_2\})$ は $B(H) \cong M_2(\mathbb{C})$ と一致する。このように対応する C^*-環 $C^*(\{e_1, e_2\})$ の既約性は配置 $(H; E_1, E_2)$ の直既約性を導かない。配置の直既約性は対応する C^*-環の既約性よりずっと強い性質でありその例を探すのはずっと難しい。

2. Hilbert 空間の 1 個の部分空間の配置

Theorem 2.1. 次が成立する.

$$(1)\ (H \mid E_1) \cong_{alg} (H' \mid E_1') \Leftrightarrow \begin{cases} \textit{Hamel-dim}E_1 = \textit{Hamel-dim}E_1', \\ \textit{Hamel-dim}(H/E_1) = \textit{Hamel-codim}(H'/E_1'). \end{cases}$$

$$(2)\ (H \mid E_1) \cong_{unit} (H' \mid E_1') \Leftrightarrow \begin{cases} \dim E_1 = \dim E_1', \\ \dim E_1^{\perp} = \dim (E_1')^{\perp}. \end{cases}$$

$$(3)\ (H \mid E_1) \cong_{bd} (H' \mid E_1') \Leftrightarrow \begin{cases} \dim E_1 = \dim E_1', \\ \dim E_1^{\perp} = \dim (E_1')^{\perp}. \end{cases}$$

このように、1 個の部分空間の配置を考える限り ユニタリ同値（unitary isomorphism ）と 有界同値（bounded isomorphism) は同じになるが 2 個以上の部分空間の配置ではこの二つの同値関係はかなり違うものである。

3. Hilbert 空間の 2 個の部分空間の配置

ユニタリ同値に関してなら、Hilbert 空間の 2 個の部分空間の配置は完全にわかっている。

Theorem 3.1 (Araki[1], Davis[3], Dixmier[4], Halmos[13])**.** *Hilbert* 空間 H の 2 個の部分空間 E_1 と E_2 の配置はユニタリ同値を除いて次のようにかける。

$$H = (E_1 \cap E_2) \oplus (\textit{the rest}) \oplus (E_1 \cap E_2^{\perp}) \oplus (E_1^{\perp} \cap E_2) \oplus (E_1^{\perp} \cap E_2^{\perp}).$$

ここで、*(the rest)* はある部分空間 K を使って $K \oplus K$ の形をしていて、さらに二つの *kernel* が零の正作用素 $c, s \in B(K)$ で $c^2 + s^2 = 1$ をみたすものが存在して次のようになっている。

$$E_1 = (E_1 \cap E_2) \oplus \mathrm{Im} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus (E_1 \cap E_2^{\perp}) \oplus 0 \oplus 0,$$

$$E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus \mathrm{Im} \begin{pmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{pmatrix} \oplus 0 \oplus (E_1^{\perp} \cap E_2) \oplus 0.$$

そこで *functional calculus* を考慮すると *angle operator* とよばれる正作用素 θ が存在して、次のようにかけている。

$$c = \cos\theta, \qquad s = \sin\theta \quad (0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}).$$

Remark. さらにこの the rest part だけを取り出して、generic position にあるという性質で抜き出すこともできる: Hilbert 空間 H の二つの部分空間 $E_1, E_2 \subset H$ が “in generic position” にあるとは

$$E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_2^{\perp} = E_1^{\perp} \cap E_2 = E_1^{\perp} \cap E_2^{\perp} = \{0\}$$

をみたすことで、このとき the rest part は次のようにも記述できる：K の上の稠密な定義域を持つ閉線型作用素 $T : D(T)\ (\subset K) \to K$ で $\mathrm{Ker}T = \{0\}$, $\overline{\mathrm{Im}T} = K$ を満

たすものが存在して

$$(H \mid M, N) \cong_{\text{unit}} (K \oplus K \mid K \oplus \{0\}, \text{graph}(T))$$

有界同値に関してなら、Hilbert 空間の 2 個の部分空間の配置の違いが次で判定できる。

Theorem 3.2 (榎本–綿谷 [8]). *H を Hilbert 空間とし，$H = K \oplus K$ と分解されているとする。$T, T' \in B(K)$ に対して，次は同値である：*

(1) $(H \mid K \oplus \{0\}, \text{graph}T) \cong_{bd} (H \mid K \oplus \{0\}, \text{graph}T')$.
(2) $(H \mid K \oplus \{0\}, \{0\} \oplus K, \text{graph}T) \cong_{\text{bd}} (H \mid K \oplus \{0\}, \{0\} \oplus K, \text{graph}T')$.
(3) $\dim \text{Ker}T = \dim \text{Ker}T'$ であって，ある可逆な $S \in B(K)$ が存在して $S(\text{Im}T) = \text{Im}T'$.
(4) ある可逆な $C, D \in B(K)$ が存在して $T' = DTC$.

Example. $K = \ell^2(\mathbb{N})$, $H = K \oplus K$ とする．次の五つの 2 個の部分空間の配置を考える．

(1) $\mathcal{S}_1 = (H \mid K \oplus \{0\}, \{0\} \oplus K)$.
(2) $\mathcal{S}_2 = (H \mid K \oplus \{0\}, \{(x, x) \in H \mid x \in K\})$.
(3) $\mathcal{S}_3 = (H \mid K \oplus \{0\}, \text{graph}(A_3))$.
(4) $\mathcal{S}_4 = (H \mid K \oplus \{0\}, \text{graph}(A_4))$.
(5) $\mathcal{S}_5 = (H \mid K \oplus \{0\}, \text{graph}(A_5))$.

ただし,

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1/3 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1/2^2 & & \\ & & 1/3^2 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

これらの無限次元の例に対して次がわかる．

- $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4, \mathcal{S}_5$ は全て代数的同値である。
- $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4, \mathcal{S}_5$ はどの二つも ユニタリ同値ではない。
- $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_5$ は全て有界同値 であるが，$\mathcal{S}_2 \ncong_{\text{bd}} \mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_2 \ncong_{\text{bd}} \mathcal{S}_4$, $\mathcal{S}_3 \ncong_{\text{bd}} \mathcal{S}_4$．つまり，有界同値類は $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_5\}$, $\{\mathcal{S}_3\}$, $\{\mathcal{S}_4\}$ となる．

4. Hilbert 空間の 3 個の部分空間の配置

3 つの部分空間の配置で一番特徴的なことは分配法則が破れることがあることである:

$$(E_1 \vee E_2) \wedge E_3 \neq (E_1 \wedge E_2) \vee (E_1 \wedge E_3).$$

Definition. Hilbert 空間 H の 3 つの部分空間の配置 $\mathcal{S} = (H; E_1, E_2, E_3)$ が 2 重三角形（*double triangle*）をなすとは族 $\{H, E_1, E_2, E_3, 0\}$ 2 重三角形束をなすことで、つまり

$$E_i \vee E_j = H, \quad \text{and} \quad E_i \wedge E_j = 0, \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3).$$

であることである。このとき分配法則は破れている。

Definition. Hilbert 空間 H の 3 個の部分空間の配置 $\mathcal{S} = (H; E_1, E_2, E_3)$ が $E_3 \supset E_2$ となる 5 角形をなすとは族 $\{H, E_1, E_2, E_3, 0\}$ が $E_3 \supset E_2$ となる 5 角形束をなすことで、つまり、

$$E_1 \vee E_2 = H, \quad E_1 \wedge E_3 = 0, \text{ and } E_3 \supset E_2 \text{ with } E_3 \neq E_2.$$

となることである。このとき分配法則は破れている。

Example. $K = \ell^2(\mathbb{N})$, $H = K \oplus K$ として

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1/3 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

を考えて

$$E_1 := K \oplus \{0\}, \quad E_3 := \mathrm{graph}(A)$$

と定めると $E_1 \vee E_3 = H$ である．さらに，$\mathrm{Im}A \cap M = \{0\}$ となる有限次元部分空間 $M \subseteq H$ をとる。例えば M として $M = \mathbb{C} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ \vdots \end{bmatrix}$ をとる。

$$E_2 := \{(x, Ax) + (0, m) \mid x \in K, m \in M\}$$

とおく。すると，$(H \mid E_1, E_2, E_3)$ は 5 角形をつくる。

一般に束が分配法則をみたさないことは束が 2 重三角形束または 5 角形束を含むことと同値である (例えば [12] をみよ)。また von Nuemann 環　が finite であることはその射影束が 5 角形束を含まないことと同値である。

Definition. Hilbert 空間 H の 3 つの部分空間の配置 $\mathcal{S} = (H|E_1, E_2, E_3)$ が Brenner 型分解をもつとは、$\mathcal{S}$ が以下をみたす系 $\mathcal{T} = (H|F_1, F_2, F_3)$ と有界同型になることである：H の部分空間 $S, N_1, N_2, N_3, M_1, M_2, M_3, Q, L$ が存在して $(Q; Q_1, Q_2, Q_3)$ が 2 重三角形をなし、

$$\begin{aligned} H &= S \oplus N_1 \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus Q \oplus L \\ F_1 &= S \oplus O \ \oplus N_2 \oplus N_3 \oplus M_1 \oplus O \ \oplus O \oplus Q_1 \oplus O \\ F_2 &= S \oplus N_1 \oplus O \ \oplus N_3 \oplus O \oplus M_2 \oplus \ O \oplus Q_2 \oplus O \\ F_3 &= S \oplus N_1 \oplus N_2 \oplus \ O \oplus O \oplus \ O \oplus M_3 \oplus Q_3 \oplus O \end{aligned}$$

Theorem 4.1 (BrennerciteB)**.** *Hilbert* 空間 H の 3 個の部分空間の配置 $\mathcal{S} = (H|E_1, E_2, E_3)$ の全体空間 H が有限次元ならば $\mathcal{S}$ は *Brenner* 型分解をもち、その *2* 重三角形部分 Q は

$$(Q|Q_1, Q_2, Q_3) := (K \oplus K | K \oplus 0, 0 \oplus K, \{(x, x) \ | x \in K\})$$

という形をしている。

Theorem 4.2 (榎本–綿谷 [8]). *Hilbert* 空間 H の 3 個の部分空間の配置 $\mathcal{S} = (H|E_1, E_2, E_3)$ について次は同値である：

(1) 線形和 $(E_i \vee E_j) + E_k$ や $(E_i \cap E_j) + E_k$ は閉である ($i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ で $i \neq j \neq k \neq i$)。

(2) 3 個の部分空間の配置 $\mathcal{S}$ は *Brenner* 型分解をもつ。

Hilbert 空間の 4 個以上の部分空間の配置については、一般的なことは何もわからないので、以下では直既約なものに限定して調べることにしよう。

5. Hilbert 空間の n 個の部分空間の直既約な配置

Hilbert 空間の n 個の部分空間の配置の研究で重要な問題は、非自明な直和にわかれない直既約な配置を探すことである。有限次元の場合、任意の部分空間の配置は直既約な配置の有限個の直和に代数的同値（有界同値）になるので、これだけですべてがわかることになる。

1 個の部分空間の配置で直既約なものは

$$(\mathbb{C} \mid \mathbb{C}), \quad (\mathbb{C} \mid \{0\})$$

だけであり、無限次元 Hilbert 空間の一個の部分空間の直既約な配置は存在しない。

2 個の部分空間の配置で直既約なものは

$$(\mathbb{C} \mid \mathbb{C}, \mathbb{C}), \quad (\mathbb{C} \mid \mathbb{C}, \{0\}), \quad (\mathbb{C} \mid \{0\}, \mathbb{C}), \quad (\mathbb{C} \mid \{0\}, \{0\})$$

だけであり、無限次元 Hilbert 空間の 2 個の部分空間の直既約な配置は存在しない。

3 個の部分空間の配置で直既約なものは、有限次元なら、次の 8 つの自明な 1 次元の配置 $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_8$ と 1 つの非自明な 2 次元の配置 $\mathcal{S}_9$(2 重三角形）のどれかと同型である:

$$\mathcal{S}_1 = (\mathbb{C}|0, 0, 0), \quad \mathcal{S}_2 = (\mathbb{C}|\mathbb{C}, 0, 0), \quad \mathcal{S}_3 = (\mathbb{C}|0, \mathbb{C}, 0),$$

$$\mathcal{S}_4 = (\mathbb{C}|0, 0, \mathbb{C}), \quad \mathcal{S}_5 = (\mathbb{C}|\mathbb{C}, \mathbb{C}, 0), \quad \mathcal{S}_6 = (\mathbb{C}|\mathbb{C}, 0, \mathbb{C}),$$

$$\mathcal{S}_7 = (\mathbb{C}|0, \mathbb{C}, \mathbb{C}), \quad \mathcal{S}_8 = (\mathbb{C}|\mathbb{C}, \mathbb{C}, \mathbb{C}), \quad \mathcal{S}_9 = (\mathbb{C}^2|\mathbb{C}(1, 0), \mathbb{C}(0, 1), \mathbb{C}(1, 1)).$$

しかし、無限次元では、3 個の部分空間の配置で直既約なものは存在すら未解決問題である。

4 個の部分空間の配置で直既約なものは、有限次元なら、すでに知られている。

Theorem 5.1 (Gelfand–Ponomarev[11]). 有限次元の 4 個の部分空間の直既約な配置は完全に分類されており，連続無限個ある。

リストをかくこともできるが、ここでは defect とよばれる重要な不変量だけ紹介する。

Definition. 有限次元の部分空間の配置 $\mathcal{S} = (H \mid E_1, E_2, E_3, E_4)$ の defect $\rho(\mathcal{S})$ を

$$\rho(\mathcal{S}) := \sum_{i=1}^{4} \dim E_i - 2\dim H$$

で定義する。

Example. $K = \mathbb{C}^n$, $H = K \oplus K$ とし，$A \in M_n(\mathbb{C})$ をとる．4 個の部分空間の配置 $\mathcal{S}_A = (H \mid E_1, E_2, E_3, E_4)$ を

$$\begin{aligned} E_1 &= K \oplus \{0\}, \\ E_2 &= \{0\} \oplus K, \\ E_3 &= \{(x, x) \mid x \in K\} = \mathrm{graph} I, \\ E_4 &= \mathrm{graph} A \end{aligned}$$

とする．このとき，$\mathcal{S}_A$ が 直既約であることと A は Jordan block であることは同値である。

次に無限次元の例を考えよう。

Example. H^2 を Hardy 空間とし，unilateral shift 作用素 $S \in B(H^2)$ をとる：

$$(Sf)(z) := zf(z), \quad f \in H^2.$$

このとき，$H : H^2 \oplus H^2$ として，次の四個の部分空間の配置 $\mathcal{S}_S = (H \mid E_1, E_2, E_3, E_4)$ を考えよう：

$$E_1 = H^2 \oplus \{0\}, \quad E_2 = \{0\} \oplus H^2, \quad E_2 = \mathrm{graph} I, \quad E_4 = \mathrm{graph} S.$$

この部分空間の配置 $\mathcal{S}_S$ は直既約である。

無限次元の場合の defect については次のような工夫がいる。有限次元の 4 個の部分空間の配置 $\mathcal{S} = (H \mid E_1, E_2, E_3, E_4)$ に対して次の式変形ができる

$$\rho(\mathcal{S}) = \sum_{i,j=1}^{4} \dim E_i - 2\dim H = \frac{1}{3} \sum_{1 \le i < j \le 4} \dim(E_i \cap E_j) - \dim((E_i + E_j)^{\perp}).$$

これは

$$\begin{aligned} &\dim E_i + \dim E_j - \dim H \\ &= \dim(E_i + E_j) - \dim(E_i \cap E_j) - (\dim(E_i + E_j) + \dim((E_i + E_j)^{\perp}) \\ &= \dim(E_i \cap E_j) - \dim((E_i + E_j)^{\perp}) \end{aligned}$$

そこで、defect の式変形結果の最右辺に出てくる次元 $\dim(E_i \cap E_j)$, $\dim((E_i + E_j)^{\perp})$ が全て有限であるときに無限次元での defect をその式で定義する。

Theorem 5.2 (榎本–綿谷 [5])**.** 無限次元の場合直既約な 4 個の部分空間の配置の *defect* の取りえる値は $3^{-1}\mathbb{Z}$ にちょうど一致する.

6. QUIVER のヒルベルト表現

Quiver(箙）とは有向グラフのことである。その頂点にヒルベルト空間を対応させ、その辺に有界作用素を対応させることを考える。これを quiver のヒルベルト表現（Hilbert representations of quivers）とよぼう [6], [7]。

Definition. $\Gamma = (V, E, s, r)$ が、 quiver(箙） であるとは、集合 V が頂点集合で、集合 E が辺集合で、 s, r が E から V への写像で 、$\alpha \in E$ に対して、$s(\alpha) \in V$ が α の始点 であり、 $r(\alpha) \in V$ が、 α の終点であるものと指定するものである。つまり、箙（quiver）とは有向グラフのことである。

例えば Kronecker quiver $K_2 = (V, E, s, r)$ とは、2 個の頂点の間を同じ向きの辺がある quiver である。つまり $V = \{1, 2\}$, $E = \{\alpha, \beta\}$,$s(\alpha) = 1, s(\beta) = 1$, $r(\alpha) = 2, r(\beta) = 2$ なるものである：

$$K_2 : 1 \rightrightarrows 2$$

Definition. ひとつの組 (H, f) が、quiver Γ のヒルベルト表現であるとは、$H = (H_v)_{v\in V}$ は、頂点を足にもつヒルベルト空間の族で、$f = (f_\alpha)_{\alpha\in E}$ は、 辺に足をもつ有界線形作用素の族で、f_α は $H_{s(\alpha)}$ から、$H_{r(\alpha)}$ への作用素になっているものである。quiver Γ の 2 つのヒルベルト表現 (H, f) と (K, g) に対して、$\phi : (H, f) \to (K, g)$ が準同型写像とは、$\phi = (\phi_v)_v$ は有界線形作用素 $\phi_v : H_v \to K_v$ $(v \in V)$ の族で、

$$\phi_{r(\alpha)} f_\alpha = g_\alpha \phi_{s(\alpha)} (\alpha \in E)$$

をみたすものである。$Hom((H, f), (K, g))$ を、(H, f) から (K, g) への準同型写像全体とする。$Hom((H, f), (H, f))$ を, $End(H, f)$ と書く。QuiverΓ のヒルベルト表現 (H, f) と (K, g) が同型とは、ある同型写像 $\phi : (H, f) \to (K, g)$ が存在することである。

Definition. QuiverΓ の 2 つのヒルベルト 表現 (K, g) と (K', g') に対して、その直和 (H, f) を、$H_v = K_v \oplus K'_v (v \in V)$, $f_\alpha = g_\alpha \oplus g'_\alpha (\alpha \in E)$ で定義する。Quiver Γ のヒルベルト表現 (H, f) が直既約（indecomposable) とは、(H, f) が非自明な直和にかけないことである。

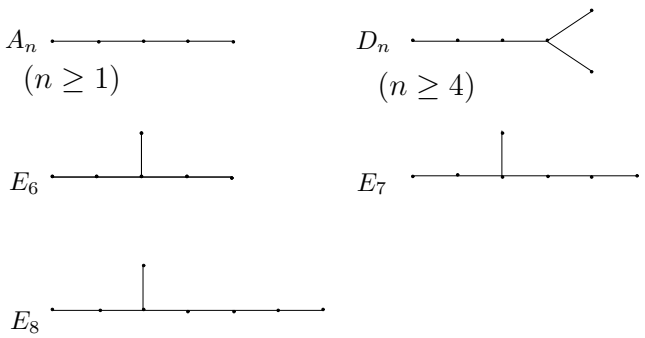
Definition. Quiver Γ のヒルベルト表現 (H, f) が推移的（transitive）とは、$End(H, f) = \mathbb{C}I$ のことである。

Quiver Γ のヒルベルト表現 (H, f) が推移的（transitive）なら直既約（indecomposable) である。しかし、逆は成立しない。

ここで，まず有限次元の場合の有名な Gabriel の定理を紹介する。

Theorem 6.1 (Gabriel[10])**.** 有限連結 *quiver* Γ に対して次は同値：

(1) Γ の有限次元の直既約な表現は代数的同型を除いて有限個しかない。
(2) 向きを忘れたグラフ $|\Gamma|$ は *Dynkin* 図形 A_n *(*$n \geq 1$*)*, D_n *(*$n \geq 4$*)*, E_6, E_7, E_8 のいずれかである.



そこで、次に無限次元のヒルベルト表現について考えよう。

Example. S を $K = \ell^2(N)$ 上の片側シフトとする。Kronecker quiverK_2 のヒルベルト表現 (H, f) を、$H_1 = H_2 = K, f_\alpha = S, f_\beta = I$ とおく。このとき、このヒルベルト表現 (H, f) は直既約であるが transitive ではない。

Example. S を $K = \ell^2(N)$ 上の片側シフトとする。K の基底を $e_1, e_2, ...$ とする。$\lambda = (\lambda_i)_i \in \ell^\infty(N)$ を、$\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$ を満たすものとする。 $w = (w_i)_i \in \ell^2(N)$ を、$w_n \neq 0$(任意の $n \in N$) を満たすものとする。 $\theta_{e_1,w}$ をランク 1 の作用素とする。Kronecker quiverK_2 のヒルベルト表現 (H, f) を、$H_1 = H_2 = K, f_\alpha = S, f_\beta = SD_\lambda + \theta_{e_1,w}$ とおく。このとき、このヒルベルト表現 (H, f) は transitive である。

しかし、この Kronecker quiver K_2 の下の辺の向きづけを変えた次のような quiver $\Gamma = (V, E, s, r)$ を考える。つまり $V = \{1, 2\}$, $E = \{\alpha, \beta\}$,$s(\alpha) = 1, s(\beta) = 2$, $r(\alpha) = 2, r(\beta) = 1$ なるものである：

$$\Gamma : 1 \rightleftarrows 2$$

この quiver の向きづけを忘れるとこれは拡大ディンキン図形 $\tilde{A}_2$ になる。

Theorem 6.2 (榎本-綿谷 [9])**.** この *quiver* Γ

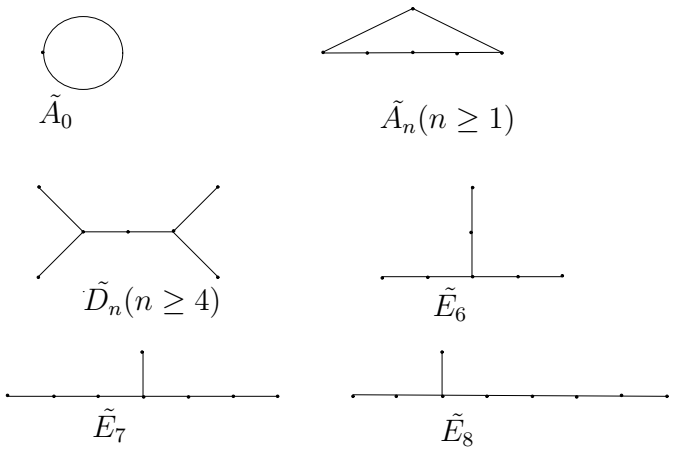
$$\Gamma : 1 \rightleftarrows 2$$

には、無限次元の *transitve* なヒルベルト表現が存在しない。

もっと一般に次のことが成立する。

Theorem 6.3 (榎本-綿谷 [6][7][9])**.** Γ を有限個の頂点からなる連結な *quiver* とする。
(1) もし向きづけを忘れた無向グラフ $|\Gamma|$ が拡大ディンキン図形 $\tilde{D}_n$ $(n \geq 4), \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ のどれかを含むならば、向きづけに関わらず *transitve* な無限次元ヒルベルト表現が存在する。
(2) もし向きづけを忘れた無向グラフ $|\Gamma|$ が拡大ディンキン図形 $\tilde{A}_n$ ならば、*transitve* な無限次元ヒルベルト表現が存在するための必要十分条件は Γ が *oriented cyclic quiver* でないことである。
(3) もし向きづけを忘れた無向グラフ $|\Gamma|$ が拡大ディンキン図形 $\tilde{A}_n$ $((n \geq 1), \tilde{D}_n$ $(n \geq$

4), $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ のどれかを含むならば、向きづけに関わらず *indecomposable* な無限次元ヒルベルト表現が存在する



7. Path algebras

有限の quiver$\Gamma = (V, E, s, r)$ に対する path algebra（道環）$\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ を定義し、quiver Γ のヒルベルト表現 と path algebra$\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ の表現が自然に対応するようにしよう。

Definition. $\Gamma = (V, E, s, r)$ を有限の quiver とする。$\Gamma = (V, E, s, r)$ 上の長さが n の path $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ とは n 個の辺 $\alpha_i \in E$,$i = 1, \cdots, n$ の組で連結可能なもののことである。ここで連結可能とは $s(\alpha_i) = r(\alpha_{i+1}), \alpha_i \in E$, としておく。特に長さが 0 の path は頂点そのものと解釈しておく。長さが n の path 全体を $Path_n(\Gamma)$ とかくと、$Path_0(\Gamma) = V$,$Path_1(\Gamma) = E$ となる。さらに path 全体を

$$Path(\Gamma) = \cup_{n=0}^{\infty} Path_n(\Gamma)$$

であらわす。paths $\gamma \in Path(\Gamma)$ を不定元とするベクトル空間を $\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ とする。

$$\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle = \{ \sum_{\gamma \in Path(\Gamma)} a_\gamma e_\gamma \mid , a_\gamma \in \mathbb{C},\ \{\gamma; a_\gamma \neq 0\} \text{ is finite}\}.$$

さらに path の連結 (concatenation) を使って、$\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ は algebra になる。 つまり、二つの paths $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ と $\beta = \beta_1\beta_2\cdots\beta_m$ に対して、もし $s(\alpha(n)) = r(\beta(1))$ なら連結可能で、このときその連結は

$$\alpha\beta = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\beta_1\beta_2\cdots\beta_m$$

とする。このとき、積を

$$e_\alpha e_\beta = e_{\alpha\beta}$$

とし、もし $s(\alpha(n)) \neq r(\beta(1))$ のときは $e_\alpha e_\beta = 0$ とするということである。このようにしてつくられた algebra $\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ を quiver Γ に対する path algebra と呼ぶ。単位元は $I = \Sigma_{v\in V} e_v$ であり、各 e_v は巾等元になるので、これは単位元の分解とみることができる。

さて、この path algebra $\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ の Hilbert 表現 π とは、H_π が Hilbert 空間で $\pi : \mathbb{C}\langle\Gamma\rangle \to B(H_\pi)$ は　unital algebra homomorphism で、さらに、すべての頂点 $v \in V$ に対して $\pi(e_v)$ が射影になるもののことである。こう仮定しなくても、similarity を除いてこの形にできるので、問題はない。

このようにすることで、quiver Γ の Hilbert 表現と path algebra $\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ の Hilbert 表現が自然に対応することはほぼ明らかになる。

Proposition 7.1 (榎本-綿谷)**.** $\Gamma = (V, E)$ を有限 *quiver* とすると Γ のヒルベルト表現全体

$$Hil(\Gamma) = \{(H, f); (H, f) \textit{is a Hilbert representation of } \Gamma\}$$

と *path algebra*$\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ の *Hilbert* 表現全体

$$Rep(\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle) = \{\pi; \pi \textit{is a Hilbert representation of } \mathbb{C}\langle\Gamma\rangle\}$$

の間には次のように作用素行列を使った 1：1 対応がある：Γ のヒルベルト表現 (H, f) に対しては *path algebra*$\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ の *Hilbert* 表現 π を次で構成する。

$$H_\pi := \oplus_{v\in V} H_v.$$

頂点 $v \in V$ に対しては、H_π から H_v への射影を $\pi(e_v)$ とする。辺 $\alpha \in E$ に対しては、作用素行列 $\pi(e_\alpha)$ を $r(e) - s(e)$ 成分が f_α でその他の成分は 0 とすることできめる。一般の *path* $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \in Path_n(\Gamma)$ に対しては、

$$\pi(\alpha) = \pi(\alpha_1)\pi(\alpha_2)\cdots\pi(\alpha_n)$$

とすればよい。

Example. 最も簡単な場合をかくが、一般もほぼ同じことである。辺が 1 個の quiver$\Gamma = (V, E)$ を $V = \{1, 2\}$, $E = \{\alpha\}$, $s(\alpha) = 1, r(\alpha) = 2$ できめる。(H, f) を Γ の Hilbert 表現とすると $f_\alpha \in B(H_1, H_2)$ になっている。このとき、$H_\pi = H_1 \oplus H_2$ で $\pi(e_i) = P_i$ は H_π から H_i への射影であり、作用素表現は

$$\pi(e_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_\alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

この 1:1 対応により、quiver Γ の Hilbert 表現が indecomposable であることや transitive であることが path algebra $\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ の Hilbert 表現のことばで表せる。

Proposition 7.2 (榎本-綿谷)**.** $\Gamma = (V, E)$ を有限 *quiver* とする。Γ のヒルベルト表現 (H, f) に対応する *path algebra* $\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle$ の *Hilbert* 表現を π とする。すると、準同型環 $End(H, f)$ は可換子環 $\pi(\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle)'$ と同型になる。 さらに、Γ のヒルベルト表現 (H, f) が *transitive* であることは $\pi(\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle)' = \mathbb{C}$　であることは同値である。Γ のヒルベルト表現 (H, f) が *indecomposable* であることは $\pi(\mathbb{C}\langle\Gamma\rangle)'$ の巾等元が $0, I$ しかないことと同値である。

References

[1] H. Araki, *A lattice of von Neumann algebras with the quantum theory of a free Bose field,* J. Math. Phys. 4(1963), 1343-1362.

[2] S. Brenner, *Endomorphism algebras of vector spaces with distinguished sets of subspaces,* J. Algebra 6 (1967), 100-114.

[3] C. Davis, *Separation of two linear subspaces,* Acta Sci. Math. Szeged. 19 (1958), 172-187.

[4] J. Dixmier, *Position relative de deux variétés linéaires fermées dans un espace de Hilbert,* Rev. Sci. 86 (1948), 387-399.

[5] M. Enomoto and Y. Watatani, *Relative position of four subspaces in a Hilbert space,* Adv. Math. 201 (2006), 263-317.

[6] M. Enomoto and Y. Watatani, *Indecomposable representations of quivers on infinite-dimensional Hilbert spaces,* J. Funct. Anal. **256** (2009), 959-991.

[7] M. Enomoto and Y. Watatani, *Strongly irreducible operators and indecomposable representations quivers on infinite-dimensional Hilbert spaces*, Integral equations and operator theory, **83**(2015),563-587.

[8] M. Enomoto and Y. Watatani, *Relative position of three subspaces in a Hilbert space,* to appear in Acta Sci. Math. (Szeged).

[9] M. Enomoto and Y. Watatani, *Unbounded strongly irreducible operators and transitive representations of quiverson infinite-dimensional Hilbert spaces,* preprint.

[10] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I,* Manuscripta Math. 6 (1972), 71-103.

[11] I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev, *Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space,* Coll. Math. Spc. Bolyai 5, Tihany (1970), 163-237.

[12] G. Grätzer, *Lattice theory: Foundation,* Birkhäuser, 2011.

[13] P. R. Halmos, *Two subspaces,* Trans. Amer. Math. Soc. 144(1969), 381-389.

(Yasuo Watatani) Department of Mathematical Sciences, Kyushu University, Motooka, Fukuoka, 819-0395, Japan

放物型の相空間 Feynman 経路積分と滑らかな汎函数微分

熊ノ郷 直人 (工学院大学 情報学部)*

概要

本講演では, 一般階の変数係数放物型方程式に対する相空間経路積分についての結果 [14], [15] を解説する. シュレディンガー方程式に対しても類似した結果 [11], [12] (似ているが同じではない) が成立するため, シュレディンガー方程式に興味がある方も聞いて欲しい.

§1. 相空間経路積分とは

$0 < T \leq \mathbf{T} \leq \infty$, $x \in \mathbf{R}^d$ とする. 作用素 $U(T,0)$ を m 階 $(m > 0)$ の変数係数放物型方程式の基本解とする.

$$\Big(\partial_T + H(T,x,-i\partial_x)\Big)U(T,0)v(x) = 0\,, \quad U(0,0)v(x) = v(x)\,. \tag{1.1}$$

$x_0 \in \mathbf{R}^d$ に関するフーリエ変換と $\xi_0 \in \mathbf{R}^d$ に関する逆フーリエ変換で

$$v(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{i(x-x_0)\cdot\xi_0} v(x_0)dx_0d\xi_0\,,$$

$$-i\partial_x v(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{i(x-x_0)\cdot\xi_0} \xi_0 v(x_0)dx_0d\xi_0$$

と書けるので, 微分作用素 $H(T,x,-i\partial_x)$ は

$$H(T,x,-i\partial_x)v(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{i(x-x_0)\cdot\xi_0} H(T,x,\xi_0)v(x_0)dx_0d\xi_0$$

と書ける. 擬微分作用素の理論では関数 $H(T,x,\xi_0)$ で表現される作用素を扱う (cf. Tsutsumi[19], H. Kumano-go[9], M. Ruzhansky–V. Turunen[17] 等). 基本解 $U(T,0)$ を関数の形で表現する方法を考える. 解 $U(T,0)v(x)$ の近似として

$$I(T,0)v(x) \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{i(x-x_0)\cdot\xi_0} e^{-\int_0^T H(t,x,\xi_0)dt} v(x_0)dx_0d\xi_0$$

2000 Mathematics Subject Classification(s): Primary 81S40; Secondary 35S05; 35K10; 35K25.
本研究は JSPS 科研費 JP19K03547, JP15K04937, JP24540193 の助成を受けたものです.
*工学院大学 情報学部 システム数理学科, 〒 192-0015 東京都八王子市中野町 2665-1.

を用いる (実際, $H(T,x)$ や $H(T,\xi)$ の場合は解となる). 解 $U(T,0)v(x)$ をつなぐことにより, 区間 $[0,T]$ の任意の分割 $\Delta_{T,0} : T = T_{J+1} > T_J > \cdots > T_1 > T_0 = 0$ に対し,

$$U(T,0)v(x) = U(T,T_J)U(T_J,T_{J-1})\cdots U(T_2,T_1)U(T_1,0)v(x)$$

と書ける. $t_j = T_j - T_{j-1}$ とおき, 分割の幅の最大値を $|\Delta_{T,0}| = \max_{1\le j\le J+1} t_j$ で表す. $x_{J+1} = x$ とする. $|\Delta_{T,0}| \to 0$ のとき, $U(T_j,T_{j-1})v(x_j)$ の近似として

$$I(T_j,T_{j-1})v(x_j) \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{i(x_j-x_{j-1})\cdot\xi_{j-1}} e^{-\int_{T_{j-1}}^{T_j} H(t,x_j,\xi_{j-1})dt} v(x_{j-1})dx_{j-1}d\xi_{j-1}$$

を用いると, 形式的には

$$\begin{aligned}(1.2)\qquad U(T,0)v(x) &= \lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0} I(T,T_J)I(T_J,T_{J-1})\cdots I(T_2,T_1)I(T_1,0)v(x)\\ &= \lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d(J+1)} \int_{\mathbf{R}^{2d(J+1)}} e^{\sum_{j=1}^{J+1}\left(i(x_j-x_{j-1})\cdot\xi_{j-1} - \int_{T_{j-1}}^{T_j} H(t,x_j,\xi_{j-1})dt\right)}\\ &\qquad \times v(x_0)\prod_{j=0}^{J} dx_j d\xi_j\end{aligned}$$

と書ける. さて, 基本解 $U(T,0)$ を

$$(1.3)\qquad U(T,0)v(x) \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbf{R}^{2d}} e^{i(x-x_0)\cdot\xi_0} U(T,0,x,\xi_0)v(x_0)dx_0d\xi_0$$

で表現する関数 $U(T,0,x,\xi_0)$ を考える. (1.2) と (1.3) より

$$\begin{aligned}(1.4)\qquad & e^{i(x-x_0)\cdot\xi_0}U(T,0,x,\xi_0)\\ &= \lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{dJ} \int_{\mathbf{R}^{2dJ}} e^{\sum_{j=1}^{J+1}\left(i(x_j-x_{j-1})\cdot\xi_{j-1} - \int_{T_{j-1}}^{T_j} H(t,x_j,\xi_{j-1})dt\right)} \prod_{j=1}^{J} dx_j d\xi_j\end{aligned}$$

と書ける (cf. [10, Remark of Theorem 2.1]). Feynman [5] に従って, $q(T_j) = x_j$ となる位置経路 $q(t)$ と $p(T_j) = \xi_j$ となる運動量経路 $p(t)$ を導入すると, (1.4) は形式的には

$$(1.5)\qquad e^{i(x-x_0)\cdot\xi_0}U(T,0,x,\xi_0) = \int_{q(T)=x,p(0)=\xi_0,q(0)=x_0} e^{i\phi(q,p)}\mathcal{D}(q,p)$$

と書ける. ここで

$$(1.6)\qquad \phi(q,p) = \int_{[0,T)} p(t)\cdot dq(t) + i\int_{[0,T)} H(t,q(t),p(t))dt$$

は相空間の作用であり, Feynman は相空間経路積分 $\int_{q(T)=x,p(0)=\xi_0,q(0)=x_0} \sim \mathcal{D}(q,p)$ を $q(0) = x_0$, $q(T) = x$, $p(0) = \xi_0$ となるすべての経路 (q,p) に関する和であると主張した. 経路積分の表現 (1.2) や (1.4) は時間分割近似法と呼ばれる.

しかし, 数学的には, 経路積分の測度 $\mathcal{D}(q,p)$ は存在しない. なぜ, 経路積分を積分と言えるのか. さらに相空間の場合, 物理的にも, 不確定原理により位置 $q(t)$ と運動量 $p(t)$ を同時刻 t に測定できない. また, 作用素の収束 (1.2) を示すだけでは, 位置空間の経路積分と相空間の経路積分を区別していないようにも思える. なぜ, 相空間経路と言えるのか. また, 相空間経路積分における形式的な式変形は間違った答を与える可能性もある.

さて, 講演者は [14], [15] で, 区分的定数経路による時間分割近似法を用いて, 一般的な汎関数 $F(q,p)$ をもつ相空間経路積分

$$\int_{q(T)=x,p(0)=\xi_0,q(0)=x_0} e^{i\phi(q,p)}F(q,p)\mathcal{D}(q,p) \tag{1.7}$$

が数学的に存在する一般的な汎関数の 2 つの集合 $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ を与えた. 特に (1.5) は (1.7) の $F(q,p)\equiv 1$ の場合となる. より正確に言えば, 任意の汎関数 $F(q,p)\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\cup\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ に対し, (1.7) の時間分割近似法が, 位置経路の終点 x と運動量経路の始点 ξ_0 に関して広義一様収束する. 2 つの集合 $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ は, 基本的な汎関数を含み, 和, 積, 経路の平行移動, 経路の正則線形変換, 汎関数微分の演算に関して閉じている. それゆえ, 経路積分可能な多くの汎関数を創ることができる. さらに, 使用する際には注意を払う必要があるが, その相空間経路積分において, 積分の性質に類似した性質を証明した. より正確に言えば, 相空間経路積分と積分との順序交換, 相空間経路積分と極限との順序交換, 経路の直交変換に対する自然な性質, 運動量経路の平行移動に対する自然な性質, 運動量経路の汎関数微分に関する部分積分を証明した. しかし, シュレディンガー方程式の場合 [12] は成立するようにできた位置経路の平行移動に対する自然な性質や位置経路の汎関数微分に関する部分積分が成立するようにできるかどうかはわからない.

注意. シュレディンガー方程式に対する相空間経路積分については, 様々なアプローチがある (cf. Schulman[18, §31]). 例えば, コーヒレント状態 (Daubechies-Klauder[4]), 無限次元振動積分 (Albeverio-Guatteri-Mazzucchi [1, §10.5.3], [2], [16, §3.3]), チェルノフの公式 (Smolyanov-Tokarev-Truman [20]), ホワイトノイズ (Bock-Grothaus [3]), フーリエ積分作用素 (Kitada-H. Kumano-go [8], Ichinose [7]) 等. 特に, N. Kumano-go-Fujiwara [11], [12] は, 今回の変数係数放物型方程式に対する方針と類似の方針で, シュレディンガー方程式に対して一般的な被積分汎関数をもつ相空間経路積分を扱っている.

注意. 一般階の変数係数放物型方程式の基本解という意味では, Tsutsumi[19], H. Kumano-go[9] は逐次近似法を用いて, もう少し一般的な方程式の基本解を構成している. 今回の目的は, 積分の性質に類似したなるべく多くの性質を満たすように相空間経路積分を構成することであるため, 方程式の条件を少し限定している.

$x=(x^1,\dots,x^d)$, $\xi=(\xi^1,\dots,\xi^d)\in\mathbf{R}^d$ と $\alpha=(\alpha^1,\dots,\alpha^d)$, $\beta=(\beta^1,\dots,\beta^d)\in\mathbf{N}_0^d$ に対し, 以下の記号を用いる.

$$|x|=\sqrt{x\cdot x},\ \langle x\rangle=(1+|x|^2)^{1/2},\ |\xi|=\sqrt{\xi\cdot\xi},\ \langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2},$$
$$\partial_x^\alpha=\partial_{x^1}^{\alpha^1}\cdots\partial_{x^d}^{\alpha^d},\ \partial_\xi^\beta=\partial_{\xi^1}^{\beta^1}\cdots\partial_{\xi^d}^{\beta^d},$$
$$|\alpha|=\alpha^1+\cdots+\alpha^d,\ |\beta|=\beta^1+\cdots+\beta^d,\ \alpha!=\alpha^1!\cdots\alpha^d!,\ \beta!=\beta^1!\cdots\beta^d!.$$

特に, 変数の数が増えるため, x_j, $\xi_j\in\mathbf{R}^d$ を $x_j=(x_j^1,\dots,x_j^d)$, $\xi_j=(\xi_j^1,\dots,\xi_j^d)\in\mathbf{R}^d$ として用い, α_j, β_j を多重指数 $\alpha_j=(\alpha_j^1,\dots,\alpha_j^d)$, $\beta_j=(\beta_j^1,\dots,\beta_j^d)$ として用いる.

§2. 主定理

仮定 2.1. $\langle\xi\rangle\equiv\left(1+|\xi|^2\right)^{1/2}$, $0<T\le\mathbf{T}<\infty$, $0\le\delta<\rho\le1$, $m>0$ とする. $H(t,x,\xi)$ は $(x,\xi)\in\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d$ に関し, 複素数値 C^∞-関数で以下を満たす.

(1) 正の定数 c, C が存在し

$$0<c\le\mathrm{Re}\,H(t,x,\xi)\le C\langle\xi\rangle^m.$$

ただし $\mathrm{Re}\,H(t,x,\xi)$ は $H(t,x,\xi)$ の実部とする.

(2) 任意の多重指数 α, β に対し, $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta H(t,x,\xi)$ は $t\in[0,\mathbf{T}]$ に関して区分的連続で, 正の定数 $C_{\alpha,\beta}$ が存在し

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta H(t,x,\xi)/\mathrm{Re}\,H(t,x,\xi)\right|\le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|}.$$

注意. $|\xi|\ge R\ge0$ ($|\xi|$ が大きい) とき, 上の 2 つの不等式が成立すると仮定しても良い.

注意. なるべく一般的な高階の変数係数放物型方程式が扱えるように δ, ρ を一般化しているが, わかりにくければ $\delta=0$, $\rho=1$ ($\langle\xi\rangle$ のオーダーは ξ で微分すると 1 下がるが, x で微分しても下がらない) と思って, 聞いて欲しい.

注意. シュレディンガー方程式の場合の [11], [12] では, 微分の評価式としては $|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta H(t,x,\xi)|\le C_{\alpha,\beta}(1+|x|+|\xi|)^{\max(2-|\alpha+\beta|,0)}$ (2 回以上微分すると有界) を仮定している.

さて, 区間 $[0,T]$ の分割を $\Delta_{T,0}:T=T_{J+1}>T_J>\cdots>T_1>T_0=0$ とする. $t_j=T_j-T_{j-1}$ とおき $|\Delta_{T,0}|=\max_{1\le j\le J+1}t_j$ とおく. $x_{J+1}=x$ とし, $x_j\in\mathbf{R}^d$, $\xi_j\in\mathbf{R}^d$ とする. 右連続で区分的定数となる位置経路 $q_{\Delta_{T,0}}=q_{\Delta_{T,0}}(t,x_{J+1},x_J,\dots,x_1,x_0)$ を

$$q_{\Delta_{T,0}}(0)=x_0,\quad q_{\Delta_{T,0}}(t)=x_j,\quad T_{j-1}<t\le T_j$$

で定義し, 左連続で区分的定数となる運動量経路 $p_{\Delta_{T,0}} = p_{\Delta_{T,0}}(t, \xi_J, \ldots, \xi_1, \xi_0)$ で

$$p_{\Delta_{T,0}}(t) = \xi_{j-1}\,, \quad T_{j-1} \le t < T_j$$

定義する.

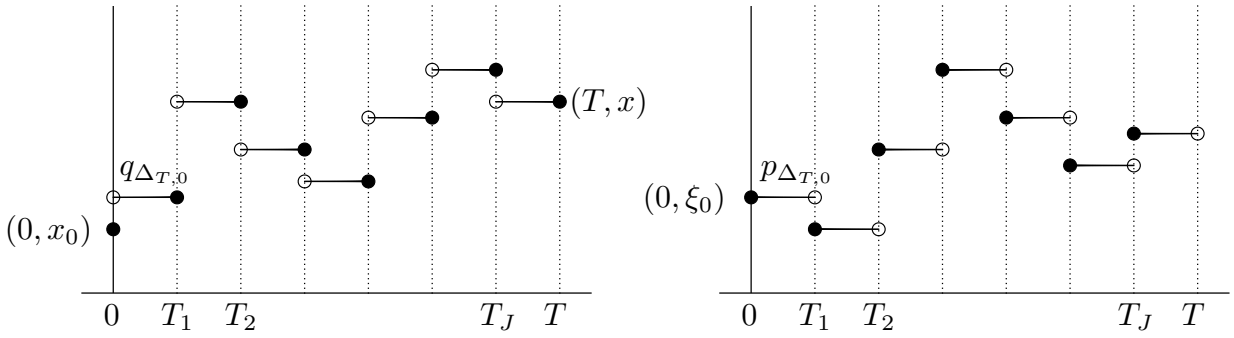


図 1. 位置経路 $q_{\Delta_{T,0}}$ と運動量経路 $p_{\Delta_{T,0}}$

定義 2.2 (区分的定数経路の 2 つの空間 $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$).

(1) q が左連続で区分的定数, i.e., $q = q_{\Delta_{T,0}}$ のとき, $q \in \mathcal{Q}$ と書く.

(2) p が右連続で区分的定数, i.e., $p = p_{\Delta_{T,0}}$ のとき, $p \in \mathcal{P}$ と書く.

汎関数 $\phi(q_{\Delta_{T,0}}, p_{\Delta_{T,0}})$, $F(q_{\Delta_{T,0}}, p_{\Delta_{T,0}})$ は関数 $\phi_{\Delta_{T,0}}$, $F_{\Delta_{T,0}}$ となる, i.e.,

$$\begin{aligned}
\phi(q_{\Delta_{T,0}}, p_{\Delta_{T,0}}) &= \sum_{j=1}^{J+1} \int_{[T_{j-1}, T_j)} p_{\Delta_{T,0}} \cdot dq_{\Delta_{T,0}}(t) + i \sum_{j=1}^{J+1} \int_{[T_{j-1}, T_j)} H(t, q_{\Delta_{T,0}}, p_{\Delta_{T,0}}) dt \\
&= \sum_{j=1}^{J+1} (x_j - x_{j-1}) \cdot \xi_{j-1} + i \sum_{j=1}^{J+1} \int_{T_{j-1}}^{T_j} H(t, x_j, \xi_{j-1}) dt \\
&\equiv \phi_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, \xi_J, x_J, \ldots, \xi_1, x_1, \xi_0, x_0)\,, \\
F(q_{\Delta_{T,0}}, p_{\Delta_{T,0}}) &\equiv F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, \xi_J, x_J, \ldots, \xi_1, x_1, \xi_0, x_0)\,.
\end{aligned}$$

定義 2.3 (汎関数 $F(q,p)$ の 2 つの集合 $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$). $F(q,p)$ は $q \in \mathcal{Q}$, $p \in \mathcal{P}$ の汎関数で, 任意の分割 $\Delta_{T,0}$ に対し,

$$F(q_{\Delta_{T,0}}, p_{\Delta_{T,0}}) \equiv F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, \xi_J, x_J, \ldots, \xi_0, x_0) \in C^\infty(\mathbf{R}^{d(2J+3)})$$

とする.

(1) $F(q,p)$ が以下の仮定 2.4 (1) を満たすとき, $F(q,p) \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ と書く.

(2) $F(q,p)$ が以下の仮定 2.4 (2) を満たすとき, $F(q,p) \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ と書く.

仮定 2.4. $L \geq 0$ とする. $u_j \geq 0$ は $\Delta_{T,0}$ に依存し $\sum_{j=1}^{J+1} u_j = U < \infty$ を満たす.

(1) 任意の非負整数 ℓ_1, ℓ_2 に対し, 正の定数 A_{ℓ_1,ℓ_2}, B_{ℓ_1,ℓ_2} が存在し, 任意の分割 $\Delta_{T,0}$, 任意の多重指数 $|\alpha_j| \leq \ell_1$, $|\beta_{j-1}| \leq \ell_2$ に対し,

$$\left| \left(\prod_{j=1}^{J+1} \partial_{x_j}^{\alpha_j} \partial_{\xi_{j-1}}^{\beta_{j-1}} \right) F(q_{\Delta_{T,0}}, p_{\Delta_{T,0}}) \right| \leq A_{\ell_1,\ell_2} (B_{\ell_1,\ell_2})^{J+1} \prod_{j=1}^{J+1} (t_j)^{\min(|\beta_{j-1}|,1)} \times \left(\sum_{j=1}^{J+1} \langle x_j \rangle + \sum_{j=1}^{J+1} \langle \xi_{j-1} \rangle + \langle x_0 \rangle \right)^L \prod_{j=1}^{J+1} \langle \xi_{j-1} \rangle^{\delta|\alpha_j| - \rho|\beta_{j-1}|}$$

が成立し, また $|\alpha_k| > 0$ となる任意の整数 k $(1 \leq k \leq J+1)$ に対し

$$\left| \left(\prod_{j=1}^{J+1} \partial_{x_j}^{\alpha_j} \partial_{\xi_{j-1}}^{\beta_{j-1}} \right) F(q_{\Delta_{T,0}}, p_{\Delta_{T,0}}) \right| \leq A_{\ell_1,\ell_2} (B_{\ell_1,\ell_2})^{J+1} \prod_{j=1, j\neq k}^{J+1} (t_j)^{\min(|\beta_{j-1}|,1)} \times u_k \left(\sum_{j=1}^{J+1} \langle x_j \rangle + \sum_{j=1}^{J+1} \langle \xi_{j-1} \rangle + \langle x_0 \rangle \right)^L \prod_{j=1}^{J+1} \langle \xi_{j-1} \rangle^{\delta|\alpha_j| - \rho|\beta_{j-1}|}$$

が成立するとする.

(2) 任意の非負整数 ℓ_1, ℓ_2 に対し, 正の定数 A_{ℓ_1,ℓ_2}, B_{ℓ_1,ℓ_2} が存在し, 任意の分割 $\Delta_{T,0}$, 任意の多重指数 $|\alpha_j| \leq \ell_1$, $|\beta_{j-1}| \leq \ell_2$ に対し

$$\left| \left(\prod_{j=1}^{J+1} \partial_{x_j}^{\alpha_j} \partial_{\xi_{j-1}}^{\beta_{j-1}} \right) F(q_{\Delta_{T,0}}, p_{\Delta_{T,0}}) \right| \leq A_{\ell_1,\ell_2} (B_{\ell_1,\ell_2})^{J+1} \prod_{j=1}^{J+1} (t_j)^{\min(|\alpha_j|,1)} \times \left(\sum_{j=1}^{J+1} \langle x_j \rangle + \sum_{j=1}^{J+1} \langle \xi_{j-1} \rangle + \langle x_0 \rangle \right)^L \prod_{j=1}^{J+1} \langle \xi_{j-1} \rangle^{\delta|\alpha_j| - \rho|\beta_{j-1}|}$$

が成立し, $|\beta_{k-1}| > 0$ となる任意の整数 k $(1 \leq k \leq J+1)$ に対し

$$\left| \left(\prod_{j=1}^{J+1} \partial_{x_j}^{\alpha_j} \partial_{\xi_{j-1}}^{\beta_{j-1}} \right) F(q_{\Delta_{T,0}}, p_{\Delta_{T,0}}) \right| \leq A_{\ell_1,\ell_2} (B_{\ell_1,\ell_2})^{J+1} \prod_{j=1, j\neq k}^{J+1} (t_j)^{\min(|\alpha_j|,1)} \times u_k \left(\sum_{j=1}^{J+1} \langle x_j \rangle + \sum_{j=1}^{J+1} \langle \xi_{j-1} \rangle + \langle x_0 \rangle \right)^L \prod_{j=1}^{J+1} \langle \xi_{j-1} \rangle^{\delta|\alpha_j| - \rho|\beta_{j-1}|}$$

が成立するとする.

定理 1 (経路積分の存在). 任意の汎関数 $F(q,p)\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\cup\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ に対し,

$$\begin{aligned}(2.1)\qquad &\int_{q(T)=x,p(0)=\xi_0,q(0)=x_0} e^{i\phi(q,p)}F(q,p)\mathcal{D}(q,p)\\ &\equiv \lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{dJ}\int_{\mathbf{R}^{2dJ}} e^{i\phi(q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}})}F(q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}})\prod_{j=1}^{J}d\xi_j dx_j\end{aligned}$$

が $(x,\xi_0,x_0)\in\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d$ に関し広義一様収束する. ただし, 右辺の多重積分は振動積分として扱う.

注意. $F(q,p)\equiv 1$ のとき, 右辺は

$$\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{dJ}\int_{\mathbf{R}^{2dJ}} e^{\sum_{j=1}^{J+1}\left(i(x_j-x_{j-1})\cdot\xi_{j-1}-\int_{T_{j-1}}^{T_j}H(t,x_j,\xi_{j-1})dt\right)}\prod_{j=1}^{J}dx_j d\xi_j$$

となるが, このときでさえ, 各積分は必ずしも絶対収束しない. $\int_{\mathbf{R}^d}dx_j=\infty$. さらに積分の個数 J は ∞ に近づく. $\infty\times\infty\times\infty\times\infty\times\cdots\cdots$.

例.

$$\left(\partial_T-\triangle/2+|x|^2/2\right)U'(T,0)v(x)=0\,,\ U'(0,0)v(x)=v(x)$$

となる基本解を表す関数 $U'(T,0,x,\xi)$ を考える. $|x|^2/2+|\xi|^2/2=|\xi^2|/2+1+|x|^2/2-1$ と書けるので, $H(t,\xi)=|\xi^2|/2+1$, $F(q)=e^{-\int_0^T(|q(t)|^2/2-1)dt}$ とする. このとき

$$\begin{aligned}&e^{i(x-x_0)\cdot\xi_0}U'(T,0,x,\xi_0)=\int e^{i\phi(q,p)}F(q)\mathcal{D}(q,p)\\ &=\frac{1}{(\cosh T)^{1/2}}\exp i\Big(-x_0\cdot\xi_0+\frac{2x\cdot\xi_0+i(|x|^2+|\xi_0|^2)\sinh T}{2\cosh T}\Big).\end{aligned}$$

[13] で, 区分的陪特性経路 [11] を用いて, シュレディンガー方程式の基本解を直接計算できる例を与えたが, $U'(T,0,x,\xi_0)$ も直接計算できる例として与えている.

定理 2 (汎関数 $F(q,p)\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\cup\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ の例). $L\geq 0$, $0\leq t\leq T$, $0\leq T'\leq T''\leq T$ とする.

(1) $|\partial_x^\alpha B(t,x)|\leq C_\alpha\langle x\rangle^L$ ならば, $F(q)\equiv B(t,q(t))\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$.

(2) $|\partial_\xi^\beta B(t,\xi)|\leq C_\beta\langle\xi\rangle^{L-\rho|\beta|}$ ならば, $F(p)\equiv B(t,p(t))\in\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$.

特に $F(q,p)\equiv 1\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\cap\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$.

(3) $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta B(t,x,\xi)$ が連続で $|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta B(t,x,\xi)|\leq C_{\alpha,\beta}(\langle x\rangle+\langle\xi\rangle)^L\langle\xi\rangle^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|}$ ならば,

$$F(q,p)\equiv\int_{[T',T'')}B(t,q(t),p(t))dt\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\cap\mathcal{F}_{\mathcal{P}}\,.$$

(4) $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta B(t,x,\xi)$ が連続で $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta B(t,x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|}$ ならば,

$$F(q,p) = e^{\int_{[T',T'')} B(t,q(t),p(t))dt} \in \mathcal{F}_\mathcal{Q} \cap \mathcal{F}_\mathcal{P}\,.$$

(5) $0 < c' \le \mathrm{Re}\, B(t,x) \le C'\langle x\rangle^L$, $\partial_x^\alpha B(t,x)$ は連続で $|\partial_x^\alpha B(t,x)/\mathrm{Re}\, B(t,x)| \le C_\alpha$ ならば,

$$F(q) \equiv e^{-\int_{[T',T'')} B(t,x)dt} \in \mathcal{F}_\mathcal{Q}\,.$$

注意. 不確定性原理を避けるため, 位置 $q(t)$ と運動量 $p(t)$ を同時刻 t に扱わない. $q(t) \in \mathcal{F}_\mathcal{Q}$, $p(t) \notin \mathcal{F}_\mathcal{Q}$ と なり, $q(t) \notin \mathcal{F}_\mathcal{P}$, $p(t) \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$ となる. $t \ne s$ ならば, $q(t)\cdot p(s)$ については, 区間 $[0,T)$ を t と含む区間を s を含む区間に分け, それぞれの区間の経路積分が表す作用素の積として扱うことができる.

定義 2.5 (汎関数微分). 位置経路 q, $q' \in \mathcal{Q}$ と運動量経路 p, $p' \in \mathcal{P}$ に対し, (q',p') 方向の汎関数微分を

$$D_{(q',p')}F(q,p) = \lim_{\theta\to 0}\frac{F(q+\theta q', p+\theta p') - F(q,p)}{\theta}$$

で定義する.

注意. $(q',0)$ のとき位置経路の方向, $(0,p')$ のとき運動量経路の方向となる.

注意. 分割 $\Delta_{T,0}$ が q, q', p, p' がジャンプする時刻をすべて含むとする. $q(T_j) = x_j$, $q'(T_j) = x'_j$, $p(T_{j-1}) = \xi_{j-1}$, $p'(T_{j-1}) = \xi'_{j-1}$ とおく. $(T_{j-1},T_j]$ 上で $(q+\theta q')(t) = x_j + \theta x'_j$, $[T_{j-1},T_j)$ 上で $(p+\theta p')(t) = \xi_{j-1} + \theta\xi'_{j-1}$ となるので,

$$F(q+\theta q', p+\theta p') = F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}+\theta x_{J+1}, \xi_J + \theta\xi'_J, \dots, \xi_0+\theta\xi'_0, x_0+\theta x'_0)$$

と書ける. ゆえに

$$\begin{aligned} D_{(q',p')}F(q,p) = &\sum_{j=0}^{J+1}(\partial_{x_j}F_{\Delta_{T,0}})(x_{J+1},\xi_J,x_J,\dots,\xi_0,x_0)\cdot x'_j \\ &+ \sum_{j=0}^{J}(\partial_{\xi_j}F_{\Delta_{T,0}})(x_{J+1},\xi_J,x_J,\dots,\xi_0,x_0)\cdot \xi'_j \end{aligned}$$

と書ける. 同様に, 汎関数微分の線形性

$$D_{c'(q',p')+c''(q'',p'')}F(q,p) = c'D_{(q',p')}F(q,p) + c''D_{(q'',p'')}F(q,p)$$

(q', $q'' \in \mathcal{Q}$, p', $p'' \in \mathcal{P}$, c', $c'' \in \mathbf{R}$) が成立する. さらに $F_{\Delta_{T,0}} \in C^\infty(\mathbf{R}^{d(2J+3)})$ により, 高階の汎関数微分も扱うことができる.

定理 3 ($\mathcal{F}_\mathcal{Q}$, $\mathcal{F}_\mathcal{P}$ 上のなめらかな代数).

(1) 任意の汎関数 $F(q,p)$, $G(q,p) \in \mathcal{F}_\mathcal{Q}$, 任意の位置経路 $q' \in \mathcal{Q}$, 任意の運動量経路 $p' \in \mathcal{P}$, 任意の $d \times d$ 実行列 V と任意の $d \times d$ 実正則行列 W に対し,

$$F(q,p) + G(q,p) \in \mathcal{F}_\mathcal{Q}\,,\ F(q,p)G(q,p) \in \mathcal{F}_\mathcal{Q}\,,$$

$$F(q+q', p+p') \in \mathcal{F}_\mathcal{Q}\,,\ F(Vq, Wp) \in \mathcal{F}_\mathcal{Q},\ D_{(p',q')}F(q,p) \in \mathcal{F}_\mathcal{Q}.$$

(2) 任意の汎関数 $F(q,p)$, $G(q,p) \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$, 任意の位置経路 $q' \in \mathcal{Q}$, 任意の運動量経路 $p' \in \mathcal{P}$, 任意の $d \times d$ 実行列 V と任意の $d \times d$ 実正則行列 W に対し,

$$F(q,p) + G(q,p) \in \mathcal{F}_\mathcal{P}\,,\ F(q,p)G(q,p) \in \mathcal{F}_\mathcal{P}\,,$$

$$F(q+q', p+p') \in \mathcal{F}_\mathcal{P}\,,\ F(Vq, Wp) \in \mathcal{F}_\mathcal{P}\,,\ D_{(p',q')}F(q,p) \in \mathcal{F}_\mathcal{P}\,.$$

注意. 汎関数の 2 つの集合 $\mathcal{F}_\mathcal{Q}$, $\mathcal{F}_\mathcal{P}$ は和, 積, 経路の平行移動, 経路の実正則変換, 汎関数微分の演算に関し閉じている. 定理 3 を定理 2 に適用することで, 経路積分可能な多くの汎関数 $F(q,p) \in \mathcal{F}_\mathcal{Q} \cup \mathcal{F}_\mathcal{P}$ を創ることができる. しかしながら, 経路 q', p' はジャンプするため, $e^{i\phi(q,p)}$ の $\int_{[0,T)} p(t) \cdot dq(t)$ 部分は必ずしも良い性質を持たない. それゆえ, 相空間経路積分では, どの演算が成立するかに注意しなければならない.

注意. シュレディンガー方程式の場合も, 類似の結果が成立する (cf. [12, Theorem 2]).

例. $0 < c' < a(t,x)$, $|\partial_x^\alpha a(t,x)| \le C'_\alpha$, $k, l \in \mathbf{N}_0$ とする. 放物型作用素

$$\partial_T + H'(T,x,-i\partial_x) = \partial_T + a(T,x)(-\triangle)^k + |x|^{2l}$$

を考える. このとき, $H(t,x,\xi) = a(t,x)|\xi|^{2k} + 1$, $B_1(x) = -2$, $B_2(x) = |x|^{2l} + 1$ とおけば $H'(t,x,\xi) = H(t,x,\xi) + B_1(x) + B_2(x)$ と書ける. 定理 2 (4) (5) より

$$F(q) \equiv e^{-\int_{[0,T)} B_1(q(t))dt} \in \mathcal{F}_\mathcal{Q}\,,\quad G(q) \equiv e^{-\int_{[0,T)} B_2(q(t))dt} \in \mathcal{F}_\mathcal{Q}.$$

よって $\partial_T + H'(T,x,-i\partial_x)$ に対する基本解を表す関数 $U'(T,0,x,\xi_0)$ は経路積分の形

$$\begin{aligned} e^{i(x-x_0)\cdot\xi_0} U'(T,0,x,\xi_0) &= \int e^{i\int_{[0,T)} p(t)\cdot dq(t) - \int_{[0,T)} H'(t,q(t),p(t))dt} \mathcal{D}(q,p) \\ &\equiv \int e^{i\phi(q,p)} F(q)G(q)\mathcal{D}(q,p) \end{aligned}$$

で書ける.

相空間経路積分には測度が存在しないため, 相空間経路積分における積分や極限との順序交換定理を用意する.

定理 4 (積分との順序交換). $L \geq 0$, $0 \leq T' \leq T'' \leq T$ とする.

(1) 任意の多重指数 α に対し $\partial_x^\alpha B(t,x)$ は $[0,T]\times\mathbf{R}^d$ に関し連続で $|\partial_x^\alpha B(t,x)| \leq C_\alpha \langle x\rangle^L$ とする. このとき, 任意の汎関数 $F(q,p) \in \mathcal{F}_\mathcal{Q}$ ($F(q,p) \equiv 1$ を含む) に対し,

$$\begin{aligned}(2.2)\qquad &\int_{q(T)=x,\, p(0)=\xi_0, q(0)=x_0} e^{i\phi(q,p)} \Big(\int_{[T',T'')} B(t,q(t))dt \Big) F(q,p)\mathcal{D}(q,p) \\ &\quad = \int_{[T',T'')} \Big(\int_{q(T)=x,\, p(0)=\xi_0, q(0)=x_0} e^{i\phi(q,p)} B(t,q(t))F(q,p)\mathcal{D}(q,p) \Big) dt\,.\end{aligned}$$

(2) 任意の多重指数 β に対し $\partial_\xi^\beta B(t,\xi)$ は $[0,T]\times\mathbf{R}^d$ に関し連続で $|\partial_\xi^\beta B(t,\xi)| \leq C_\beta \langle\xi\rangle^{L-\rho|\beta|}$ とする. このとき, 任意の汎関数 $F(q,p) \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$ ($F(q,p) \equiv 1$ を含む) に対し,

$$\begin{aligned}(2.3)\qquad &\int_{q(T)=x,\, p(0)=\xi_0, q(0)=x_0} e^{i\phi(q,p)} \Big(\int_{[T',T'')} B(t,p(t))dt \Big) F(q,p)\mathcal{D}(q,p) \\ &\quad = \int_{[T',T'')} \Big(\int_{q(T)=x,\, p(0)=\xi_0, q(0)=x_0} e^{i\phi(q,p)} B(t,p(t))F(q,p)\mathcal{D}(q,p) \Big) dt\,.\end{aligned}$$

注意. 左辺は積分したあと経路積分し, 右辺は経路積分したあと積分する. しかし, 不確定性原理を避けるため, 位置 $q(t)$ と運動量 $p(t)$ を同時刻 t で扱わない. シュレディンガー方程式の場合も, 類似の結果が成立する (cf. [12, Theorem 4]).

注意 (極限との順序交換)**.** 経路積分とある種の極限との順序交換も可能である. 例えば, 任意の多重指数 α に対し $\partial_x^\alpha B(t,x)$ が連続で $|\partial_x^\alpha B(t,x)| \leq C_\alpha$ とすると, 摂動展開

$$\begin{aligned}&\int_{q(T)=x,\, p(0)=\xi_0, q(0)=x_0} e^{i\phi(q,p)+\int_{[T',T'')} B(t,q(t))dt} \mathcal{D}(q,p) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_{[T',T'')} dt_k \int_{[T',t_k)} dt_{k-1} \cdots \int_{[T',t_2)} dt_1 \\ &\times \int_{q(T)=x,\, p(0)=\xi_0, q(0)=x_0} e^{i\phi(q,p)} B(t_k,q(t_k))B(t_{k-1},q(t_{k-1}))\cdots B(t_1,q(t_1))\mathcal{D}(q,p)\end{aligned}$$

が成立する.

定理 5 (運動量経路の平行移動). 任意の運動量経路 $p' \in \mathcal{P}$ に対し,

$$G(q) \equiv e^{i\int_{[0,T)} p'(t)\cdot dq(t)} \in \mathcal{F}_\mathcal{Q}\,.$$

さらに, 任意の汎関数 $F(q,p) \in \mathcal{F}_\mathcal{Q}$ に対し,

$$\int_{q(T)=x, p(0)=\xi_0, q(0)=x_0} e^{i\phi(q,p+p')} F(q,p+p')\mathcal{D}(q,p) = \int_{q(T)=x, p(0)=\xi_0+p'(0), q(0)=x_0} e^{i\phi(q,p)} F(q,p)\mathcal{D}(q,p).$$

注意. 粗く言えば, すべての運動量経路の平行移動は, すべての経路に関して和を取るので, 始点と終点の平行移動と同じになると解釈できる. シュレディンガー方程式の場合も, 類似の結果が成立する (cf. [12, Theorem 6 (1)]).

注意 (位置経路の平行移動)**.** $|\partial_\xi^\alpha e^{ic\xi}| \not\leq C_\alpha \langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|}$ (ξ で微分しても $\langle\xi\rangle$ のオーダーが下がらない) ため, 任意の位置経路 $q' \in \mathcal{Q}$ に対し,

$$G(p) \equiv e^{i\int_{[0,T)} p(t)\cdot dq'(t)} \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$$

が成立するようにできなかった. このため, 任意の汎関数 $F(q,p) \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$ に対し

$$\int_{q(T)=x,p(0)=\xi_0,q(0)=x_0} e^{i\phi(q+q',p)} F(q+q',p)\mathcal{D}(q,p) = \int_{q(T)=x+q'(T),p(0)=\xi_0,q(0)=x_0+q'(0)} e^{i\phi(q,p)} F(q,p)\mathcal{D}(q,p)$$

が成立するようにできるかどうかわからない. シュレディンガー方程式の場合は, これらも成立する (cf. [12, Theorem 6 (2)]).

定理 6 (経路の直交変換). 任意の汎関数 $F(q,p) \in \mathcal{F}_\mathcal{Q} \cup \mathcal{F}_\mathcal{P}$ と任意の $d \times d$ 実行列 Q に対し,

$$\begin{aligned}&\int_{q(T)=x,p(0)=\xi_0,q(0)=x_0} e^{i\phi(Qq,Qp)} F(Qq,Qp)\mathcal{D}(q,p)\\ &= \int_{q(T)=Qx,p(0)=Q\xi_0,q(0)=Qx_0} e^{i\phi(q,p)} F(q,p)\mathcal{D}(q,p)\,.\end{aligned}$$

注意. 粗く言えば, すべての経路の直交変換は, すべての経路に関して和を取るので, 始点と終点の直交変換と同じになると解釈できる. シュレディンガー方程式の場合も, 類似の結果が成立する (cf. [12, Theorem 8]).

定理 7 (運動量経路の汎関数微分に関する部分積分). 任意の運動量経路 $p' \in \mathcal{P}$ に対し, 運動量経路の方向の汎関数微分 $D_{(0,p')}\phi(q,p) \in \mathcal{F}_\mathcal{Q}$. さらに, 任意の汎関数 $F(q,p) \in \mathcal{F}_\mathcal{Q}$ と $p'(0) = 0$ となる任意の運動量経路 $p' \in \mathcal{P}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\int_{q(T)=x,p(0)=\xi_0,q(0)=x_0} e^{i\phi(q,p)} (D_{(0,p')}F)(q,p)\mathcal{D}(q,p)\\ &= -i\int_{q(T)=x,p(0)=\xi_0,q(0)=x_0} e^{i\phi(q,p)} (D_{(0,p')}\phi)(q,p)F(q,p)\mathcal{D}(q,p).\end{aligned}$$

注意. 左辺は $F(q,p)$ を汎関数微分し, 右辺は $e^{i\phi(q,p)}$ を汎関数微分し (-1) 倍している. シュレディンガー方程式の場合も, 類似の結果が成立する (cf. [12, Theorem 7 (1)]).

注意 (位置経路の汎関数微分に関する部分積分)**.** 任意の位置経路 $q' \in \mathcal{Q}$ に対し, 位置経路の方向の汎関数微分 $D_{(q',0)}\phi(q,p) \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$. しかし, 平行移動がわからないため, 任意の

汎関数 $F(q,p)\in\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ と $q'(T)=q'(0)=0$ となる任意の位置経路 $q'\in\mathcal{Q}$ に対し,

$$\begin{aligned}&\int_{q(T)=x,p(0)=\xi_0,q(0)=x_0} e^{i\phi(q,p)}(D_{(q',0)}F)(q,p)\mathcal{D}(q,p)\\&=-i\int_{q(T)=x,p(0)=\xi_0,q(0)=x_0} e^{i\phi(q,p)}(D_{(q',0)}\phi)(q,p)F(q,p)\mathcal{D}(q,p)\end{aligned}$$

が成立するようにできるかどうかわからない. シュレディンガー方程式の場合は, これらも成立する (cf. [12, Theorem 7 (2)]).

定理 1 の収束の詳細と証明の概略を述べる. 関数 $b_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_0,x_0)$ を

$$\begin{aligned}&e^{i(x_{J+1}-x_0)\cdot\xi_0}b_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},\xi_0,x_0)\\&\equiv\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{dJ}\int_{\mathbf{R}^{2dJ}} e^{i\phi(q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}})}F(q_{\Delta_{T,0}},p_{\Delta_{T,0}})\prod_{j=1}^{J}d\xi_j dx_j\end{aligned}\tag{2.4}$$

とする.

定理 8 (定理 1 の収束の詳細). $0<T\le\mathbf{T}<\infty$, $F(q,p)\in\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}\cup\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ とする. 任意の非負整数 ℓ_1, ℓ_2 に対し, 非負整数 ℓ_1', ℓ_2' と正の定数 C_{ℓ_1,ℓ_2}, C'_{ℓ_1,ℓ_2} が存在し,

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_{\xi_0}^\beta b_{\Delta_{T,0}}(x,\xi_0,x_0)\right|\le A_{\ell_1',\ell_2'}C_{\ell_1,\ell_2}\left(\langle x\rangle+\langle\xi_0\rangle+\langle x_0\rangle\right)^L\langle\xi_0\rangle^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|},\tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}&\left|\partial_x^\alpha\partial_{\xi_0}^\beta\left(b_{\Delta_{T,0}}(x,\xi_0,x_0)-b(T,0;x,\xi_0,x_0)\right)\right|\\&\le A_{\ell_1',\ell_2'}C'_{\ell_1,\ell_2}|\Delta_{T,0}|\,(T+U)\left(\langle x\rangle+\langle\xi_0\rangle+\langle x_0\rangle\right)^L\langle\xi_0\rangle^{2m+\delta|\alpha|-\rho|\beta|}\end{aligned}\tag{2.6}$$

が, 任意の多重指数 $|\alpha|\le\ell_1$, $|\beta|\le\ell_2$ に対し成立する. ただし $b(T,0;x,\xi_0,x_0)\equiv\lim_{|\Delta_{T,0}|\to0}b_{\Delta_{T,0}}(x,\xi_0,x_0)$ である.

注意. $F_{\Delta_{T,0}}$ が x_0 に依存しない場合 (例えば, $F(q,p)\equiv1$ の場合), $b_{\Delta_{T,0}}(x,\xi_0,x_0)$, $b(T,0;x,\xi_0,x_0)$ は x_0 に依存しないので, $b_{\Delta_{T,0}}(x,\xi_0)$, $b(T,0;x,\xi_0)$ と書ける.

収束の証明は, 粗く言えば, 3 つのステップ

1°. (2.4) の多重振動積分を $J\to\infty$ のとき定数 C の J 乗 C^J で コントロールする (Tsutsumi [19, Theorem 1.1], H. Kumano-go [9, §7.2, Theorem 2.2] 型の評価).

2°. (2.4) の多重振動積分を $J\to\infty$ によらない定数 C でコントロールする (Fujiwara[6] 型の評価).

3°. (2.4) の多重振動積分が $|\Delta_{T,0}|\to0$ のとき収束するように条件を加える.

からなる. 時間が許せば, これらの詳細についても述べたい.

参考文献

[1] S. Albeverio, Høegh-Krohn, S. Mazzucchi, Mathematical theory of Feynman path integrals, Lect. Notes Math. vol. 523, Springer, Berlin, 1976, 2nd enlarged edition 2008.

[2] S. Albeverio, G. Guatteri, S. Mazzucchi, Phase space Feynman path integrals, J. Math. Phys. 43 (2002), 2847–2857.

[3] W. Bock, M. Grothaus, A white noise approach to phase space Feynman path integrals. Teor. Imovir. Mat. Stat. 85x (2011), 7-21.

[4] I. Daubechies, J. R. Klauder, Quantum mechanical path integrals with Wiener measure for all polynomial Hamiltonians. J. Math. Phys. 26 (1985), 2239-2256.

[5] R. P. Feynman, An operator calculus having applications in quantum electrodynamics, Appendix B, Phys. Rev. 84, (1951), 108–236.

[6] D. Fujiwara, The stationary phase method with an estimate of the remainder term on a space of large dimension, Nagoya Math. J. 124 (1991) 61–97.

[7] W. Ichinose, A mathematical theory of the phase space Feynman path integral of the functional, Comm. Math. Phys. 265 (2006), 739–779.

[8] H. Kitada, H. Kumano-go, A family of Fourier integral operators and the fundamental solution for a Schrödinger equation, Osaka J. Math. 18 (1981), 291-360.

[9] H. Kumano-go, Pseudo-Differential Operators, The MIT press, Cambridge, MA, 1981.

[10] N. Kumano-go, A Hamiltonian path integral for a degenerate parabolic pseudo-differential operators, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 3 (1996), 57–72.

[11] N. Kumano-go, D. Fujiwara, Phase space Feynman path integrals via piecewise bicharacteristic paths and their semiclassical approximations, Bull. Sci. math. 132 (2008), 313–357.

[12] N. Kumano-go, Phase space Feynman path integrals with smooth functional derivatives by time slicing approximation, Bull. Sci. math. 135 (2011), 936–987.

[13] N. Kumano-go, Phase space Feynman path integrals - Calculation examples via piecewise bicharacteristic paths, RIMS Kôkyûroku, **1797** (2012), 167–186.

[14] N. Kumano-go, A. S. Vasudeva Murthy, Phase space Feynman path integrals of higher order parabolic type with general functional as integrand, Bull. Sci. math. 139 (2015), 495–537.

[15] N. Kumano-go, Phase space Feynman path integrals of parabolic type with smooth functional derivatives, Bull. Sci. math. 153 (2019), 1–27.

[16] S. Mazzucchi, Mathematical Feynman Path Integrals and Their Applications, World Scientific Pub Co Inc, 2009.

[17] M. Ruzhansky, V. Turunen, Pseudo-Differential Operators and Symmetries, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2010.

[18] L. S. Schulman, Techniques and Applications of Path Integration, Monogr. Texts. Phys. Astron., Wiley-Interscience, New York, 1981, Dover Publications, 2005.

[19] C. Tsutsumi, The fundamental solution for pseudo-differential operators of parabolic type, Osaka J. Math. 14 (1977), 569–592.

[20] O. G. Smolyanov, A. G. Tokarev, A. Truman, Hamiltonian Feynman path integrals via Chernoff formula, J. Math. Phys. 43 (2002), 5161–5171.

Evolution operator arising from flow past a rigid body

菱田 俊明

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
hishida@math.nagoya-u.ac.jp

1 問題と背景

3 次元空間において無限遠までひろがる非圧縮粘性流の長時間挙動を, 剛体の障害物の運動が時間に依存する場合に考察する. 流れは剛体に固定した座標系での Navier-Stokes 方程式

$$\begin{aligned} &\partial_t u + u \cdot \nabla u = \Delta u - \nabla p + (\eta + \omega \times x) \cdot \nabla u - \omega \times u, \\ &\qquad \mathrm{div}\ u = 0 \qquad\qquad \text{in } D \times (0, \infty) \end{aligned} \tag{1.1}$$

にしたがう ([10]). ここで, D は $C^{1,1}$-境界 ∂D をもつ $\mathbb{R}^3$ の外部領域, $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))^\top$ と $p(x,t)$ は流体の速度ベクトルと圧力である. (1.1) は運動量保存則と質量保存則 (と座標変換) から得られる方程式系である. 質量保存則からしたがう $\mathrm{div}\ u = 0$ は solenoidal 条件と呼ばれ, 流体が非圧縮性をもつことを表している. 剛体の運動は並進と回転に分解される. (1.1) の運動方程式の係数において, $\eta = \eta(t)$ と $\omega = \omega(t)$ は剛体の質量中心の並進速度と質量中心まわり

の回転角速度を表し, これらは与えられている. 境界 ∂D 上では通常の no-slip 条件を考えるので, そこでの流速は剛体運動 $\eta+\omega\times x$ に等しいとする. また, 無限遠では静止しているとし, さらに初期条件を課す:

$$u|_{\partial D}=\eta+\omega\times x,\qquad \lim_{|x|\to\infty}u=0,\qquad u(\cdot,0)=u_0. \quad (1.2)$$

$\eta=\omega=0$ のときが障害物静止の場合の Navier-Stokes 初期値境界値問題であり, 多くの研究がある. 障害物が運動する場合に, その運動の流れの形への寄与は興味深く, η と ω が定数ベクトルであるときの定常解の無限遠での漸近展開の第 1 項において顕著に現れる. 並進運動する場合のそのような研究は古く, 1960 年代においてすでに Finn が一連の著しい研究 ([8] とそこでの引用文献を参照) の中で航跡 (wake region) を伴う異方的な漸近挙動を明らかにした. 回転運動の寄与については約 10 年ほど前に, 自己相似な Navier-Stokes 定常流についての Šverák [34] の深い洞察に基づき, 漸近展開の第 1 項は回転軸対称な Landau solution であることを Farwig-Hishida [6] が示した (漸近展開の剰余項の評価は [5] により改良された). それらの概要を [20], [13] で知ることができる.

そのような漸近挙動を示す定常解の安定性の研究は重要であり, 特に並進運動する場合には, エネルギー安定性 (定常解に加えた擾乱が L^2 を走る場合の安定性) についての結果も少なからずあるが, L^q での安定性は Shibata [31] によって初めて証明された (その後の [4] も参照). その際に本質的なことは, 線型化方程式の初期値問題 (次節の (2.1) において η が t に依らず $\omega=0$ の場合の問題) の一意解を与える Oseen 半群の L^q-L^r 減衰評価であり, これは Kobayashi-Shibata [27] による成果である. 減衰度は次節の (2.6)–(2.7) のとおりで

あり, 評価の形自体は全空間における熱半群と同様で, 放物型方程式の解の長時間挙動として典型的であるが, 一般に外部領域における半群に対してそのような評価を求めることは難しい問題である. 最も基本的な Stokes 半群 (障害物静止 $\eta = \omega = 0$ の場合) に対する望ましい形の評価の証明は約 30 年前の Iwashita [25] による. いったんこの評価が得られると, 応用は非常に広大で, 実際に [25] の成果は繰返し用いられており, 当分野の基礎文献の一つであると言える. その成果だけでなく, スペクトル解析に基づく [25] の論証方法も広く用いられている.

本稿の主題は長時間挙動であるが, 障害物が回転する場合には解の正則性において関数解析的なレベルでの違いが生じ, その解析を行わずして長時間挙動を論じることはできない. 実際, (1.1) の移流項の係数の非有界性のために, この項は低階であっても Laplacian による粘性項の単なる摂動とみなすことはできず, 回転角速度 ω が定数ベクトルの場合に生成される半群は解析半群でないが, ある種の平滑化作用は有する ([16]). 双曲型の側面を生成作用素の spectrum の分布の観点から明らかにした研究として, Farwig-Neustupa [7] (そこでの引用文献も参照) がある. そのような半群であっても, 上記の Stokes 半群, Oseen 半群と同じ形の減衰評価を導けることが Hishida-Shibata [24] により示された. それらの概要は [17] (英訳は [19]) にある.

Oseen 半群の減衰評価は定常解の attainability の研究においても重要な役割を果たす. 初期時刻で剛体と流体が静止しているとし, 剛体が一定の方向に加速して有限時間後に一様な並進速度へ至るときに, Finn [9] は流れの長時間挙動を問うた. これを Finn の starting 問題という. 期待される結果は, 最終

的な一様並進速度が小さいときに, それから一意的に定まる定常解への漸近である. これが達成されるときに, その定常解は attainable であるという (この術語は Heywood [15] により導入された). 上で述べた定常解の異方的な漸近挙動, 特に航跡の外側での良い減衰度により, 無限遠近傍での summability は障害物静止の場合よりも (指数が低いという意味で) 良いが, それは $L^{2+\epsilon}$ である. 一般にはこの summability が最良であり, ϵ を外して L^2 とできないことは定常解の無限遠での漸近展開を通して説明されるので, L^2 理論によって starting 問題を解くことはできない. このことは安定性問題との違いであり, したがってその解決 (Galdi-Heywood-Shibata [12]) には Oseen 半群の L^q-L^r 評価 [27] を待たねばならなかった. 並進の starting 問題について, 流体の初期速度が大きい場合に定常解の attainability を考察した研究 [23] もある (流れの時間発展はある種の弱解として捉えられる). 障害物が回転する場合の同様な意味での starting 問題も [17, Section 6] で提唱されたが, [24] の L^q-L^r 評価を使い [12] の方法に沿うことによっては, 移流項 $(\omega \times x) \cdot \nabla u$ の係数の非有界性のために立ち行かない. そこで, 半群の評価には頼らず, 最初から η と ω が時間依存の場合を直接に扱おうとする考え方は自然であろう.

本稿で時間依存係数の (1.1) を解析する動機は, 上記の starting 問題にとどまらない. 障害物の並進速度と回転角速度が時間周期的に振動する場合、あるいは概周期運動する場合、あるいは $t \to \infty$ である剛体運動に漸近する場合等, さまざまな興味深い物理状況をすべて含んだ一般なシステムである. 特に, 安定性あるいは attainability を調べようとする主流 (定常解や時間周期解等) が無限遠で scale 臨界減衰度 $\mathcal{O}(|x|^{-1})$ を

もつ場合には議論が delicate となるが (上で述べた漸近展開により障害物の並進を伴わないときはこの減衰度が最良である), (1.1) の線型化初期値問題 (2.1) の解作用素 (発展作用素) のみならず, その共役作用素に対しても所要の減衰評価を得ると, Yamazaki [36] の技法によって解析を進められることは当分野において周知である. また, 流れと剛体の運動の相互作用 (fluid-structure interaction) を考察する場合に, その問題では η と ω も未知として (1.1) と剛体の運動方程式 (運動量保存則と角運動量保存則から導かれる 6 次元の常微分方程式系) の連成系を解析することとなるが, 解の長時間挙動の研究は進んでおらず, 本稿による線型化方程式 (2.1) の解の減衰度の解析を活かすことができると考えている.

2 発展作用素

さて, 初期値問題 (1.1)–(1.2) に対して, 知られている解は (筆者の研究 [21], [22] 以前では) Borchers [2] による Leray-Hopf 弱解と Hansel-Rhandi [14] による一意な時間局所解だけである. ここで, Leray-Hopf 弱解は時間大域解ではあるが、構成されるクラスでの一意性は不明であり, またその正則性についての最終的な結果は得られていない (有名な未解決問題である). Hansel-Rhandi [14] の最も重要な貢献は, η と ω の局所 Hölder 連続性のもとで, $1 < q < \infty$ とするとき, non-autonomous な線型化方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} &\partial_t u = \Delta u - \nabla p + (\eta + \omega \times x) \cdot \nabla u - \omega \times u, \\ &\operatorname{div} u = 0, && \text{in } D \times (s, \infty), \\ &u|_{\partial D} = 0, \qquad \lim_{|x| \to \infty} u = 0, \qquad u(\cdot, s) = f, \end{aligned} \tag{2.1}$$

による空間 $L^q_\sigma(D)$ 上での発展作用素 $\{T(t,s)\}_{t\geq s\geq 0}$ の生成, およびその L^q-L^r 平滑性評価を求めたことである. これが得られると, Kato [26] 等の標準的なやりかたによって, compatibility 条件をみたす初期値 $u_0 \in L^q(D)^3, q \in [3,\infty)$, に対する (1.1)–(1.2) の時間局所解を構成することは難しくない. ここで, 空間 $L^q_\sigma(D)$ は $C^\infty_{0,\sigma}(D) = \{\psi \in C^\infty_0(D)^3;\ \mathrm{div}\ \psi = 0\}$ の $L^q(D)^3$ における完備化を表し, solenoidal L^q 空間と呼ばれる. 完備化により, $L^q_\sigma(D)$ の元について, 超関数の意味で solenoidal 条件をみたすとともに境界 ∂D 上への normal trace が消えることに注意する. 以下, 表記の簡単のため, ベクトル値関数の属する関数空間であることが明らかな場合には, 例えば上記の $L^q(D)^3$ を $L^q(D)$ と表すことにする.

問題の定式化は Helmholtz 分解 (直和分解 [30], [33])

$$L^q(D) = L^q_\sigma(D) \oplus \left\{\nabla p \in L^q(D);\ p \in L^q_{loc}(\overline{D})\right\}, \quad 1 < q < \infty, \tag{2.2}$$

に基づき, $L^q(D)$ から $L^q_\sigma(D)$ への射影作用素 P を (2.1) の方程式に施すことにより圧力勾配を消去して (この操作により問題を扱いやすくはなるが圧力の難しさは非局所的な作用素 P へ移行), 空間 $L^q_\sigma(D)$ における発展方程式

$$\frac{du}{dt} + L(t)u = 0, \quad t \in (s,\infty); \qquad u(s) = f, \tag{2.3}$$

に書き改めることにより行われる. ここで, $L^q_\sigma(D)$ 上の線型作用素 $L(t)$ は,

$$\begin{aligned} &D(L(t)) = \{u \in L^q_\sigma(D) \cap W^{1,q}_0(D) \cap W^{2,q}(D);\ (\omega(t)\times x)\cdot\nabla u \in L^q(D)\},\\ &L(t)u = -P[\Delta u + (\eta(t) + \omega(t)\times x)\cdot\nabla u - \omega(t)\times u], \end{aligned} \tag{2.4}$$

により定められる. 定義域 $D(L(t))$ が剛体の回転軸の方向ベクトルの変動にしたがい t に依って変化することに注意する.

$W^{k,q}(D)$ は通常の k 階 L^q-Sobolev 空間, $W_0^{1,q}(D)$ は $C_0^\infty(D)$ の $W^{1,q}(D)$ における完備化を表す. すでに述べたように, t を固定するとき ($\omega = 0$ でない限り) 作用素 $-L(t)$ は解析半群の生成作用素ではないので, 放物型発展作用素の Tanabe-Sobolevskii 理論を適用することはできない (増田 [29], 田辺 [35]). 双曲型発展作用素の Kato 理論 (これも [29], [35] を参照) を適用することはできるが, 得られる解の正則性に関する情報が乏しく, 偏微分方程式 (2.1) の特徴を捉えられない. Hansel-Rhandi [14] の解析の優れている点は, 既存の発展作用素論に頼らずに独自の視点で発展作用素を構成した (要するに初期値問題 (2.1) の一意解を構成した) ことであり, したがって彼らの解はこの方程式にみあう諸性質, 特に L^q-L^r 平滑性を備えている. 特に第 1 近似のとり方が重要であり, その後の iteration の構成は Tanabe 理論における方法に似るが, [14] は非常に非自明な成果である.

本稿の題目の Evolution operator とは, [14] によるこの発展作用素 $T(t,s)$ のことを指す. 主題はこれの $(t-s) \to \infty$ での減衰評価であり, そのような考察は [14] において一切行われていない. 一般に, 発展作用素は既存の理論 ([29], [35]) であれ [14] であれ, $\mathcal{T} > 0$ を任意に固定して区間 $[0, \mathcal{T}]$ 上で構成されるので, 長時間挙動の情報を直接引き出す拠り所はなく, autonomous な場合には resolvent の逆 Laplace 変換 (解析半群においては Dunford 積分表示と同じこと) による半群の時間大域的な表示があるのと対照的である (この表示は実際に半群の長時間挙動の解析において役割を果たす). そのため, non-autonomous な初期値問題の解の長時間挙動を求めるには, 個々の問題の特性を的確に捉えて解析を進めるほかないが, 境界のある非有界領域上では一般に難しい問題である

(有界領域において本稿のように Dirichlet 境界条件のもとで考察する場合には指数減衰を期待できることが多く, 問題は平易となる). 発展作用素 $T(t,s)$ の減衰評価が望ましい形で確立されれば, 問題 (1.1)–(1.2) に対して種々の状況のもとでの一意な時間大域解の構成が可能となる (最も簡単な場合が [21, Section 5] で与えられている) ので, 非常に重要な問題でもある.

本稿では,

$$\eta,\, \omega \in C^{\theta}([0,\infty);\mathbb{R}^3) \cap L^{\infty}(0,\infty;\mathbb{R}^3) \tag{2.5}$$

であるとき, この発展作用素がすべての $t > s \geq 0$ に対して L^q-L^r 評価

$$\|T(t,s)f\|_r \leq C(t-s)^{-(3/q-3/r)/2}\|f\|_q \tag{2.6}$$

$$\|\nabla T(t,s)f\|_r \leq C(t-s)^{-(3/q-3/r)/2-1/2}\|f\|_q \tag{2.7}$$

をみたすことを示す ($\|\cdot\|_q$ は $L^q(D)$ のノルム). ただし, 指数 q, r は (2.6) に対して $1 < q \leq r \leq \infty$ $(q \neq \infty)$ であり, (2.7) に対しては $1 < q \leq r \leq 3$ である. (2.7) に対するこの指数の制限は最適であることが知られている ([28], [18]).

平滑性評価としては, η, ω の局所 Hölder 連続性のもとで (2.6)–(2.7) with $C = C(\mathcal{T})$ が [14] により $0 \leq s < t \leq \mathcal{T}$ に対して示され, 条件 (2.5) のもとでは (2.6)–(2.7) with $C = C(\tau_*)$ が [21] により $t-s \leq \tau_*$ をみたす (t,s) に対して示された (微分の評価に対しても指数の制限は不要). 減衰評価としては, [21] により (2.6) だけが $1 < q \leq r < \infty$ に対して示された. [21] の論証では, 次節で述べるように共役発展作用素 $T(t,s)^*$ (共役方程式系の最終値問題の解作用素) が重要な役割を果たし, (2.6) と共に $T(t,s)^*$ に対する同じ評価も同時に得られる.

[21, Section 5] は, 空間微分の各点減衰 (2.7) なしであっても, (2.1) の non-autonomous 項の歪対称性からしたがうエネルギー関係式の活用により Navier-Stokes 方程式の時間大域解を構成する方法も提示した. ただし, この方法による大域解の漸近挙動に関する情報は通常よりも限定的であるので, (2.7) の確立が望ましいが, その証明は [22] による. この [22] の成果を [21] と併せて, 本稿の主定理とする.

η, ω が定数ベクトル, したがって方程式 (2.1) が autonomous の場合は, スペクトル解析の手法が標準的で, それぞれの場合での半群の L^q-L^r 減衰評価 (2.6)–(2.7) (指数 q, r は上記のとおり) が, すでに言及した論文も含めて以下の文献で示されている: 障害物が静止の Stokes 半群に対して [25], [28], 一様な速度で並進のみする場合の Oseen 半群に対して [27], [3], [4], 一定角速度での回転も伴う場合の半群に対しては [24], [32]. これらはすべて, 本研究によってカバーされている. すなわち, 本研究は resolvent の (特に resolvent parameter が原点近くでの) 解析を通すことなく統一的に減衰評価を導く方法を提示している. その概要を次節で述べよう.

3 着想と主定理

この問題特有の有効な情報は全空間 $\mathbb{R}^3$ での発展作用素 (これを $U(t,s)$ で表す) の L^q-L^r 評価であり, これが唯一つの手がかりである. (1.1) の運動方程式は (handmade ではなく) 座標変換によって精確に得られたものであるから, その線型部 (2.1) が全空間で以下の解表示をもつことは驚くことではない:

$$(U(t,s)f)(x) = \Phi(t,s)\big(e^{(t-s)\Delta}f\big)\left(\Phi(t,s)^{\top}\left(x+\int_s^t \Phi(t,\tau)\eta(\tau)\,d\tau\right)\right). \tag{3.1}$$

ここで, $e^{t\Delta}f = (4\pi t)^{-3/2}\exp(-|\cdot|^2/4t) * f$ は熱半群, $\Phi(t,s)$ は線型常微分方程式系 $d\varphi/dt = -\omega(t)\times\varphi$ の発展行列 (基本解) である. このように熱半群の変数変換により表示できる (したがって全空間においては自明な圧力勾配を伴う) 事情は, solenoidal 条件から

$$\text{div}\,[(\eta+\omega\times x)\cdot\nabla u - \omega\times u] = (\eta+\omega\times x)\cdot\nabla\text{div}\,u = 0$$

がしたがうことによる.

この全空間の解 (および Bogovskii 作用素 [1], [11, Chapter III] による solenoidal 条件の回復) を第 1 近似として, cut-off の方法により外部問題の解を考察する着想は自然であろう. この第 1 近似に対する剰余がみたす方程式を Duhamel の原理によって積分方程式の形に書くこととなるが, これを司る発展作用素 $T(t,s)$ 自体が調べる対象であるから, 議論の出発点における情報が前節でも言及したエネルギー関係式しかない. しかし, この僅かな情報 (duality argument によるため, 特に要するのは共役発展作用素 $T(t,s)^*$ のエネルギー関係式) だけを頼りに, まず $r\in(2,3)$ に対して L^r での一様有界性を導く. これとエネルギー関係式を用いてある種の微分不等式を解く議論に帰することにより ([21, Lemma 4.1] 参照), $T(t,s)$ と $T(t,s)^*$ 双方の僅かな減衰度を得る. この情報は当初のエネルギー関係式よりも良いので, 積分方程式を再度評価し直すことにより (ここに前段にはない工夫を要するが話が技術的となるので立ち入らない), 前段よりも広い範囲の $r\in(2,6)$ に対して上記の剰余の (したがって発展作用素の) L^r での一様有界性を導ける. 微分不等式を再び解いて得られる発展作用素の減衰評価を用いて同じ議論を繰り返すことにより, $2\le q\le r<\infty$ に対する (2.6) と $1<q\le r\le 2$

に対する共役 $T(t,s)^*$ の L^q-L^r 評価を同時に得る. $T(t,s)$ と $T(t,s)^*$ の役割を入れ替えて本質的に同じ議論を行うことにより, $1<q\le r\le 2$ に対する (2.6) と $2\le q\le r<\infty$ に対する共役 $T(t,s)^*$ の L^q-L^r 評価も得られるから, 発展作用素の半群性と併せて, $1<q\le r<\infty$ に対する (2.6) と $T(t,s)^*$ の対応物が示される. ただし, この方法で 0 階の L^∞ 評価を求めることはできない. $r=\infty$ の場合の (2.6) は, 微分の評価 (2.7) とセットで求めることなる.

次に, (2.7) について, これを上記の duality argument によって扱うことはできないから, 別のアイデアを要する. 障害物近くでの有界領域 $D_R=D\cap B_R$ 上での以下の局所減衰評価 (local energy decay) を導くことが本質的である:

$$\|T(t,s)f\|_{W^{1,q}(D_R)}+\|\partial_t T(t,s)f\|_{W^{-1,q}(D_R)}\le C(t-s)^{-3/2q}\|f\|_q \tag{3.2}$$

が $1<q<\infty$, $t-s>2$, $f\in L^q_\sigma(D)$ に対して成立. 実は, 半群の長時間挙動の解析においても, このような評価を導くことが重要なステップであるが, 半群の場合にはこのステップで (特にまず data が有界台の場合に) resolvent の詳細な解析を行う. non-autonomous であるときに (特に data が有界台の場合に) resolvent の解析の代替を担うのが 0 階の減衰評価 (2.6) それ自体である. autonomous であるときには, (3.2) を経由して 0 階と 1 階の減衰評価をセットで導くので, 議論の組み立てかたが異なる. data が有界台の場合の局所減衰評価から (3.2) へ進むときには, (2.6) の論証のように, 全空間の解 (の適当な変形) を第 1 近似として cut-off technique を用いる.

時間微分 $\partial_t T(t,s)$ に対する (3.2) を得るには, $t-s\le 2$ で

の平滑性評価

$$\|\partial_t T(t,s)f\|_{W^{-1,q}(D_R)} \le C(t-s)^{-(1+1/q)/2}\|f\|_q \qquad (3.3)$$

も要する. (3.3) の役割はそれにとどまらず, $\mathbb{R}^3 \setminus B_R$ での $\nabla T(t,s)$ の減衰評価を cut-off の方法で求める際に, $\partial_t T(t,s)$ に対する (3.2) と (3.3) の両者が圧力の挙動の制御において重要な役割を果たす. ここが非常に重要な論点であることは, 障害物が一定角速度で回転する場合の半群の長時間挙動 [24] においても同様であり, このことはその半群が解析的でないことと深く関わっている. [24, Section 5] においては, この論点は resolvent を用いて考察されているから, non-autonomous な場合には適用されない. また, (3.3) のような考察は Hansel-Rhandi [14] によって行われていないので, 彼らによる発展作用素の parametrix の構成を詳細に見直す必要があった. 主題は $(t-s) \to \infty$ での (2.7) の評価であるが, それへ向けての [22] の解析の半分ほどが平滑性評価 (3.3) の論証となる.

主定理は以下のとおりである ([21], [22]).

定理 3.1. $m \in (0,\infty)$, $\theta \in (0,1)$ とする. (2.5) を仮定するとき,

$$\begin{aligned} &(2.6) \text{ with} \quad 1 < q \le r \le \infty \ (q \ne \infty), \\ &(2.7) \text{ with} \quad 1 < q \le r \le 3, \end{aligned}$$

がすべての $t > s \ge 0$ と $f \in L^q_\sigma(D)$ に対して成り立つ. ここで, 評価の定数は $C = C(m,q,r,\theta,D)$ のように, $|(\eta,\omega)|_0 + |(\eta,\omega)|_\theta \le m$ をみたす η, ω に対して一様に取れる. ただし, $|\cdot|_0$ は sup ノルム, $|\cdot|_\theta$ は Hölder セミノルムである. また, $1 < q \le r \in (3,\infty)$, $t - s > 1$ に対しては, (2.7) において減衰度を $(t-s)^{-3/2q}$ に差し替えた評価が成り立つ.

共役 $T(t,s)^*$ に対して, $T(t,s)$ に対するのと同じ評価が成り立つ.

参考文献

[1] M.E. Bogovskiĭ, Solution of the first boundary value problem for the equation of continuity of an incompressible medium, *Soviet Math. Dokl.* **20** (1979), 1094–1098.

[2] W. Borchers, Zur Stabilität und Faktorisierungsmethode für die Navier-Stokes Gleichungen inkompressibler viskoser Flüssigkeiten, Universität Paderborn, Habilitationsschrift, 1992.

[3] Y. Enomoto and Y. Shibata, Local energy decay of solutions to the Oseen equation in the exterior domains, *Indiana Univ. Math. J.* **53** (2004), 1291–1330.

[4] Y. Enomoto and Y. Shibata, On the rate of decay of the Oseen semigroup in exterior domains and its applications to the Navier-Stokes equation, *J. Math. Fluid Mech.* **7** (2005), 339–367.

[5] R. Farwig, G.P. Galdi and M. Kyed, Asymptotic structure of a Leray solution to the Navier-Stokes flow around a rotating body, *Pacific. J. Math.* **253** (2011), 367–382.

[6] R. Farwig and T. Hishida, Leading term at infinity of steady Navier-Stokes flow around a rotating obstacle, *Math, Nachr.* **284** (2011), 2065–2077.

[7] R. Farwig and J. Neustupa, Spectral properties in L^q of an Oseen operator modelling fluid flow past a rotating body, *Tohoku Math. J.* **62** (2010), 287–309.

[8] R. Finn, On the exterior stationary problem for the navier-SDtokes equaitons, and associated perturbation problems, *Arch. Rational Mech. Anal.* **19** (1965), 363–406.

[9] R. Finn, Stationary solutions of the Navier-Stokes equations, *Proc. Symp. Appl. Math.* **17** (1965), 121–153.

[10] G.P. Galdi, On the motion of a rigid body in a viscous liquid: a mathematical analysis with applications, *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, Vol. I, 653–791, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[11] G.P. Galdi, *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Steady-State Problems*, Second Edition, Springer, 2011.

[12] G.P. Galdi, J.G. Heywood and Y. Shibata, On the global existence and convergence to steady-stae of Navier-Stokes flow past an obstacle that is started from rest, *Arch. Rational Mech. Anal.* **138** (1997), 307–318.

[13] G.P. Galdi and J. Neustupa, Steady-state Navier-Stokes flow around a moving body, *Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids*, 341–417, Springer, 2018.

[14] T. Hansel and A. Rhandi, The Oseen-Navier-Stokes flow in the exterior of a rotating obstacle: the non-autonomous case, *J. Reine Angew. Math.* **694** (2014), 1–26.

[15] J.G. Heywood, The exterior nonstationary problem for the Navier-Stokes equations, *Acta Math.* **129** (1972), 11–34.

[16] T. Hishida, An existence theorem for the Navier-Stokes flow in the exterior of a rotating obstacle, *Arch. Rational Mech. Anal.* **150** (1999), 307–348.

[17] 菱田 俊明, 回転する障害物の周りでの非圧縮粘性流体の方程式の数学解析, 数学 **60** 巻 1 号, 68–94, 日本数学会編集, 岩波, 2008.

[18] T. Hishida, On the relation between the large time behavior of the Stokes semigroup and the decay of the steady Stokes flow at infinity, Parabolic Problems: The Herbert Amann Festschrift, *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications* **80**, 343–355, Springer, Berlin, 2011.

[19] T. Hishida, Mathematical analysis of the equations for the incompressible viscous fluid around a rotating obstacle, *Sugaku Expositions* **26** (2013), 149–179.

[20] T. Hishida, Stationary Navier-Stokes flow in exterior domains and Landau solutions, *Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids*, 299–339, Springer, 2018.

[21] T. Hishida, Large time behavior of a generalized Oseen evolution operator, with applications to the Navier-Stokes flow past a rotating obstacle, *Math. Ann.* **372** (2018), 915–949.

[22] T. Hishida, Decay estimates of gradient of a generalized Oseen evolution operator arising from time-dependent rigid motions in exterior domains, In preparation.

[23] T. Hishida and P. Maremonti, Navier-Stokes flow past a rigid body: attainability of steady solutions as limits of unsteady weak solutions, starting and landing cases, *J. Math. Fluid Mech.* **20** (2018), 771–800.

[24] T. Hishida and Y. Shibata, L_p-L_q estimate of the Stokes operator and Navier-Stokes flows in the exterior of a rotating obstacle, *Arch. Rational Mech. Anal.* **193** (2009), 339–421.

[25] H. Iwashita, L_q-L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problem in L_q spaces, *Math. Ann.* **285** (1989), 265–288.

[26] T. Kato, Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions, *Math. Z.* **187** (1984), 471–480.

[27] T. Kobayashi and Y. Shibata, On the Oseen equation in the three dimensional exterior domains, *Math. Ann.* **310** (1998), 1–45.

[28] P. Maremonti and V.A. Solonnikov, On nonstationary Stokes problems in exterior domains, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* **24** (1997), 395–449.

[29] 増田 久弥, 発展方程式, 紀伊國屋, 1975.

[30] T. Miyakawa, On nonstationary solutions of the Navier-Stokes equations in an exterior domain, *Hiroshima Math. J.* **12** (1982), 115–140.

[31] Y. Shibata, On an exterior initial boundary value problem for Navier-Stokes equations, *Q. Appl. Math.* **57** (1999), 117–155.

[32] Y. Shibata, On the Oseen semigroup with rotating effect, *Functional Analysis and Evolution Equations*, The Günter Lumer Volume, 595–611, Birkhäuser, Basel, 2008.

[33] C.G. Simader and H. Sohr, A new approach to the Helmholtz decomposition and the Neumann problem in L^q-spaces for bounded and exterior domains, *Mathematical Problems Relating to the Navier-Stokes Equation*, 1–35, *Ser. Adv. Math. Appl. Sci.* **11**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.

[34] V. Šverák, On Landau's solutions of the Navier-Stokes equations, *J. Math. Sci.* **179** (2011), 208–228.

[35] 田辺 広城, 発展方程式, 岩波, 1975.

[36] M. Yamazaki, The Navier-Stokes equations in the weak-L^n space with time-dependent external force, *Math. Ann.* **317** (2000), 635–675.

Group actions with finite orbits on flag varieties and representations of reductive groups

田内　大渡　(東大数理)*

1. 序

実リー群 H が多様体 M に作用しているとする。このとき M 上の H 不変な超関数の空間を $\mathcal{D}'(M)^H$ で表せば次のような射が存在する。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}'(M)^H & \longrightarrow & \{M \text{ の } H \text{ 不変な閉集合}\} \\ \cup & & \cup \\ T & \longmapsto & \operatorname{supp} T. \end{array} \tag{1.0.1}$$

よって M の H 不変な部分集合はすべて M 上の H 軌道の和集合となることに気をつければ、M の H 作用による軌道分解 $H\backslash M$ は $\mathcal{D}'(M)^H$ についての情報をある程度持っていると考えられる。これを鑑みて次のような問題を考える。

問題 1.1. M 上の H 軌道の個数 $\#(H\backslash M)$ が有限であることと、H 不変超関数の空間 $\mathcal{D}'(M)^H$ の有限次元性との関連を調べよ。より一般に、M 上の H 同変ベクトル束 $\mathcal{V} \twoheadrightarrow M$ の超関数切断の空間を $\mathcal{D}'(M,\mathcal{V})$ としたとき、H の有限次元表現 τ に対しての τ 相対不変な超関数切断の空間 $(\mathcal{D}'(M,\mathcal{V})\otimes\tau)^H$ の有限次元性との関連を調べよ。

この問題の解答について述べる前に上述の問題1.1の表現論からの動機について次章で述べたいと思う。

2. 導入

等質多様体上の大域解析の分野では、1950 年代から 1970 年代の終わりまでに I. M. Gelfand や Harish-Chandra らにより群多様体において、また S. Helgason らによりリーマン対称空間において、さらに 1980 年から 90 年代にかけては Flensted-Jensen、大島利雄、P. Delorme などにより半単純対称空間の枠組みの中で豊かな理論が展開された。1980 年の終わり頃に小林俊行氏は「このような群論を用いた大域解析の理論が展開できる最も一般的な設定は何か？」という問題を提起した。この問いに対しての一つの答えとして小林俊行・大島利雄両氏は超局所解析を用いることで次を証明した。

事実 2.1 ([11, Theorem A])**.** G を実簡約代数群、H をその代数部分群とする。次の (G,H) に関する二条件は同値である。

(i) 任意の $(\pi,\tau)\in \hat{G}_{\mathrm{smooth}}\times\hat{H}_{\mathrm{alg}}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H,\tau)) < \infty$ が成り立つ。

(ii) G/H が実球多様体である。

ここで G の滑らかな既約許容緩増加表現の同値類全体を $\hat{G}_{\mathrm{smooth}}$ で表し H の代数的有限次元既約表現の同値類全体を $\hat{H}_{\mathrm{alg}}$ で表した。さらに $C^\infty(G/H,\tau)$ で同変ベクトル束 $G\times_H\tau\to G/H$ の可微分な切断全体の成す Fréchet 空間を表した。また実球多様体という用語は小林俊行氏 [9] により導入された。

Supported by Foundation of Research Fellows, The Mathematical Society of Japan.

* 〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学 大学院数理科学研究科
e-mail: taito@ms.u-tokyo.ac.jp

定義 2.2 ([11])**.** 実簡約リー群Gの極小放物型部分群Pが、等質多様体$X = G/H$に開軌道を持つときXを実球多様体であるという。

さらに松木敏彦氏の実ランク 1 に帰着させる方法 [13] と B. Kimelfeld による実ランク 1 の実球多様体の分類 [8] を合わせることによりG/Hが実球多様体であることは次のように特徴付けられることが知られている。

事実 2.3 ([1])**.** 事実2.1の条件 (ii) は次の (iii) と同値である。

(iii) G/P 上の H 軌道の個数 $\#(H\backslash G/P)$ が有限である。

Pが極小放物型部分群である場合は条件 (i)、(ii)、(iii) が全て同値であることが事実 2.1 と事実 2.3 から従う（図 2.5 参照）。ではPの代わりにGの一般の放物型部分群Qを考えたとき (i)、(ii)、(iii) の関係はどのようになるのかということが自然に疑問になる。条件 (ii) と (iii) についてはQへの簡単な拡張が考えられる（定義 2.7 参照）。条件 (i) についてのQへの拡張を考えるために次の定義をする。$\hat{Q}_{\mathrm{f}}$でQの有限次元既約表現の同値類全体を表す。

定義 2.4 ([10, Definition 6.6])**.** ある$\tau \in \hat{Q}_{\mathrm{f}}$が存在して$\pi$が退化主系列表現$C^\infty(G/Q, \tau)$の部分商と同型になるとき$\pi \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}}$は$Q$シリーズに属するという。

図 2.5. P : 極小放物型部分群

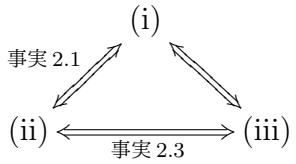
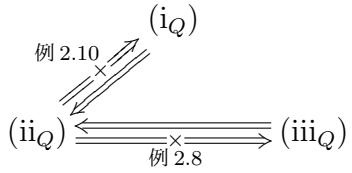


図 2.6. Q : 一般放物型部分群



$\hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}} := \{\pi \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}} \mid \pi \text{ は } Q \text{ シリーズに属する}\}$とおくと Harish-Chandra の部分商定理 [6] より$\hat{G}_{\mathrm{smooth}} = \hat{G}^P_{\mathrm{smooth}}$が成り立つことがわかる。これより一般放物型部分群$Q$を考えているときには$\hat{G}_{\mathrm{smooth}}$を$\hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}}$で置き換えて条件 (i) を考えることにする。すなわち次のように定義する。

定義 2.7. 一般放物型部分群$Q \subset G$に対し条件 (i$_Q$)、(ii$_Q$)、(iii$_Q$) を次で定める。

(i$_Q$) 任意の $(\pi, \tau) \in \hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}} \times \hat{H}_{\mathrm{alg}}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau)) < \infty$ が成り立つ。

(ii$_Q$) Qが等質多様体G/Hに開軌道を持つ。

(iii$_Q$) $\#(H\backslash G/Q) < \infty$が成り立つ。

Qが極小放物型部分群Pであるとき、三条件 (i$_Q$)、(ii$_Q$)、(iii$_Q$) はそれぞれ (i)、(ii)、(iii) と同値なので上ですでに見たようにその関係は次のようになる （図 2.5 参照）。

$$(\mathrm{i}_P) \iff (\mathrm{ii}_P) \iff (\mathrm{iii}_P).$$

さらに$Q = G$のときは Frobenius の相互律より条件 (i$_Q$) が成り立つことがわかる。また (ii$_Q$) と (iii$_Q$) が常に成り立つことは明らかなので次を得る。

$$(\mathrm{i}_G) \iff (\mathrm{ii}_G) \iff (\mathrm{iii}_G).$$

一般の放物型部分群 Q に対しても $(\mathrm{iii}_Q)\Rightarrow(\mathrm{ii}_Q)$ は常に真である。しかしその逆である $(\mathrm{ii}_Q)\Rightarrow(\mathrm{iii}_Q)$ は、極小ではない一般の放物型部分群 Q に対して常に成り立つとは限らない。

例 2.8. 実射影空間 $\mathbb{RP}^2 = SL(3,\mathbb{R})/Q$ は Q の冪零根基 H の作用により一つの開軌道と連続無限個の固定点に分解される。

また小林俊行氏は [10] においてポアソン変換の一般化を定義することで次を示している。

事実 2.9 ([10, Corollary 6.8])**.** Q 開軌道が G/H 上に存在しないとする。このときある $\pi \in \hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}}$ に対して $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H)) = \infty$ が成り立つ。対偶をとることにより、$(\mathrm{i}_Q)\Rightarrow(\mathrm{ii}_Q)$ が成り立つ。

しかし、$(\mathrm{ii}_Q)\Rightarrow(\mathrm{i}_Q)$ は一般の放物型部分群 Q に対しては成り立つとは限らない。

例 2.10. $G := SL(3,\mathbb{R})$ とし例2.8の H と Q をとると $\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q), C^\infty(G/H)) = \infty$ が成り立つ（定理3.2も参照）。

ここまでを整理すると三条件 (i_Q)、(ii_Q)、(iii_Q) については (i_Q) と (iii_Q) の関係がわかっていない（図2.6参照）。よって次の問題を考える。

問題 2.11. 一般の放物型部分群 $Q \subset G$ に対して次の二条件

- (i_Q) 任意の $(\pi,\tau) \in \hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}} \times \hat{H}_{\mathrm{alg}}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H,\tau)) < \infty$ が成り立つ。
- (iii_Q) $\#(H\backslash G/Q) < \infty$ が成り立つ。

の関係性を決定せよ。

この問題を1章で述べた問題と関連づけるために小林俊行氏とB. Speh氏による次の定理を引用する。

事実 2.12 ([12, Proposition 3.2])**.** G を実リー群、G' と H を G の閉部分群、H' を G' の閉部分群とし τ と τ' をそれぞれ H と H' の有限次元表現とする。このとき次が成り立つ。

1) 次の単射が存在する。

$$\mathrm{Hom}_{G'}\left(C^\infty(G/H,\tau), C^\infty(G'/H',\tau')\right) \hookrightarrow \left(\mathcal{D}'(G/H, \tau^\vee \otimes \mathbb{C}_{2\rho}) \otimes \tau'\right)^{H'}.$$

ここで $\mathbb{C}_{2\rho}$ は $h \mapsto |\det(\mathrm{Ad}(h) : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h})|^{-1}$ で定まる H の一次元表現を表し、$\tau \in \hat{H}_{\mathrm{f}}$ に対してその反傾表現を $\tau^\vee$ で表した。さらに $\mathcal{D}'(G/H, \tau^\vee \otimes \mathbb{C}_{2\rho})$ は同変ベクトル束 $G \times_H (\tau^\vee \otimes \mathbb{C}_{2\rho}) \to G/H$ の超関数切断全体の空間を表した。

2) H が余コンパクト（例えば G の放物型部分群 Q）のとき上記の射は全単射となる。

Q シリーズに属する元 π がある $\eta \in \hat{Q}_{\mathrm{f}}$ により $C^\infty(G/Q,\eta)$ の既約商表現として実現されている、すなわち全射 $C^\infty(G/Q,\eta) \twoheadrightarrow \pi$ が存在するとする。このとき Hom 関手の左完全性より射 $\mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H,\tau)) \to \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\eta), C^\infty(G/H,\tau))$ は単射となる。上記の事実2.12により、$\mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\eta), C^\infty(G/H,\tau)) \simeq (\mathcal{D}'(G/Q, \eta^\vee \otimes \mathbb{C}_{2\rho}) \otimes \tau)^H$

なので $\dim(\mathcal{D}'(G/Q,\eta^\vee\otimes\mathbb{C}_{2\rho})\otimes\tau)^H<\infty$ ならば $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi,C^\infty(G/H,\tau))<\infty$ が成り立つ。この意味で、G/Q 上の H 軌道の有限性と G/Q 上の H 不変な超関数の空間の次元の有限性との関係性を調べるという 1 章で述べた問題 1.1 （の $M=G/Q$ かつ H が G の部分群であるという特別な場合）は表現論的な背景を持つ問題 2.11 と密接な関係を持っている。

3. 問題 2.11 に関する解答

問題 2.11 に関する解答としての結果を以下に二つ述べる。その前に問題 2.11 を再掲しておく（図 2.6 も参照）。

問題 2.11. 一般の放物型部分群 $Q\subset G$ に対して次の二条件

- (i_Q) 任意の $(\pi,\tau)\in \hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}}\times \hat{H}_{\mathrm{alg}}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi,C^\infty(G/H,\tau))<\infty$ が成り立つ。
- (iii_Q) $\#(H\backslash G/Q)<\infty$ が成り立つ。

の関係性を決定せよ。

定理 3.1. $G:=SL(2n,\mathbb{R})$ とし Q を $G/Q\simeq\mathbb{RP}^{2n-1}$ となる G の極大放物型部分群とする。このとき $n\geq 2$ であれば、次の二条件を満たす G の代数部分群 H が存在する。

- (I) $\#(H\backslash G/Q)<\infty$ が成り立つ。
- (II) Q のある 1 次元のクラス 1 表現 χ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\chi),C^\infty(G/H))=\infty$ が成り立つ。

もし $n\geq 3$ であれば、さらに次を満たす。

- (II') Q の任意の 1 次元のクラス 1 表現 χ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\chi),C^\infty(G/H))=\infty$ が成り立つ。

ここで Q の一次元表現 $\chi:Q\to GL(1,\mathbb{C})$ がクラス 1 表現であるとは Q の極大コンパクト群への χ の制限が自明表現になることを表す。

この定理 3.1 は条件 (iii_Q) を満たすが条件 (i_Q) を満たさない例が存在すること、すなわち $(\mathrm{iii}_Q)\Rightarrow(\mathrm{i}_Q)$ が一般には成り立たないことを主張している。これを事実 2.12 を用いて不変超関数の言葉で焼き直せば G/Q 上の H 軌道の個数 $\#(H\backslash G/Q)$ は有限であるにも関わらず G/Q 上の H 不変な超関数の空間の次元が無限次元である例が存在することを主張している。特に 1 章で定義した射 (1.0.1) のファイバーが無限次元である例となっている。

以下の定理は $(\mathrm{iii}_Q)\Rightarrow(\mathrm{i}_Q)$ の逆についての結果である。記号については 5.1 章を参照のこと。

定理 3.2. G を実簡約代数群とし H をその実代数部分群とする。また Q を G の放物型部分群とし N を Q の冪零根基とする。

(A) もし向け付け可能な p 次元の H 軌道が G/Q 上に無限個存在すれば次が成り立つ。

$$\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\wedge^p\mathfrak{n}),C^\infty(G/H))=\infty.$$

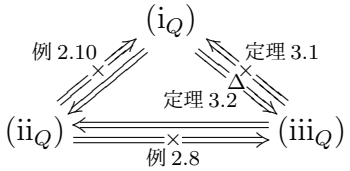
(B) もし横断的に向き付け可能（定義5.5参照）なp次元のH軌道がG/Q上に無限個存在すれば次が成り立つ。

$$\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q, \wedge^p \mathfrak{n} \otimes or), C^\infty(G/H)) = \infty.$$

すなわちこの定理は向き付けに関する仮定のもとでは$(\mathrm{i}_Q) \Rightarrow (\mathrm{iii}_Q)$が正しいことを主張している。またこれを事実2.12を用いて不変超関数の言葉に翻訳すると、向き付け可能なH軌道がG/Q上に無限個存在すれば、H不変超関数の空間が無限次元となることを主張している。

まとめると次のようになる（図3.3参照）。主結果3.1は$(\mathrm{iii}_Q) \Rightarrow (\mathrm{i}_Q)$が成り立たないことを、逆に主結果3.2は向きづけに関する条件のもとで$(\mathrm{i}_Q) \Rightarrow (\mathrm{iii}_Q)$が成り立つことを主張している（向き付けの仮定を付けているので、下記図3.3ではΔと表記した）。

図 3.3. Q : 一般放物型部分群



4. 定理3.1の証明

この章では(iii_Q)「$\#(H\backslash G/Q) < \infty$」$\Rightarrow$ (i_Q)「任意の$(\pi, \tau) \in \hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}} \times \hat{H}_{\mathrm{alg}}$に対し$\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau)) < \infty$」が一般には成り立たないことを主張する定理3.1を証明する。4.1章で$n = 2$のときの定理3.1を証明し、4.2章で$n \geq 3$のときの定理3.1の証明の概略を述べる。

4.1. $n = 2$のときの定理3.1の証明

この4.1章では$n = 2$のときの定理3.1を実際に条件(I)「$\#(H\backslash G/Q) < \infty$」と条件(II)「$Q$のある1次元のクラス1表現$\chi$に対し$\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q, \chi), C^\infty(G/H)) = \infty$」を満たす$G := SL(4, \mathbb{R})$の代数部分群$H$を構成して証明する。以下、$Q$を$G$の極大放物型部分群であって$G/Q \simeq \mathbb{RP}^3$であるものとし、$G$の部分群$H$を次で定める。

$$H := \left\{ h(\theta, a, b) := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & a & b \\ -\sin\theta & \cos\theta & b & -a \\ & & \cos\theta & \sin\theta \\ & & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} \theta \in \mathbb{R} \\ a, b \in \mathbb{R} \end{array} \right\}. \tag{4.1.1}$$

命題 4.1. $\#(H\backslash G/Q) = 2$が成り立つ。

証明. $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$とすると

$$h(\theta, a, b) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta + az + bw \\ -x\sin\theta + y\cos\theta + bz - aw \\ z\cos\theta + w\sin\theta \\ -z\sin\theta + w\cos\theta \end{pmatrix}$$

となる。よって$\mathbb{R}^4/GL(1,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{RP}^3 \simeq G/Q$という同型により

$$\begin{aligned} H\backslash G/Q &\simeq \{(x,y,0,0) \in \mathbb{R}^4 \mid (x,y) \neq 0\}/GL(1,\mathbb{R}) \\ &\cup \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid (z,w) \neq 0\}/GL(1,\mathbb{R}) \end{aligned}$$

を得る。 □

次にHが定理3.1の条件(II)、すなわち「Qのある1次元のクラス1表現χに対し$\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\chi), C^\infty(G/H)) = \infty$」を満たすことを見る。$Q$の一次元表現$\xi : Q \to GL(1,\mathbb{C})$を$q \cdot e_1 = \xi(q)e_1$が任意の$q \in Q$に対して成り立つように定義する。ここで$e_1 := (1,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$である。また$\lambda \in \mathbb{C}$に対して$Q$の一次元のクラス1表現$\chi_\lambda$を$\chi_\lambda(q) = |\xi(q)|^{\frac{\lambda}{2}}$で定義する。

命題 4.2. 次の同型が成り立つ。

$$\mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\chi_\lambda), C^\infty(G/H)) \simeq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4\backslash\{0\})^H_{even,\lambda-4}.$$

ただし$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4\backslash\{0\})_{even,\lambda-4}$は$\mathbb{R}^4\backslash\{0\}$上の$(\lambda-4)$次斉次な偶超関数全体がなす空間を表す。

証明. $\mathcal{D}'(G/Q,\chi_\lambda) \simeq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4\backslash\{0\})_{even,-\lambda}$と$\mathbb{C}_{2\rho} = \chi_4$が命題4.2の設定のもとで成り立つので事実2.12より明らか。 □

よって$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4\backslash\{0\})^H_{even,\lambda-2}$があるλ∈ℂに対して無限次元であることを示せばよい。$l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$に対して零でない$\mathbb{R}^4\backslash\{0\}$上の超関数を次で定める。

$$T_2^l(x,y,z,w) := \left((x+\sqrt{-1}y)\left(\frac{\partial}{\partial z} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial w}\right)\right)^l \delta(z)\delta(w).$$

ここで$\delta(z)$と$\delta(w)$はそれぞれ超平面$z=0$と$w=0$に台を持つDiracのデルタ関数である。明らかにT_2^lは偶かつ次数が-2の斉次超関数である。また各T_2^lはそれぞれ超関数としてのオーダーが異なるので$\{T_2^l\}_{l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$は線形独立である。よってこれらが$H$不変なことを示せばよい。

命題 4.3. 任意の$l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$に対して$T_2^l$は$H$不変な超関数である。特に$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4\backslash\{0\})^H_{even,-2}$は無限次元である。

証明. Hは群として$h(\theta) := h(\theta,0,0)$と$h(a,b) := h(\theta,a,b)$の形をした元で生成されるので、これらによる不変性を示せばよい。$\mathbb{R}^4\backslash\{0\}$上のそれぞれ超関数や微分作用素としての等式

$$\begin{aligned} h(\theta)^{-1}\cdot(x+\sqrt{-1}y) &= e^{-i\theta}(x+\sqrt{-1}y), \\ h(\theta)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial z} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial w}\right) &= e^{i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial w}\right), \\ h(\theta)^{-1}\cdot\delta(z)\delta(w) &= \delta(z)\delta(w) \end{aligned}$$

より$h(\theta)\cdot T_2^l = T_2^l$が成り立つ。また$h(a,b)$に対しては

$$\begin{aligned} h(a,b)^{-1}\cdot(x+\sqrt{-1}y) &= (x+\sqrt{-1}y) + (a+bi)(z-iw), \\ h(a,b)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial z} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial w}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial z} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial w}\right) + (a-b\sqrt{-1})\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right), \\ h(a,b)^{-1}\cdot\delta(z)\delta(w) &= \delta(z)\delta(w) \end{aligned}$$

となる。よって $(z-iw)$ と $\frac{\partial}{\partial z}-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial w}$ が可換なことと $(z-iw)\delta(z)\delta(w)=0$ が $\mathbb{R}^4\backslash\{0\}$ 上の超関数として成り立つことから $h(a,b)\cdot T_2^l=T_2^l$ が成り立つ。 □

$n=2$ のときの定理 *3.1* の証明. H を (4.1.1) により定めると、命題4.1より定理3.1の条件 (I) 「$\#(H\backslash G/Q)<\infty$」を満たす。また命題4.3 より定理3.1の条件 (II) 「Q のある 1 次元のクラス 1 表現 χ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\chi),C^\infty(G/H))=\infty$ 」を満たすので定理が示された。 □

4.2. $n\geq 3$ **の定理 3.1**

この章では $n\geq 3$ のときの定理3.1の証明の概略について述べる。$\theta,a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$ に対して $M_2(\mathbb{R})$ の元 $k_\theta, A^1_{a_1,b_1}, A^2_{a_2,b_2}$ を次で定義する。

$$k_\theta:=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad A^1_{a_1,b_1}:=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ b_1 & -a_1\end{pmatrix},\quad A^2_{a_2,b_2}:=\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ -b_2 & a_2\end{pmatrix}.$$

このとき $G=SL(2n,\mathbb{R})$ の部分群 H を 2×2 のブロック行列に区分けして次で定義する。

$$H:=\left\{\left.\begin{pmatrix} k_\theta & A^1_{a_1,b_1} & A^2_{a_2,b_2} & \cdots & A^n_{a_n,b_n}\\ & k_\theta & A^1_{a_1,b_1} & \ddots & \vdots\\ & & k_\theta & \ddots & A^2_{a_2,b_2}\\ & & & \ddots & A^1_{a_1,b_1}\\ & & & & k_\theta\end{pmatrix}\right| \begin{array}{c}\theta\in\mathbb{R}\\ a_j\in\mathbb{R}\,(1\leq j\leq n)\\ b_j\in\mathbb{R}\,(1\leq j\leq n)\end{array}\right\}. \tag{4.2.1}$$

ただし $j\geq 3$ に対しては j の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ での剰余類 $\overline{j}$ を用いて $A^j_{a,b}:=A^{\overline{j}}_{a,b}$ と定める。このとき命題 4.1 と全く同様にして次が成り立つ。すなわち H は定理 3.1 の条件 (I) 「$\#(H\backslash G/Q)<\infty$」を満たす。

命題 4.4. $\#(H\backslash G/Q)=n$ が成り立つ。

次に H が定理3.1の条件 (II')、すなわち「Q の任意の 1 次元のクラス 1 表現 χ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\chi),C^\infty(G/H))=\infty$ 」を満たすことを見る。Q の一次元表現 $\xi:Q\to GL(1,\mathbb{C})$ を $q\cdot e_1=\xi(q)e_1$ が任意の $q\in Q$ に対して成り立つように定義する。ここで $e_1:=(1,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^{2n}$ である。また Q の一次元クラス 1 表現 χ_λ を $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して $\chi_\lambda(q)=|\xi(q)|^{\frac{\lambda}{n}}$ で定義する。

命題 4.5. 任意の $\lambda\in\mathbb{C}$ について次の同型が成り立つ。

$$\mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\chi_\lambda),C^\infty(G/H))\simeq\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\})^H_{even,\lambda-2n}.$$

証明. $\mathcal{D}'(G/Q,\chi_\lambda)\simeq\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\})_{even,-\lambda}$ と $\mathbb{C}_{2\rho}=\chi_{2n}$ が命題 4.5 の設定のもとで成り立つので事実2.12より明らか。 □

よって $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\})^H_{even,\lambda-2n}$ がある $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して無限次元であることを示せばよい。$l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して零でない $\mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\}$ 上の超関数を次で定める。

$$\begin{aligned}&T_2^l(x_1,\ldots,x_{2n})\\ :=\ &\frac{1}{\Gamma\left(2-\frac{\lambda}{2}\right)}\left((x_{2n-5}-\sqrt{-1}x_{2n-4})\left(\frac{\partial}{\partial x_{2n-3}}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_{2n-2}}\right)\right.\\ +\ &\left.(x_{2n-3}+\sqrt{-1}x_{2n-2})\left(\frac{\partial}{\partial x_{2n-1}}-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_{2n}}\right)\right)^l\left((x_{2n-3}^2+x_{2n-2}^2)^{1-\frac{\lambda}{2}}\delta(x_{2n-1})\delta(x_{2n})\right).\end{aligned}$$

ここでΓはガンマ関数を表した。

注釈 4.6. $(x_{2n-3}^2+x_{2n-2}^2)^{1-\frac{\lambda}{2}}$は超関数として$\lambda\in 2\mathbb{N}+4$で一位の極をもつが$\Gamma(2-\frac{\lambda}{2})$も$\lambda\in 2\mathbb{N}+4$で一位の極を持つ。よって$T_\lambda^l$は正則パラメータ$\lambda\in\mathbb{C}$をもつ超関数である（例えば[5, Appendix.B 1.4]参照）。

明らかにT_λ^lは偶かつ次数が$-\lambda$の斉次超関数である。また各T_λ^lはそれぞれ超関数としてのオーダーが異なるので$\{T_\lambda^l\}_{l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$は線形独立である。またこれらが$H$不変であることは命題4.3のときと同様に直接計算で示せる。よって次が成り立つ。

命題 4.7. 任意の$l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$に対してT_λ^lはH不変な超関数である。特に$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\})^H_{even,\lambda-2n}$は無限次元である。

$n\geq 3$のときの定理*3.1*の証明. Hを(4.2.1)により定めると、命題4.4より定理3.1の条件(I)「$\#(H\backslash G/Q)<\infty$」を満たす。また任意の$Q$の一次元のクラス1表現$\chi$はある$\lambda\in\mathbb{C}$が存在して$\chi=\chi_\lambda$とかけることに注意すれば、命題4.7より条件(II')「Qの任意の1次元のクラス1表現χに対し$\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\chi),C^\infty(G/H))=\infty$」を満たすので定理が示された。 □

5. 定理3.2の証明

この章では(i_Q)「任意の$(\pi,\tau)\in\hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}}\times\hat{H}_{\mathrm{alg}}$に対し$\dim \mathrm{Hom}_G(\pi,C^\infty(G/H,\tau))<\infty$」$\Rightarrow(\mathrm{iii}_Q)$「$\#(H\backslash G/Q)<\infty$」が向き付けの仮定の元では正しいことを主張する定理3.2を証明する。5.1章で証明に必要な事柄について述べる。5.2章では定理3.2の(A)、すなわち向き付け可能な場合についての証明を与える。5.3章では定理3.2の(B)、すなわち横断的に向き付け可能な場合の証明を与える。

5.1. 諸性質

Qを実簡約リー群Gの放物型部分群とし$Q=MAN$をその Langlands 分解とする。QはNのリー環$\mathfrak{n}$に随伴表現により作用する。$n:=\dim\mathfrak{n}$とおき$\mathfrak{n}$のn次外積表現$Q\to GL(\wedge^n\mathfrak{n})$と$\mathrm{sign}:GL(\wedge^n\mathfrak{n})\simeq\mathbb{R}^\times\to\{\pm 1\}$の合成により$Q$の表現$or:Q\to\{\pm1\}$を定義する。すると$C^\infty(G/Q,\wedge^p\mathfrak{n})$と$C^\infty(G/Q,\wedge^p\mathfrak{n}\otimes or)$はコンパクト台を持つ$p$形式全体の空間$\mathcal{D}^p(G/Q)$とコンパクト台を持つ捩れ$p$形式全体の空間$\underline{\mathcal{D}}^p(G/Q)$にそれぞれ同型となる。またそれらの位相的双対である$(n-p)$次捩れカレント全体の空間と$(n-p)$次カレント全体の空間をそれぞれ$\underline{\mathcal{D}}'_{n-p}(G/Q)$と$\mathcal{D}'_{n-p}(G/Q)$で表すことにする（“捩れ”微分形式やカレントについては例えば[14]参照）。このとき事実2.12により任意のGの閉部分群Hに対し次の同型が存在する。

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\wedge^p\mathfrak{n}),C^\infty(G/H)) &\simeq \mathcal{D}'(G/Q,(\wedge^p\mathfrak{n})^\vee\otimes\wedge^n\mathfrak{n}\otimes or)^H\\ &\simeq \mathcal{D}'(G/Q,\wedge^{n-p}\mathfrak{n}\otimes or)^H\\ &\simeq \underline{\mathcal{D}}'_{n-p}(G/Q)^H, \qquad (5.1.1)\\ \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q,\wedge^p\mathfrak{n}\otimes or),C^\infty(G/H)) &\simeq \mathcal{D}'_{n-p}(G/Q)^H. \qquad (5.1.2)\end{aligned}$$

ここで$(\wedge^p\mathfrak{n})^\vee$は$\wedge^p\mathfrak{n}$の反傾表現を表した。

5.2. 向き付け可能な場合の定理 3.2 の証明

この 5.2 章では定理 3.2 の向き付け可能な場合である (A) を証明する。そのためにまず次の命題を証明する。

命題 5.1. H を実簡約代数群 G の実代数部分群とする。また一般旗多様体 G/Q 上の向き付け可能な p 次元の H 軌道が無限個存在すると仮定する。このとき次が成り立つ。

$$\dim \underline{\mathcal{D}}'_{n-p}(G/Q)^H = \infty.$$

定理 3.2 の (A) は (5.1.1) によりこの命題 5.1 から従う。次の補題は命題 5.1 の証明に用いる。

補題 5.2. 実代数群 H が滑らかな n 次元実代数多様体 M に作用しているとし $\mathcal{O}$ を M 上の向き付け可能な p 次元の H 軌道とする。このとき任意の $\alpha \in \mathcal{D}^p(M)$ に対し、

$$T_{\mathcal{O}}(\alpha) := \int_{\mathcal{O}} \alpha$$

は収束し $0 \neq T_{\mathcal{O}} \in \underline{\mathcal{D}}'_{n-p}(M)^H$ が成り立つ。

先にこの補題を認めて命題 5.1 を証明する。

命題 *5.1* の証明. 向き付け可能な p 次元の相異なる H 軌道の列 $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ をとる。このとき補題 5.2 により各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $T_{\mathcal{O}_i}$ は 0 でない $\underline{\mathcal{D}}'_{n-p}(G/Q)^H$ の元を定める。よってこれら $\{T_{\mathcal{O}_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ が線形独立であることを示せば題意が従う。有限部分集合 $A \subset \mathbb{N}$ と $c_a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ $(a \in A)$ に対して $\sum_{a\in A} c_a T_{\mathcal{O}_a} = 0$ であると仮定する。必要ならば適当に番号を付け替えて $A = \{1, 2, \ldots, N\}$ であるとしてよい。任意の $1 \leq i \leq N$ に対して G/Q 上の（ユークリッド位相に関する）開集合 U'_i を $U'_i \cap \mathcal{O}_i \neq \emptyset$ を満たすようにとり $U_i := U'_i \backslash \left(\bigcup_{\substack{j\neq i \\ 1\leq j\leq N}} cl(\mathcal{O}_j) \right)$ とおく。ただしここで $cl(\mathcal{O}_j)$ は $\mathcal{O}_j$ の閉包を表した（ユークリッド位相に関しての閉包と Zariski 位相に関する閉包は等しくなる）。このとき H の G/Q への作用が代数的であることに注意すれば、U_i は空でない開集合で、かつ $U_i \cap \mathcal{O}_j \neq \emptyset$ となるのは $i = j$ のときだけである。さらに任意の $1 \leq j \leq N$ に対して $\mathcal{D}^p(G/Q)$ の元 α_j を $\mathrm{supp}(\alpha_j) \subset U_j$ かつ $T_{\mathcal{O}_j}(\alpha_j) = 1$ を満たすようにとる。このとき U_i と α_j の取り方により任意の $1 \leq i, j \leq N$ に対して $T_{\mathcal{O}_i}(\alpha_j) = \delta_{ij}$ を得る。ここで δ_{ij} は Kronecker のデルタを表した。よって任意の $1 \leq j \leq N$ に対して $\sum_{i=1}^N c_i T_{\mathcal{O}_i}(\alpha_j) = c_j$ が成り立つので $\sum_{i=1}^N c_i T_{\mathcal{O}_i} = 0$ により $T_{\mathcal{O}_j} = 0$ が成り立つ. これより $\{T_{\mathcal{O}_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ の線形独立性が従うので $\dim \underline{\mathcal{D}}'_{n-p}(G/Q)^H = \infty$ が示された。 □

以下補題 5.2 を証明する。

補題 *5.2* の証明. 収束性は下の事実 5.4 より従う。$T_{\mathcal{O}}$ の H 不変性は $\mathcal{O}$ が H 軌道であることからわかる。 □

定義 5.3. M を実解析多様体とする。M の部分集合 N が半解析的集合であるとは M の各点 $m \in M$ に対してその開近傍 $U \ni m$ と U 上の有限個の実解析関数 $\{f_{j,k}\}$ と $\{g_{j,l}\}$ が存在して次が成り立つときにいう。

$$U \cap N = \bigcup_{j=1}^{J} \{x \in U \mid f_{j,1}(x) = \cdots = f_{j,k_j}(x) = 0, g_{j,1}(x) > 0, \ldots, g_{j,l_j}(x) > 0\}.$$

また半解析的集合 N が M の p 次元部分多様体になっているとき N は正則 p 次元半解析的集合であると定義する。

事実 5.4 ([7, Theorem 2.1])**.** M を実解析多様体とし N を M の向き付け可能な正則 p 次元半解析的集合とする。このとき任意の $\alpha \in \mathcal{D}^p(M)$ に対し、

$$T_N(\alpha) := \int_N \alpha$$

は収束し $0 \neq T_N \in \underline{\mathcal{D}}'_{n-p}(M)$ が成り立つ。

5.3. 横断的に向き付け可能な場合の定理 3.2

最後に定理 3.2 の (B)、すなわち横断的に向き付け可能な場合の定理 3.2 を示す。先に横断的に向き付け可能という用語を定義しておく。

定義 5.5 ([4, 3.4b])**.** M を多様体とし N をその部分多様体とする。このとき N が横断的に向き付け可能であるとは N の法束が向き付け可能であるときにいう。

横断的に向き付け可能な場合の定理 *3.2* の証明. 一般に多様体上の捩れ微分形式は、任意の横断的に向き付け可能な部分多様体上に引き戻すことができる [4, 3.4b]。また n 次元多様体 M 上の捩れ n 形式は多様体 M の向き付け可能性に関わらず M 上での積分を定義することができる [4, 3.4a]。よって (5.1.2) に注意すればこれらを用いることにより向き付け可能な場合と同様の証明で横断的に向き付け可能な場合の定理 3.2 も証明される。 □

参考文献

[1] F. Bien, Orbits, multiplicities and differential operators. Representation theory of groups and algebras, 199–227, Contemp. Math. **145**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[2] W. Casselman, Jacquet modules for real reductive groups, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978), Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980, 557–563.

[3] W. Casselman, Canonical extensions of Harish-Chandra modules to representations of G, Canad. J. Math. **41** (1989), no. 3, 385–438.

[4] T. Frankel, The Geometry of Physics, An introduction, Third edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2012. lxii+686 pp.

[5] I. M. Gelfand, G. E. Shilov, Generalized functions. Vol. I: Properties and operations, Academic Press, New York, 1964, xvii+423 pp.

[6] Harish-Chandra, Representations of semisimple Lie groups. II. Trans. Amer. Math. Soc. **76**, (1954), 26–65.

[7] M. E. Herrera, Integration on a semianalytic set, Bull. Soc. Math. France **94**, (1966), 141–180.

[8] B. Kimelfeld, Homogeneous domains in flag manifolds, J. Math. Anal. Appl. **121**, (1987), no. 2, 506–588.

[9] T. Kobayashi, Introduction to harmonic analysis on real spherical homogeneous spaces, Proceedings of the 3rd Summer School on Number Theory “Homogeneous Spaces and Automorphic Forms” in Nagano (F. Sato, ed.), 1995, 22–41 (in Japanese).

[10] T. Kobayashi, Shintani functions, real spherical manifolds, and symmetry breaking operators, Developments and retrospectives in Lie theory, 127–159, Dev. Math. **37**, Springer, Cham, 2014.

[11] T. Kobayashi, T. Oshima, Finite multiplicity theorems for induction and restriction, Adv. Math. **248** (2013), 921–944.

[12] T. Kobayashi, B. Speh, Symmetry Breaking for Representations of Rank One Orthogonal Groups, Mem. Amer. Math. Soc. **238**, (2015), no. 1126, v+110 pp.

[13] T. Matsuki, Orbits on flag manifolds, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990), 807–813, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.

[14] L. Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectorielles. I, II, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **7**, **8**, 1957, 1958, 1–141, 1–209.

[15] N. Wallach, Asymptotic expansions of generalized matrix entries of representations of real reductive groups, Lie group representations, I (College Park, Md., 1982/1983), Lecture Notes in Math. Vol. 1024, Springer, Berlin, 1983, 287–369.

ある積分核作用素のフーリエ変換とその解析接続

西山享 *) (青山学院大学・理工学部)

KYO NISHIYAMA

概要. 概均質ベクトル空間に対して，相対不変式の複素冪を積分核に持つ積分作用素はゼータ積分と呼ばれ，整数論とくにゼータ関数との関係から広く研究されてきた．

一方，対称対の実二重旗多様体に付随する概均質ベクトル空間を考えると，そのゼータ積分は自然に対称対の退化主系列表現の間の絡作用素 (intertwiners) を導く ([NØ18])．この概均質ベクトル空間は 2 つの独立な相対不変式を持ち，したがってゼータ積分は複素パラメータを 2 つ持つ．

この報告では，このようにして得られたゼータ積分の解析接続とフーリエ変換，解析接続して得られた有理型超関数の極の位置などについて論ずる．

この報告と合同シンポジウムにおける講演は，Aarhus 大学の Bent Ørsted 教授，北海道教育大学の和地輝仁教授との共同研究 ([NØ18], [NØW19]) に基づくものである．

1. はじめに

ゼータ積分，あるいはゼータ超関数[1] については多数の研究が行われてきた．もっとも古典的なものは Tate のゼータ積分であって，急減少関数 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ に対して

$$Z^{\mathrm{T}}(\varphi, s) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z)|z|^s dz \qquad (s \in \mathbb{C}).$$

と定義される．積分は $\mathrm{Re}\, s > -1$ において収束し，全複素平面に有理型関数として解析接続される．これを一般化したのが Godement-Jacquet のゼータ積分

$$Z^{\mathrm{GJ}}(\varphi, s) = \int_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})} \varphi(z)|\det z|^s dz,$$

である．これらの積分は更なる一般化が可能で，たとえば $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ への $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の作用に対しても定義できる．このときは実対称行列の符号によって開軌道が複数に分解し，それぞれの軌道上でゼータ積分が定義される．これらのゼータ積分については，格子に付随したゼータ関数との関係から，とくに整数論において多くの研究がある．

このように多岐にわたるゼータ積分の統一的理解への道筋を示したのが新谷卓郎・佐藤幹夫による概均質ベクトル空間の理論であった ([SS74])．$G_{\mathbb{C}}$ を簡約代数群とし，その有

第 58 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム原稿 (2019/8/26 – 8/28; 於 九州大学).

∗) Supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (C) #16K05070.

[1]佐藤・新谷によれば，ゼータ積分は格子 Γ に付随した積分を意味し，我々がこの報告で「ゼータ積分」と呼んでいるものは「ゼータ超関数」と区別されている．

限次元表現 $V_{\mathbb{C}}$ が (稠密な) 開軌道 $\mathcal{O}$ を持つとき組 $(G_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}})$ を概均質ベクトル空間という ([Kim03], [SS74, SS70]). 簡単のために，開軌道の補集合 $S = V_{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{O}$ が既約な超曲面になっていると仮定しよう．このとき，S の定義多項式 $P(z) \in \mathbb{C}[V_{\mathbb{C}}]$ が基本相対不変式となる．

$V_{\mathbb{C}}$ の実形である実ベクトル空間 $V_{\mathbb{R}}$ は $G_{\mathbb{C}}$ の実形 $G_{\mathbb{R}}$ の表現であるが，複素開軌道はいくつかの $G_{\mathbb{R}}$ 開軌道に分解する．

$$V_{\mathbb{R}} \setminus \{z \in V_{\mathbb{R}} \mid P(z) = 0\} = \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathcal{O}_i$$

各開軌道 $\mathcal{O}_i$ 上の緩増加超関数として，ゼータ積分

$$Z_i^{(G,V)}(\varphi, s) = \int_{\mathcal{O}_i} \varphi(z)|P(z)|^s dz \qquad (\varphi \in \mathscr{S}(V_{\mathbb{R}}),\ s \in \mathbb{C})$$

を定義すると，これらのゼータ積分 $\{Z_i^{(G,V)}(\varphi, s)\}_i$ は (1) 複素変数 $s \in \mathbb{C}$ に関して有理型に解析接続され，(2) そのフーリエ変換は関数等式と呼ばれる関係式を満たす．これを概均質ベクトル空間の基本定理とよぶ．この定理は強力で，多数の研究者たちを魅了してきた．さらに，基本相対不変式が複数現れる場合にも，佐藤文広によって多変数のゼータ積分に対する基本定理が得られている ([Sat82a, Sat83, Sat82b]).

このように概均質ベクトル空間のゼータ関数の理論は深く研究されてきたが，一般論でゼータ積分のすべてが分かるわけではなく，具体的な解析接続や，極の位置，留数の情報などは実際に計算してみなければ分からない．関数等式は技術的にもっと難しい．個々の具体的な場合にはさまざまな研究があり，とてもここでそれをすべてあげる事はできないし，私の把握しているものはほんの一部である．これについては，[Shi75, Suz79, Suz75, SF84, Mur86, Cle02, Bar04, BSZ06, Sat06a, Sat06b, BCK17] などの論文，およびこれらの論文で挙げられている参考文献を参照して欲しい．

以下，この報告では，上に上げた二つの問題，つまり解析接続と関数等式を『拡大対称錐』と呼ばれる概均質ベクトル空間に対して考える．拡大対称錐は二重旗多様体と退化主系列間の intertwining 作用素を考える際に導入された ([NØ18]) ものであるが，二つの基本相対不変式を持ち，したがってゼータ積分も二変数の複素関数となる．主結果は，有理型関数としての具体的な解析接続公式と極の位置の決定 (定理 2.3) と拡大正錐上のゼータ積分に対するフーリエ変換と関数等式の証明である．(定理 3.2 および定理 5.2).

そこで，まず拡大対称錐の導入から話を始めよう．

2. 拡大ゼータ積分とその解析接続

$V = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ を実対称行列のなすベクトル空間とすると，V はユークリッド・ジョルダン代数の構造を持つ ([FK94] 参照)．$E = \mathrm{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ とおくと，$z \in V$ は左からの行列の積で E に働き，ジョルダン代数 V の表現になる．ジョルダン代数 V の構造群 $L = \mathrm{Str}(V) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ も自然に E に作用していることに注意する．一方，E は V の自然表現 $\mathbb{R}^n$ の d 個の直和と考えられるから，その重複度の空間への $H = \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ の作用があるが，それは $E = \mathrm{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ とみなしたとき，行列への右からの積と同一視できる．

さて，直和 $W = V \oplus E = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ を考え，$G = L \times H = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ とおく．すると上で説明したことから G は W に作用しているが，その作用を具体的に表すと

$$(g,h)\cdot(z,y) = (gz\,{}^t g, gy\,{}^t h), \qquad (g,h) \in L \times H = G,\ \ (z,y) \in V \oplus E = W$$

となる．この表現は，論文 [NØ18] で扱ったものと同じだが，そこでは自然な条件 $d \leq n$ が課されていた．この条件は以下の議論で本質的であるので，これを仮定して話をすすめよう．

仮定 2.1. 以下，$d \leq n$ を仮定する．

基礎体を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ へと拡大すると，この仮定の下に

$$W_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{M}_{n,d}(\mathbb{C}) \tag{2.1}$$

は $G_{\mathbb{C}}$ の作用で概均質ベクトル空間になり，有限個の $G_{\mathbb{C}}$ 軌道を持つことが分かる．

概均質ベクトル空間の理論では，相対不変式と b 関数が重要な役割を果たすが，まず相対不変式について述べよう．一般に，群 G がベクトル空間 W に作用しているとき，W 上の多項式 $p(w)$ であって，$g \in G$ の作用が

$$p(gw) = \chi(g)p(w) \qquad (w \in W, g \in G, \chi(g) \in \mathbb{C})$$

のように $p(w)$ を定数倍に保つとき，$p(w)$ を相対不変式と呼ぶ．$\chi(g) \in \mathbb{C}$ は G の指標 (一次元表現) であることが容易にわかるが，これを相対不変式の指標という．

我々の設定に話を戻そう．式 (2.1) の表現空間 $W_{\mathbb{C}}$ 上の多項式環 $\mathbb{C}[W_{\mathbb{C}}]$ には 2 つの基本相対不変式

$$P_1(z,y) = \det z, \qquad P_2(z,y) = (-1)^d \det\begin{pmatrix} z & y \\ {}^t y & 0 \end{pmatrix} \qquad ((z,y) \in W_{\mathbb{C}})$$

が存在する．基本相対不変式 P_i に付随した指標を χ_i と書くと，$(g,h) \in G_{\mathbb{C}}$ に対して，$\chi_1(g,h) = (\det g)^2$ および $\chi_2(g,h) = (\det g)^2(\det h)^2$ と与えられる．ここで $z \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ が正則のときには

$$P_2(z,y) = \det z \cdot \det\left({}^t y z^{-1} y\right)$$

と表せることに注意しよう．これが P_2 の定義に符号 $(-1)^d$ を掛けておく理由である．もし z が実の正定値対称行列で，y がやはり実であれば，$P_i(z,y)$ $(i = 1,2)$ はどちらも正値である．そして，任意の相対不変式は基本相対不変式を用いて $P_1^{m_1}P_2^{m_2}$ $(m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ と表すことができる．

この 2 つの基本相対不変式 P_1, P_2 に対して二変数の b-関数を与えよう．まず，$W = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ 上の正定値内積を

$$\langle \widetilde{z}, \widetilde{w} \rangle = \mathrm{trace}\, zw + \mathrm{trace}\, {}^t yx \qquad (\widetilde{z} = (z,y),\ \widetilde{w} = (w,x) \in W)$$

とおいて，定数係数の微分作用素 $P_i^*(\partial_{z,y})$ を

$$P_i^*(\partial_{z,y}) e^{\langle (z,y),(w,x) \rangle} = P_i(w,x) e^{\langle (z,y),(w,x) \rangle} \qquad (z,w \in V,\ y,x \in E,\ i = 1,2)$$

を満たすものとして定義する．

命題 2.2 (和地輝仁 [Wac17, Prop 6, 7]). 複素 2 変数 $s=(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2$ の多項式を

$$b_{1,0}(s)=\prod_{j=1}^{d}(s_1+\frac{d+1}{2}-\frac{j-1}{2})\prod_{k=1}^{n-d}(s_1+s_2+\frac{n+1}{2}-\frac{k-1}{2}),$$

$$b_{0,1}(s)=\prod_{j=1}^{d}(s_2+\frac{d+1}{2}-\frac{j-1}{2})(s_2+\frac{n}{2}-\frac{j-1}{2})\prod_{k=1}^{n-d}(s_1+s_2+\frac{n+1}{2}-\frac{k-1}{2})$$

で定義すると，次の Bernstein-佐藤の等式が成り立つ．

$$P_1^*(\partial_{z,y})\Big(P_1(z,y)^{s_1+1}P_2(z,y)^{s_2}\Big)=b_{1,0}(s_1,s_2)P_1(z,y)^{s_1}P_2(z,y)^{s_2},$$

$$P_2^*(\partial_{z,y})\Big(P_1(z,y)^{s_1}P_2(z,y)^{s_2+1}\Big)=b_{0,1}(s_1,s_2)P_1(z,y)^{s_1}P_2(z,y)^{s_2}.$$

この多項式 $b_{1,0}(s),b_{0,1}(s)$ を基本相対不変式の b 関数と呼ぶ．

さて，基礎体を実数体 $\mathbb{R}$ にもどして考えよう．複素数体上では $W_{\mathbb{C}}$ には開かつ稠密な軌道がただ一つ存在するが，$\mathbb{R}$ 上ではその軌道は複数の開軌道に分解する．W のすべての開軌道を分類することもそう難しくはないが (補題 3.1 参照)，ここでは，開軌道の中でも，もっとも興味深い軌道

$$\widetilde{\Omega}=\Omega\times\mathrm{M}_{n,d}^{\circ}(\mathbb{R}),\qquad \Omega=\mathrm{Sym}_n^{+}(\mathbb{R})$$

について考えることにしよう．ここに Ω は V の等質対称錐である ([FK94])．また，$\mathrm{M}_{n,d}^{\circ}(\mathbb{R})$ は $E=\mathrm{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ の充満階数を持つ行列 (full rank matrix) 全体を表す．この $\widetilde{\Omega}$ を拡大正値対称錐 (*enhanced positive symmetric cone*) または簡単に拡大正錐と呼ぶ．

我々はこの拡大正錐 $\widetilde{\Omega}$ 上の次のような (緩増加超関数としての) 積分に興味がある．

$$\begin{aligned}Z_{\widetilde{\Omega}}(\varphi,s)&=\int_{\widetilde{\Omega}}\varphi(z,y)P_1(z,y)^{s_1}P_2(z,y)^{s_2}dzdy\\&=\int_{\mathrm{Sym}_n^{+}(\mathbb{R})}(\det z)^{s_1}\,dz\int_{\mathrm{M}_{n,d}(\mathbb{R})}\varphi(z,y)\Big|\det\begin{pmatrix}z & y\\ {}^t y & 0\end{pmatrix}\Big|^{s_2}dy\end{aligned}\tag{2.2}$$

ここで $s=(s_1,s_2)$ は複素変数，$\varphi(z,y)\in\mathscr{S}(W)$ は急減少関数であって，dz,dy はそれぞれ V および E 上のルベーグ測度の開部分集合への制限である．

$Z_{\widetilde{\Omega}}(\varphi,s)$ を拡大ゼータ積分 (*enhanced zeta integral*)，あるいは拡大ゼータ超関数と呼ぶ．

積分は $\mathrm{Re}\,s_1,\mathrm{Re}\,s_2\geq 0$ ならば明らかに収束するが，b 関数の一般論によって全平面 $\mathbb{C}^2$ に有理型関数として解析接続される．その具体形を与えるために記号を準備する．非負整数 $k\geq 0$ と $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して，ガンマ関数の積

$$\Gamma_k(\alpha)=\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha-\frac{1}{2})\cdots\Gamma(\alpha-\frac{k-1}{2})=\prod\nolimits_{j=1}^{k}\Gamma(\alpha-\frac{j-1}{2})\tag{2.3}$$

を考え，さらに拡大正錐 $\widetilde{\Omega}$ に対して

$$\Gamma_{\widetilde{\Omega}}(s)=\Gamma_d(s_1+\frac{d+1}{2})\,\Gamma_d(s_2+\frac{d+1}{2})\,\Gamma_d(s_2+\frac{n}{2})\,\Gamma_{n-d}(s_1+s_2+\frac{n+1}{2})\tag{2.4}$$

とおく．

定理 2.3 (ゼータ積分の解析接続)**.** ゼータ積分をガンマ関数によって

$$\frac{1}{\Gamma_{\widetilde{\Omega}}(s)}\, Z_{\widetilde{\Omega}}(\varphi, s)$$

と正規化すれば，任意の急減少関数 $\varphi \in \mathscr{S}(W)$ に対して全平面 $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{C}^2$ に整関数として解析接続される．したがって，拡大ゼータ積分 $Z_{\widetilde{\Omega}}(\varphi, s)$ は全平面に有理型に解析接続され，その極はガンマ因子 $\Gamma_{\widetilde{\Omega}}(s)$ の極に含まれる．

3. フーリエ変換と関数等式

W の G による開軌道を $\mathcal{O}_i$ $(i = 1, \ldots, \ell)$ と書こう．拡大正錐 $\widetilde{\Omega}$ はそのうちの一つである．開軌道の分類は次のようになる．

補題 3.1. $(z, y) \in W$ を通る G 軌道が開であることと $z \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ および ${}^t yz^{-1}y \in \mathrm{Sym}_d(\mathbb{R})$ がともに正則であることは同値である．このとき，開軌道は，z の符号と ${}^t yz^{-1}y$ の符号によって決まる．

拡大ゼータ積分 $Z_{\widetilde{\Omega}}(\varphi, s)$ は $\widetilde{\Omega}$ の閉包に台を持つ緩増加超関数と考えられる．そのフーリエ変換を計算しよう．

簡単のため $\widetilde{z} = (z, y)$ と書いて，$\widetilde{\Omega}$ の閉包に台を持つ超関数を

$$K_s^+(\widetilde{z}) = \begin{cases} (\det z)^{s_1} \left|\det \begin{pmatrix} z & y \\ {}^t y & 0 \end{pmatrix}\right|^{s_2} & \widetilde{z} \in \widetilde{\Omega} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{3.1}$$

と定める．また $W = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ 上の正定値内積をすでに定義したように

$$\langle \widetilde{z}, \widetilde{w} \rangle = \mathrm{trace}\, zw + \mathrm{trace}\, {}^t yx \qquad (\widetilde{z} = (z, y),\ \widetilde{w} = (w, x) \in W) \tag{3.2}$$

として，通常のユークリッド空間上のフーリエ変換 $\mathscr{F}\varphi = \widehat{\varphi}$ を次のように定義する．

$$\widehat{\varphi}(\widetilde{w}) = \int_W \varphi(\widetilde{z}) e^{-2\pi i \langle \widetilde{z}, \widetilde{w} \rangle} d\widetilde{z}$$

フーリエ逆変換は，内積の取り方から

$$(\mathscr{F}^{-1}\psi)(\widetilde{z}) = 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} \int_W \psi(\widetilde{w}) e^{2\pi i \langle \widetilde{w}, \widetilde{z} \rangle} d\widetilde{w}$$

となることに注意しよう．

複素解析的関数の境界値として得られる超関数を

$$\begin{aligned} \Xi_s(\widetilde{w}) &= P_1(+0 + 2\pi i w, x)^{s_1} P_2(+0 + 2\pi i w, x)^{s_2} \\ &= \lim_{v \downarrow 0} \det(v + 2\pi i w)^{s_1} \left((-1)^d \det \begin{pmatrix} v + 2\pi i w & x \\ {}^t x & 0 \end{pmatrix} \right)^{s_2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

と書いておく．ここに $v \in \Omega = \mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ は正錐の中を 0 に近づくとする．この超関数は W 全体を台に持ち，テスト関数 $\varphi \in \mathscr{S}(W)$ に対して，$\mathrm{Re}\, s_1, \mathrm{Re}\, s_2 \geq 0$ においては絶対収束する積分によって

$$\int_W \Xi_s(\widetilde{w})\varphi(\widetilde{w})d\widetilde{w} = \lim_{v \downarrow 0} \int_W P_1(v + 2\pi i w, x)^{s_1} P_2(v + 2\pi i w, x)^{s_2} \varphi(\widetilde{w}) d\widetilde{w}$$

と定義される．あとは全平面に超関数として解析接続する．ここで $\mathrm{Re}\, s_1, \mathrm{Re}\, s_2 \geq 0$ ならば極限 $v \downarrow 0$ を積分の中でとることができて，分枝をうまく取れば

$$\Xi_s(\widetilde{w}) = (2\pi i)^{ns_1 + (n-d)s_2} P_1(\widetilde{w})^{s_1} P_2(\widetilde{w})^{s_2} \tag{3.4}$$

のように通常の関数として表されることに注意しよう．とくに，

$$\Xi_{(0,0)}(\widetilde{w}) = 1 = \widehat{\delta}(\widetilde{w}) \qquad (\delta \text{ は原点に台を持つ Dirac 超関数})$$

である．

定理 3.2. 積分核 K_s^+ の緩増加超関数としてのフーリエ変換は次のように与えられる．

$$\frac{1}{\Gamma_d(s_1 + \frac{d+1}{2})\,\Gamma_d(s_2 + \frac{n}{2})\,\Gamma_{n-d}(s_1 + s_2 + \frac{n+1}{2})}\, \widehat{K_s^+} = \frac{c(s)}{\Gamma_d(-s_2)}\, \Xi_{-(s_1 + \frac{d+1}{2}), -(s_2 + \frac{n}{2})}$$

ここに

$$c(s) = (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{4}} \pi^{-2d(s_2 + \frac{n}{4})}$$

であって，$\Gamma_k(\alpha)$ は (2.3) 式で与えられるガンマ関数である．とくに K_s^+ は $s = -\frac{1}{2}(d+1, n)$ で極を持ち，そこでの超関数としての留数は Dirac の超関数の定数倍である．

$$\delta = \frac{1}{c(s)} \frac{\Gamma_d(s_2 + \frac{d+1}{2})\,\Gamma_d(-s_2)}{\Gamma_{\widetilde{\Omega}}(s)} \cdot K_s^+ \Big|_{s = -\frac{1}{2}(d+1,n)}$$

系 3.3. 急減少関数 $\varphi \in \mathscr{S}(W)$ の台が $\widetilde{\Omega}$ に含まれているとき，次の関数等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma_{\widetilde{\Omega}}(s)}\, Z_{\widetilde{\Omega}}(\widehat{\varphi}; s_1, s_2) \\
&\quad = \frac{c(s)(-2\pi i)^{-(ns_1 + (n-d)s_2 + \frac{n(n+1)}{2})}}{\Gamma_d(s_2 + \frac{d+1}{2})\,\Gamma_d(-s_2)}\, Z_{\widetilde{\Omega}}(\varphi; -(s_1 + \frac{d+1}{2}), -(s_2 + \frac{n}{2})) \\
&\quad = \frac{c(s)}{(-2\pi i)^{ns_1 + (n-d)s_2 + \frac{n(n+1)}{2}} (-\pi)^d} \prod_{j=1}^{d} \sin(s_2 + \frac{d-j}{2}) \times \\
&\qquad\qquad Z_{\widetilde{\Omega}}(\varphi; -(s_1 + \frac{d+1}{2}), -(s_2 + \frac{n}{2}))
\end{aligned} \tag{3.5}$$

これらのフーリエ変換・関数等式は，$d = 1$ のときに，二次形式との関連から鈴木利明 [Suz79] によって計算されている．

概均質ベクトル空間の基本相対不変式が複数ある場合には，式 (2.2) と同様にして多変数のゼータ積分を考えることができるが，その一般論はすでに述べたように佐藤文広によって打ち立てられた ([Sat82a, Sat83, Sat82b])．ガンマ因子や関数等式についても b 関数の情報をもとに詳しく述べることができるが，具体的に関数等式を書き下し，極の位置やその留数となる超関数を調べることはそう易しくなく，興味深い問題である．佐藤文広氏からは，この講演の設定と等価な場合に一般的な関数等式を得たとの連絡と未発表のノートを送っていただいた．この場を借りてお礼を申し上げたい．

4. フーリエ変換公式の証明

定理 3.2 の証明の方針について述べる．

テスト関数を $\varphi(\widetilde{z}) = \varphi_1(z)\varphi_2(y)$ のように変数分離して考えよう．すると，フーリエ変換の定義によって積分は逐次積分の形に書くことができる．

$$\begin{aligned}\int_W \widehat{K_s^+}(\widetilde{w})\varphi(\widetilde{w})d\widetilde{w} &= \int_W K_s^+(\widetilde{w})\widehat{\varphi}(\widetilde{w})d\widetilde{w} \\ &= \int_\Omega (\det z)^{s_1+s_2}\widehat{\varphi_1}(z)dz \int_E (\det {}^t yz^{-1}y)^{s_2}\widehat{\varphi_2}(y)dy \qquad (4.1)\end{aligned}$$

まずは最初の E における積分から考えよう．

4.1. **ジョルダン代数の表現に付随した二次写像のフーリエ変換.** 式 (4.1) における $y \in E$ 上の積分を

$$I_1(z) = \int_E (\det {}^t yz^{-1}y)^{s_2}\widehat{\varphi_2}(y)dy$$

と書こう．$z \in \Omega$ は実の正値対称行列なので，$g \in L$ を用いて $z = {}^t gg$ と書くことができる．この g を用いて y を ${}^t gy$ に変数変換すれば，

$$I_1(z) = \int_E \widehat{\varphi_2}({}^t gy)(\det {}^t yy)^{s_2}|\det g|^d\, dy$$

を得る．このとき，$L_g\varphi_2(x) = \varphi_2(g^{-1}x)$ を左移動とすると，$\widehat{\varphi_2}({}^t gy) = |\det g|^{-d}\widehat{L_g\varphi_2}(y)$ となることが容易に確かめられる．したがって，一時的に $\psi(x) = L_g\varphi_2(x)$ と書いておくと (ψ はその定義に z の情報を含んでいることに注意)，積分は

$$I_1(z) = \int_E \widehat{\psi}(y)(\det {}^t yy)^{s_2}dy \qquad (4.2)$$

となり，これは二次写像 $Q(y) = {}^t yy$ の複素冪をフーリエ変換したものである．とくに $d = 1$ のときには $Q(y)$ は通常の距離関数になっており，フーリエ変換は実質上ハンケル変換に一致していることに注意しよう．この二次写像はジョルダン代数 $V_d = \mathrm{Sym}_d(\mathbb{R})$ の表現に付随して決まるものであるが，元々のジョルダン代数 $V = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ とは次数が異なっている．さて，フーリエ変換 (4.2) は，概均質ベクトル空間 $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{M}_{n,d}(\mathbb{C}))$ の相対不変式 $\det({}^t xx)$ に付随するゼータ積分のフーリエ変換として佐藤幹夫によって計算されている ([SS70])．また，ジョルダン代数の表現という観点から Clerc によっても一般的に考察されている ([Cle02, Theorem 2])．ここではそれを引用しておこう．

補題 4.1. $\alpha \in \mathbb{C}$ を複素数，$\psi(x)$ を急減少関数とすると次の等式が成り立つ．

$$\int_E \widehat{\psi}(y)(\det {}^t yy)^{\alpha} dy = \pi^{-2d(\alpha+\frac{n}{4})} \frac{\Gamma_d(\alpha+\frac{n}{2})}{\Gamma_d(-\alpha)} \int_E \psi(x)(\det {}^t xx)^{-\alpha-\frac{n}{2}}\, dx$$

この補題を用いて計算を続けると

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \int_E \widehat{\psi}(y)(\det {}^t yy)^{s_2} dy = \pi^{-2d(s_2+\frac{n}{4})} \frac{\Gamma_d(s_2+\frac{n}{2})}{\Gamma_d(-s_2)} \int_E \psi(x)(\det {}^t xx)^{-s_2-\frac{n}{2}}\, dx \\ &= (\Gamma\text{-factor}) \int_E (L_g\varphi_2)(x)(\det {}^t xx)^{-s_2-\frac{n}{2}}\, dx \\ &= (\Gamma\text{-factor})|\det g|^d \int_E \varphi_2(x)(\det {}^t x\, {}^t ggx)^{-s_2-\frac{n}{2}}\, dx \qquad (x \text{ を } gx \text{ に置き換えた}) \\ &= (\Gamma\text{-factor})(\det z)^{\frac{d}{2}} \int_E \varphi_2(x)(\det {}^t xzx)^{-s_2-\frac{n}{2}}\, dx \end{aligned}$$

これより，式 (4.1) は次のように変形される．

$$\begin{aligned} &\int_W \widehat{K_s^+}(\widetilde{w})\varphi(\widetilde{w}) d\widetilde{w} \\ &= \pi^{-2d(s_2+\frac{n}{4})} \frac{\Gamma_d(s_2+\frac{n}{2})}{\Gamma_d(-s_2)} \int_E \varphi_2(x)\, dx \int_\Omega \widehat{\varphi_1}(z)(\det z)^{s_1+s_2+\frac{d}{2}}(\det {}^t xzx)^{-s_2-\frac{n}{2}} dz \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.2. **正錐上のラプラス変換とガンマ因子．** 式 (4.3) の中の z による積分を計算するために，収束因子 $e^{-\operatorname{trace} zv^2}$ $(v \in \Omega)$ を導入して，それから極限 $v \downarrow 0$ をとることにする．そこで $\alpha := s_1 + s_2 + d/2$, $\beta := -s_2 - n/2$ と略記して，次の積分を考えよう．

$$\begin{aligned} I_2(v) &= \int_\Omega e^{-\operatorname{trace} zv^2} \widehat{\varphi_1}(z)(\det z)^{\alpha}(\det {}^t xzx)^{\beta} dz \\ &= \int_\Omega e^{-\operatorname{trace} zv^2} \Big\{ \int_V \varphi_1(w) e^{-2\pi i \operatorname{trace} zw} dw \Big\} (\det z)^{\alpha}(\det {}^t xzx)^{\beta} dz \\ &= \int_V \varphi_1(w) dw \int_\Omega e^{-\operatorname{trace} z(v^2+2\pi iw)} (\det z)^{\alpha}(\det {}^t xzx)^{\beta} dz \end{aligned}$$

最後の z に関する積分は，$v^2 + 2\pi iw \in \Omega + iV \subset V_{\mathbb{C}}$ に関して解析的であるから，まず $w = 0$ の場合に計算して，それを解析接続しよう．つまり次のラプラス変換を計算することになる．

$$I_2'(v) = \int_\Omega e^{-\operatorname{trace} {}^t vzv} (\det z)^{\alpha}(\det {}^t xzx)^{\beta} dz.$$

${}^t vzv$ を z で置換すると

$$= (\det v)^{-2(\alpha+\frac{n+1}{2})} \int_\Omega e^{-\operatorname{trace} z} (\det z)^{\alpha}(\det {}^t(v^{-1}x)z(v^{-1}x))^{\beta} dz$$

簡単な補題を一つ準備しよう．

補題 4.2. $x \in E$ に対して

$$\Phi(x) = \int_\Omega e^{-\operatorname{trace} z} (\det z)^\alpha (\det {}^t xzx)^\beta dz.$$

とおくと，$\Phi(x)$ は次の性質を持つ．

(1) $\Phi(xa) = (\det a)^{2\beta}\Phi(x)$ $(a \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}))$
(2) $\Phi(ux) = \Phi(x)$ $(u \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$

$\mathbb{I}_d = \begin{pmatrix} 1_d \\ 0 \end{pmatrix} \in E$ と書くと，任意の $x \in E = \mathrm{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ は $x = u\,\mathbb{I}_d\,a$ $(u \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), a \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}))$, のように直交群と一般線型群によって両側から分解されるので，補題より

$$\Phi(x) = \Phi(u\,\mathbb{I}_d\,a) = (\det a)^{2\beta}\Phi(\mathbb{I}_d) = (\det {}^t xx)^\beta \Phi(\mathbb{I}_d)$$

となる．そこで，$\gamma(\alpha,\beta) := \Phi(\mathbb{I}_d)$ をガンマ定数 (*gamma constant*) と呼ぶことにしよう．d 次の主小行列式を $\Delta_d(z)$ と表すと，$\det({}^t\mathbb{I}_d z \mathbb{I}_d) = \Delta_d(z)$ だから，ガンマ定数は積分で

$$\gamma(\alpha,\beta) = \int_\Omega e^{-\operatorname{trace} z}(\det z)^\alpha \Delta_d(z)^\beta dz = \int_\Omega e^{-\operatorname{trace} z}\Delta_n(z)^\alpha \Delta_d(z)^\beta dz$$

と書け，これはさらに Gindikin のガンマ関数を用いて表すことができる．

補題 4.3 ([FK94, Theorem VII.1.1])**.**

$$\gamma(\alpha,\beta) = (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{4}}\Gamma_d(\alpha+\beta+\frac{n+1}{2})\Gamma_{n-d}(\alpha+\frac{n-d+1}{2}).$$

いままでの議論をすべて総合すると，

$$\begin{aligned} I_2'(v) &= (\det v)^{-2(\alpha+\frac{n+1}{2})}(\det {}^t xv^{-2}x)^\beta (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{4}}\Gamma_d(\alpha+\beta+\frac{n+1}{2})\Gamma_{n-d}(\alpha+\frac{n-d+1}{2}) \\ &= (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{4}} P_1(v^2)^{-(\alpha+\beta+\frac{n+1}{2})} P_2(v^2,x)^\beta \Gamma_d(\alpha+\beta+\frac{n+1}{2})\Gamma_{n-d}(\alpha+\frac{n-d+1}{2}) \end{aligned}$$

と計算できて，結局

$$\begin{aligned} I_2(v) = (2\pi)^{\frac{n(n-1)}{4}}&\Gamma_d(\alpha+\beta+\frac{n+1}{2})\Gamma_{n-d}(\alpha+\frac{n-d+1}{2}) \\ &\int_V \varphi_1(w) P_1(v^2+2\pi i w)^{-(\alpha+\beta+\frac{n+1}{2})} P_2(v^2+2\pi i w, x)^\beta dw. \end{aligned}$$

となる．最後の式に $\alpha = s_1 + s_2 + d/2$, $\beta = -s_2 - n/2$ を代入して，$v \downarrow 0$ の極限をとると，式 (3.3) を考慮することで定理 3.2 を得る．

5. 関数等式の正錐への制限

定理 3.2 を書き直して，ゼータ積分の関数等式の形にまとめておこう．

5.1. **開軌道と境界値超関数の制限.** 補題 3.1 で述べたように G の開軌道は実対称行列の符号 $\operatorname{sgn} z$ と $\operatorname{sgn} {}^t yz^{-1}y$ によって分類される．後者の符号は $[y] = \operatorname{Im} y \subset \mathbb{R}^n$ と書くと，二次形式 $z^{-1}\big|_{[y]}$ の符号と解釈することもできる．そこで符号 (p,q) と (p',q') を $p+q=n,\ p'+q'=d,\ 0\le p'\le p,\ 0\le q'\le q$ となるようにとり，$\rho=(p,q;p',q')$ と書こう．この符号を持つような G の軌道を

$$\mathcal{O}_\rho = \{\widetilde{z}=(z,y)\in W \mid \operatorname{sgn} z=(p,q), \operatorname{sgn}({}^t yz^{-1}y)=(p',q')\}$$

で表す．

§ 3 では，境界値超関数 $\Xi_s(z,y)$ を式 (3.3) によって決めたが，これは $\widetilde{z}=(z,y)$ について解析的，$s=(s_1,s_2)$ に関しては有理型である．一方，開軌道 $\mathcal{O}_\rho$ (の閉包) に台を持つ緩増加超関数が

$$K_s^\rho(\widetilde{z}) = \begin{cases} |\det z|^{s_1}\left|\det\begin{pmatrix} z & y \\ {}^t y & 0\end{pmatrix}\right|^{s_2} & \widetilde{z}\in\mathcal{O}_\rho \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{5.1}$$

として定まる．拡大正錐は一つの開軌道であって $\widetilde{\Omega}=\mathcal{O}_{(n,0;d,0)}$ と表されるから，以前の記号を用いると $\rho=(n,0;d,0)$ のとき，$K_s^+ = K_s^\rho$ である．

補題 5.1. 符号 $\rho=(p,q;p',q')$ に対して，複素関数 u_ρ を

$$u_\rho(s) = (2\pi)^{ns_1+(n-d)s_2}\exp\frac{\pi i}{2}\big((p-q)(s_1+s_2)-(p'-q')s_2\big)$$

と定義する．$\operatorname{Re} s_1, \operatorname{Re} s_2 > 0$ であれば，$\Xi_s\big|_{\mathcal{O}_\rho} = u_\rho(s)K_s^\rho$ であって，和をとることにより

$$\Xi_s = \sum\nolimits_\rho u_\rho(s)K_s^\rho \tag{5.2}$$

が成り立つ．両辺を有理型関数と見れば，解析接続によってこの等式は全平面 $s\in\mathbb{C}^2$ で成り立つ．

証明. 各軌道 $\mathcal{O}_\rho$ は代表元 $(z_0,y_0)=(\begin{pmatrix}1_p & 0\\ 0 & -1_q\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1_{p'} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1_{q'}\end{pmatrix})$ を持ち，軌道に属する一般の元は $(z,y)=(g,h)\cdot(z_0,y_0)=(gz_0\,{}^t g, gy_0\,{}^t h)$ と書ける．したがって，$v\in\Omega$ に対して

$$\begin{aligned}\Xi_s(\widetilde{z}) &= \lim_{v\downarrow 0}\det(v+2\pi iz)^{s_1}\Big((-1)^d\det\begin{pmatrix} v+2\pi iz & y\\ {}^t y & 0\end{pmatrix}\Big)^{s_2}\\ &= \lim_{v\downarrow 0}\det(v+2\pi iz)^{s_1+s_2}\det({}^t y(v+2\pi iz)^{-1}y)^{s_2}\\ &= \lim_{v\downarrow 0}\det(g\,{}^t g)^{s_1+s_2}\det(h\,{}^t h)^{s_2}\det(v_0+2\pi iz_0)^{s_1+s_2}\det({}^t y_0(v_0+2\pi iz_0)^{-1}y_0)^{s_2}\end{aligned} \tag{5.3}$$

となる．ここで $v_0=g^{-1}v\,{}^t g^{-1}$ と書いた．$\det g\,{}^t g = |\det z|$ かつ $\det h\,{}^t h = |\det {}^t yz^{-1}y|$ であることに注意する．仮定より $\operatorname{Re} s_1, \operatorname{Re} s_2>0$ であるから，極限 $v\downarrow 0$ を，例えばスカ

ラー行列 $v_0 = t1_n$ $(t > 0)$ を用いて $t \downarrow 0$ のように計算してもよい．すると，式 (5.3) は

$$= |\det z|^{s_1+s_2} |\det {}^t y z^{-1} y|^{s_2} \lim_{t\downarrow 0} (t+2\pi i)^{p(s_1+s_2)} (t-2\pi i)^{q(s_1+s_2)} (t+2\pi i)^{-p's_2} (t-2\pi i)^{-q's_2}$$

$$= |\det z|^{s_1+s_2} |\det {}^t y z^{-1} y|^{s_2} (2\pi)^{ns_1+(n-d)s_2} \exp \frac{\pi i}{2} \big((p-q)(s_1+s_2) - (p'-q')s_2 \big)$$

となり，ここに現れる係数が $u_\rho(s)$ である． □

5.2. **拡大正錐に付随した関数等式.** 定理 3.2 と補題 5.1 をまとめて，次の関数等式を得る．

定理 5.2. 積分核 K_s^+ のフーリエ変換は次の関数等式を満たす．

$$\widehat{K_s^+} = \frac{c(s)\, \Gamma_{\widetilde{\Omega}}(s)}{\Gamma_d(s_2 + \dfrac{d+1}{2})\, \Gamma_d(-s_2)} \sum_\rho u_\rho(-s - \tfrac{1}{2}(d+1, n))\, K^\rho_{-s-\frac{1}{2}(d+1,n)},$$

ここに $\rho = (p, q; p', q')$ は開軌道の分類パラメータを動き，正則関数 $u_\rho(s)$ は補題 5.1 で与えられたものである．その他の記号は定理 3.2 と同じである．

謝辞

この研究は科学研究費 JSPS KAKENHI Grant Numbers #16K05070 の補助を受けた．また，デンマーク・オーフス大学による支援にも感謝したい．研究の大部分は，著者のオーフス大学訪問時に行われた．

References

[Bar04] L. Barchini, *Zeta distributions and boundary values of Poisson transforms*, J. Funct. Anal. **216** (2004), no. 1, 47–70.

[BCK17] S. Ben Said, J.-L. Clerc, and K. Koufany, *Conformally Covariant Bi-Differential Operators on a Simple Real Jordan Algebra*, ArXiv e-prints (2017).

[BSZ06] L. Barchini, M. Sepanski, and R. Zierau, *Positivity of zeta distributions and small unitary representations*, The ubiquitous heat kernel, Contemp. Math., vol. 398, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, pp. 1–46.

[Cle02] Jean-Louis Clerc, *Zeta distributions associated to a representation of a Jordan algebra*, Math. Z. **239** (2002), no. 2, 263–276.

[FK94] Jacques Faraut and Adam Korányi, *Analysis on symmetric cones*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994, Oxford Science Publications.

[Kim03] Tatsuo Kimura, *Introduction to prehomogeneous vector spaces*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 215, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003, Translated from the 1998 Japanese original by Makoto Nagura and Tsuyoshi Niitani and revised by the author.

[Mur86] Masakazu Muro, *Microlocal analysis and calculations on some relatively invariant hyperfunctions related to zeta functions associated with the vector spaces of quadratic forms*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **22** (1986), no. 3, 395–463.

[NØ18] Kyo Nishiyama and Bent Ørsted, *Real double flag varieties for the symplectic group*, J. Funct. Anal. **274** (2018), no. 2, 573–604.

[NØW19] Kyo Nishiyama, Bent Ørsted, and Akihito Wachi, *Enhanced zeta distributions and its functional equations*, Journal of Physics: Conference Series, vol. 1194, IOP Publishing, 2019, p. 012081.

[Sat82a] Fumihiro Satō, *Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces. I. Functional equations*, Tôhoku Math. J. (2) **34** (1982), no. 3, 437–483.

[Sat82b] ———, *Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces. III. Eisenstein series for indefinite quadratic forms*, Ann. of Math. (2) **116** (1982), no. 1, 177–212.

[Sat83] ———, *Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces. II. A convergence criterion*, Tôhoku Math. J. (2) **35** (1983), no. 1, 77–99.

[Sat06a] Fumihiro Sato, *Functional equations of prehomogeneous zeta functions and intertwining operators*, J. Math. Soc. Japan **58** (2006), no. 4, 995–1008.

[Sat06b] ———, *Zeta functions of* $(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{GL}_2, \mathbf{M}_2 \oplus \mathbf{M}_2)$ *associated with a pair of Maass cusp forms*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **55** (2006), no. 1, 77–95.

[SF84] I. Satake and J. Faraut, *The functional equation of zeta distributions associated with formally real Jordan algebras*, Tohoku Math. J. (2) **36** (1984), no. 3, 469–482.

[Shi75] Takuro Shintani, *On zeta-functions associated with the vector space of quadratic forms*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I A Math. **22** (1975), 25–65.

[SS70] 佐藤幹夫述・新谷卓郎記 (M. Sato and T. Shintani), **概均質ベクトル空間の理論** *(theory of prehomogeneous vector spaces)*, 1970.

[SS74] Mikio Sato and Takuro Shintani, *On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces*, Ann. of Math. (2) **100** (1974), 131–170.

[Suz75] Toshiaki Suzuki, *On the Fourier transform for relative invariants in a prehomogeneous vector space*, RIMS Kôkyûroku (1975), no. 248, 205–211, Distributions and linear differential equations (Proc. Fourth Sympos., Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1975).

[Suz79] ———, *On zeta functions associated with quadratic forms of variable coefficients*, Nagoya Math. J. **73** (1979), 117–147.

[Wac17] Akihito Wachi, *Capelli identities with zero entries*, RIMS Kôkyûroku (2017), no. 2031, 191–201.

Department of Mathematics, Aoyama Gakuin University, Fuchinobe 5-10-1, Chuo, Sagamihara 252-5258, Japan

Email address: kyo@gem.aoyama.ac.jp

実函数論・函数解析学合同シンポジウム (九州大学)
8 月 26 日–28 日, 2019

Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces

Yoshihiro Mizuta

(Hiroshima University)

1 Introduction

Our first aim in this talk is to introduce non-homogeneous central Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces. Next we deal with the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator on non-homogeneous central Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces. As an application, we establish Sobolev's inequality for fractional integrals in such spaces.

Contents

1 Introduction **1**

2 Musielak-Orlicz spaces **3**
2.1 Musielak-Orlicz functions 3
2.2 Variable exponents 4
2.3 Convex functions 4
2.4 Generalized Orlicz functions by Harjulehto and Hästö 5
2.5 Musielak-Orlicz spaces 5

3 Morrey-Musielak-Orlicz spaces **6**
3.1 Morrey-Musielak-Orlicz spaces 6
3.2 Maximal operator 6
3.3 Boundedness of the maximal operator in Morrey-Musielak-Orlicz spaces . . 6

4 Sobolev's inequality in Morrey-Musielak-Orlicz spaces **7**
4.1 J-potential 7
4.2 Sobolev conjugate 8
4.3 Sobolev's inequality in the bounded case 8
4.4 Sobolev's inequality in the unbounded case 8

5 Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces **9**
5.1 Weight 9
5.2 Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces 9
5.3 Hardy operators 10
5.4 Boundedness of the maximal operator in Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces 11
5.5 Boundedness of the potential operator in Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces 11

6 Variable exponent Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces **12**

2 Musielak-Orlicz spaces

2.1 Musielak-Orlicz functions

For this purpose consider

$$\Phi(x,t) = t\phi(x,t) : \mathbb{R}^N \times [0,\infty) \to [0,\infty)$$

satisfying the following conditions ($\Phi 1$) – ($\Phi 3$):

($\Phi 1$) $\phi(\,\cdot\,,t)$ is measurable on $\mathbb{R}^N$ for each $t \geq 0$ and $\phi(x,\,\cdot\,)$ is continuous on $[0,\infty)$ for each $x \in \mathbb{R}^N$;

($\Phi 2$) there exists a constant $A_1 \geq 1$ such that

$$A_1^{-1} \leq \phi(x,1) \leq A_1 \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^N;$$

($\Phi 3$) $\phi(x,\cdot)$ is uniformly almost increasing; namely there exists a constant $A_2 \geq 1$ such that

$$\phi(x,t) \leq A_2\phi(x,s) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^N \quad \text{whenever } 0 \leq t < s.$$

When dealing with Sobolev's inequality, it is assumed that

($\Phi 4$) $\phi(x,\cdot)$ is uniformly doubling; that is, there exists a constant $A_3 \geq 1$ such that

$$\phi(x,2t) \leq A_3\phi(x,t) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^N \text{ and } t > 0.$$

We further assume the following conditions on Φ for $p \geq 1$, $q \geq 1$, $\eta > 0$ and $\tau > 0$:

($\Phi 3; 0; p$) $t \mapsto t^{-p}\Phi(x,t)$ is uniformly almost increasing on $(0,1]$, namely there exists a constant $A_{2,0,p} \geq 1$ such that $t_1^{-p}\Phi(x,t_1) \leq A_{2,0,p}\, t_2^{-p}\,\Phi(x,t_2)$ for all $x \in \mathbb{R}^N$, whenever $0 < t_1 < t_2 \leq 1$;

($\Phi 3; \infty; q$) $t \mapsto t^{-q}\Phi(x,t)$ is uniformly almost increasing on $[1,\infty)$, namely there exists a constant $A_{2,\infty,q} \geq 1$ such that $t_1^{-q}\Phi(x,t_1) \leq A_{2,\infty,q}\, t_2^{-q}\Phi(x,t_2)$ for all $x \in \mathbb{R}^N$, whenever $1 \leq t_1 < t_2$;

($\Phi 5; \eta$) for every $\gamma > 0$, there exists a constant $B_{\gamma,\eta} \geq 1$ such that $\Phi(x,t) \leq B_{\gamma,\eta}\Phi(y,t)$ whenever $x, y \in \mathbb{R}^N$, $|x-y| \leq \gamma t^{-\eta}$ and $t \geq 1$;

($\Phi 6; \tau$) there exist a function $g \in L^\tau(\mathbb{R}^N)$ on $\mathbb{R}^N$ and a constant $B_\infty \geq 1$ such that $0 \leq g(x) \leq 1$ for all $x \in \mathbb{R}^N$ and $B_\infty^{-1}\Phi(x,t) \leq \Phi(x',t) \leq B_\infty\Phi(x,t)$ whenever $x, x' \in \mathbb{R}^N$, $|x'| \geq |x|$ and $g(x) \leq t \leq 1$.

2.2 Variable exponents

For a real valued measurable function $p(\cdot)$ on $\mathbb{R}^N$, consider

(P1) $1 < p^- := \operatorname{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^N} p(x) \le \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^N} p(x) =: p^+ < \infty$;

(P2) $p(\cdot)$ is log-Hölder continuous, namely

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C_p}{\log(e + 1/|x-y|)} \quad \text{for all } x,\, y \in \mathbb{R}^N, x \ne y$$

with a constant $C_p \ge 0$;

(P3) $p(\cdot)$ is log-Hölder continuous at ∞, namely, there exists a constant $p(\infty) > 1$ such that

$$|p(x) - p(\infty)| \le \frac{C_{p,\infty}}{\log(e + |x|)} \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^N$$

with a constant $C_{p,\infty} \ge 0$.

EXAMPLE 2.1 Let $p(\cdot)$ be a real valued measurable function on $\mathbb{R}^N$ satisfying (P1) – (P3). Let

$$\Phi(x,t) = t^{p(x)}.$$

Then Φ satisfies (Φ1) – (Φ4).

Moreover, we see that Φ satisfies ($\Phi 5;\eta$) for every $\eta > 0$ since $p(\cdot)$ is log-Hölder continuous.

Finally, we see that Φ satisfies ($\Phi 6;\tau$) for every $\tau > 0$ with $g(x) = (1+|x|)^{-(N+1)/\tau}$ since $p(\cdot)$ is log-Hölder continuous at ∞; in fact, if $(1+|x|)^{-(N+1)/\tau} < t \le 1$, then

$$t^{-|p_1(x)-p_1(x')|} \le e^{(N+1)C_{p,\infty}/\tau} \quad \text{for } |x'| \ge |x|.$$

2.3 Convex functions

Let $\bar\phi(x,t) = \sup_{0\le s\le t} \phi(x,s)$ and

$$\overline{\Phi}(x,t) = \int_0^t \bar\phi(x,r)\,dr$$

for $x \in \mathbb{R}^N$ and $t \ge 0$. Then $\overline{\Phi}(x,\cdot)$ is convex and

$$\Phi(x,t/2) \le \overline{\Phi}(x,t) \le A_2\Phi(x,t) \tag{2.1}$$

for all $x \in \mathbb{R}^N$ and $t \ge 0$.

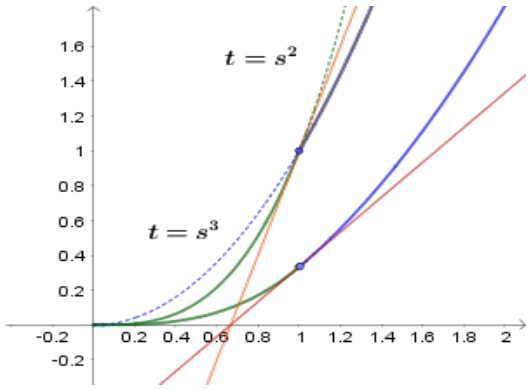
For example, consider $\Phi(x,t) = t^p(\log(e+t))^q$. If $p > 1$ and $q < 0$, then Φ satisfies all the conditions (Φ1) - (Φ4). We can take

$$\overline{\Phi}(x,t) = t^p(\log(c+t))^q$$

for large $c > 0$.

Next, consider

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} t^3 & (0 \le t < 1), \\ t^2 & (t \ge 1). \end{cases}$$



In this case,

$$\overline{\Phi}(x,t) = \begin{cases} t^3/3 & (0 \le t < 1), \\ 1/3 + (t^2-1)/2 & (t \ge 1). \end{cases}$$

2.4 Generalized Orlicz functions by Harjulehto and Hästö

In their book [5], P. Harjulehto and P. Hästö consider a function $\varphi : \mathbb{R}^N \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ such that $\varphi(x,\cdot)$ is left continuous, $t^{-1}\varphi(x,t)$ is almost increasing for $x \in \mathbb{R}^N$ and the following conditions hold:

$(A0)$ There exists a constant $\beta \in (0,1]$ such that

$$\beta \le \varphi^{-1}(x,1) \le \beta^{-1} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^N;$$

$(A1)$ there exists a constant $\beta \in (0,1]$ such that for every ball B

$$\beta\varphi^{-1}(x,t) \le \varphi^{-1}(y,t) \text{ when } 1 \le t \le |B|^{-1} \text{ and } x,y \in B;$$

$(A2)$ for every $s > 0$ there exists $\beta \in (0,1]$ and $h \in L^1 \cap L^\infty$ such that

$$\beta\varphi^{-1}(x,t) \le \varphi^{-1}(y,t) \quad \text{when } h(x) + h(y) \le t \le s \text{ and } x,y \in B.$$

2.5 Musielak-Orlicz spaces

Let Ω be a measurable set in $\mathbb{R}^N$. We consider the Musielak-Orlicz space (generalized Orlicz space) :

$$L^\Phi(\Omega) = \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,;\, \int_\Omega \Phi\big(y, |f(y)|/\lambda\big)\,dy < \infty \text{ for } \exists \lambda > 0 \right\},$$

which is a Banach space with respect to the norm

$$\|f\|_{L^\Phi(\Omega)} = \inf\left\{ \lambda > 0\,;\, \int_\Omega \overline{\Phi}\big(y, |f(y)|/\lambda\big)\,dy \le 1 \right\}.$$

Note

$$\int_\Omega \overline{\Phi}\left(y, \frac{|f(y)|}{\|f\|_{L^\Phi(\Omega)}}\right) dy \le 1.$$

3 Morrey-Musielak-Orlicz spaces

3.1 Morrey-Musielak-Orlicz spaces

We also consider a function $\kappa : \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ satisfying the following conditions: let $0 < \sigma_0 \le N$.

($\kappa 1$) $\kappa(x,\cdot)$ satisfies the uniform doubling condition;

($\kappa 2$) $r \mapsto r^{-\kappa_0}\kappa(x,r)$ is uniformly almost increasing on $(0,\infty)$ for some $\kappa_0 > 0$;

($\kappa 3;\sigma_0$) there is a constant $Q_3 \ge 1$ such that

$$Q_3^{-1}\min(1,\, r^{\sigma_0}) \le \kappa(x,r) \le Q_3 \max(1,\, r^N)$$

for all $x \in \mathbb{R}^N$ and $r > 0$.

Given Φ and κ, we define the Morrey-Musielak-Orlicz space $L^{\Phi,\kappa}(\mathbb{R}^N)$ by

$$L^{\Phi,\kappa}(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) : \sup_{x\in\mathbb{R}^N,\, r>0} \frac{\kappa(x,r)}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \Phi\big(y, |f(y)|\big)\,dy < \infty \right\}.$$

It is a Banach space with respect to the norm

$$\|f\|_{L^{\Phi,\kappa}(\mathbb{R}^N)} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \sup_{x\in\mathbb{R}^N,\, r>0} \frac{\kappa(x,r)}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \overline{\Phi}\big(y, |f(y)|/\lambda\big)\,dy \le 1 \right\}.$$

Note that $L^{\Phi,\kappa}(\mathbb{R}^N) = L^{\Phi}(\mathbb{R}^N)$ if $\kappa(x,r) = r^N$.

3.2 Maximal operator

For a locally integrable function f on $\mathbb{R}^N$, the Hardy-Littlewood maximal function Mf is defined by

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy.$$

The mapping $f \mapsto Mf$ is called the maximal operator.

3.3 Boundedness of the maximal operator in Morrey-Musielak-Orlicz spaces

We first prove the boundedness of maximal operator.

THEOREM 3.2 *Suppose that Φ satisfies* ($\Phi 1$) - ($\Phi 3$), ($\Phi 3;0;p$), ($\Phi 3;\infty;q$), ($\Phi 5;\eta$) *and* ($\Phi 6;\tau$) *for $p > 1$, $q > 1$, $0 < \eta \le q/\sigma_0$ and $0 < \tau \le p$. Then the maximal operator is a bounded operator from the Morrey-Musielak-Orlicz space $L^{\Phi,\kappa}(\mathbb{R}^N)$ into itself, namely $Mf \in L^{\Phi,\kappa}(\mathbb{R}^N)$ for all $f \in L^{\Phi,\kappa}(\mathbb{R}^N)$ and*

$$\|Mf\|_{L^{\Phi,\kappa}(\mathbb{R}^N)} \le C\|f\|_{L^{\Phi,\kappa}(\mathbb{R}^N)}$$

with a constant $C > 0$ depending only on N and constants appearing in conditions for Φ and κ.

4 Sobolev's inequality in Morrey-Musielak-Orlicz spaces

4.1 J-potential

Let G be an open set in $\mathbb{R}^N$. As a potential kernel, we consider a function $J : G \times (0, d_G) \to (0, \infty)$ satisfying the following conditions:

(J1) $J(\cdot, r)$ is measurable on G for each $r \in (0, d_G)$;

(J2) $J(x, \cdot)$ is nonincreasing and continuous on $(0, d_G)$ for each $x \in G$;

(J3) $\displaystyle\int_0^1 J(x, r) r^{N-1} dr \le J_0 < \infty$ with a constant J_0 independent of $x \in G$.

Example 4.1 Let $\alpha(\cdot)$ be a measurable function on G such that

$$0 < \alpha^- := \inf_{x \in G} \alpha(x) \le \sup_{x \in G} \alpha(x) =: \alpha^+ < N.$$

Then, $J(x, r) = \gamma_{\alpha(\cdot)}(x)^{-1} r^{\alpha(x)-N}$ satisfies (J1) – (J3), where

$$\gamma_{\alpha(\cdot)}(x) = \frac{\pi^{N/2} 2^{\alpha(x)} \Gamma(\alpha(x)/2)}{\Gamma((N - \alpha(x))/2)};$$

see [13].

For a nonnegative measurable function f on G, its J-potential Jf is defined by

$$Jf(x) = \int_G J(x, |x - y|) f(y)\, dy.$$

Set

$$\overline{J}(x, r) = \frac{N}{r^N} \int_0^r J(x, \rho) \rho^{N-1} d\rho$$

for $x \in G$ and $0 < r \le d_G$.

Then

$$J(x, r) \le \overline{J}(x, r) \le N J_0 r^{-N}$$

for all $x \in G$ and $0 < r < d_G$.

We further assume that

($\kappa 0$) $\kappa(\cdot, t)$ is measurable on $\mathbb{R}^N$ for each $t \ge 0$ and $\kappa(x, \cdot)$ is continuous on $[0, \infty)$ for each $x \in \mathbb{R}^N$.

Set

$$Y_J(x, r) = r^N \overline{J}(x, r)$$

for $x \in G$ and $0 < r < d_G$.

4.2 Sobolev conjugate

We consider a function $\Psi : G \times [0, \infty) \to [0, \infty)$
(Sobolev conjugate) satisfying the following conditions:

($\Psi 0$) $\Psi(\cdot, t)$ is measurable on G for each $t \geq 0$ and $\Psi(x, \cdot)$ is continuous on $[0, \infty)$ for each $x \in G$;

($\Psi 1$) $\Psi(\cdot, 1)$ is bounded;

($\Psi 2$) $\Psi(x, \cdot)$ is uniformly almost increasing on $[0, \infty)$;

($\Psi 3$) there exists a constant $A_4 > 0$ such that

$$\Psi\left(x, tY_J\big(x, \kappa^{-1}(x, \Phi(x,t)^{-1})\big)\right) \leq A_4 \Phi(x,t)$$

for all $x \in G$ and $t \geq 1$.

4.3 Sobolev's inequality in the bounded case

THEOREM 4.2 *Suppose that Φ satisfies $(\Phi 1)$ - $(\Phi 4)$, $(\Phi 3; 0; p)$, $(\Phi 3; \infty; q)$, $(\Phi 5; \eta)$ and $(\Phi 6; \tau)$ for $p > 1$, $q > 1$, $0 < \eta \leq q/\sigma_0$ and $0 < \tau \leq p$. Assume that G is bounded and*

($\Phi \kappa J$) *$r \mapsto r^{\varepsilon} Y_J(x, r) \Phi^{-1}(x, \kappa(x, r)^{-1})$ is uniformly almost decreasing on $(0, \infty)$ for some $\varepsilon > 0$.*

Then there exist constants $C_1,\ C_2 > 0$ such that

$$\sup_{x \in G, 0 < r < d_G} \frac{\kappa(x,r)}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r) \cap G} \Psi(x, Jf(x)/C_1) dx \leq C_2$$

for all $f \geq 0$ satisfying $\|f\|_{L^{\Phi,\kappa}(G)} \leq 1$.

4.4 Sobolev's inequality in the unbounded case

In case G is unbounded, we consider

$$w(x) := \kappa^{-1}(x, \Phi(x, ag^*(x))^{-1}), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

where

$$g^*(x) = \max\{g(x),\ Mg(x)\}$$

for $g(x)$ appearing in $(\Phi 6; \omega)$.

Further consider a function

$$\Phi_\infty(t) = t\phi_\infty(t) : [0, \infty) \to [0, \infty),$$

which satisfies the following conditions:

($\Phi_\infty 0$) $\Phi_\infty(t) > 0$ for $t > 0$, $\phi_\infty(t)$ is increasing and Φ_∞ is convex on $[0, \infty)$;

($\Phi_\infty 1$) there exists a constant $\tilde{B}_\infty \geq 1$ such that

$$\tilde{B}_\infty^{-1}\Phi(x,t) \leq \Phi_\infty(t) \leq \tilde{B}_\infty \Phi(x,t)$$

whenever $g(x) \leq t \leq 1$ for $g(x)$ in condition $(\Phi 6;\omega)$;

($\Phi_\infty 2$) there exists a constant $c_\infty \geq 1$ such that

$$\Phi_\infty(g^*(x)) \leq c_\infty(1+|x|)^{-N}$$

for all $x \in \mathbb{R}^N$;

($\Phi_\infty \kappa$) $r \mapsto r^\gamma \Phi_\infty^{-1}(\kappa(x,r)^{-1})$ is uniformly almost increasing on $(1,\infty)$ for some $0 < \gamma < N$.

We also consider the following condition:

($\Phi_\infty \kappa J$) $r \mapsto r^\varepsilon Y_J(x,r)\Phi_\infty^{-1}(\kappa(x,r)^{-1})$ is uniformly almost decreasing on $[1,\infty)$ for some $\varepsilon > 0$.

We prove the following theorem by Theorem 4.2.

THEOREM 4.10 *Suppose that Φ satisfies $(\Phi 1)$-$(\Phi 4)$, $(\Phi 3;0;p)$, $(\Phi 3;\infty;q)$, $(\Phi 5;\eta)$, $(\Phi 6;\tau)$ and $(\Phi\kappa J)$ for $p > 1$, $q > 1$, $0 < \eta \leq q/\sigma_0$ and $0 < \tau \leq p$. Assume further that there exists $\Phi_\infty(t)$ satisfying $(\Phi_\infty 0)$ - $(\Phi_\infty 2)$, $(\Phi_\infty \kappa)$ and $(\Phi_\infty \kappa J)$. Then there exists a constant $C > 0$ such that*

$$\|Jf\|_{L^{\Psi,\kappa}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{L^{\Phi,\kappa}(\mathbb{R}^N)}$$

for all $f \in L^{\Phi,\kappa}(\mathbb{R}^N)$.

5 Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces

5.1 Weight

We consider a function $\omega : (0,\infty) \to (0,\infty)$ satisfying the following conditions $(\omega 1)$ and $(\omega 2)$:

($\omega 1$) ω is almost monotone on $(0,\infty)$; that is, ω is almost increasing on $(0,\infty)$ or ω is almost decreasing on $(0,\infty)$;

($\omega 2$) ω is doubling on $(0,\infty)$.

5.2 Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces

Given Φ, $0 < q \leq \infty$, ω and $x_0 \in \mathbb{R}^N$, we denote by $H^{\Phi,q,\omega}_{\{x_0\},\infty}(\mathbb{R}^N)$ with reference point at x_0 the class of locally integrable functions f on $\mathbb{R}^N$ satisfying

$$\|f\|_{H^{\Phi,q,\omega}_{\{x_0\},\infty}(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^\Phi(B(x_0,2))} + \left(\int_1^\infty \left(\omega(r)\|f\|_{L^\Phi(A(x_0,r))}\right)^q \frac{dr}{r}\right)^{1/q} < \infty,$$

where $A(x_0,r) = B(x_0,2r) \setminus B(x_0,r)$.

The space $H^{\Phi,q,\omega}_{\{x_0\},\infty}(\mathbb{R}^N)$ is referred to as a non-homogeneous central Herz-Morrey-Musielak-Orlicz space with reference point at x_0.

Further we denote by $H^{\Phi,q,\omega}_{\{x_0\},0}(\mathbb{R}^N)$ the class of locally integrable functions f on $\mathbb{R}^N\backslash\{x_0\}$ satisfying

$$\|f\|_{H^{\Phi,q,\omega}_{\{x_0\},0}(\mathbb{R}^N)}=\left(\int_0^\infty\left(\omega(r)\|f\|_{L^\Phi(A(x_0,r))}\right)^q\frac{dr}{r}\right)^{1/q}<\infty.$$

Recall that Morrey space is given by

$$M^{\Phi,\omega}(\mathbb{R}^N)=\bigcap_{x_0\in\mathbb{R}^N}H^{\Phi,\infty,\omega}_{\{x_0\},0}(\mathbb{R}^N).$$

In what follows, let x_0 be the origin. For simplicity write $H^{\Phi,q,\omega}(\mathbb{R}^N)$ instead of $H^{\Phi,\infty,\omega}_{\{0\},\infty}(\mathbb{R}^N)$, and write $H^{p,q,\omega}(\mathbb{R}^N)$ for $H^{\Phi,q,\omega}(\mathbb{R}^N)$ when $\Phi(x,t)=t^p$.

When $\Phi(x,t)=t^p$, $q=p$ and $\omega(r)=r^a$,

(1) $\|f\|_{H^{p,q,\omega}(\mathbb{R}^N)}<\infty$ if and only if

$$\int(1+|y|)^a|f(y)|^pdy<\infty;$$

(2) $\|f\|_{H^{p,q,\omega}_0(\mathbb{R}^N)}<\infty$ if and only if

$$\int|y|^a|f(y)|^pdy<\infty.$$

REMARK 5.1 The non-homogeneous central Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces $H^{\Phi,q,\omega}(\mathbb{R}^N)$ include the following spaces:

- non-homogeneous Herz spaces introduced in [6];
- local Morrey-type spaces introduced in [2];
- non-homogeneous central Herz-Morrey-Orlicz spaces introduced in [17] when $\Phi(x,t)=\Phi(t)$;
- non-homogeneous central Herz-Morrey spaces with variable exponents introduced in [16] when $\Phi(x,t)=t^{p(x)}$.

LEMMA 5.2 *If $0<q_1<q_2<\infty$, then*

$$H^{\Phi,q_1,\omega}(\mathbb{R}^N)\subset H^{\Phi,q_2,\omega}(\mathbb{R}^N)\subset H^{\Phi,\infty,\omega}(\mathbb{R}^N).$$

5.3 Hardy operators

For a nonnegative function $f\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$ and a real number β, set

$$H^0_\beta f(r)=r^\beta\int_{B(0,r)\backslash B(0,1)}|y|^{-N-\beta}f(y)\,dy$$

and

$$H^\infty_\beta f(r)=r^\beta\int_{\mathbb{R}^N\backslash B(0,2r)}|y|^{-N-\beta}f(y)\,dy.$$

LEMMA 5.5 *For a real number β, suppose further that Φ_∞ satisfies*

$(\Phi_\infty\omega 2;\beta)$ *$t^{-\varepsilon_2-\beta}\omega(t)^{-1}\Phi_\infty^{-1}(t^{-N})$ is almost increasing in $[1,\infty)$ for some $\varepsilon_2>0$.*

If $0<\varepsilon<\varepsilon_2$, then there exists a constant $C>0$ such that

$$H^0_\beta f(r) \;\le\; Cr^{-\varepsilon}\omega(r)^{-1}\Phi_\infty^{-1}(r^{-N})\left(\int_{1/2}^{r}\left(t^{\varepsilon}\omega(t)\|f\|_{L^\Phi(A(0,t))}\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

for all $r\ge 1$ and nonnegative functions $f\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$.

LEMMA 5.6 *For a real number β, suppose further that Φ_∞ satisfies*

$(\Phi_\infty\omega 1;\beta)$ *$t^{\varepsilon_1-\beta}\omega(t)^{-1}\Phi_\infty^{-1}(t^{-N})$ is almost decreasing in $[1,\infty)$ for some $\varepsilon_1>0$.*

If $0<\varepsilon<\varepsilon_1$, then there exists a constant $C>0$ such that

$$H^\infty_\beta f(r) \;\le\; Cr^{\varepsilon}\omega(r)^{-1}\Phi_\infty^{-1}(r^{-N})\left(\int_{r}^{\infty}\left(t^{-\varepsilon}\omega(t)\|f\|_{L^\Phi(A(0,t))}\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

for all $r\ge 1$ and nonnegative functions $f\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$.

5.4 Boundedness of the maximal operator in Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces

THEOREM 5.7 *Suppose that Φ satisfies $(\Phi1)$ - $(\Phi4)$, $(\Phi3;0;p)$, $(\Phi3;\infty;q)$, $(\Phi5;\eta)$ and $(\Phi6;\tau)$ for $p>1, q>1, \eta>0$ and $\tau>0$ satisfying $\eta\le q/N$ and $\tau\le p$. Assume that Φ_∞ satisfies $(\Phi_\infty0)$ - $(\Phi_\infty2)$, $(\Phi_\infty\omega1;0)$ and $(\Phi_\infty\omega2;-N)$. Then the maximal operator M is bounded from $H^{\Phi,q,\omega}(\mathbb{R}^N)$ to itself, that is,*

$$\|Mf\|_{H^{\Phi,q,\omega}(\mathbb{R}^N)}\le C\|f\|_{H^{\Phi,q,\omega}(\mathbb{R}^N)} \quad \text{for all } f\in H^{\Phi,q,\omega}(\mathbb{R}^N).$$

5.5 Boundedness of the potential operator in Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces

As the definition of Φ_∞, we consider a convex function

$$\Psi_\infty(t)=t\psi_\infty(t):[0,\infty)\to[0,\infty)$$

such that $\psi_\infty(t)>0$ for $t>0$, ψ_∞ is increasing on $[0,\infty)$ and satisfies the doubling condition and

$(\Psi_\infty1)$ there exists a constant $Q\ge1$ such that

$$Q^{-1}\Psi(x,t)\le\Psi_\infty(t)\le Q\Psi(x,t)$$

whenever $g(x)\le t\le 1$, where g is the function appearing in $(\Phi6;\tau)$;

($\Psi_\infty 2$) there exists a constant $Q \geq 1$ such that

$$\Psi_\infty(g(x)) \leq Q(1+|x|)^{-N}$$

for all $x \in \mathbb{R}^N$;

($\Psi_\infty 3$) there exists a constant $Q > 0$ such that

$$\sup_{t \geq 1} Y_J(x,t)\Phi_\infty^{-1}(t^{-N})\left\{\Psi_\infty^{-1}(t^{-N})\right\}^{-1} \leq Q.$$

We modify Lemma 5.6 as follows:

LEMMA 5.9 *Suppose*

($\Phi_\infty \omega 1; J$) $t^{\varepsilon_1} Y_J(x,r)\omega(t)^{-1}\Phi_\infty^{-1}(t^{-N})$ *is almost decreasing in* $[1,\infty)$ *for some* $\varepsilon_1 > 0$.

If $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, *then there exists a constant* $C > 0$ *such that*

$$\begin{aligned} H_J^\infty f(x) &= Y_J(x,r)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,2|x|)} J(x,|y|) f(y) dy \\ &\leq Cr^\varepsilon \omega(r)^{-1}\Phi_\infty^{-1}(r^{-N}) \left(\int_r^\infty \left(t^{-\varepsilon}\omega(t)\|f\|_{L^\Phi(A(0,t))} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

for $r = |x| \geq 1$ *and nonnegative functions* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$.

Now we show the Sobolev type inequality for fractional integrals in Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces.

THEOREM 5.9 *Suppose* Φ *satisfies* ($\Phi 1$) - ($\Phi 4$), ($\Phi 3; 0; p$), ($\Phi 3; \infty; q$), ($\Phi 5; \eta$), ($\Phi 6; \tau$) *and* ($\Phi \kappa J$) (with $\kappa(x,r) = r^N$) *for* $p > 1, q > 1, \eta > 0$ *and* $\tau > 0$ *satisfying* $\eta \leq q/N$ *and* $\tau \leq p$. *For* Φ_∞, *assume* ($\Phi_\infty 0$) - ($\Phi_\infty 2$), ($\Phi_\infty \omega 1; J$) *and* ($\Phi_\infty \omega 2; -N$), *and for* Ψ_∞, *assume* ($\Psi_\infty 1$) - ($\Psi_\infty 3$). *Then there exists a constant* $C > 0$ *such that*

$$\|Jf\|_{H^{\Psi,q,\omega}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{H^{\Phi,q,\omega}(\mathbb{R}^N)}$$

for all $f \in H^{\Phi,q,\omega}(\mathbb{R}^N)$.

6 Variable exponent Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces

Let $q(\cdot)$ be a measurable function on $[1,\infty)$ satisfying

(Q1) $0 < q^- := \operatorname{ess\,inf}_{r\in[1,\infty)} q(r) \leq \operatorname{ess\,sup}_{r\in[1,\infty)} q(r) =: q^+ < \infty$.

Given Φ, ω and $q(\cdot)$ as above, we denote by $H^{\Phi,q(\cdot),\omega}(\mathbb{R}^N)$ the classes of locally integrable functions f on $\mathbb{R}^N$ satisfying

$$\|f\|_{H^{\Phi,q(\cdot),\omega}(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^\Phi(B(0,2))} + \|\omega(\cdot)\|f\|_{L^\Phi(A(0,\cdot))}\|_{L^{q(\cdot)}((1,\infty),dr/r)} < \infty,$$

where

$$\|g\|_{L^{q(\cdot)}((1,\infty),dr/r)} = \inf\left\{ \lambda > 0\,;\, \int_1^\infty \left(\frac{|g(r)|}{\lambda} \right)^{q(r)} \frac{dr}{r} \leq 1 \right\}.$$

PROPOSITION 6.1 *Suppose $q(\cdot)$ satisfies*

(Q2) *there exists a constant $q(\infty) \in (0, \infty)$ such that*

$$|q(r) - q(\infty)| \leq \frac{C_{q,\infty}}{\log(e + r)}$$

whenever $r \geq 1$ with a constant $C_{q,\infty} \geq 0$.

Then

$$H^{\Phi,q(\infty),\omega}(\mathbb{R}^N) = H^{\Phi,q(\cdot),\omega}(\mathbb{R}^N).$$

References

[1] D. R. Adams and L. I. Hedberg, Function Spaces and Potential Theory, Springer, 1996.

[2] V. I. Burenkov, A. Gogatishvili, V. S. Guliyev and R. Ch. Mustafayev, Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces, Complex Var. Elliptic Equ. **55** (2010), no. 8-10, 739–758.

[3] D. V. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, Variable Lebesgue spaces. Foundations and harmonic analysis. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhuser/Springer, Heidelberg, 2013.

[4] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö and M. Růžička, Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lecture Notes in Mathematics, **2017**, Springer, Heidelberg, 2011.

[5] P. Harjulehto and P. Hästö, Orlicz Spaces and Generalized Orlicz Spaces, Lecture Notes in Mathematics, **2236**, Springer-Verlag, Cham, 2019.

[6] P. Hästö, The maximal operator on generalized Orlicz spaces, J. Funct. Anal. **269** (2015), no. 12, 4038–4048; Corrigendum to " The maximal operator on generalized Orlicz spaces ", J. Funct. Anal. **271** (2016), no. 1, 240–243.

[7] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Trudinger's inequality and continuity of potentials on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, Potential Anal. **38** (2013), no. 2, 515–535.

[8] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of maximal operators and Sobolev's inequality on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, Bull. Sci. math. **137** (2013), 76–96.

[9] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev and Trudinger type inequalities on grand Musielak-Orlicz-Morrey spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **40** (2015), 403–426.

[10] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Duality of Non-Homogeneous Central Herz-Morrey-Musielak-Orlicz Spaces, Potential Anal. **47** (2017), no. 4, 447–460.

[11] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Duality of central Herz-Morrey-Musielak-Orlicz spaces of variable exponents, Collect. Math. **70** (2019), 117–151.

[12] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev's inequality for double phase functionals with variable exponents, Forum Math. **31** (2019), no. 2, 517–527.

[13] Y. Mizuta, Potential theory in Euclidean spaces, GAKUTO International Series. Mathematical Sciences and Applications, **6**, Gakktosho Co., Ltd., Tokyo, 1996. viii+341 pp. ISBN: 4-7625-0415-7.

[14] Y. Mizuta, Function spaces with variable exponents [translation of MR3114272], Sugaku Expositions **29** (2016), no. 2, 227–248.

[15] Y. Mizuta and T. Ohno, Sobolev's theorem and duality for Herz-Morrey spaces of variable exponent, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **39** (2014), 389–416.

[16] Y. Mizuta and T. Ohno, Herz-Morrey spaces of variable exponent, Riesz potential operator and duality. Complex Var. Elliptic Equ. **60** (2015), no. 2, 211–240.

[17] Y. Mizuta and T. Ohno, Boundedness of the maximal operator and Sobolev's inequality on non-homogeneous central Herz-Morrey-Orlicz spaces, Nonlinear Anal. **128** (2015), 325–347.

[18] Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev's inequalities and vanishing integrability for Riesz potentials of functions in the generalized Lebesgue space $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$, J. Math. Anal. Appl. **345** (2008), 70–85.

[19] Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of maximal operators and Sobolev's theorem for non-homogeneous central Morrey spaces of variable exponent, Hokkaido Math. J. **44** (2015), 185–201.

[20] Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev inequalities for Musielak-Orlicz spaces, Manuscripta Math. **155** (2018), no. 1–2, 209-227.

[21] J. Musielak, Orlicz spaces and modular spaces, Lecture Notes in Math. **1034**, Springer-Verlag, 1983.

[22] H. Nakano, Modulared Semi-Ordered Linear Spaces, Maruzen Co. Ltd., Tokyo, 1950.

[23] H. Nakano, Topology of linear topological spaces, Maruzen Co. Ltd., Tokyo, 1951.

[24] M. R$\mathring{\text{u}}$žička, Electrorheological fluids : modeling and Mathematical theory, Lecture Notes in Math. **1748**, Springer, 2000.

[25] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

ORLICZ 空間の拡張とその構造について

北　　廣男

1. はじめに

解析学において，L^p 空間の重要性は言うまでもない．この L^p 空間の一般化である 0rlicz 空間の重要性が高まっている．ここでは次のことについて説明する．Orlicz 空間におけるノルム収束の具体的な意味の説明．Orlicz 空間に値をとる強可測でない関数の具体的な構成方法．φ-関数によって構成される一般化された Orlicz 空間．同じく φ-関数によって構成される一般化された弱 Orlicz 空間．そしてその応用について説明する．

Orlicz 空間は Birnbaum and Orlicz [3] および Orlicz [11] ではじめて探究された．その後日本でも Nakano [10] により後に Luxemburg-Nakano ノルムと呼ばれる概念が導入されるなど活発な研究が北海道大学を中心に行われた（Andô [1, 2] 参照）．そして Orlicz 空間は Banach 空間としての研究が深められいくつもの重要な結果が与えられた. Krasnosel'skiĭ and Rutickiĭ[7], Maligranda [9], Rao and Ren [13] に詳しい内容が紹介されている．次節において Orlicz 空間に関する基本的な定義を与える．

2. Young 関数の定義および Orlicz 空間の定義と基本的な性質

この節ではまず Orlicz 空間を構成するために必要な Young 関数の概念とその基本的な性質を述べる．

定義 2.1 (Young 関数の定義)**.** 関数 $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty]$ は次の形で表されるとき，Young 関数と呼ばれる．

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds \qquad (0 \le t < \infty). \tag{2.1}$$

ここで，関数 φ は区間 $[0,\infty)$ 上で定義され，$[0,\infty]$ に値を持つ非減少関数で，$\varphi(0) = 0$，区間 $(0,\infty)$ で左連続である．ただし，$(0,\infty)$ 上で $\varphi \not\equiv 0$，$\varphi \not\equiv \infty$．この φ は Young 関数 Φ の左導関数 (left derivative) と呼ばれる．

次の不等式は基本的ではあるが，重要なので，補題として与えておく．

補題 2.2. Φ を (2.1) の形の Young 関数とする．このとき次の不等式が成立する．

$$\frac{\Phi(t)}{t} \le \varphi(t) \le \frac{\Phi(t)}{2t} \qquad (0 < t < \infty). \tag{2.2}$$

次に φ の左逆関数を定義する．

定義 2.3. Φ を (2.1) の形の Young 関数とし，その左導関数を φ とする．この φ の左逆関数 (left inverse) ψ を次のように定める．

$$\psi(u) := \inf\{s > 0 : \varphi(s) \ge u\} \qquad (0 \le u < \infty). \tag{2.3}$$

ただし，(2.3) の右辺の集合が空集合 $\emptyset$ の場合には，$\inf\emptyset = \infty$ と約束する．

この報告での内容は宮本孝志氏と尾形尚子氏との共同研究の結果を中心にまとめたものである．.

定義 2.3 の中で与えられた ψ は φ と同じ性質を持つ．北 ([6] p. 10) の補題 1.12 の中で示されている．この ψ を用いて共役 Young 関数の概念を定義する．

定義 2.4 (共役 Young 関数の定義)**.** Φ を Young 関数とし，その左導関数を φ とする．φ の左逆関数を ψ とする．関数 $\widetilde{\Phi}$ を

$$\widetilde{\Phi}(t) := \int_0^t \psi(u)du \qquad (0 \le t < \infty) \tag{2.4}$$

によって定義する．このとき $\widetilde{\Phi}$ もまた Young 関数となり，Φ の共役 Young 関数と呼ばれる．

Young 関数に関しての基本的な性質をいくつか補題の形で述べておく．

補題 2.5 (Young の不等式)**.** Φ を Young 関数とし，その共役 Young 関数を $\widetilde{\Phi}$ とする．このとき次の不等式

$$ab \le \Phi(a) + \widetilde{\Phi}(b) \qquad (a \ge 0, b \ge 0) \tag{2.5}$$

が成立する．また，不等式 (2.5) において等号が成立するのは，$b = \varphi(a)$ または $a = \psi(b)$ のときである．ここで φ, ψ はそれぞれ $\Phi, \widetilde{\Phi}$ の左導関数である．

補題 2.6. Φ を Young 関数とし，その共役 Young 関数を $\widetilde{\Phi}$ とする．このとき，次の不等式が成立する．

$$\Phi(a) + \Phi(b) \le \Phi(a+b) \qquad (0 \le a, b < \infty), \tag{2.6}$$

$$\Phi^{-1}(a+b) \le \Phi^{-1}(a) + \Phi^{-1}(b) \qquad (0 \le a, b < \infty), \tag{2.7}$$

$$\widetilde{\Phi}\left(\frac{\Phi(a)}{a}\right) \le \Phi(a)\,, \qquad (0 < a < \infty), \tag{2.8}$$

$$a \le \Phi^{-1}(a)\widetilde{\Phi}^{-1}(a) \le 2a, \qquad (0 < a < \infty). \tag{2.9}$$

ここで，Φ^{-1} は Φ の逆関数で，

$$\Phi^{-1}(s) := \inf\{t > 0 : \Phi(t) > s\} \qquad (0 \le s < \infty) \tag{2.10}$$

により定義される．$\widetilde{\Phi}^{-1}$ も同様の意味での $\widetilde{\Phi}$ の逆関数である．

次に Orlicz クラス （Orlicz class)， Orlicz 空間 (Orlicz space) の定義を与える．ここでは関数はすべて n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ 上で定義された実数値関数とする．

定義 2.7 (Orlicz クラスの定義)**.** Φ を Young 関数とし， $\alpha > 0$ とする． $\mathbb{R}^n$ 上で定義された実数値関数で

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\alpha|f(x)|)dx < \infty \tag{2.11}$$

となる f の集合を $\Phi(\alpha L)$ で表し，Orlicz クラスと呼ぶ．この Orlicz クラスは階位空間を定義する際に重要な役割を果たす．

定義 2.8 (Orlicz 空間の定義)**.** Φ を Young 関数とする． Orlicz 空間 $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ は

$$L^\Phi(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{0<\alpha<\infty} \Phi(\alpha L) \tag{2.12}$$

によって定義される．すなわち，関数 f が $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ に属するとは，$0 < \alpha < \infty$ を十分小さく選んだとき， (2.11) が成立するようにできることを意味する．

Orlicz 空間 $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ は次に述べるノルムを導入することにより Banach 空間にすることができる．まずはじめに Luxemburg-Nakano ノルムを定める．このノルムは Nakano [10] (1950), Luxemburg [8] (1955) の中で導入された．

定義 2.9 (Luxemburg-Nakano ノルムの定義)**.** Φ を Young 関数とする． $f \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$||f||_{L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{1}{\lambda}|f(x)|\right) dx \leq 1\right\} \tag{2.13}$$

と定める．これを f の Luxemburg-Nakano ノルムとよぶ．略して L-N ノルムとよぶことにする．

L-N ノルムに関しては，次の Hölder の不等式が成り立つ．

定理 2.10 (Hölder の不等式)**.** Φ を Young 関数，Φ の共役 Young 関数を $\widetilde{\Phi}$ とするとき

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx\right| \leq 2||f||_{L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)}||g||_{L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^n)} \tag{2.14}$$

がすべての $f \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$，$g \in L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^n)$ について成立する．

一般化された Orlicz 空間における Hölder の不等式の拡張について後の節で説明する．この Hölder の不等式をヒントにして，次の Orlicz ノルムが与えられる．

定義 2.11 (Orlicz ノルムの定義)**.** Φ を Young 関数，その共役 Young 関数を $\widetilde{\Phi}$ とする．$f \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ の Orlicz ノルム $||f||_{\Phi(\mathbb{R}^n)}$ を次のように定義する．

$$||f||_{\Phi(\mathbb{R}^n)} := \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx : \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\Phi}(|g(x)|)dx \leq 1\right\}. \tag{2.15}$$

実際に，(2.15) で定義された $||f||_{\Phi(\mathbb{R}^n)}$ はノルムになることを示すことができる．また，L-N ノルムとの関係については次の同値性を示す不等式が成立する．

定理 2.12. Φ を Young 関数とする．$f \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ とするとき，f の L-N ノルム $||f||_{L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)}$ と Orlicz ノルム $||f||_{\Phi(\mathbb{R}^n)}$ との間に次の不等式が成り立つ．

$$||f||_{L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)} \leq ||f||_{\Phi(\mathbb{R}^n)} \leq 2||f||_{L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.16}$$

3. L-N ノルムでの関数列の収束とその意味について

Young 関数 Φ が $\Phi(t) = t^p, (0 \leq t < \infty, 1 \leq p < \infty)$ のとき，この Young 関数についての $f \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ の L-N ノルムは次のように計算できる．

$$\begin{aligned} ||f||_{L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)} &= \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{1}{\lambda}|f(x)|\right) dx \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{\lambda > 0 : \left\{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \lambda\right\} = ||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

となり，よって $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ となる．このとき $L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ の関数列 $\{f_j : j \geq 1\}$ が $f \in L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ に L-N ノルムで収束するとは，まさに

$$||f_j - f||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \qquad (j \to \infty)$$

を意味する．すなわち積分を使った表現

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x) - f(x)|^p dx \to 0 \qquad (j \to \infty)$$

が成り立つことと同値となる．

このとき，次のことが問題となる．一般の Young 関数 Φ の場合に，L-N ノルムでの関数列の収束と積分表現との間にどのような関係があるか．まずはじめに Orlicz 空間 $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ の閉部分空間 $M^\Phi(\mathbb{R}^n)$ の定義を与える．

定義 3.1 ($M^\Phi(\mathbb{R}^n)$ 空間の定義)**.** Φ を Young 関数とする．関数 f が $M^\Phi(\mathbb{R}^n)$ に属するとは，任意の正数 $\alpha > 0$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\alpha|f(x)|dx < \infty \tag{3.1}$$

が成り立つこととする．

上のように定義された空間 $M^\Phi(\mathbb{R}^n)$ は Orlicz 空間 $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ の閉部分空間となることが分かっている．$M^\Phi(\mathbb{R}^n)$ の関数列の L-N ノルムでの収束について次の必要十分条件が成り立つ．L-N ノルムと積分表現の関係を示す一つの結果である．

定理 3.2. Φ を Young 関数とし，関数列 $\{f_\ell : \ell \geq 1\}$，f_0 はすべて $M^\Phi(\mathbb{R}^n)$ に属するものとする．このとき，

$$\lim_{\ell\to\infty} ||f_\ell - f_0||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = 0 \tag{3.2}$$

が成り立つための必要十分条件は，任意の $\alpha > 0$ （どんな大きな α）に対しても，

$$\lim_{\ell\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\alpha|f_\ell(x) - f_0(x)|)dx = 0 \tag{3.3}$$

が成立することである．

証明. はじめに，(3.3) を仮定して (3.2) が成立することを示す．任意に $\varepsilon > 0$ を与える．自然数 $m_0 \in \mathbb{N}$ を十分大きくとって，

$$0 < \frac{1}{2^{m_0}} < \varepsilon \tag{3.4}$$

となるようにしておく．$\widetilde{\Phi}$ を Φ の共役 Young 関数とする． また $g \in L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^n)$ を，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\Phi}(|g(x)|)dx \leq 1 \tag{3.5}$$

をみたす任意の関数とする．ここで $\rho(g, \widetilde{\Phi})$ により

$$\rho(g, \widetilde{\Phi}) := \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\Phi}(|g(x)|)dx \tag{3.6}$$

を表すものとする．このとき Young の不等式 (2.5) により

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} \{f_\ell(x) - f_0(x)\}g(x)dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} 2^{m_0}|f_\ell(x) - f_0(x)| \cdot 2^{-m_0}|g(x)|dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \{\Phi(2^{m_0}|f_\ell(x) - f_0(x)|) + \widetilde{\Phi}(2^{-m_0}|g(x)|)\}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(2^{m_0}|f_\ell(x) - f_0(x)|)dx + \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\Phi}(2^{-m_0}|g(x)|)dx
\end{aligned}$$

が得られる．ここで $\widetilde{\Phi}$ の凸性と $0<\dfrac{1}{2^{m_0}}<1$ によって，(3.5) より

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{\Phi}(2^{-m_0}|g(x)|)dx\le\frac{1}{2^{m_0}}\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{\Phi}(|g(x)|)dx\le\frac{1}{2^{m_0}}$$

となる．よって

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\{f_\ell(x)-f_0(x)\}g(x)dx\right|\le\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(2^{m_0}|f_\ell(x)-f_0(x)|)dx+\frac{1}{2^{m_0}}$$

が得られ，(3.4) より $0<\frac{1}{2^{m_0}}<\varepsilon$ だらか

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\{f_\ell(x)-f_0(x)\}g(x)dx\right|\le\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(2^{m_0}|f_\ell(x)-f_0(x)|)dx+\varepsilon\qquad(\ell\ge1)$$

が，$\rho(g,\widetilde{\Phi})=\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{\Phi}(|g(x)|)dx\le1$ をみたすすべての $g\in L^{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{R}^n)$ について成り立つ．よってこの g に関して sup をとることにより，Orlicz ノルムの定義式 (2.15) より

$$||f_\ell-f_0||_{\Phi(\mathbb{R}^n)}\le\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(2^{m_0}|f_\ell(x)-f_0(x)|)dx+\varepsilon$$

が得られる．ここで $\ell\to\infty$ とすると，仮定の (3.3) より

$$\lim_{\ell\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(2^{m_0}|f_\ell(x)-f_0(x)|)dx=0$$

となるので，

$$\overline{\lim_{\ell\to\infty}}\,||f_\ell-f_0||_{\Phi(\mathbb{R}^n)}\le\varepsilon$$

が成立する．$\varepsilon>0$ は任意であったから，

$$\lim_{\ell\to\infty}||f_\ell-f_0||_{\Phi(\mathbb{R}^n)}=0$$

が示された．Orlicz ノルムと L-N ノルムの同値性を示す定理 2.12 より

$$\lim_{\ell\to\infty}||f_\ell-f_0||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}=0$$

となり，(3.2) が示された．

逆に (3.2) を仮定して (3.3) を示す．関数列 $\{f_\ell:\ell\ge1\}$，f_0 は共に $M^\Phi(\mathbb{R}^n)$ に属し，

$$\lim_{\ell\to\infty}||f_\ell-f_0||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}=0$$

が成り立つと仮定する．このとき (3.3) が任意の $\alpha>0$ について成立することを示す．そこで $\alpha>0$ を任意に与える．この α を固定する．このとき十分大きな正の整数 $\ell_0\in\mathbb{N}$ が存在して，$\ell\ge\ell_0$ ならば

$$||\alpha(f_\ell-f_0)||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}\le1\tag{3.7}$$

が成り立つようにできる．L-N ノルムについてのよく知られた結果より，$\ell\ge\ell_0$ のとき (3.7) より

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\alpha|f_\ell(x)-f_0(x)|)dx\le||\alpha(f_\ell-f_0)||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}=\alpha||(f_\ell-f_0)||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}\tag{3.8}$$

となる．よって (3.2) と (3.8) より

$$\overline{\lim_{\ell\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\alpha|f_\ell(x)-f_0(x)|)dx\le\lim_{\ell\to\infty}||\alpha(f_\ell-f_0)||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}=0$$

が得られ，(3.3) が成り立つことが示された． ■

ここで，新たな問題が生まれる．関数列 $\{f_\ell : \ell \geq 1\}$，f_0 が Orlicz 空間 $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ に属するとき，

$$\lim_{\ell\to\infty} ||f_\ell - f_0||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = 0$$

は何を意味するのか．また前の定理 3.2 との違いはどこにあるのか等，気になることも多い．次の結果が成立する．

定理 3.3. Φ を Young 関数とする．関数列 $\{f_\ell : \ell \geq 1\}$ および f_0 は共に $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ に属するものとする．すなわち，

$$f_\ell \in L^\Phi(\mathbb{R}^n) \quad (1 \leq \ell < \infty), \quad f_0 \in L^\Phi(\mathbb{R}^n).$$

このとき，

$$\lim_{\ell\to\infty} ||f_\ell - f_0||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = 0 \tag{3.9}$$

が成り立つための必要十分条件は，任意の $\alpha \geq 1$ に対して，十分大きな正の整数 $\ell_0 = \ell_0(\alpha) \in \mathbb{N}$ が存在して，$\ell \geq \ell_0$ ならば

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\alpha|f_\ell(x) - f_0(x)|)dx < \infty \qquad (\ell_0 \leq \ell), \tag{3.10}$$

および，

$$\lim_{\ell\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\alpha|f_\ell(x) - f_0(x)|)dx = 0 \tag{3.11}$$

が成立することである．

証明は前定理の証明とほぼ同様にできるので，ここでは省略する．

4. Orlicz 空間は L^p 空間とどのように違うのか

Orlicz 空間は L^p 空間の一つの拡張であるから，L^p 空間での結果を Orlicz 空間で考察するのはごく自然なことのように思われる．しかし単純な拡張といかない場合が多い．Orlicz 空間と L^p 空間との差異を理解しておくことは重要である．本質的な違いを示す例を示しておく．

Young 関数 Φ が Δ_2-条件を満足しない場合には，Orlicz 空間はきわめて複雑な空間となる．その一つの例として，Orlicz 空間に値を持つ強可測でない関数を具体的に構成しよう． Δ_2-条件を満足しないことが密接に関係している．まず Δ_2-条件の定義を与えておく．

定義 4.1 (Δ_2-条件の定義)．Young 関数 Φ が十分大きな t について Δ_2-条件を満足するとは，正の定数 $D > 1$ と $t_0 > 1$ が存在して

$$\Phi(2t) \leq D\Phi(t) \qquad (t_0 \leq t < \infty)$$

がすべての $t \geq t_0$ について成立することと定める．

ここでは，数直線上の閉区間 $[a, b]$ 上で定義され，ひとつの Banach 空間 $\mathcal{X}$ に値を持つ関数 $f(t)$ を考える． はじめに強可測，弱可測の定義を与える．

定義 4.2 (階段関数の定義)． 関数 $f(t)$ を閉区間 $[a,b]$ で定義され，Banach 空間 $\mathcal{X}$ の値をとるものとする．閉区間 $[a,b]$ が互いに共通点のない有限個の可測集合 $A_1, A_2, \cdots A_m$ の和として $[a,b] = \cup_{j=1}^{m} A_j$ と表され，各 A_j の上で $f(t)$ が一定の値をとるとき，$f(t)$ を階段関数という

定義 4.3 (強可測関数の定義)．閉区間 $[a,b]$ で定義され，Banach 空間 $\mathcal{X}$ に値を持つ関数 $f(t)$ が階段関数の列 $\{f_j : j \geq 1\}$ により $[a,b]$ 上でほとんど至る所

$$\lim_{j\to\infty} f_j(t) = f(t) \quad (\text{強}) \tag{4.1}$$

と表されるならば，$f(t)$ は強可測であるという．ここで (4.1) の意味は，$||\cdot||$ を $\mathcal{X}$ でのノルムとするとき，

$$\lim_{j\to\infty} ||f_j(t) - f(t)|| = 0 \tag{4.2}$$

となることを意味するものである．

定義 4.4 (弱可測関数の定義)．Banach 空間 $\mathcal{X}$ の共役空間を $\mathcal{X}^*$ で表す．$\mathcal{X}^*$ の任意の元 Λ に対して，実数値関数 $\Lambda(f(t))$ が可測であるとき，$f(t)$ は弱可測であるという．

補題 4.5. 次の結果が成り立つ．

(4.3) 強可測関数ならば弱可測関数である．

(4.4) 関数 $f(t)$ が強可測ならば，$||f(t)||$ は可測である．逆は一般に正しくない．

さて，Orlicz 空間に値を持つ強可測でない関数の例を具体的に構成しよう．Young 関数 Φ は次の条件を満足するものとする．ある正の定数 $t_0 > 1$ が存在して，

$$0 < \Phi(t) < \infty \qquad \text{for all} \quad t_0 < t < \infty \tag{4.5}$$

をみたすものとする．更に $t \uparrow \infty$ で Δ_2 条件を満足しないものとする．このとき，次のような性質を持つ数列 $\{t_j : j \geq 1\}$ を選び出すことができる．

$$1 < t_0 < t_1 < \cdots < t_j < \cdots, \qquad \lim_{j\to\infty} t_j = \infty, \tag{4.6}$$

$$\Phi\left(\left(\frac{j+1}{j}\right) t_j\right) > j\Phi(t_j) > j(2^j)^n \qquad (j \geq 1). \tag{4.7}$$

次に，$0 < t \leq 1$ を任意に与えて固定する． $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $E_{j,t} \subseteq \mathbb{R}^n$ を以下の性質を持つように選ぶ．$\{E_{j,t} : j \geq 1\}$ は互いに共通点をもたない (disjoint) ．更に

$$|E_{j,t}| = \frac{t}{j(j+1)\Phi(t_j)} > 0 \tag{4.8}$$

をみたす．又，$0 < t' < t \leq 1$ のとき，

$$E_{j,t'} \subsetneqq E_{j,t} \qquad j = 1, 2, \cdots \tag{4.9}$$

をみたすように選ぶ．数列 $\{t_j : j \geq 1\}$ と集合列 $\{E_{j,t} : j \geq 1\}$ を用いて関数 $f(t,x)$ を次のように定める．

$$f(t,x) := \sum_{j=1}^{\infty} t_j \chi_{E_{j,t}}(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.10}$$

ここで関数 $f(t,x)$ を略して $f(t)$ とも書く．又，$t=0$ のとき $f(0)=0$ と定めておく．このとき次のことが成立する．

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(t,x)|)dx = t \leq 1, \tag{4.11}$$

$0<\varepsilon<1$ の任意の ε に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi((1+\varepsilon)|f(t,x)|)dx = +\infty \tag{4.12}$$

が成り立ち，

$$||f(t)||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = 1 \tag{4.13}$$

が成立する．念のため (4.11), (4.12) 及び (4.13) を示しておく．$0<t\leq 1$ を任意に固定する．集合族 $\{E_{j,t} : j \geq 1\}$ は互いに共通点を持たないから，(4.8) 及び (4.10) より

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(|f(t,x)|)dx &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_{j,t}} \Phi(|f(t,x)|)dx = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(t_j)|E_{j,t}| \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(t_j) \cdot \frac{t}{j(j+1)\Phi(t_j)} = t\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} \\
&= t\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = t\cdot 1 = t \leq 1
\end{aligned}$$

となり，(4.11) が得られた．

次に，(4.12) を示す．$0<\varepsilon<1$ をみたす ε を任意に与える．

$$\lim_{j\to\infty} \frac{j+1}{j} = 1$$

だから，十分大きな自然数 $j_0 \in \mathbb{N}$ を選んで，$j \geq j_0$ ならば，

$$1+\varepsilon > \frac{j+1}{j} > 1 \tag{4.14}$$

とできる．よって (4.6)，(4.8)，(4.10) 及び (4.14) より

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Phi((1+\varepsilon)|f(t,x)|)dx &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_{j,t}} \Phi((1+\varepsilon)|f(t,x)|)dx = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi((1+\varepsilon)t_j)|E_{j,t}| \\
&\geq \sum_{j=j_0}^{\infty} \Phi((1+\varepsilon)t_j)|E_{j,t}| \geq \sum_{j=j_0}^{\infty} \Phi\left(\frac{j+1}{j}t_j\right)|E_{j,t}| \\
&\geq \sum_{j=j_0}^{\infty} j\Phi(t_j)|E_{j,t}| = \sum_{j=j_0}^{\infty} j\Phi(t_j) \cdot \frac{t}{j(j+1)\Phi(t_j)} \\
&= \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{t}{j+1} = \infty
\end{aligned}$$

となり，(4.12) が示された．

(4.13) の $||f(t)||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = 1$ を示す．(4.11) より $||f(t)||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ が成り立つ．実際に等号 $||f(t)||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = 1$ が成り立つことを以下で示す．そこで，もし

$$||f(t)||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} < 1 \tag{4.15}$$

であったと仮定して矛盾を出す．(4.15) より十分小さな正数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して

$$(1+\varepsilon_0)||f(t)||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} \leq 1 \tag{4.16}$$

が成り立つようにできる．ノルムの性質より (4.16) から

$$||(1+\varepsilon_0)f(t)||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = (1+\varepsilon_0)||f(t)||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} \leq 1$$

となる．すでに何度も利用した結果より，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi((1+\varepsilon_0)|f(t,x)|)dx \leq 1 < \infty$$

となり，これは (4.12) に矛盾する．よって (4.13) が示された．

さて，測度空間 Ω を $\Omega = [0,1]$ とする．各 $0 < t \leq 1$ に対して (4.10) で定義される $f(t) \in L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ を対応させるとき，$f(t)$ は Banach 空間である Orlicz 空間 $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ に値をとる関数となる．次に補題を与えておく．

補題 4.6. $0 < t' < t \leq 1$ とする．このとき，

$$||f(t) - f(t')||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = 1 \tag{4.17}$$

が成り立つ．

証明 集合 $\{E_{j,t} : j \geq 1\}$, $\{E_{j,t'} : j \geq 1\}$ は (4.9) より次の包含関係を持つ．$E_{j,t'} \subseteq E_{j,t}$, $(j \geq 1)$.

このとき，関数 $f(t)$ は (4.10) のように表されるので，

$$f(t') = f(t',x) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j \chi_{E_{j,t'}}(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.18}$$

$$f(t) = f(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j \chi_{E_{j,t}}(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.19}$$

と表される．ここで，集合 $E_{j,t'}$, $E_{j,t}$ は (4.9) より， $0 < t' < t \leq 1$ について

$$E_{j,t'} \subseteq E_{j,t} \qquad j \geq 1 \tag{4.20}$$

であって，また (4.8) より

$$\begin{aligned} |E_{j,t} - E_{j,t'}| &= |E_{j,t}| - |E_{j,t'}| \\ &= \frac{t}{j(j+1)\Phi(t_j)} - \frac{t'}{j(j+1)\Phi(t_j)} = \frac{t-t'}{j(j+1)\Phi(t_j)} > 0. \end{aligned} \tag{4.21}$$

よって， (4.18), (4.19) 及び (4.20) により

$$\begin{aligned} f(t) - f(t') &= \sum_{j=1}^{\infty} t_j \chi_{E_{j,t}}(x) - \sum_{j=1}^{\infty} t_j \chi_{E_{j,t'}}(x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} t_j (\chi_{E_{j,t}}(x) - \chi_{E_{j,t'}}(x)) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j \chi_{E_{j,t} \setminus E_{j,t'}}(x) \end{aligned}$$

となり

$$f(t)-f(t')=\sum_{j=1}^{\infty}t_j\chi_{E_{j,t}\setminus E_{j,t'}}(x)\qquad x\in\mathbb{R}^n \tag{4.22}$$

が成り立つことが分かった．よって (4.21) 及び (4.22) より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(|f(t)-f(t')|)dx&=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_{j,t}\setminus E_{j,t'}}\Phi(|f(t)-f(t')|)dx\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\Phi(t_j)|E_{j,t}\setminus E_{j,t'}|=\sum_{j=1}^{\infty}\Phi(t_j)\cdot\frac{t-t'}{j(j+1)\Phi(t_j)}\\&=(t-t')\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+1)}=(t-t')\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)=t-t'\end{aligned}$$

となり，

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(|f(t)-f(t')|)dx=t-t'<1 \tag{4.23}$$

が得られた．よってよく知られた結果より

$$||f(t)-f(t')||_{L^{\Phi}(\mathbb{R}^n)}\leq 1 \tag{4.24}$$

が成り立つ．一方，$0<\varepsilon<1$ の任意の正数 ε に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi((1+\varepsilon)|f(t)-f(t')|)dx=+\infty \tag{4.25}$$

が成り立つ．(4.25) の証明は (4.12) の証明とほとんど同様であるが，念のため与えておく．(4.22) より

$$f(t)-f(t')=\sum_{j=1}^{\infty}t_j\chi_{E_{j,t}\setminus E_{j,t'}}(x)\qquad x\in\mathbb{R}^n$$

であった．よって

$$\begin{aligned}I:=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi((1+\varepsilon)|f(t)-f(t')|)dx&=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_{j,t}\setminus E_{j,t'}}\Phi((1+\varepsilon)|f(t)-f(t')|)dx\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\Phi((1+\varepsilon)t_j)|E_{j,t}\setminus E_{j,t'}|\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\Phi((1+\varepsilon)t_j)\cdot\frac{t-t'}{j(j+1)\Phi(t_j)}\end{aligned}$$

となる．$1+\varepsilon>1$ より十分大きな自然数 $j_o\in\mathbb{N}$ を選んで

$$j\geq j_0\qquad\text{ならば}\qquad 1+\varepsilon>\frac{j+1}{j}>1$$

が成り立つようにできる．よって (4.7) より

$$I \geq \sum_{j=j_0}^{\infty} \Phi((1+\varepsilon)t_j) \cdot \frac{t-t'}{j(j+1)\Phi(t_j)} \geq \sum_{j=j_0}^{\infty} \Phi\left(\frac{j+1}{j}t_j\right) \cdot \frac{t-t'}{j(j+1)\Phi(t_j)}$$
$$\geq \sum_{j=j_0}^{\infty} j \cdot \Phi(t_j) \cdot \frac{t-t'}{j(j+1)\Phi(t_j)} = (t-t') \cdot \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{1}{j+1} = +\infty$$

となり　(4.25) が示された．

最後に (4.17) の $||f(t)-f(t')||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = 1$ を示す．この証明も (4.13) の $||f(t)||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = 1$ の証明と同様であるが，念のため与えておく．(4.24) より，$||f(t)-f(t')||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ がすでに分かっている．もし $||f(t)-f(t')||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} < 1$ であると仮定してみる．このとき十分小さな正数 ε_0 を選んで

$$(1+\varepsilon_0)||f(t)-f(t')||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} \leq 1$$

が成り立つようにできる．このときノルムの性質より，

$$||(1+\varepsilon_0)(f(t)-f(t'))||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = (1+\varepsilon_0)||f(t)-f(t')||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} \leq 1$$

となる．よって，よく知られた事実より，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi((1+\varepsilon)|f(t)-f(t')|)dx \leq 1$$

となる．よってこれは (4.25) に矛盾する．よって $||f(t)-f(t')||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)} = 1$ となり，(4.17) が示された． ■

さて，$f(t)$ が強可測であるかどうかを調べるために重要な概念を次の定義で与える．

定義 4.7 (可分値的の定義)**.** $\Omega = [0,1]$ 上で定義され，Orlicz 空間 $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ に値をとる関数 $f(t)$ に対して，$L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ の可分な閉部分空間 F が存在して，Ω のほとんどすべての t について $f(t) \in F$ となるとき，$f(t)$ は可分値的であるという．

次の結果が知られている （田辺 [14]，p. 153 参照）．

命題 4.8 (Pettis)**.** $f(t)$ は $\Omega = [0,1]$ 上で定義され Banach 空間 $\mathcal{X}$ に値をとる関数とする．このとき $f(t)$ が強可測となるための必要十分条件は

(4.26)　　$f(t)$ は弱可測

であり，かつ

(4.27)　　$f(t)$ は可分値的

となることである．

定理 4.9. (4.10) で定義された関数

$$f(t) = f(t,x) := \sum_{j=1}^{\infty} t_j \chi_{E_{j,t}}(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

は $\Omega = [0,1]$ 上で定義され，Orlicz 空間 $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ に値をとる関数として強可測ではない．

証明. 命題 4.8 により，(4.10) の $f(t)$ が可分値的でないことを示せばよい．$f(t)$ が可分値的だと仮定してみて矛盾を出す．もし $f(t)$ が可分値的だとするとき，$L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ の可

分な閉部分空間 F が存在して，$\Omega=[0,1]$ のほとんどすべての t について $f(t)\in F$ が成り立つ．

$$\Omega_1:=\{t\in\Omega : f(t)\in F\} \tag{4.28}$$

とする．ほとんどすべての $t\in\Omega$ について $f(t)\in F$ となるので，$|\Omega_1|=1$ となり，よって Ω_1 は可算集合ではない．

又，F は可分だから，F で稠密な可算部分集合が存在する．それを A とおく．すなわち $A\subset F$ は可算集合で $\overline{A}=F$ が成り立つ．$t\in\Omega_1$ に対して

$$U\Big(f(t),\frac{1}{2}\Big):=\Big\{f\in L^\Phi(\mathbb{R}^n) : ||f(t)-f||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}<\frac{1}{2}\Big\} \tag{4.29}$$

とおく． $f(t)\in F$ であり，F の中に A の元が稠密に含まれているので，$g_t\in A$ で $g_t\in U\big(f(t),\frac{1}{2}\big)$ をみたす g_t を選ぶことができる．すなわち，

$$||g_t-f(t)||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}<\frac{1}{2}\qquad g_t\in A. \tag{4.30}$$

ここで，$t\in\Omega_1$ に対して (4.30) をみたす g_t を一つ対応させる．この対応は Ω_1 から A の中への 1 対 1 対応となる．実際，$0<t_1<t_2\le 1$ で t_1, t_2 はともに Ω_1 の要素とする．このとき $f(t_1)\in F$, $f(t_2)\in F$ となり，更に (4.29) で定めたように $U\big(f(t_1),\frac{1}{2}\big)$, $U\big(f(t_2),\frac{1}{2}\big)$ を与える．すなわち

$$U\Big(f(t_1),\frac{1}{2}\Big):=\Big\{f\in L^\Phi(\mathbb{R}^n) : ||f(t_1)-f||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}<\frac{1}{2}\Big\}$$

$$U\Big(f(t_2),\frac{1}{2}\Big):=\Big\{f\in L^\Phi(\mathbb{R}^n) : ||f(t_2)-f||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}<\frac{1}{2}\Big\}$$

とおく．ここで 補題 4.6 の (4.17) より

$$||f(t_1)-f(t_2)||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}=1 \tag{4.31}$$

となる．よって (4.31) より $U\big(f(t_1),\frac{1}{2}\big)\cap U\big(f(t_2),\frac{1}{2}\big)=\emptyset$ となる．

次に $f(t_1)$, $f(t_2)$ の各々に対して， (4.30) をみたす g_{t_1}，g_{t_2} を選んでおく．すなわち，g_{t_1}，$g_{t_2}\in A$ で，

$$||g_{t_1}-f(t_1)||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}<\frac{1}{2},\qquad ||g_{t_2}-f(t_2)||_{L^\Phi(\mathbb{R}^n)}<\frac{1}{2} \tag{4.32}$$

が成り立つ．よって (4.31)，(4.32) より $g_{t_1}\neq g_{t_2}$ となる．よって対応 $\Omega_1\ni t\to g_t\in A$ は 1 対 1 である．集合 A が可算集合であるから，Ω_1 も可算集合となり，Ω_1 が連続体の濃度を持つことに矛盾する．よって $f(t)$ は可分値的ではない．命題 4.8 より強可測でないことが分かった． ■

5. 一般化された Orlicz 空間，弱 Orlicz 空間について

これまでの節での Orlicz 空間 $L^\Phi(\Omega)$ においては，Orlicz 空間を構成する Young 関数 Φ には凸性が仮定されていた．この節ではこの凸性の仮定をせずに，より一般的な関数 Φ により構成される Orlicz 空間を考える．ここからは，Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域とする．

はじめに，Young 関数の一般化の一つとしての φ-関数の定義を与える．

定義 5.1 (φ-関数の定義). 関数 $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ が φ-関数であるとは，次の性質が成り立つこととする．

$(P1)$ すべての $0 < t < \infty$ について，$0 < \Phi(t) < \infty$　であり，
$(P2)$ $[0,\infty)$ 上で真に単調増加な連続関数であり，
$(P3)$ $\lim_{t\to+0} \Phi(t) = \Phi(0) = 0$ 及び $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$ をみたす．

一般化された Orlicz 空間を定義する前に modular につて説明しておく．

定義 5.2 (modular の定義). 汎関数 $\rho : L^0(\Omega) \to [0,\infty]$ が modular であるとは，次の性質が成り立つこととする．ここで $L^0(\Omega)$ は Ω 上の可測関数全体の集合を表す．

$(M1)$ $\rho(f) = 0 \iff f = 0$;
$(M2)$ $\rho(-f) = \rho(f)$;
$(M3)$ $\rho(\alpha f + \beta g) \le \rho(f) + \rho(g)$ が，すべての $f, g \in L^0(\Omega)$ と $\alpha, \beta \ge 0$, $\alpha + \beta = 1$ をみたす α, β について成り立つ．

φ-関数 Φ によって構成される一般化された Orlicz 空間 $L^\Phi(\Omega)$ を定義すのに必要となる modular ρ_Φ の定義からはじめる．一つの補題の形で与えておく．

補題 5.3 (modular ρ_Φ の定義). Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域とする．μ は $\mathbb{R}^n$ 上の Lebesgue 測度とする． Φ を φ-関数とし Φ によって定められる汎関数 ρ_Φ を

$$\rho_\Phi(f) := \int_\Omega \Phi\left(|f(x)|\right) d\mu \tag{5.1}$$

によって定義する．この汎関数 ρ_Φ は定義 5.2 の modular の性質をすべて満足する．

定義 5.4 (一般化された Orlicz 空間の定義). Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域とする．Φ を φ-関数とする．一般化された Orlicz 空間 $L^\Phi(\Omega)$ を

$$L^\Phi(\Omega) := \{f : \rho_\Phi(\varepsilon_0 f) < \infty \quad \text{for some } \varepsilon_0 > 0\} \tag{5.2}$$

で定義する．

一般化された Orlicz 空間 $L^\Phi(\Omega)$ は通常，次に述べる F-ノルム $\|f\|_{\rho_\Phi}$ によって考察されてきた． Maligranda [9]，Rao and Ren [12] が参考になる． F-ノルムの定義を与えておく．

定義 5.5 (F-ノルムの定義). Φ を φ-関数とし，一般化された Orlicz 空間を $L^\Phi(\Omega)$ とする．任意の $f \in L^\Phi(\Omega)$ に対して

$$\|f\|_{\rho_\Phi} := \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_\Phi\left(\frac{1}{\lambda} f\right) \le \lambda\right\} \tag{5.3}$$

とおく．

補題 5.6. 実際に上で定義された $\|f\|_{\rho_\Phi}$ は F-ノルムの性質を持つ．すなわち

$(F1)$ $0 \le \|f\|_{\rho_\Phi} < \infty$ で，$\|f\|_{\rho_\Phi} = 0 \iff f = 0$;
$(F2)$ $\|-f\|_{\rho_\Phi} = \|f\|_{\rho_\Phi} \qquad (f \in L^\Phi(\Omega))$;
$(F3)$ $\|f+g\|_{\rho_\Phi} \le \|f\|_{\rho_\Phi} + \|g\|_{\rho_\Phi} \qquad (f, g \in L^\Phi(\Omega))$;
$(F4)$ $\alpha_j \to \alpha_0$ で $\|f_j - f_0\|_{\rho_\Phi} \to 0$，$(f_0, f_j \in L^\Phi(\Omega))$ ならば $\|\alpha_j f_j - \alpha_0 f_0\|_{\rho_\Phi} \to 0$ が成り立つ．ここで，α_j, α_0 は実数である．

次に，この F-ノルムに関する一つの応用例として次の結果を述べておく．

定理 5.7. $\Phi_i, (i=1,2,3)$, を φ-関数とする．各 Φ_i によって構成される一般化された Orlicz 空間を $L^{\Phi_i}(\Omega), (i=1,2,3)$, とする．このとき次の (i) ～ (iv) はすべて同値となる．

(i) 十分小さな定数 $0<\alpha<1$，十分大きな定数 $C>0$ および定数 $t_0 \geq 0$ が存在して，

$$\Phi_3(\alpha st) \leq C\{\Phi_1(s)+\Phi_2(t)\} \qquad (s,t \geq t_0) \tag{5.4}$$

がすべての $s,t \geq t_0$ で成立する．

(ii) 十分大きな $C_1>1, C_2>1$ および定数 $u_0 \geq 0$ が存在して，

$$\Phi_1^{-1}(u)\Phi_2^{-1}(u) \leq C_1\Phi_3^{-1}(C_2u) \qquad (u \geq u_0) \tag{5.5}$$

がすべての $u \geq u_0$ で成立する．

(iii) 定数 $M_0 \geq 0$ と $M_1>1$ が存在して

$$\|fg\|_{\rho_{\Phi_3}} \leq M_0 + M_1 \cdot \max\{\|f\|_{\rho_{\Phi_1}}\|g\|_{\rho_{\Phi_2}}, \|f\|_{\rho_{\Phi_1}}+\|g\|_{\rho_{\Phi_2}}\} \tag{5.6}$$

が成り立つ．ただし，$\mu(\Omega)=\infty$ のときは $M_0=0$ とする．

(iv) 次の包含関係が成り立つ．

$$L^{\Phi_2}(\Omega) \subseteq PWM(L^{\Phi_1}(\Omega), L^{\Phi_3}(\Omega)) \tag{5.7}$$

ここで，$g \in L^0(\Omega)$ が $L^{\Phi_1}(\Omega)$ から $L^{\Phi_3}(\Omega)$ への pointwise multiplier であるとは，任意の $f \in L^{\Phi_1}(\Omega)$ ついて $fg \in L^{\Phi_3}(\Omega)$ が成り立つこととし，この g の全体の集合を $PWM(L^{\Phi_1}(\Omega), L^{\Phi_3}(\Omega))$ で表す．

ここで，一つの注意を与えておく．$\mu(\Omega)=\infty$ のときは (i) では $t_0=0$ とし，(ii) では $u_0=0$ として考えることになる．

これまでの説明からも分かるように，F-ノルムはすべての φ-関数について定義が可能である．すなわち φ-関数すべてについて統一的な議論が可能になる．しかし直前の定理の (5.6) の不等式は満足できるものではないように感じる．別のアプローチを考えてみる．Kawasumi R. and Nakai E. [4] は Young 関数から構成される弱 Orlicz 空間に quasi-ノルムを導入することで興味深い結果を得ている．この考え方を応用することで一般化された Orlicz 空間に quasi-ノルムを導入し上述の定理の結果を再度検討することとする．そのためには，φ-関数に Δ_0-条件を課す必要が生ずる．全ての φ でとは行かないようである．Δ_0-条件の定義を与えておく．

定義 5.8 (Δ_0-条件の定義)**.** Φ を φ-関数とする．Φ が Δ_0-条件を満足するとは，

$$\lim_{a \to +0} \sup_{t>0} \frac{\Phi(at)}{\Phi(t)} = 0 \tag{5.8}$$

が成り立つこととする．

Δ_0-条件を満足する例を与えておく．φ-関数 Φ が s-convex $0<s\leq 1$ であるとは，

$$\Phi(\alpha t_1+\beta t_2) \leq \alpha^s\Phi(t_1)+\beta^s\Phi(t_2) \qquad (t_1,t_2 \geq 0) \tag{5.9}$$

が，$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha^s+\beta^s=1$ をみたす任意の α, β と $t_1, t_2 \geq 0$ について成立することと定める．特に $s=1$ のときは通常の凸 (convex) 関数を意味する．この s-convex 関数は Δ_0-条件を満足する．よって $\Phi(t)=t^p, (0<p<\infty)$ は Δ_0-条件を満足する．しかし，$\Phi(t)=\log(1+t)$ は Δ_0-条件を満足しない．

ここで， $L^0(\Omega)$ 上の汎関数 $||f||_{L^\Phi(\Omega)}$ を次のように定義する．

定義 5.9. Φ を φ-関数とする．$f \in L^0(\Omega)$ について $||f||_{L^\Phi(\Omega)}$ を

$$||f||_{L^\Phi(\Omega)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \rho_\Phi\left(\frac{1}{\lambda}f\right) \leq 1\right\} \tag{5.10}$$

で定める．$||f||_{L^\Phi(\Omega)} = \infty$ となる場合も含めて定義されている．

補題 5.10. Φ を φ-関数とする．一般化された Orlicz 空間を $L^\Phi(\Omega)$ とする．このとき

$$f \in L^\Phi(\Omega) \qquad \Longleftrightarrow \qquad ||f||_{L^\Phi(\Omega)} < \infty \tag{5.11}$$

すなわち，すべての $f \in L^\Phi(\Omega)$ について quasi-ノルム $||f||_{L^\Phi(\Omega)}$ の値が有限値として定義ができる．

実際，(5.10) で定義された量 $||\cdot||_{L^\Phi(\Omega)}$ は Δ_0-条件のもとで quasi-ノルムとなる．すなわち，次の結果が得られる．

補題 5.11. Φ を φ-関数とする．一般化された Orlicz 空間を $L^\Phi(\Omega)$ とする．もし Φ が Δ_0-条件を満足するならば，(5.10) で与えられる $||\cdot||_{L^\Phi(\Omega)}$ は quasi-ノルムとなる．すなわち

$(QN1)$ $f \in L^\Phi(\Omega)$ のとき $0 \leq ||f||_{L^\Phi(\Omega)} < \infty$ で，$||f||_{L^\Phi(\Omega)} = 0$ となるのは，$f(x) = 0$ a. e. $x \in \Omega$ のときに限る．

$(QN2)$ $||\alpha f||_{L^\Phi(\Omega)} = |\alpha|||f||_{L^\Phi(\Omega)} \qquad (f \in L^\Phi(\Omega)),\ \alpha \in (-\infty, \infty)$.

$(QN3)$ ある正の定数 $K = K_\Phi$（Φ に依存して決まる）が存在して

$$||f+g||_{L^\Phi(\Omega)} \leq K(||f||_{L^\Phi(\Omega)} + ||f||_{L^\Phi(\Omega)}) \qquad (f, g \in L^\Phi(\Omega)) \tag{5.12}$$

がすべての $f, g \in L^\Phi(\Omega)$ について成り立つ．

次の補題は様々な所で利用される重要な結果である．証明は定義からすぐ分かる．

補題 5.12. Φ を φ-関数とする．$L^\Phi(\Omega)$ を Φ によって構成される一般化された Orlicz 空間とする．$0 \neq f \in L^\Phi(\Omega)$ とする．このとき

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{||f||_{L^\Phi(\Omega)}}|f(x)|\right) d\mu \leq 1 \tag{5.13}$$

が成立する．

quasi-ノルムを持った一般化された Orlicz 空間 $L^\Phi(\Omega)$ の応用の一つとして，Hölder の不等式の一般化について考察する．定理 5.7 と類似の結果が得られる．

定理 5.13. $\Phi_i, (i = 1, 2, 3),$ を φ-関数とし，Δ_0-条件をみたすものとする．各 Φ_i によって構成された一般化された Orlicz 空間を $L^{\Phi_i}(\Omega), (i = 1, 2.3),$ とする．Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域とする．このとき次の (i) ～ (iii) は同値となる．

(i) 十分小さな定数 $0 < \alpha < 1$ および定数 $t_0 \geq 0$ が存在して，

$$\Phi_3(\alpha st) \leq \Phi_1(s) + \Phi_2(t) \qquad (s, t \geq t_0) \tag{5.14}$$

がすべての $s, t \geq t_0$ で成り立つ．

(ii) 十分大きな $C_1 > 1$ および定数 $u_0 \geq 0$ が存在して，

$$\Phi_1^{-1}(u)\Phi_2^{-1}(u) \leq C_1\Phi_3^{-1}(u) \qquad (u \geq u_0) \tag{5.15}$$

がすべての $u \geq u_0$ で成立する．

(iii) 十分大きな定数 $M_0 > 1$ が存在して

$$||fg||_{L^{\Phi_3}(\Omega)} \leq M_0 ||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)} ||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)} \tag{5.16}$$

がすべての $f \in L^{\Phi_1}(\Omega), g \in L^{\Phi_2}(\Omega)$ について成立する．ここで，一つの注意を与えておく．$\mu(\Omega) = \infty$ のときは，(i) において $t_0 = 0$，(ii) では $u_0 = 0$ として考えるものとする．

証明．(i) と (ii) の同値性については，Rao and Ren [12] の中に見出せるが，証明の中に一部正しくない部分を含んでいるので，Kawasumi and Nakai [4] を参照していただきたい．ただしここでは Φ に凸性が仮定されていないので，Δ_0-条件が必要となる．

(i) と (iii) の同値性を示す．はじめに (i) $\Rightarrow$ (iii) を示す．十分小さな定数 $0 < \alpha < 1$ および定数 $t_0 \geq 0$ が存在して (5.14) が成立するものと仮定する．$f \in L^{\Phi_1}(\Omega), g \in L^{\Phi_2}(\Omega)$ を任意に選ぶ．$0 < ||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)} < \infty$ かつ $0 < ||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)} < \infty$ の場合に (iii) を示す．集合 E_1, E_2 を

$$E_1 := \{x \in \Omega : |f(x)| < t_0 ||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)}\}, \qquad E_2 := \{x \in \Omega : |g(x)| < t_0 ||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}\} \tag{5.17}$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi_3 \left(\frac{\alpha |f(x)g(x)|}{||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)} ||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}} \right) d\mu &= \left(\int_{E_1 \cap E_2} + \int_{E_1 \cap E_2^c} + \int_{E_1^c \cap E_2} + \int_{(E_1 \cup E_2)^C} \right) \Phi_3(\quad) d\mu \\ &=: I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned} \tag{5.18}$$

とおく．$\mu(\Omega) = \infty$ のときは $t_0 = 0$ なので，$E_1 = \emptyset, E_2 = \emptyset$ とみなすことができるので，(5.18) の積分は $I_1 = I_2 = I_3 = 0$ となり I_4 のみで，Ω 上での計算のみをすればよい．よってここからは $\mu(\Omega) < \infty, t_0 > 0$ として証明を続ける． まづ I_1 を評価する．

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{E_1 \cap E_2} \Phi_3 \left(\alpha \cdot \frac{|f(x)|}{||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)}} \cdot \frac{|g(x)|}{||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}} \right) d\mu \\ &\leq \int_{E_1 \cap E_2} \Phi_3(\alpha \cdot t_0^2) d\mu \leq \Phi_3(\alpha \cdot t_0^2)\, \mu(\Omega) < \infty \end{aligned}$$

となり

$$I_1 \leq \Phi_3(\alpha \cdot t_0^2)\, \mu(\Omega) < \infty \tag{5.19}$$

が得られる．次に I_2 を評価する． (5.14) および補題 5.12 より

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{E_1 \cap E_2^c} \Phi_3 \left(\alpha \cdot \frac{|f(x)|}{||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)}} \cdot \frac{|g(x)|}{||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}} \right) d\mu \leq \int_{E_1 \cap E_2^c} \Phi_3 \left(\alpha \cdot t_0 \cdot \frac{|g(x)|}{||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}} \right) d\mu \\ &\leq \int_{E_1 \cap E_2^c} \left\{ \Phi_1(t_0) + \Phi_2 \left(\frac{|g(x)|}{||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}} \right) \right\} d\mu \leq \Phi_1(t_0)\mu(\Omega) + \int_\Omega \Phi_2 \left(\frac{|g(x)|}{||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}} \right) d\mu \\ &\leq \Phi_1(t_0)\mu(\Omega) + 1 < \infty \end{aligned}$$

となる．よって

$$I_2 \leq \Phi_1(t_0)\, \mu(\Omega) + 1 < \infty \tag{5.20}$$

が得られる．同様に I_3 を評価すると，

$$I_3 \leq \Phi_2(t_0)\, \mu(\Omega) + 1 < \infty \tag{5.21}$$

が得られる．最後に I_4 を評価しよう．再び (5.14) および補題 5.12 より

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{(E_1\cup E_2)^c} \Phi_3\left(\alpha\cdot\frac{|f(x)|}{||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)}}\cdot\frac{|g(x)|}{||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}}\right)d\mu \\ &\le \int_{(E_1\cup E_2)^c}\left\{\Phi_1\left(\frac{|f(x)|}{||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)}}\right)+\Phi_2\left(\frac{|g(x)|}{||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}}\right)\right\}d\mu \\ &\le \int_\Omega \Phi_1\left(\frac{|f(x)|}{||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)}}\right)d\mu+\int_\Omega\Phi_2\left(\frac{|g(x)|}{||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}}\right)d\mu\le 1+1=2 \end{aligned}$$

が分かった．よって

$$I_4\le 2 \tag{5.22}$$

が示された．以上により (5.19) ～ (5.22) より

$$\begin{aligned} \int_\Omega\Phi_3\left(\frac{\alpha|f(x)g(x)|}{||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)}||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}}\right)d\mu &= I_1+I_2+I_3+I_4 \\ &\le \Phi_3(\alpha\cdot t_0^2)\,\mu(\Omega)+\Phi_1(t_0)\,\mu(\Omega)+1+\Phi_2(t_0)\,\mu(\Omega)+1+2 \\ &= \{\Phi_3(\alpha\cdot t_0^2)+\Phi_1(t_0)+\Phi_2(t_0)\}\mu(\Omega)+4 \end{aligned}$$

が得られた．$C_0=\{\Phi_3(\alpha\cdot t_0^2)+\Phi_1(t_0)+\Phi_2(t_0)\}\mu(\Omega)+4$ とおくと，

$$\int_\Omega\frac{1}{C_0}\Phi_3\left(\frac{\alpha|f(x)g(x)|}{||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)}||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}}\right)d\mu\le 1 \tag{5.23}$$

が得られる．Φ_3 は仮定より Δ_0-条件を満足する．よって (5.8) より，十分小さな $0<a_0<1$ を選ぶことにより

$$\sup_{t>0}\frac{\Phi_3(a_0t)}{\Phi_3(t)}\le\frac{1}{C_0}$$

が成り立つようにできる．すなわち

$$\Phi_3(a_0t)\le\frac{1}{C_0}\Phi_3(t)\qquad(t\ge 0) \tag{5.24}$$

がすべての $t\ge 0$ ついて成立する．よって (5.23)，(5.24) により

$$\int_\Omega\Phi_3\left(\frac{a_0\alpha|f(x)g(x)|}{||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)}||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}}\right)d\mu\le 1 \tag{5.25}$$

が得られた．よって quasi-ノルムの定義と (5.25) より

$$||fg||_{L^{\Phi_3}(\Omega)}\le\frac{1}{a_0\alpha}||f||_{L^{\Phi_1}(\Omega)}||g||_{L^{\Phi_2}(\Omega)}$$

が得られ，(iii) が示された．

最後に (iii) ⇒ (i) を示す．(i) が成立しないと仮定して矛盾を出す．もし (i) が成立しないと仮定する．Φ_3 は Δ_0-条件を満足するので，(5.8) より次の性質を持つ正数列 $\{D_j : j\ge 1\}$ を見い出すことができる．

$$1<D_1<D_2<\cdot<D_j<\cdots,\qquad\lim_{j\to\infty}D_j=\infty, \tag{5.26}$$

$$\sup_{t>0}\frac{\Phi_3(\frac{1}{D_j}t)}{\Phi_3(t)}\le\frac{1}{4^j}\qquad(j\ge 1). \tag{5.27}$$

このとき (5.27) より

$$\Phi_3\Big(\frac{1}{D_j}t\Big) \le \frac{1}{4^j}\Phi_3(t) \qquad (j \ge 1) \tag{5.28}$$

がすべての $t \ge 0$ で成立する．

今，(i) が成立しないと仮定していて，さらに $\mu(\Omega) < \infty$ としているので，次の性質を持つ正数列 $\{a_j : j \ge 1\}$ と $\{b_j : j \ge 1\}$ が存在する．

$$\begin{cases} 1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_j < \cdots, & \lim_{j\to\infty} a_j = \infty; \\ 1 < b_1 < b_2 < \cdots < b_j < \cdots, & \lim_{j\to\infty} b_j = \infty, \end{cases} \tag{5.29}$$

$$\frac{1}{\Phi_1(a_1) + \Phi_2(b_1)} \le \mu(\Omega) < \infty, \tag{5.30}$$

$$\Phi_3\left(\frac{1}{jD_j}a_jb_j\right) > \Phi_1(a_j) + \Phi_2(b_j) \qquad (j \ge 1). \tag{5.31}$$

$\mu(\Omega) = \infty$ のときは，(5.29), (5.30) は不要である．次に Ω の互いに共通部分を持たない集合列 $\{\Omega_j : j \ge 1\}$，（ $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$，もし $i \ne j$ なら），を

$$\mu(\Omega_j) := \frac{1}{2^j(\Phi_1(a_j) + \Phi_2(b_j))} \qquad (j \ge 1) \tag{5.32}$$

を満足するように選ぶ．確かに選べることができることを確認しておく．実際 (5.29), (5.30) より

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty}\mu(\Omega) &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j(\Phi_1(a_j) + \Phi_2(b_j))} \le \frac{1}{\Phi_1(a_1) + \Phi_2(b_1)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j} \\ &= \frac{1}{\Phi_1(a_1) + \Phi_2(b_1)} \le \mu(\Omega) < \infty \end{aligned}$$

となり (5.32) をみたす $\{\Omega_j : j \ge 1\}$ を選ぶことが可能であることが分かった．

また，関数 f_0, g_0 を次のように定める．

$$f_0(x) := \sum_{j=1}^{\infty} a_j\chi_{\Omega_j}(x), \qquad g_0(x) := \sum_{j=1}^{\infty} b_j\chi_{\Omega_j}(x) \qquad (x \in \Omega), \tag{5.33}$$

ここで，χ_{Ω_j} は Ω 上の特性関数で，$x \in \Omega_j$ のとき $\chi_{\Omega_j}(x) = 1$ で，$x \notin \Omega_j$ のとき $\chi_{\Omega_j}(x) = 0$ となる関数である．このとき (5.32)，(5.33) より

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Phi_1(|f_0(x)|)d\mu + \int_\Omega \Phi_2(|g_0(x)|)d\mu \\ &\quad= \int_\Omega \{\Phi_1(|f_0(x)|) + \Phi_2(|g_0(x)|)\}d\mu = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{\Omega_j} \{\Phi_1(|f_0(x)|) + \Phi_2(|g_0(x)|)\}d\mu \\ &\quad= \sum_{j=1}^{\infty}\{\Phi_1(a_j) + \Phi_2(b_j)\}\mu(\Omega_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\{\Phi_1(a_j) + \Phi_2(b_j)\} \cdot \frac{1}{2^j\{\Phi_1(a_j) + \Phi_2(b_j)\}} \\ &\quad= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j} = 1 < \infty \end{aligned}$$

が成立する．よって

$$\int_\Omega \Phi_1(|f_0(x)|)d\mu \le 1, \qquad \int_\Omega \Phi_2(|g_0(x)|)d\mu \le 1$$

となり $f_0 \in L^{\Phi_1}(\Omega), g_0 \in L^{\Phi_2}(\Omega)$ となる．さらに $||f_0||_{L^{\Phi_1}(\Omega)} \le 1, ||g_0||_{L^{\Phi_2}(\Omega)} \le 1$ が成り立つことが示された．よって (iii) の (5.16) の右辺が有限値となることが示された．

次に $f_0 g_o \notin L^{\Phi_3}(\Omega)$ を示したい．そのためには $0 < \varepsilon < 1$ をみたす ε を任意に与え，

$$\int_\Omega \Phi_3(\varepsilon|f_0(x)g_0(x)|)d\mu = \infty \tag{5.34}$$

が成立することを示したい．以下で (5.34) を示す．$0 < \varepsilon < 1$ に対して十分大きな正整数 $j_0 \in \mathbb{N}$ を選んで，$\varepsilon > 1/j_0 > 0$ をみたすようにしておく．このとき (5.31), (5.32) より

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi_3(\varepsilon|f_0(x)g_0(x)|)d\mu &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega_j} \Phi_3(\varepsilon|f_0(x)g_0(x)|)d\mu \\
&\ge \sum_{j=j_0}^{\infty} \int_{\Omega_j} \Phi_3(\varepsilon|f_0(x)g_0(x)|)d\mu = \sum_{j=j_0}^{\infty} \Phi_3(\varepsilon a_j b_j)\mu(\Omega_j) \\
&\ge \sum_{j=j_0}^{\infty} \Phi_3\left(\frac{1}{j_0} a_j b_j\right)\mu(\Omega_j) \ge \sum_{j=j_0}^{\infty} \Phi_3\left(\frac{1}{j} a_j b_j\right)\mu(\Omega_j) \\
&= \sum_{j=j_0}^{\infty} 4^j \cdot \frac{1}{4^j} \Phi_3\left(\frac{1}{j} a_j b_j\right)\mu(\Omega_j)
\end{aligned}$$

が分かる．ここで (5.28) を利用すると，

$$\frac{1}{4^j}\Phi_3\left(\frac{1}{j} a_j b_j\right) \ge \Phi_3\left(\frac{1}{jD_j} a_j b_j\right) \qquad (j \ge j_0) \tag{5.35}$$

が得られるので，(5.31)，(5.32) および (5.35) より

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi_3(\varepsilon|f_0(x)g_0(x)|)d\mu &\le \sum_{j=j_0}^{\infty} 4^j \cdot \Phi_3\left(\frac{1}{jD_j} a_j b_j\right)\mu(\Omega_j) \\
&\ge \sum_{j=j_0}^{\infty} 4^j \{\Phi_1(a_j) + \Phi_2(b_j)\}\mu(\Omega_j) \\
&= \sum_{j=j_0}^{\infty} 4^j \{\Phi_1(a_j) + \Phi_2(b_j)\} \cdot \frac{1}{2^j\{\Phi_1(a_j) + \Phi_2(b_j)\}} = \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^j = \infty
\end{aligned}$$

となり，(5.34) が示された．よって $||f_0 g_0||_{L^{\Phi_3}(\Omega)} > 1/\varepsilon$ となり，ε はいくらでも小さくとれるので $||f_0 g_0||_{L^{\Phi_3}(\Omega)} = \infty$ が得られた．よって (iii) の (5.16) の左辺が ∞ となり矛盾が示された．以上により (i) と (iii) の同値性が示され定理 5.13 が示された． ■

ここで $||f||_{L^\Phi(\Omega)}$ と $\rho_\Phi(f)$ との関係を結果だけ示しておく．詳細は別の機会に述べる．

補題 5.14. Φ を φ-関数とする．このときもし $0 < ||f||_{L^\Phi(\Omega)} \le 1$ とするならば，

$$0 < ||f||_{L^\Phi(\Omega)} \le \rho_\Phi(f) \le \frac{||f||_{L^\Phi(\Omega)}}{B_\Phi^{-1}(||f||_{L^\Phi(\Omega)})} \le 1 \tag{5.36}$$

が成り立つ．ここで $B_\Phi(a) = a \cdot \sup_{t>0} \frac{\Phi(at)}{\Phi(t)}, (0 < a \leq 1)$ で，$B_\Phi^{-1}(\lambda) = \inf\{a > 0 : B_\Phi(a) > \lambda\}, (0 < \lambda < \infty)$ を表す．特に Φ が s-convex のときは

$$0 < ||f||_{L^\Phi(\Omega)} \leq \left\| f \right\|_{\rho_\Phi} \leq ||f||_{L^\Phi(\Omega)}^{(s+1)/s} \leq 1 \tag{5.37}$$

が得られる．$||f||_{L^\Phi(\Omega)} \to 0$ のとき，(5.36) の右辺がゼロに収束するためには，Φ が Δ_0-条件をみたすことが必要となる．

最後に，一般化された弱 Orlicz 空間について説明する．ここでは概略だけ述べる．一般化された Orlicz 空間は，modular ρ_Φ によって構成され，F-ノルムや quasi-ノルムが定義された．一般化された弱 Orlicz 空間についても 弱 modular $\rho_{w,\Phi}$ によって構成される．$\rho_{w,\Phi}$ は次のように定義される．一般化された弱 Orlicz 空間は $\rho_{w,\Phi}$ を使い定義される．

$$\rho_{w,\Phi}(f) := \sup_{t>0} \Phi(t)\mu\left(|f| > t\right)$$

$$wL^\Phi(\Omega) := \left\{ f \in L^0(\Omega) : \rho_{w,\Phi}\left(\frac{1}{\lambda} f\right) < \infty \quad \text{for some} \quad \lambda > 0 \right\}$$

空間 $L^\Phi(\Omega)$ と $wL^\Phi(\Omega)$ はともに modular ρ_ρ または $\rho_{w,\Phi}$ により modular funnction space の公理をすべて満足する． よって二つの空間は modular function space として統一的に議論できる．modular function space については KIta, Miyamoto and Yoneda [5] に説明がある．$wL^\Phi(\Omega)$ の場合にもすでに述べた定理 5.7，定理 5.13 と同様な結果が成立する．宮本孝志氏の証明がある．ただ，$wL^\Phi(\Omega)$ の場合には注意すべきことがある．$wL^\Phi(\Omega)$ において Δ_0-条件がみたされない場合，$f \in wL^\Phi(\Omega)$ であっても $||f||_{wL^\Phi(\Omega)} = \infty$ となることが起こる．その原因はすべての $f \in wL^\Phi(\Omega)$ について

$$\lim_{\lambda \to \infty} \rho_{w,\rho}\left(\frac{1}{\lambda} f\right) = 0 \tag{5.38}$$

が成立するとは限らないことによる．よって F-ノルムの係数についての連続性は (5.38) をみたす $f \in wL^\Phi(\Omega)$ についてのみ成り立つことになる．弱 Orlicz 空間は確率論での応用が期待される．

References

[1] Andô, T., “On some properties of convex function”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. math.* **8** (1960), pp. 413–418.

[2] Andô, T., “Linear functionals on Orlicz spaces”, *Nieuw Arch. Wisk.* **8** (1960), pp. 1–6.

[3] Birnbaum, Z. W. and Orlicz, W., “Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen”, *Studia Math.* **3** (1931), pp. 1–67.

[4] Kawasumi, R. and Nakai, E., “Pointwise multipliers on weak Orlicz spaces”, to appear.

[5] Kita, H., Miyamoto, T. and Yoneda, K., “Modular function spaces and control functions of almost everywhere convergence”, *Commentations Math.* **XLI** (2001), pp. 99–133.

[6] 北 廣男,『オーリッチ空間とその応用』（岩波数学叢書），岩波書店，2009.

[7] Krasnosel’skiĭ, M. A. and Rutickiĭ, Ya. B., *Convex Functions and Orlicz Spaces* (English translation), Noordhoff Ltd. (Groningen), 1961.

[8] Luxemburg, W. A. J., “Banach function spaces”, Thesis, *Technische Hogeschool te Delft*, 1955.

[9] Maligranda, L., *Orlicz spaces and Interpolation*, Seminars in Math. **5**, Univ. of Campinas, Campinas SP (Brazil), 1989.

[10] Nakano, H., *Modulared Semi-ordered Linear Spaces*, Maruzen (Tokyou), 1950.

[11] Orlicz, W., “Über Räume (L^M)”, *Bull. int’l. de l’Acad. Pol. série A* **10** (1936), pp. 93-107.

[12] Rao, M. M. and Ren, Z. D., *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, Inc. (New York), 1991.

[13] Rao, M. M. and Ren, Z. D., *Applications of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, Inc. (New York), 2002.

[14] 田辺 広城, 『関数解析 上』, 実教出版，1978.