第57回実函数論・函数解析学
合同シンポジウム
講演集

期日：2018年9月3日(月)－9月5日(水)

会場：拓殖大学 文京キャンパス

まえがき

本講演集は 2018 年 9 月 3 日（月）から 9 月 5 日（水）までの 3 日間にわたり，拓殖大学の文京キャンパスで開催された第 57 回実函数論・函数解析学合同シンポジウムの講演集です.

本シンポジウムの開催のために多くの方々にご協力をいただきましたが，関係者皆様のご尽力によって，講演者の方々の素晴らしい論文を本講演集で発表することができました．各グループの責任者の方々，講演者の皆様，本シンポジウム参加者の皆様方に深く感謝いたします.

特に，会場責任者の織田寛先生をはじめとする拓殖大学工学部の皆様には大変お世話になりました．また，運営スタッフであった青山学院大学の学生の手配は，同大学の谷口健二先生にお願いしました．ここに深く感謝の意を表します.

なお，本シンポジウムの講演会場の運営，および講演集の作成には，谷口健二先生の教員研究費，および下記の科学研究費補助金の援助を受けています.

基盤研究（C）（代表 織田 寛）研究課題番号：18K03346
「ファインなファイバーを持つリーマン対称空間上のベクトル束における調和解析」

基盤研究（C）（代表 峯 拓矢）研究課題番号：18K03329
「磁場付きシュレディンガー作用素の特異極限と関連する不等式の研究」

森藤 紳哉 (奈良女子大学・理学部)
峯 拓矢 (京都工芸繊維大学・基盤科学系)

第57回実函数論・函数解析学合同シンポジウム
プログラム

期日: 2018年9月3日(月) 13:30 〜 9月5日(水) 11:45
会場: 拓殖大学文京キャンパス E館8階 E806教室
〒112-8585 東京都文京区小日向3-4-14
https://www.takushoku-u.ac.jp/summary/bunkyo-campus.html

9月3日(月)

13:30–14:30: 吉田 裕亮（お茶の水女子大学・基幹研究院自然科学系）
“自由確率論における Fokker–Planck 方程式とエントロピー消散”

14:45–15:45: 長 宗雄（神奈川大学・理学部）
“線形作用素の conjugation に係る話題”

16:00–17:00: 小林 良和（新潟大学・名誉教授、中央大学・理工学部）
“距離空間におけるリプシッツ作用素半群”

9月4日(火)

9:30–10:30: 田中 清喜（大同大学・教養部数学教室）
“多調和ベルグマン空間の解析”

10:45–11:45: 佐々野 詠淑（九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所）
“概均質ベクトル空間の正則性と次数付き Lie 代数の構造”

13:45–14:45: 松本 詔（鹿児島大学大学院・理工学研究科）
“直交群の Weingarten calculus と Weingarten グラフ”

15:00–16:00: 岸本 展（京都大学・数理解析研究所）
“高階項を持つ非線形シュレディンガー方程式の解析”

16:15–17:15: 一ノ瀬 弥（信州大学・理学部）
“空間方向に多項式オーダーで増大するポテンシャルを持つ Feynman 経路積分の収束”

懇親会: 18:00–20:00
会場: 拓殖大学文京キャンパス E館9階展望ラウンジ
http://www.takushoku-u.ac.jp/360campus/bunkyou/4.html

9 月 5 日 (水)

9:30–10:30: 岡崎 悦明（ファジィシステム研究所・特別研究員）
“非加法的単調測度による積分と Lp 空間”

10:45–11:45: 松下 慎也（秋田県立大学・システム科学技術学部）
“不動点近似法に対する収束解析”

開催責任者: 森藤 紳哉 (奈良女子大学・理学部)
峯 拓矢 (京都工芸繊維大学・基盤科学系)
会場責任者: 織田 寛 (拓殖大学・工学部)

目次

吉田 裕亮（お茶の水女子大学・基幹研究院自然科学系）
自由確率論における Fokker–Planck 方程式とエントロピー消散 1

長 宗雄（神奈川大学・理学部）
線形作用素と conjugation に係る話題 21

小林 良和（新潟大学・名誉教授、中央大学・理工学部）
距離空間におけるリプシッツ作用素半群 33

田中 清喜（大同大学・教養部数学教室）
多調和ベルグマン空間の解析 53

佐々野 詠淑（九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所）
概均質ベクトル空間の正則性と次数付き Lie 代数の構造 64

松本 詔（鹿児島大学大学院・理工学研究科）
直交群の Weingarten calculus と Weingarten グラフ 81

岸本 展（京都大学・数理解析研究所）
高階項を持つ非線形シュレディンガー方程式の解析 98

一ノ瀬 弥（信州大学・理学部）
On the Feynman path integral for the Schrödinger equations with polynomially growing potentials in the spatial direction 108

岡崎 悦明（ファジィシステム研究所・特別研究員）
非加法的単調測度による積分と L_p 空間 119

松下 慎也（秋田県立大学・システム科学技術学部）
不動点近似法に対する収束解析について 136

自由確率論における Fokker–Planck 方程式とエントロピー消散

お茶の水女子大学・基幹研究院 自然科学系
吉 田 裕 亮

本講は, 根本 郁 氏 (お茶女大 · 当時) との共同研究 [16] に基づくものである.

1. 背景と様々な準備

1.1 自由確率論

通常の確率空間は, 基礎空間 Ω, σ-集合体 $\mathcal{F}$, 確率測度 μ からなる 3 つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ で与えられる. Ω 上の可測関数 X が確率変数であり, X が可積分ならば, その期待値 $\mathbb{E}[X]$ は Ω 上での μ-積分で与えられる. ここで Ω 上の有界な可測関数全体からなる関数環 $L^\infty(\Omega)$ を考えると, これは可換な Banach 代数をなす. この可換な Banach 代数と Ω 上の積分で与えられる期待値写像の組 $(L^\infty(\Omega), \mathbb{E})$ には, Gel'fand の定理により, 元の確率空間を復元するに足る十分な情報が含まれていることがわかる. 非可換確率空間とは, このように確率空間を代数的に取り扱い, 抽象的に非可換化することで与えられる. すなわち $\mathcal{A}$ を単位元 $\mathbf{1}$ を含む一般に非可換な $*$-代数とし, φ を $\varphi(\mathbf{1}) = 1$ を満たす $\mathcal{A}$ 上の線形汎関数とする. このとき, これらの組 $(\mathcal{A}, \varphi)$ を一般的に (代数的) 非可換確率空間と呼ぶ. 解析的な議論を行なうには, 代数 $\mathcal{A}$ には, 何らかの位相的構造が必要であり, 通常 $\mathcal{A}$ を C^* 環, φ を $\mathcal{A}$ 上の状態として議論する. これは確率分布がより現実的なものとして与えられる場合でもある. すなわち, C^* 環の元である確率変数 $X \in \mathcal{A}$ が自己共役作用素のときは, スペクトル分解を考えることにより, スペクトル測度を介して, 実数上のコンパクトな台をもつ確率測度が自然に誘導される.

また, 行列環 $\mathcal{A} = M_N\big(L^\infty(\Omega)\big)$ と規格化トレース $\varphi = \frac{1}{N}\mathbb{E}\mathrm{Tr}$ の組 $(\mathcal{A}, \varphi)$ は, (有限次元) 非可換確率空間の典型であり, ランダム行列を議論する基本空間となる. ランダム行列アンサンブル $(A_N)_{N\in\mathbb{N}}$ に対して $\alpha_k = \lim\limits_{N\to\infty} \mathbb{E}\big[\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(A_N^k)\big]$ は固有値経験分布の極限分布の k 次モーメントであり, 台がコンパクトな場合には $\big\{\alpha_k\big\}_{k\geq 1}$ から極限分布が一意に定まる. すなわち, ランダム行列アンサンブルは固有値経験分布の極限分布を, その分布としてもつ確率変数の如く, 捉えることが可能である.

1980 年代後半に Voiculescu が導入した自由独立性の概念は, 環の自由積に基づくものであり, 真に非可換性が反映された独立性の概念の一つとして認識されている. 自由独立性に基づく非可換確率論は, 今日では自由確率論と呼ばれ, 通常の確率論との多くのパラレルな類似をもつ枠組みであることが知られている.

自由独立性が現れる重要な例は, 適当な条件の下で, 互いに独立な複数個のランダム行列アンサンブルの族 $\big\{\big(\boldsymbol{X}_i^{(N)}\big)\big\}_i$ を考えたとき, それらは行列サイズ N 無限大で自由独立な確率変数の族 $\{x_i\}_i$ と見られることである:

$$\underbrace{\left\{\boldsymbol{X}_1^{(N)}, \ldots, \boldsymbol{X}_m^{(N)}\right\}}_{\text{通常の確率論で独立なランダム行列}} \xrightarrow{N\to\infty} \underbrace{\{x_1, \ldots, x_m\}}_{\text{自由独立な確率変数}}.$$

これはランダム行列アンサンブルの漸近自由性 (asymptotic freeness) と呼ばれている.

1.2　関数不等式と Fokker-Planck 方程式

関数不等式の中で, 対数 Sobolev 不等式, 輸送コスト (Talagrand) 不等式は通常の確率論の中でも重要である. これらに関する著名な文献に, 例えば [21], [22] がある.

$\mathbb{R}$ 上の確率測度 ν に関して対数 Sobolev 不等式が成り立つとは, ある $C > 0$ が存在し, ν 絶対連続な $\mathbb{R}$ 上の任意の確率測度 μ について

$$H(\mu\,|\,\nu) \le \frac{1}{2C}\, I(\mu\,|\,\nu),$$

である. ここで

$$H(\mu\,|\,\nu) = \int \log\frac{d\mu}{d\nu}\, d\mu$$

は μ の ν に関する相対エントロピーであり, また

$$I(\mu\,|\,\nu) = \int \left|\nabla \log\frac{d\mu}{d\nu}\right|^2 d\mu$$

は μ の ν に関する相対 Fisher 情報量である. もちろん, $I(\mu\,|\,\nu)$ が定義されなければならないので, μ には $\frac{d\mu}{d\nu}$ が微分可能であることは要求される.

また $\mathbb{R}$ 上の確率測度 ν に関して輸送コスト不等式が成り立つとは, ある $C > 0$ が存在し, $\mathbb{R}$ 上の任意の確率測度 μ について

$$W_2(\mu,\nu)^2 \le \frac{2}{C} H(\mu\,|\,\nu)$$

である. ここで $W_2(\mu,\nu)$ は μ と ν の 2-Wasserstein 距離であり, 2 次モーメントが有限な μ, ν に対して, 以下のように定義される.

$$W_2(\mu,\nu) = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \sqrt{\iint |x-y|^2\, d\pi(x,y)},$$

ただし $\Pi(\mu,\nu)$ は, 周辺分布がそれぞれ μ と ν になる $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の確率測度の集合である.

Gauss 測度 ν に関する対数 Sobolev 不等式は Gross [11] によって, また輸送コスト不等式は Talagrand [20] によって, まず示された. 後に ν が strictly convex なポ

テンシャル関数 $V(x)$ の Boltzmann-Gibbs 分布 $d\nu(x) = e^{-V(x)}dx$ に Bakry-Émery 基準をもって拡張された ([1], [21]).

さらに重要な結果は, Otto and Villani [18] によって示された, 対数 Sobolev 不等式から輸送コスト不等式が (かなり一般の設定の下で) したがうことである. この証明においては, 最適輸送理論が応用され, また, 彼らの手法では strictly convex なポテンシャル関数をドリフト項にもつ Fokker-Planck 方程式の平衡測度に 2-Wasserstein 距離に関して指数レートで収束することが重要である. これら漸近挙動と関数不等式の関連性に関しては [6] ならびに文献 [21], [22] が詳しい.

なお, ここで通常の確率論での Fokker-Planck 方程式について述べておく. $\mathbb{R}$ 上の時間に依存しないドリフト $V(x)$ (ポテンシャル関数) をもつ拡散過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ は確率微分方程式で

$$dX_t = \sqrt{2}\, dB_t - V'(X_t)dt$$

と表される. ここで B_t は Brown 運動である. 時刻 t での X_t の確率密度 f_t に対応する偏微分方程式が Fokker-Planck 方程式であり

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(x) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial}{\partial x} f_t(x) + f_t(x)\, V'(x)\Big)$$

と表現される. 任意のポテンシャル関数について, 時刻 t の厳密解がいつでも求められるとは限らないが, $t \to \infty$ での漸近的安定な平衡分布は Gibbs 分布 $\kappa(x) = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-V(x)}$ で与えられる. もちろん $\mathcal{Z}$ は確率測度のための規格化定数である.

1.3 自由確率論でのエントロピーと Fisher 情報量

自由確率論の枠組みにおいても, 自己共役な非可換確率変数のエントロピーと Fisher 情報量の free 類似が Voiculecsu [23] により導入され, 一連の研究が始まった ([25] には, そのサーベイがある).

1 変数の場合, コンパクトな台をもつ確率測度 μ の free エントロピー $\Sigma(\mu)$ は,

$$\Sigma(\mu) = \iint \log|x-y|\, d\mu(x)\, d\mu(y) \tag{1.1}$$

(定数を除いて) で与えられる. また, μ の free Fisher 情報量 $\Phi(\mu)$ は, μ が絶対連続 $d\mu(x) = f(x)\, dx$ で $f \in L^3$ のとき (それ以外は, $\Phi(\mu) = +\infty$ として)

$$\Phi(\mu) = \frac{4\pi^2}{3}\int f(x)^3 dx = 4\int \Big(\big(\mathcal{H}f\big)(x)\Big)^2 d\mu(x) \tag{1.2}$$

で与えられる. ここで $\big(\mathcal{H}f\big)(x)$ は, 主値積分

$$\big(\mathcal{H}f\big)(x) = \mathrm{p.v.}\int \frac{f(y)}{x-y}\, dy.$$

で定義される f の Hilbert 変換 (通常の π 倍) である.

Voiculescu の free エントロピーならびに free Fisher 情報量に続き, Biane and Speicher は [3] において, free 拡散過程の研究を行い, 相対 free エントロピーと相対 free Fisher 情報量が導入し, これにより, 半円分布に関する free 対数 Sobolev 不等式を示した ([2] も参照). 以下に, 相対 free エントロピーならびに相対 free Fisher 情報量の定義をあげておく.

ポテンシャル関数と呼ばれる $V \in C^1(\mathbb{R})$ を取る. $\mathbb{R}$ の確率測度上の free エントロピー汎関数 $\Sigma_V(\mu)$

$$\Sigma_V(\mu) = -\iint \log|x-y|\, d\mu(x)\, d\mu(y) + \int V(x)\, d\mu(x). \tag{1.3}$$

を考える ([2], [3] を参照). このとき関数 V が適当な増大条件の下で, free エントロピー汎関数 $\Sigma_V(\mu)$ を最小化する確率測度 ν_V が一意に存在する. この ν_V はコンパクトな台をもち Euler-Lagrange 方程式

$$\text{p.v.}\int \frac{d\nu_V(y)}{x-y} = \frac{1}{2}\, V'(x) \quad \text{for } x \in \operatorname{Supp}(\nu_V).$$

で特徴付けられ, ν_V は V に関する平衡測度と呼ばれる.

このとき, コンパクト台をもつ確率測度 μ ($\mu \ll \nu_V$) の ν_V に関する相対 free エントロピー $\Sigma(\mu\,|\,\nu_V)$ は

$$\Sigma(\mu\,|\,\nu_V) = \Sigma_V(\mu) - \Sigma_V(\nu_V), \tag{1.4}$$

と定義される. また μ の ν_V に関する相対 free Fisher 情報量 $\Phi(\mu\,|\,\nu_V)$ は, μ の密度関数を f として,

$$\Phi(\mu\,|\,\nu_V) = 4\int \Big(\big(\mathcal{H}f\big)(x) - \frac{1}{2}\, V'(x) \Big)^2 d\mu(x),$$

と定義される.

1.4 自由確率論での Fokker-Planck 方程式

ここで自由確率論における Fokker-Planck 方程式 (free Fokker-Planck 方程式) を紹介する. $V \in C^1(\mathbb{R})$ として $N \times N$ Hermitian 行列 $\mathcal{H}_N$ 値の拡散過程を表す確率微分方程式

$$d\boldsymbol{X}_t = \frac{1}{\sqrt{N}} d\boldsymbol{B}_t - \frac{1}{2} V'\big(\boldsymbol{X}_t\big) dt,$$

を考える. ただし, $\boldsymbol{B}_t$ は $\mathcal{H}_N$ 上の Brown 運動である.

このとき $\boldsymbol{X}_t$ 固有値 $\big(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_N(t)\big)$ が次の確率微分方程式を満たすことが知られている.

$$d\lambda_i(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} dB_i(t) + \frac{1}{N} \sum_{j: j \neq i} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)}\, dt - \frac{1}{2} V'(\lambda_i(t))\, dt,$$

ただし $B_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,N)$ は独立な 1 次元 Brown 運動である.

この確率過程 $\boldsymbol{\lambda}_N(t)=\bigl(\lambda_1(t),\lambda_2(t),\ldots,\lambda_N(t)\bigr)$ は, ポテンシャル V をもつ generalized Dyson Brownian motion と呼ばれている. これは, 外部ポテンシャル V の下での対数 Coulomb 相互作用をする N-粒子系モデルで, この系の Hamiltonian はスカラー倍を除いて

$$H(x_1,x_2,\ldots,x_N)=-\Biggl(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{i\neq j}\log\bigl|x_i-x_j\bigr|-\sum_{i=1}^{N}V(x_i)\Biggr)$$

で与えられる. これは, free エントロピー汎関数の根拠でもある (詳細は [3], [5]).

固有値経験分布過程 $\bigl\{L_N(t)\bigr\}_{t\geq 0}$ を

$$L_N(t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\lambda_i(t)}$$

と定義し, $L_N(t)$ が $N\to\infty$ で, ある Lebesgue 絶対連続な密度を持つ分布 $d\mu_t(x)=\rho_t(x)\,dx$ に弱収束すると仮定する. このとき測度 μ_t は, 以下の微分方程式の弱解として与えられる.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\xi(x)\,d\mu_t(x)=\frac{1}{2}\iint\frac{\xi'(x)-\xi'(y)}{x-y}\,d\mu_t(x)\,d\mu_t(y)&\\ -\frac{1}{2}\int V'(x)\xi'(x)\,d\mu_t(x),&\end{aligned}\tag{1.5}$$

ここで, ξ は $C_b^2\bigl(\mathbb{R}\bigr)$ の test 関数である. この方程式は, McKean-Vlasov 方程式と呼ばれている.

さらに, 密度関数 ρ_t は, 次の非線形微分方程式を満たす [3]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(x)=-\frac{\partial}{\partial x}\Biggl(\rho_t(x)\Bigl(\bigl(\mathcal{H}\rho_t\bigr)(x)-\frac{1}{2}V'(x)\Bigr)\Biggr).\tag{1.6}$$

この微分方程式が free Fokker-Planck 方程式であり, 本講で用いる時間発展の基礎方程式となる. この free Fokker-Planck 方程式 (1.6) の時間 $t\to\infty$ での漸近的安定測度は free エントロピー汎関数 (1.3) の平衡分布 ν_V で与えられる.

測度 μ_t の特徴付けを得るには, McKean-Vlasov 方程式において $\xi\in C_b^2\bigl(\mathbb{R}\bigr)$ のすべてを test 関数として用いる必要はなく, $\xi(x)=(z-x)^{-1}$, $(z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ を考えば十分である. これは μ_t の Cauchy 変換

$$G_t(z)=\int\frac{d\mu_t(x)}{z-x}$$

が対応し, $G_t(z)$ に関する微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}G_t(z)=-G_t(z)\,\frac{\partial}{\partial z}G_t(z)-\frac{1}{2}\int\frac{V'(x)}{(z-x)^2}\,d\mu_t(x)$$

が得られる. 特に, $V(x)=\dfrac{x^2}{2}$ の場合には,

$$-\int \frac{x}{(z-x)^2}\,d\mu_t(x) = z\,\frac{\partial}{\partial z}G_t(z) + G_t(z),$$

であるので,

$$\frac{\partial}{\partial t}G_t(z) = \big(-G_t(z) + \frac{1}{2}\,z\big)\,\frac{\partial}{\partial z}G_t(z) + \frac{1}{2}\,G_t(z),$$

となり, これは free Ornstein-Uhlenbeck 過程に対応する. この free Ornstein-Uhlenbeck 過程は, W^*-確率空間 $(\mathcal{M},\tau)$ の

$$X_t = \sqrt{e^{-t}}\,X + \sqrt{1-e^{-t}}\,S \quad \text{for} \ \ t \geq 0$$

で与えられる確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ として実現される. ただし, S は標準半円分布をもつ確率変数であり, τ に関して $X \in \mathcal{M}$ とは自由独立である.

Biane and Voiculescu は, free Ornstein-Uhlenbeck 過程を用いて半円分布に関する free 輸送コスト不等式の証明を与えた [4].

これまでの自由確率論での関数不等式の研究の流れとして, ポテンシャル関数 V が C^2 級で strictly K-convex $(V''(x) \geq K > 0)$ のとき, ランダム行列近似を用いて Biane は, 1 次元の場合の自由確率論における対数 Sobolev 不等式の free 類似

$$\Sigma(\mu\,|\,\nu_V) \leq \frac{1}{2K}\,\Phi\big(\mu\,|\,\nu_V\big),$$

を示した [2]. ここで ν_V は (1.3) の free エントロピー汎関数の平衡測度である.

さらに Hiai, Petz, and Ueda は [12] において, ランダム行列近似を用いて reference 測度が一般の平衡測度の場合に拡張し

$$W_2(\mu,\nu_V)^2 \leq \frac{2}{K}\,\Sigma(\mu\,|\,\nu_V)$$

が成り立つことを示している.

この後, Ledoux は [13] において free Brunn-Minkowski 不等式により free 対数 Sobolev 不等式ならびに free 輸送コスト不等式の証明を簡潔化し, Otto-Villani の定理 [18] の free 類似を与えた. Ledoux and Popescu は [14] で最適輸送理論を用いることにより, 平衡測度に関する free 対数 Sobolev 不等式, free 輸送コスト不等式ならびに free HWI 不等式をランダム行列近似を経由せず証明した.

本講においては, この reference 測度が平衡測度の場合についての, free 対数 Sobolev 不等式ならびに free 輸送コスト不等式を通常の確率論で行われている手法の free 類似として, free Fokker-Planck 方程式の時間発展を用い, 時間積分を行うことにより導くことが可能であることを示す.

1.5 Stein 関係式の free 類似

準備の終わりに, 本講の計算において有効かつ重要な Stein 関係式の free 類似に関する Lemma を紹介する.

Lemma 1.1. μ を $\mathbb{R}$ 上のコンパクトな台を持つ *Lesbegue* 絶対連続な確率測度とし, その密度を f とする. さらに μ の *free Fisher* 情報量は有限とする. このとき $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ について

$$2\int_{\mathcal{S}} \eta(x)\,\big(\mathcal{H}f\big)(x)\,d\mu(x) = \iint_{\mathcal{S}\times\mathcal{S}} \frac{\eta(x)-\eta(y)}{x-y}\,d\mu(x)\,d\mu(y), \tag{1.7}$$

が成り立つ. ただし, $\mathcal{S} = \mathrm{Supp}(\mu)$.

Outline of Proof. 重要な関係式なので, 簡単にその証明を述べる. まず関数 $\eta(x)$ が連続微分可能より $\varphi(x,y) = \dfrac{\eta(x)-\eta(y)}{x-y}$ がコンパクト集合 $\mathcal{S}\times\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$ 上の有界かつ連続な関数に拡張されることに注意.

さらに μ が有限な free Fisher 情報量を持つので, Hilbert 変換 $\mathcal{H}f$ は $L^2(d\mu)$ に入る. また, コンパクト集合 $\mathcal{S}$ への制限で η も明らかに $L^2(d\mu)$ に入るので Cauchy-Schwarz 不等式より

$$\left|\int \eta(x)\,\big(\mathcal{H}f\big)(x)\,d\mu(x)\right| < \big\|\mathcal{H}f\big\|_{L^2(d\mu)}\,\big\|\eta\big\|_{L^2(d\mu)} < \infty.$$

したがって Fubini の定理を用いて

$$\begin{aligned}
&\iint \frac{\eta(x)-\eta(y)}{x-y}\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\
&= \int \eta(x)\,f(x)\left(\mathrm{p.v.}\int \frac{f(y)}{x-y}\,dy\right)dx - \int f(x)\left(\mathrm{p.v.}\int \frac{\eta(y)\,f(y)}{x-y}\,dy\right)dx \\
&= \int \eta(x)\,f(x)\,\big(\mathcal{H}f\big)(x)\,dx - \int f(x)\,\big(\mathcal{H}(\eta f)\big)(x)\,dx,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

と変形され, また Hilbert 変換の双対関係 ([19] を参照) により

$$-\int f(x)\,\big(\mathcal{H}(\eta f)\big)(x)\,dx = \int \eta(x)\,f(x)\,\big(\mathcal{H}f\big)(x)\,dx, \tag{1.9}$$

となる. (1.8) と (1.9) より与式が得られる. □

Remark 1.2. Lemma 1.1 の (1.7) 式は, 以下のような意味を持っている.

X を C^*-確率空間の自己共役な確率変数で, その分布を μ とし, 密度関数を f とする. Hilbert 変換 $2\big(\mathcal{H}f\big)$ は通常の確率論におけるスコア関数の free 類似で Voiculescu の conjugate 変数 [24] に対応する. 実際, $L^2(d\mu)$ での L^2-ノルムの 2 乗 $\big\|2\big(\mathcal{H}f\big)\big\|^2$ が X の free Fisher 情報量を与える.

さらに, 差分商 (difference quotient) $D\eta = \dfrac{\eta(x)-\eta(y)}{x-y}$ は, 非可換微分と考えられるので, 式 (1.7) は通常の確率論での X のスコア関数を ρ_X, 期待値 E_X としたときの Stein 関係式

$$E_X\big(\eta(X)\,\rho_X(X)\big) = -E_X\big(\eta'(X)\big),$$

の free 類似に相当する (ただし, 符号は異なる).

Remark 1.3. Lemma 1.1 の free Stein 関係式を用いて, McKean-Vlasov 方程式 (1.5) の弱解と free Fokker-Planck 方程式の関連をより明確化することができる. 関数 ξ が 2 階連続微分可能なので, free Stein 関係式を適用して (1.5) の右辺は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\iint \frac{\xi'(x)-\xi'(y)}{x-y}\,d\mu_t(x)\,d\mu_t(y) - \frac{1}{2}\int V'(x)\xi'(x)\,d\mu_t(x)& \\
&= \int \xi'(x)\,\big(\mathcal{H}\rho_t\big)(x)\,d\mu_t(x) - \frac{1}{2}\int V'(x)\xi'(x)\,d\mu_t(x) \\
&= \int \xi'(x)\,\rho_t(x)\,\Big(\big(\mathcal{H}\rho_t\big)(x) - \frac{1}{2}\,V'(x)\Big)\,dx \\
&= -\int \xi(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\bigg(\rho_t(x)\Big(\big(\mathcal{H}\rho_t\big)(x) - \frac{1}{2}\,V'(x)\Big)\bigg)\,dx,
\end{aligned}$$

と変形される. ここで, 最後の等式では, 部分積分が用いられている. したがって, (1.5) の左辺で時間微分と積分が交換可能ならば, $\xi \in C_b^2(\mathbb{R})$ に対して

$$\int \xi(x)\,\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(x)\,dx = -\int \xi(x)\,\frac{\partial}{\partial x}\bigg(\rho_t(x)\Big(\big(\mathcal{H}\rho_t\big)(x) - \frac{1}{2}\,V'(x)\Big)\bigg)\,dx. \tag{1.10}$$

が得られる. 本来, ρ_t は弱解として扱われるべきであるが, この (1.10) から, $\xi \in C_b^2(\mathbb{R})$ が掛かった積分に関して free Fokker-Planck 方程式 (1.6) は密度関数の各点微分として扱うことが可能であることを示している.

2. Wasserstein 距離の時間微分

今から, 2-Wasserstein 距離の時間微分を最適輸送理論を援用して, 計算する. まず, 最適輸送に関する幾つかの定義を述べる.

$\mathbb{R}$ 上の 2 つの確率測度 μ と ν に対して μ-a.e. で定義された写像 $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ μ から ν への輸送であるとは, 測度 ν が T の引き戻しで μ から誘導される場合をいう. すなわち任意の Borel 集合 $B\subset\mathbb{R}$ に対して $\nu\big(B\big) = \mu\big(T^{-1}(B)\big)$ であるときをいう. このとき $T\#\mu = \nu$ と書く.

2 次モーメントが有限な $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ と ν に対して, μ から ν の輸送写像 T が最適 (optimal) であるとは

$$W_2^2(\mu,\nu) = \int \big|x - T(x)\big|^2\,d\mu(x)$$

であるときをいう.

$\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ, ν に対しては, 最適輸送写像 T は累積分布関数を用いてより具体的に与えられる. μ, ν の分布関数を, それぞれ F, G とする. すなわち,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} d\mu=\mu\bigl((-\infty,x]\bigr), \qquad G(x)=\int_{-\infty}^{x} d\nu=\nu\bigl((-\infty,x]\bigr).$$

このとき, $T\#\mu=\nu$ となる最適輸送写像 T は $T(x)=G^{-1}\bigl(F(x)\bigr)$, で与えられる. ここで G^{-1} は G の一般化逆関数である ([21] を参照).

確率測度 μ, ν が連続な密度関数を持ち, それらの台が $\mathbb{R}$ の有界区間 (単連結) であるならば, 分布関数は狭義増加関数であり, 一般化逆関数ではなく, 本当に連続な逆関数

$$F^{-1}:[0,1]\to \mathrm{Supp}(\mu) \ \text{ and } \ G^{-1}:[0,1]\to \mathrm{Supp}(\nu)$$

が存在し, $T^{-1}(x)=F^{-1}\bigl(G(x)\bigr)$ で与えられる T の逆写像 T^{-1} も存在し $T^{-1}\#\nu=\mu$ である.

本講では, まず以下の状況を考える.

状況 A.

> $\mathbb{R}$ 上の 2 つの確率測度 μ_0 と ν_0 を初期測度として与え, ポテンシャル関数 $V\in C^1(\mathbb{R})$ をもつ free Fokker-Planck 方程式による時間発展で 2 つの確率測度の flows $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$, $\{\nu_t\}_{t\geq 0}$ を考える.

この際, μ_t と ν_t $(t\geq 0)$ の密度関数には, ある適当な条件を仮定する. これは, 議論を見やすくするものであり, 本質的には自然に成り立つことが期待されるものである. 仮定の詳細に関しては [16] を参照頂きたい.

Theorem 2.1. 状況 A の下で, T_t を時刻 $t\geq 0$ の μ_t から ν_t への最適輸送写像とする. このとき 2-*Wasserstein* 距離の 2 乗の時間微分は, 以下で与えられる.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Bigl(W_2(\mu_t,\nu_t)^2\Bigr)=2\int\bigl(x-T_t(x)\bigr)\Bigl(\bigl(\mathcal{H}f_t\bigr)(x)-\frac{1}{2}V'(x)\Bigr)f_t(x)\,dx\\ +2\int\bigl(x-T_t^{-1}(x)\bigr)\Bigl(\bigl(\mathcal{H}g_t\bigr)(x)-\frac{1}{2}V'(x)\Bigr)g_t(x)\,dx.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Outline of Proof. 証明はやや長いため, 詳細は [16] として, ここではその概略を述べる.

μ_t, ν_t の累積分布関数を F_t, G_t とする. $G_t^{-1}(x)$ が t-微分可能ならびに x-微分可能であることが示され, 全微分公式より, 最適輸送写像 $T_t(x)$ は t-微分可能で導関

数は,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}T_t(x) &= \Big(\frac{\partial}{\partial x}G_t^{-1}\Big)\big(F_t(x)\big)\Big(\frac{\partial}{\partial t}F_t\Big)(x) + \Big(\frac{\partial}{\partial t}G_t^{-1}\Big)\big(F_t(x)\big)\\ &= \frac{\big(\partial_t F_t\big)(x) - \big(\partial_t G_t\big)\big(T_t(x)\big)}{g_t\big(T_t(x)\big)}\end{aligned} \tag{2.2}$$

で与えられる. Remark 1.3 の (1.10) 式を用いて,

$$\big(\partial_t F_t\big)(x) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{x} f_t(y)\,dy = \int_{-\infty}^{x}\partial_t f_t(y)\,dy = f_t(x)\Big(\big(\mathcal{H}f_t\big)(x) - \frac{1}{2}V'(x)\Big), \tag{2.3}$$

$$\big(\partial_t G_t\big)\big(T_t(x)\big) = g_t\big(T_t(x)\big)\Big(\big(\mathcal{H}g_t\big)\big(T_t(x)\big) - \frac{1}{2}V'\big(T_t(x)\big)\Big). \tag{2.4}$$

を得る. (2.3) と (2.4) を (2.2) に代入して $\partial_t T_t(x)$ が得られ, $T_t(x)$ の t-微分可能性が示される.

T_t は最適輸送写像なので

$$W_2(\mu_t,\nu_t)^2 = \int \big|x - T_t(x)\big|^2\,d\mu_t(x) \quad \text{for} \ \ t \geq 0.$$

であり t-微分は

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(W_2(\mu_t,\nu_t)^2\Big)\\ &= \underbrace{-2\int \big(x - T_t(x)\big)\big(\partial_t T_t(x)\big)\,f_t(x)\,dx}_{(2.5)} + \underbrace{\int \big|x - T_t(x)\big|^2\big(\partial_t f_t(x)\big)\,dx}_{(2.6)}.\end{aligned}$$

となる. ここで,

$$h'\big(T_t(x)\big) = x - T_t(x), \iff h'\big(x\big) = T_t^{-1}(x) - x, \tag{2.7}$$

を満たす微分可能な関数 $h(x)$ を取る. このような関数 h の存在は Brenier の定理 [7] による. $T_t \# \mu_t = \nu_t$, だったので

$$\int h(x)\,g_t(x)\,dx = \int h\big(T_t(x)\big)\,f_t(x)\,dx$$

であり, t-微分を取って

$$\begin{aligned}&-\int h'\big(T_t(x)\big)\big(\partial_t T_t(x)\big)\,f_t(x)\,dx\\ &\qquad = -\int h(x)\big(\partial_t g_t(x)\big)\,dx + \int h\big(T_t(x)\big)\big(\partial_t f_t(x)\big)\,dx\end{aligned} \tag{2.8}$$

を得る. 関数 h は 2 階連続微分可能であるので, free Fokker-Planck 方程式についての Remark 1.3 の (1.10) を使って, 部分積分を行うことにより (2.8) の右辺は

$$\begin{aligned}
&\int h(x)\,\partial_x\Big(\big((\mathcal{H}g_t)(x)-\frac{1}{2}V'(x)\big)\,g_t(x)\Big)\,dx\\
&\qquad\qquad -\int h\big(T_t(x)\big)\,\partial_x\Big(\big((\mathcal{H}f_t)(x)-\frac{1}{2}V'(x)\big)\,f_t(x)\Big)\,dx\\
=&-\int h'(x)\Big(\big(\mathcal{H}g_t\big)(x)-\frac{1}{2}V'(x)\Big)\,g_t(x)\,dx\\
&\qquad\qquad +\int h'\big(T_t(x)\big)\,T_t'(x)\Big(\big(\mathcal{H}f_t\big)(x)-\frac{1}{2}V'(x)\Big)\,f_t(x)\,dx.
\end{aligned}$$

となり, $h'(x)$ ならびに $h'\big(T_t(x)\big)$ を戻して

$$\begin{aligned}
(2.5)=2&\int\big(x-T_t^{-1}(x)\big)\Big(\big(\mathcal{H}g_t\big)(x)-\frac{1}{2}V'(x)\Big)\,g_t(x)\,dx\\
&\qquad +2\int\big(x-T_t(x)\big)\,T_t'(x)\Big(\big(\mathcal{H}f_t\big)(x)-\frac{1}{2}V'(x)\Big)\,f_t(x)\,dx.
\end{aligned}\tag{2.9}$$

式 (2.6) に関しては, 関数 $\big|x-T_t(x)\big|^2$ が 2 階連続微分可能なので, また Remark 1.3 の (1.10) を使って, 部分積分を行うことにより

$$\begin{aligned}
(2.6)=&-\int\big|x-T_t(x)\big|^2\,\partial_x\bigg(\Big(\big(\mathcal{H}f_t\big)(x)-\frac{1}{2}V'(x)\Big)\,f_t(x)\bigg)\,dx\\
=&2\int\big(x-T_t(x)\big)\,\big(1-T_t'(x)\big)\Big(\big(\mathcal{H}f_t\big)(x)-\frac{1}{2}V'(x)\Big)\,f_t(x)\,dx\\
=&2\int\big(x-T_t(x)\big)\,\Big(\big(\mathcal{H}f_t\big)(x)-\frac{1}{2}V'(x)\Big)\,f_t(x)\,dx\\
&\qquad -2\int\big(x-T_t(x)\big)\,T_t'(x)\,\Big(\big(\mathcal{H}f_t\big)(x)-\frac{1}{2}V'(x)\Big)\,f_t(x)\,dx.
\end{aligned}\tag{2.10}$$

(2.9) と (2.10) を併せて (2.1) の式を得る. □

Theorem 2.2. 状況 A の下で, $V(x)\in C^2(\mathbb{R})$ で *strictly* K*-convex,* すなわち $V''(x)\geq K>0$ *for* $x\in\mathbb{R}$ であるとする. このとき

$$\frac{d}{dt}\Big(W_2(\mu_t,\nu_t)^2\Big)\leq -K\,W_2(\mu_t,\nu_t)^2,\tag{2.11}$$

したがって

$$W_2(\mu_t,\nu_t)\leq e^{-(K/2)\,t}\,W_2(\mu_0,\nu_0)\tag{2.12}$$

となる.

Proof. Theorem 2.1 の $\dfrac{d}{dt}\Big(W_2(\mu_t,\nu_t)^2\Big)$ の式を, 以下のように 2 つの部分に分ける.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(W_2(\mu_t,\nu_t)^2\Big) &= \underbrace{-\int \big(x-T_t(x)\big)\,V'(x)\,d\mu_t(x) + \int \big(x-T_t^{-1}(x)\big)\,V'(x)\,d\nu_t(x)}_{(2.13)} \\ &\quad \underbrace{-2\int \big(T_t(x)-x\big)\big(\mathcal{H}f_t\big)(x)\,d\mu_t(x) + 2\int \big(T_t^{-1}(x)-x\big)\big(\mathcal{H}g_t\big)(x)\,d\nu_t(x)}_{(2.14)}.\end{aligned}$$

Taylor 展開より, 任意の $x,y\in\mathbb{R}$ に対して

$$V\big(x\big) = V\big(y\big) + V'\big(y\big)(x-y) + \frac{1}{2}\,V''\big((1-\theta)x+\theta y\big)\,\big|x-y\big|^2 \quad (0\le\theta\le 1)$$

である. ポテンシャル関数 V が strictly K-convex であるので不等式

$$V\big(x\big) - V\big(y\big) - V'\big(y\big)(x-y) \ge \frac{K}{2}\,\big|x-y\big|^2 \tag{2.15}$$

を得る. (2.15) 式で x と y を入れ替えた式を考えて併せると

$$\big(V'(x)-V'(y)\big)(x-y) \ge K|x-y|^2$$

となり, このことより

$$\big(x-T_t(x)\big)\,\big(V'(x)-V'(T_t(x))\big) \ge K\,\big|x-T_t(x)\big|^2 \tag{2.16}$$

が得られる. これより第 1 項目の (2.13) は, 以下の評価を得る.

$$\begin{aligned}(2.13) &= \int \big(x-T_t(x)\big)\,V'(x)\,d\mu_t(x) + \int \big(T_t(x)-x\big)\,V'(T_t(x))\,d\mu_t(x) \\ &= \int \big(x-T_t(x)\big)\,\big(V'(x)-V'(T_t(x))\big)\,d\mu_t(x) \qquad (2.17) \\ &\ge \int K\,\big|x-T_t(x)\big|^2\,d\mu_t(x) = K\,W_2(\mu_t,\nu_t)^2.\end{aligned}$$

次に, 第 2 項 (2.14) が非負であることをみる. 関数 $\big(T_t(x)-x\big)$ と $\big(T_t^{-1}(x)-x\big)$ は連続微分可能なので, Lemma 1.1 の free Stein 関係式が適用可能であり

$$\begin{aligned}2\int \big(T_t(x)-x\big)\,\big(\mathcal{H}f_t\big)(x)\,d\mu_t(x) &= \iint \left(\frac{T_t(x)-T_t(y)}{x-y}-1\right)d\mu_t(x)\,d\mu_t(y), \\ 2\int \big(T_t^{-1}(x)-x\big)\,\big(\mathcal{H}g_t\big)(x)\,d\nu_t(x) &= \iint \left(\frac{T_t^{-1}(x)-T_t^{-1}(y)}{x-y}-1\right)d\nu_t(x)\,d\nu_t(y) \\ &= \iint \left(\frac{x-y}{T_t(x)-T_t(y)}-1\right)d\mu_t(x)\,d\mu_t(y),\end{aligned}$$

が得られる．ここで, 最後の等式は, 積分変数 x, y の両方に最適輸送写像 T_t を施している．よって T_t は単調であるので $\frac{T_t(x)-T_t(y)}{x-y} \geq 0$ であることに注意して

$$\begin{aligned}(2.14) &= \iint \left(\frac{T_t(x)-T_t(y)}{x-y} + \frac{x-y}{T_t(x)-T_t(y)} - 2\right) d\mu_t(x)\, d\mu_t(y) \\ &= \iint \left(\sqrt{\frac{T_t(x)-T_t(y)}{x-y}} - \sqrt{\frac{x-y}{T_t(x)-T_t(y)}}\right)^2 d\mu_t(x)\, d\mu_t(y) \geq 0.\end{aligned} \tag{2.18}$$

不等式 (2.17) と (2.18) より

$$\frac{d}{dt}\Big(W_2(\mu_t,\nu_t)^2\Big) \leq -K\, W_2(\mu_t,\nu_t)^2 \quad と \quad W_2(\mu_t,\nu_t)^2 \leq e^{-K\,t}\, W_2(\mu_0,\nu_0)^2$$

が導かれる．後者の平方根を取って (2.12) 式を得る． □

<u>状況 **B.**</u>

> 以降, 状況 A の特別な場合として, 初期測度の組 (μ_0,ν_0) において, 特に ν_0 をポテンシャル関数 V をもつ free Fokker-Planck 方程式の平衡測度 ν_V に取る．

もちろん, ν_V は free Fokker-Planck 方程式の時間発展で不変なので

$$g_t(x)\,dx = d\nu_V(x) \quad と \quad \big(\mathcal{H}g_t\big)(x) = \frac{1}{2}V'(x) \quad \text{for} \quad t \geq 0.$$

であることは, 明らかである．したがって Theorem 2.1 と Theorem 2.2 より以下の結果が直ちに得られる．

Theorem 2.3. 状況 *B* の下で, 次を得る*:*

$$\frac{d}{dt}\Big(W_2(\mu_t,\nu_V)^2\Big) = 2\int \big(x - T_t(x)\big)\Big(\big(\mathcal{H}f_t\big)(x) - \frac{1}{2}V'(x)\Big)\, f_t(x)\,dx. \tag{2.19}$$

さらに, ポテンシャル関数 V が C^2 級で *strictly K-convex* であるならば

$$\frac{d}{dt}\Big(W_2(\mu_t,\nu_V)^2\Big) \leq -K\, W_2(\mu_t,\nu_V)^2 \tag{2.20}$$

である．したがって

$$W_2(\mu_t,\nu_V) \leq e^{-(K/2)t}\, W_2\left(\mu_0,\nu_V\right) \quad \textit{for} \quad t \geq 0 \tag{2.21}$$

である．これより μ_t は平衡測度 ν_V に 2-*Wasserstein* 距離で指数レート $(K/2)$ で収束する.

スコアー差

以下, 簡単のために, スコア関数の差の $\dfrac{1}{2}$ を

$$J_t(x) = \big(\mathcal{H} f_t\big)(x) - \frac{1}{2} V'(x) \tag{2.22}$$

とおく. この置き換えの下では, free Fokker-Planck 方程式 (1.6) は,

$$\partial_t f_t(x) = -\partial_x \big(J_t(x)\, f_t(x)\big),$$

と表され, Theorem 2.1 の微分公式は

$$\frac{d}{dt}\Big(W_2(\mu_t, \nu_V)^2\Big) = 2\int \big(x - T_t(x)\big)\, J_t(x)\, d\mu_t(x) \tag{2.23}$$

となる. さらに, 相対 free Fisher 情報量 $\Phi\big(\mu_t\,|\nu_V\,\big)$ は

$$\Phi\big(\mu_t\,|\nu_V\,\big) = 4\int J_t(x)^2 d\mu_t(x),$$

と表される.

Proposition 2.4. 状況 B の下, ポテンシャル関数 V が C^2 級で *strictly* K*-convex* とする. このとき, 以下の不等式を得る.

$$-\frac{d}{dt}\Big(W_2(\mu_t, \nu_V)^2\Big) \le W_2(\mu_t, \nu_V)\, \sqrt{\Phi\big(\mu_t\,|\nu_V\,\big)}, \tag{2.24}$$

$$-\frac{d}{dt}\Big(W_2(\mu_t, \nu_V)^2\Big) \le \frac{1}{K}\, \Phi\big(\mu_t\,|\nu_V\,\big). \tag{2.25}$$

Proof. 不等式 (2.24) は $L^2\big(d\mu_t\big)$ での Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left|2\int \big(x - T_t(x)\big)\, J_t(x)\, d\mu_t(x)\right| \le \sqrt{\int \big|x - T_t(x)\big|^2 d\mu_t(x)}\, \sqrt{4\int J_t(X)^2\, d\mu_t(x)}$$

より得られる. 不等式 (2.20) と (2.24) より $W_2(\mu_t, \nu_V) \le \dfrac{1}{K}\sqrt{\Phi\big(\mu_t\,|\nu_V\,\big)}$ が得られる. これを (2.24) に再度代入して, 不等式 (2.25) が導かれる. □

3. 相対 free entropy の消散

ここでは, 相対 free entropy $\Sigma\big(\mu_t\,\big|\,\nu_V\big)$ の消散公式, すなわち時間 t についての第 1 および 第 2 導関数を調べる. これにより, 先の Proposition 2.4 から free 輸送コスト不等式を得ることが可能となる.

Lemma 3.1. 状況 B の下, 相対 *free* エントロピー $\Sigma(\mu_t \,|\, \nu_V)$ の時間 t についての第 1 導関数は

$$\frac{d}{dt}\Sigma(\mu_t \,|\, \nu_V) = -\frac{1}{2}\Phi(\mu_t \,|\, \nu_V) \tag{3.1}$$

で与えられる.

この公式は, Biane と Speicher の結果 [3] から, よく知られている事実である. そこで $\Sigma(\mu_t \,|\, \nu_V)$ の時間 t についての第 2 導関数を計算しよう. Lemma 3.1 より

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\Sigma(\mu_t \,|\, \nu_V) = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\Phi(\mu_t \,|\, \nu_V)$$

なので, 相対 free Fisher 情報量 $\Phi(\mu_t \,|\, \nu_V)$ の時間微分についてをみよう.

Theorem 3.2. 状況 B の下, ポテンシャル関数 V が C^2 級であるとき, 相対 *free Fisher* 情報量の時間微分は, 以下の式で与えられる.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(\mu_t \,|\, \nu_V) &= \frac{d}{dt}\left(4\int J_t(x)^2\, f_t(x)dx\right) \\ &= -4\iint\left(\frac{J_t(x)-J_t(y)}{x-y}\right)^2 d\mu_t(x)\, d\mu_t(y) - 4\int V''(x)\, J_t(x)^2\, d\mu_t(x).\end{aligned} \tag{3.2}$$

相対 free entropy の t に関する 2 階微分 $\frac{d^2}{dt^2}\Sigma(\mu_t \,|\, \nu_V)$ は Otto's differential calculus [10] (あるいは formal Hessian computation [22]) により導くことができるが, 大道具無しに, 素朴に free スコア関数の差 $J_t(x)$ の t 微分を直接に計算をすることで示すことが可能である.

Outline of Proof. 証明の詳細は [16] を参照してもらうとして, ここではその計算の流れをあげておく. なお, 積分と t-微分は交換可能性のために, 幾つかの関数において t に関して一様有界であることは仮定されている.

free Fokker-Planck 方程式の式 (1.10) を用いて, $J_t(x)$ の時間微分は

$$\partial_t J_t(x) = \partial_t\big(\mathcal{H} f_t\big)(x) = \text{p.v.}\!\int \frac{\partial_t f_t(y)}{x-y}\, dy = -\text{p.v.}\!\int \frac{\partial_y\big(J_t(y)\, f_t(y)\big)}{x-y}\, dy, \tag{3.3}$$

で与えられる.

相対 free Fisher 情報量の被積分関数 $4J_t(x)^2 f_t(x)$ は t-微分可能で,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(\mu_t \,|\, \nu_V) &= 8\int J_t(x)\,\big(\partial_t J_t(x)\big)\, f_t(x)dx + 4\int J_t(x)^2\ \partial_t f_t(x)\, dx \\ &= \underbrace{-8\int J_t(x)\ \mathcal{H}\big(\partial_y(J_t(y)f_t(y))\big)(x)\ f_t(x)\, dx}_{(3.5)} + \underbrace{4\int J_t(x)^2\ \partial_t f_t(x)\, dx}_{(3.6)}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

$J_t(x)^2$ は 2 階連続微分可能なので, free Fokker-Planck 方程式に関する公式 (1.10) が適用でき, 部分積分を行うことにより, (3.6) は以下のように変形される.

$$\begin{aligned}(3.6) &= -4\int J_t(x)^2\ \partial_x\big(J_t(x)f_t(x)\big)\,dx = 4\int \partial_x J_t(x)^2\ J_t(x)\,f_t(x)\,dx \\ &= 8\int J_t(x)\left(\partial_x\big(\mathcal{H}f_t\big)(x) - \frac{1}{2}V''(x)\right)J_t(x)\,f_t(x)\,dx \\ &= \underbrace{8\int J_t(x)^2\ \partial_x\big(\mathcal{H}f_t\big)(x)\ f_t(x)\,dx}_{(3.8)} - 4\int V''(x)\,J_t(x)^2\,d\mu_t(x).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Calderón commutator ([8], [9]) の議論を用いて, 導関数の Hilbert 変換は

$$\big(\mathcal{H}\alpha'\big)(x) = \mathrm{p.v.}\!\int \frac{\alpha'(y)}{x-y}\,dy = \mathrm{p.v.}\!\int \frac{\alpha(x)-\alpha(y)}{(x-y)^2}\,dy \tag{3.9}$$

であることがわかる. この公式が以降の計算では有効である. この公式を用いることで, (3.5) は以下のように変形される.

$$\begin{aligned}(3.5) &= -8\int J_t(x)\left(\mathrm{p.v.}\!\int \frac{J_t(x)f_t(x) - J_t(y)f_t(y)}{(x-y)^2}dy\right)f_t(x)\,dx \\ &= -8\iint \frac{J_t(x)^2 f_t(x)^2 - J_t(x)\,J_t(y)\,f_t(x)\,f_t(y)}{(x-y)^2}\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{3.10}$$

さらに, Hilbert 変換の双対関係式 [19] と部分積分および導関数の Hilbert 変換の公式 (3.9) を用いると (3.8) が, 以下のように変形される.

$$\begin{aligned}(3.8) = 4&\iint \frac{J_t(x)^2 f_t(x)^2 - J_t(x)^2 f_t(x)\,f_t(y)}{(x-y)^2}\,dx\,dy \\ &+ 4\iint \frac{J_t(x)^2 f_t(x)^2 - J_t(y)^2 f_t(x)\,f_t(y)}{(x-y)^2}\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{3.11}$$

関係式 (3.10) と (3.11) より

$$\begin{aligned}(3.5)+(3.8) &= -4\iint \frac{J_t(x)^2 - 2J_t(x)\,J_t(y) + J_t(y)^2}{(x-y)^2}\,f_t(x)\,f_t(y)\,dx\,dy \\ &= -4\iint \left(\frac{J_t(x)-J_t(y)}{x-y}\right)^2 f_t(x)\,f_t(y)\,dx\,dy\end{aligned} \tag{3.12}$$

が得られ, (3.4), (3.7), (3,12) を併せて, 与式 (3.2) が導かれる. □

Proposition 3.3. 状況 B の下, *free Fokker-Planck* 方程式のポテンシャル関数 V が C^2 級で *strictly K-convex* であるとき,

$$\frac{d}{dt}\Phi\big(\mu_t\,\big|\,\nu_V\big) \le -K\,\Phi\big(\mu_t\,\big|\,\nu_V\big), \tag{3.13}$$

が成り立つ. よって,

$$\Phi(\mu_t \mid \nu_V) \le e^{-Kt}\Phi(\mu_0 \mid \nu_V) \ \ \textit{for} \ \ t \ge 0, \tag{3.14}$$

であり, μ_t が平衡測度 ν_V に相対 *Fisher* 情報量に関して指数レート K で収束する.

Proof. Theorem 3.2 に V が strictly K-convex であることを用いて, 以下のことが直ちにわかる.

$$\frac{d}{dt}\Phi(\mu_t \mid \nu_V) \le -4\int V''(x)J_t(x)^2 d\mu_t(x) \le -4K\int J_t(x)^2 d\mu_t(x) = -K\,\Phi(\mu_t \mid \nu_V).$$

□

また (3.1) と (3.13) より, 以下の微分に関する不等式が直ちにしたがう.

Corollary 3.4.

$$\frac{d}{dt}\Sigma(\mu_t \mid \nu_V) \ge \frac{1}{2K}\frac{d}{dt}\Phi(\mu_t \mid \nu_V) \ \ \textit{for} \ \ t \ge 0. \tag{3.15}$$

Remark 3.5. 微分に関する不等式 (3.15) において, 時間 t について 0 から ∞ まで積分を行うことにより, free 対数 Sobolev 不等式を導くためには, μ_t が平衡測度 ν_V に相対 free エントロピーで収束することがいえなければならない. 論文 [15] においては, $\Sigma(\mu_t \mid \nu_V)$ が 0 に指数レートで収束することが, free 対数 Sobolev 不等式を用いて示されている.

通常の確率論の場合と同じく, 自由確率論においても, 相対 free エントロピー $\Sigma(\mu_t \mid \nu_V)$ が 0 に指数レートで減衰することと, free 対数 Sobolev 不等式は同値である. したがって, 我々は $\Sigma(\mu_t \mid \nu_V)$ が 0 に減衰することを free 対数 Sobolev 不等式に拠らずに示さなければならない.

4. 相対 free エントロピーの収束

本節での目的は, free HWI 不等式を示すことにより, 相対 free エントロピーの指数レートでの減衰示すことである.

Proposition 4.1. 状況 B の下, *free Fokker-Planck* 方程式のポテンシャル関数 V が C^2 級で *strictly* K*-convex* であるとき,

$$\Sigma(\mu_t \mid \nu_V) \le -\frac{d}{dt}\Big(W_2(\mu_t,\nu_V)^2\Big) - \frac{K}{2}W_2(\mu_t,\nu_V)^2. \tag{4.1}$$

が成り立つ.

Proof. 時刻 $t \geq 0$ について $T_t \# \mu_t = \nu_V$ である最適輸送写像 T_t を考えると,

$$
\begin{aligned}
\Sigma\big(\mu_t \,|\, \nu_V\big) &= \Sigma_V\big(\mu_t\big) - \Sigma_V\big(\nu_V\big) \\
&= \left(-\iint \log|x-y| \, d\mu_t(x)\, d\mu_t(y) + \int V(x)\, d\mu_t(x)\right) \\
&\quad - \left(-\iint \log\big|T_t(x) - T_t(y)\big| \, d\mu_t(x)\, d\mu_t(y) + \int V\big(T_t(x)\big)\, d\mu_t(x)\right) \\
&= \iint \log \frac{T_t(x) - T_t(y)}{x-y}\, d\mu_t(x)\, d\mu_t(y) - \int \Big(V\big(T_t(x)\big) - V\big(x\big)\Big)\, d\mu_t(x).
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

ここで $x - T_t(x)$ は連続微分可能なので, Lemma 1.1 の free Stein 関係式を用いて, Theorem 2.1 の時間微分の公式は

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(W_2(\mu_t, \nu_V)^2\Big) &= 2\int \big(x - T_t(x)\big)\Big(\big(\mathcal{H} f_t\big)(x) - \frac{1}{2}V'(x)\Big) f_t(x)\, dx \\
&= -\iint \Big(\frac{T_t(x) - T_t(y)}{x-y} - 1\Big)\, d\mu_t(x)\, d\mu_t(y) + \int \big(T_t(x) - x\big)V'(x)\, d\mu_t(x)
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

と変形される. (4.2) と (4.3) を併せることにより

$$
\begin{aligned}
&-\Sigma\big(\mu_t \,|\, \nu\big) - \frac{d}{dt}\Big(W_2(\mu_t, \nu_V)^2\Big) \\
&\qquad = \underbrace{\iint \Big(\frac{T_t(x) - T_t(y)}{x-y} - 1 - \log\frac{T_t(x) - T_t(y)}{x-y}\Big)\, d\mu_t(x)\, d\mu_t(y)}_{(4.4)} \\
&\qquad\qquad + \underbrace{\int \Big(V\big(T_t(x)\big) - V\big(x\big) - V'(x)\,\big(T_t(x) - x\big)\Big)\, d\mu_t(x)}_{(4.5)}.
\end{aligned}
$$

となり, 不等式 $\xi - 1 - \log\xi \geq 0 \quad (\xi > 0)$ であることと, T_t の単調性より $(4.4) \geq 0$ である.

また, 一方 V は strictly K-convex であるので (2.15) の議論より (4.5) は

$$
(4.5) \geq \int \frac{K}{2}\big(T_t(x) - x\big)^2\, d\mu_t(x) = \frac{K}{2}\, W_2(\mu_t, \nu_V)^2
$$

と評価され, 与式を得る. □

Proposition 2.4 の不等式 (2.31) を Proposition 4.1 に用いることにより, 次の free HWI 不等式と収束レートに関する結果が得られる.

Theorem 4.2. 状況 B の下, *free Fokker-Planck* 方程式のポテンシャル関数 V が C^2 級で *strictly* K*-convex* であるとき,

$$
\Sigma\big(\mu_t \,|\, \nu_V\big) \leq W_2(\mu_t, \nu_V)\sqrt{\Phi\big(\mu_t \,|\nu_V\,\big)} - \frac{K}{2}\, W_2(\mu_t, \nu_V)^2
$$

が得られる．これより, μ_t は平衡測度 ν_V に, 相対 *free* エントロピーで指数レート K で収束する．

今までの議論を経て, free 輸送コスト不等式ならびに free 対数 Sobolev 不等式を時間積分をもって示すことが可能となる．

Theorem 4.3. *V を C^2 級で strictly K-convex 関数とし, V をポテンシャルとする free エントロピー汎関数 $\Sigma_V(\mu)$ とし, この平衡測度を ν_V とする．このとき, 単連結なコンパクト台を持つ ν_V に関して絶対連続な確率測度 μ_0 に対して, 以下の不等式が成り立つ．*

$$\begin{aligned} &\textit{free 対数 Sobolev 不等式} \qquad W_2(\mu_0, \nu_V) \leq \sqrt{\frac{2}{K}\,\Sigma\big(\mu_0\,|\nu_V\,\big)}, \\ &\textit{free 輸送コスト不等式} \qquad \Sigma\big(\mu_0\,\big|\,\nu_V\big) \leq \frac{1}{2K}\,\Phi\big(\mu_0\,\big|\,\nu_V\big). \end{aligned}$$

Remark 4.4. free 対数 Sobolev 不等式は, Theorem 4.2 の free HWI 不等式からもっと直接的に示すことも可能である ([16] を参照).

References

[1] D. Bakry and M. Émery, Diffusions hypercontractives, In *Séminar de Probabilités XIX, 1983/84*, in *Lecture Notes in Math.*, vol.**1123**, Springer-Verlag, Berlin, Germany pp. 177–206, 1985.

[2] P. Biane, Logarithmic Sobolev inequalities, matrix models and free entropy, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* **19** (2003), 497–506.

[3] P. Biane and R. Speicher, Free diffusions, free energy and free Fisher information, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Stat.* **37** (2001), 194–211.

[4] P. Biane and D. Voiculescu, A free probability analogue of the Wasserstein distance on the trace-state space, *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001), 1125–1138.

[5] G. Blower, *Random Matrices: High Dimensional Phenomena*, London Math. Soc., Lect. Notes Ser. **367**, Cambridge Univ. Press, London, UK, 2009.

[6] F. Bolley, I. Gentil, and A. Guillin, Convergence to equilibrium in Wasserstein distance for Fokker-Planck equations, *J. Funct. Anal.* **263** (2012), 2430–2457.

[7] Y. Brenier, Polar factorization and monotone rearrangement of vector valued functions, *Commun. Pure Appl. Math.* **44** (1991), 375–417.

[8] A. Calderón, Commutators of singular integral operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **53** (1965), 1092–1099.

[9] A. Calderón, Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **74** (1977), 1324–1327.

[10] J. Carrillo, R. McCann, and C. Villani, Kinetic equilibration rates for granular media and related equations: entropy dissipation and mass transportation estimates, *Rev. Mat. Iberoamericana* **19** (2003), 971–1018.

[11] L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities, *Amer. J. Math.* **97** (1975), 1061–1083.

[12] F. Hiai, D. Petz, and Y. Ueda, Free transportation cost inequalities via random matrix approximation, *Probab. Theory Related Fields* 130 (2004), 199–221.

[13] M. Ledoux, A (one-dimensional) free Brunn.Minkowski inequality, *C. R. Acad. Sci. Paris* **340** (2005), 301–304.

[14] M. Ledoux and I. Popescu, Mass transportation proofs of free functional inequalities, and free Poincaré inequalities, *J. Funct. Anal.* **257** (2009), 1175–1221.

[15] S. Li, X. Li, and Y. Xie, Generalized Dyson Brownian motion, McKean-Vlasov equation and eigenvalues of random matrices, preprint, 2013.

[16] A. Nemoto and H. Yoshida, The free logarithmic Sobolev and the free transportation cost inequalities by time integrations, *Infin. Dim. Anal. Quantum. Probab. Relat. Top.*, **17** (2014), 1450022, (24 pages).

[17] F. Otto, The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation, *Commun. Parial Diff. Eq.* **26** (2001), 101–174.

[18] F. Otto and C. Villani, Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality, *J. Funct. Anal.* **173** (2000), 361–400.

[19] J. N. Pandey, *The Hilbert transform of Schwartz distributions and applications*, Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs, and Tracts, John Wiley & Sons Inc., New York, USA, 1996.

[20] M. Talagrand, Transportation cost for Gaussian and other product measures, *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996) 587 – 600.

[21] C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*, Grad. Stud. Math., vol. **58**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[22] C. Villani, *Optimal Transport: Old and New*, Grund. Math. Wissen. Vol. **338** Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2009.

[23] D. Voiculescu, The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory I, *Commun. Math. Phys.* **155** (1993), 71–92.

[24] D. Voiculescu, The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory V: Noncommutative Hilbert transforms, *Invent. Math.* **132** (1998), 182–227.

[25] D. Voiculescu, Free entropy, *Bull. London Math. Soc.* **34** (2002), 257–278.

線形作用素と conjugation に係る話題

神奈川大学 理学部　長　宗雄

目次

1. m-isometric 作用素と m-symmetric 作用素
2. ∞-isometric operators
3. Conjugation
4. $[m, C]$-isometric operators
5. ∞-complex symmetric operators
6. m-isometric commuting tuple

Conjugation と呼ばれる作用素に関連する研究について紹介しますが，Conjugation についての研究を紹介する前に，複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ とその上の有界線形作用素 T について， conjugation C を含まない基礎となる m-isometric 作用素と m-symmetric 作用素についての結果を少し述べる．

1. m-isometric 作用素と m-symmetric 作用素

$\mathcal{H}$: a complex Hilbert space，$B(\mathcal{H})$: the set of all bounded linear operators on $\mathcal{H}$ とし，$T \in B(\mathcal{H})$ と $m \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha_m(T)$ は次のように定義する．

$$\alpha_m(T) := \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} T^{*m-j} T^j$$

これは

$$(y-x)^m(T) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} y^{m-j} x^j \Big|_{y=T^*,\ x=T}$$

としたものである．

定義 1.1　T: m-symmetric 作用素 $\iff$ $\alpha_m(T) = 0$

この作用素の研究は J.W. Helton, Infinite dimensional Jordan operators and Strum-Liouville conjugate point theory, Trans. Amer. Math. Soc. 170(1972), 305-331 で導入・研究されたのが最初と思われる．そこでの結果は

定義 1.2　T : Jordan 作用素 $\iff$ ${}^{\exists}S, N$; $T = S + N, S$: selfadjoint, $SN = NS, N^2 = 0$

定理 1.1　T : Jordan 作用素 $\rightleftharpoons$ T, T^* : 3-symmetric

定理 1.2　T : 3-symmetric, ${}^{\exists}$ cyclic vector $\Longrightarrow$ T : unitarily equivalent to the multiplication by x on a Sobolev space

であるが，まず m-symmetric 作用素の性質を紹介する．

$(y-x)^{m+1} = y(y-x)^m - (y-x)^m x$ であるので

$$T^*\alpha_m(T) - \alpha_m(T)\,T = \alpha_{m+1}(T)$$

が成り立つ．従って T: m-symmetric $\Longrightarrow$ T: $(m+1)$-symmetric である．

また明らかに T が 1-symmetric とは $T^* - T = 0$ より $T^* = T$ であるが, T が 2-symmetric でも $T^* = T$ が成り立つ. さらに基本的な性質をまとめる.

定理 1.3 T : m-symmetric のとき
(1) $(-i)^{m-1}\alpha_{m-1}(T) \geq 0$ and $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$
(2) T^n : m-symmetric for all $n \geq m$
(3) If there exists T^{-1}, then so is T^{-1}
(4) If m is even, then T is $(m-1)$-symmetric
(5) $\{x_n\}, \{y_n\}$; sequences of unit vectors, $(T-a)x_n \;\to\; 0$ and $(T-b)y_n \;\to\; 0$ $(a \neq b)$.
Then $\langle x_n,\, y_n\rangle \;\to\; 0$. Hence $Tx = ax, Ty = by$ $(a \neq b)$. Then $\langle x,\, y\rangle = 0$

可換な pair (T, S) が $T^*S = ST^*$ も満たすときに doubly commuting pair と呼ぶ．このとき次の等式が成り立つ.

定理 1.4 (T, S) : doubly commuting pair. Then :

$$(1-1)\qquad \alpha_n(T+S) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha_{n-j}(T)\,\alpha_j(S)$$

$$(1-2)\qquad \alpha_n(TS) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} T^j \cdot \alpha_{n-j}(T)\,\alpha_j(S) \cdot S^{n-j}$$

従って次の定理を得る.

定理 1.5 T: m-symmetric, S: n-symmetric
(T, S) : doubly commuting pair $\Longrightarrow$ $T+S$ and TS : $(m+n-1)$-symmetric

明らかに $Q^n = 0 \implies Q$: $(2n-1)$-symmetric であるので，次の系を得る．

系 1.6 T: m-symmetric, Q: n-nilpotent
(T, Q) : doubly commuting pair $\Longrightarrow$ $T+Q$ and TQ : $(m+2n-2)$-symmetric

T: m-symmetric のとき $T \otimes I$ も $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 上の m-symmetric 作用素であり，

$$T \otimes S = (T \otimes I)(I \otimes S), \quad (T \otimes I, I \otimes S) : \text{ doubly commuting}$$

より次の定理を得る．

定理 1.7 T: m-symmetric, S: n-symmetric $\Longrightarrow$ $T \otimes S$: $(m+n-1)$-symmetric

次に m-isometric 作用素について述べる． $T \in B(\mathcal{H})$ に対して

$$\beta_m(T) := \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} T^{*m-j} T^{m-j}$$

は

$$(yx-1)^m(T) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} y^{m-j} x^{m-j}\Big|_{y=T^*,\ x=T}$$

としたものと考えると良い．

定義 1.3 T : m-isometric 作用素 $\Longleftrightarrow$ $\beta_m(T) = 0$

この作用素の研究は古くからあるようですが，J. Agler and M. Stankus, m-isometric transformations on Hilbert space I, II, III, Integr. Equat. Operator Theory, 21(1995), 383-492; 23(1995), 1-48; 24(1996), 379-421 から本格的に研究された．この論文では Dirichlet 作用素の研究がされている．

m-isometric 作用素の性質を紹介する．

$(yx-1)^{m+1} = y(yx-1)^m\, x - (yx-1)^m$ であるので

$$T^*\beta_m(T)\, T - \beta_m(T) = \beta_{m+1}(T)$$

が成り立つので，T: m-isometric $\Longrightarrow$ T: $(m+1)$-isometric である．

また明らかに T が 1-isometric とは $T^*T - I = 0$ より isometric であり, この作用素の拡張である．基本的な性質をまとめる．

定理 1.8 T : m-isometric のとき
(1) $\beta_{m-1}(T) \geq 0$ and $\sigma_a(T) \subset \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
(2) T^n : m-isometric for all $n \geq m$
(3) ${}^{\exists}T^{-1} \Longrightarrow$ so is T^{-1}
(4) m: even, ${}^{\exists}T^{-1} \Longrightarrow T : (m-1)$-isometric
(5) $\{x_n\}, \{y_n\}$; sequences of unit vectors, $(T-a)x_n \to 0$ and $(T-b)y_n \to 0$ $(a \neq b)$.
Then $\langle x_n, y_n\rangle \to 0$. Hence $Tx = ax, Ty = by$ $(a \neq b)$. Then $\langle x, y\rangle = 0$.
(6) T: power bounded $\Longrightarrow T$: isometry
(7) $0 \in \sigma(\beta_{m-1}(T))$ $(m \geq 2)$

(4) が symmetric のときと異なる．そして，次の例がある．

定理 1.9 m : 奇数 $\Longrightarrow$ ${}^{\exists}T$; invertible m-isometric and not $(m-1)$-isometric

(T, S): doubly commuting pair のとき，次の等式が成り立つ．

$$(1-3)\quad \beta_n(T+S;C)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}C(T+S)^kC\cdot CS^jC\cdot\beta_{n-k-j}(T;C)\,S^kT^j.$$

$$(1-4)\quad \beta_n(TS;C)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}CT^jC\cdot\beta_{n-j}(T;C)\cdot\beta_j(S;C)\cdot T^j.$$

和について $(1-1)$ と $(1-3)$ が異なる．このため和については一方が nilpotent でないと一般的な結論を得ることができない．纏めると次の定理となる．

定理 1.10
(1) T : m-isometric, S : n-isometric
  (T,S): doubly commuting $\Longrightarrow TS$: $(m+n-1)$-isometric
(2) T : m-isometric, Q : n-nilpotent
  (T,S): commuting $\Longrightarrow T+Q$: $(m+2n-2)$-isometric

テンソル積については問題なく次の定理を得る．

定理 1.11 T: m-isometric, S: n-isometric $\Longrightarrow$ $T\otimes S$: $(m+n-1)$-isometric

2. ∞-isometric operators

次に ∞-isometric 作用素についての研究を紹介する．定義は次である．

定義 2.1 T : ∞-isometric $\Longleftrightarrow \limsup_{m\to\infty}\|\beta_m(T)\|^{\frac{1}{m}}=0$

T : m-isometric $\Longrightarrow$ T : ∞-isometric の関係は明らかである．

スペクトルの性質としては次があげられる．

定理 2.1 T : ∞-isometric のとき次が成り立つ．
(1) $\sigma_a(T)\subset\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$,
(2) $\{x_n\},\{y_n\}$; sequences of unit vectors, $(T-a)x_n \to 0$ and $(T-b)y_n \to 0$ $(a\neq b)$
  $\Longrightarrow \langle x_n,\, y_n\rangle \to 0 \;\; (n\to\infty)$
  $\therefore\;\; Tx=ax, Ty=by\ (a\neq b) \Longrightarrow \langle x,\, y\rangle=0$

基本的な性質としては次があげられる．

定理 2.2 T, T_n : ∞-isometric.
(1) Q : quasinilpotent, $TQ=QT \Longrightarrow T+Q$: ∞-isometric
(2) $T_n \to S \Longrightarrow S$: ∞-isometric
(3) (T,S) : doubly commuting $\Longrightarrow TS$: ∞-isometric

定理 2.3 T,S : ∞-isometric $\Longrightarrow T\otimes S$: ∞-isometric

次に，不変部分空間について述べる．

定義 2.2　$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ に対して

$$K_m(T) := \bigcap_{k \geq 0} \ker(\beta_m(T)\, T^k)$$

$$K_\infty(T) := \{x : \lim\sup_{m\to\infty} \|\beta_m(T)T^k x\|^{\frac{1}{m}} = 0 \text{ for all } \ k \geq 0\}$$

と定義する．
このとき次が成り立つ

$$K_m(T) \subset K_\infty(T)$$

定理 2.4　$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ に対して次が成り立つ
(1)　K_m : invariant for T,　$T_{|K_m}$: m-isometric
(2)　K_∞ : invariant for T,　$T_{|K_\infty}$: ∞-isometric

3. Conjugation

本題の conjugation に関連する研究について述べる．初めに定義を述べる．

定義 3.1
C : $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$: *conjugation* on $\mathcal{H}$ とは次の 3 つの条件を満たすときを言う
(1) C is antilinear; $C(ax+by) = \bar{a}Cx + \bar{b}Cy$ for all $a, b \in \mathbb{C}$ and $x, y \in \mathcal{H}$
(2) C is isometric; $\langle Cx, Cy\rangle = \langle y, x\rangle$ for all $x, y \in \mathcal{H}$
(3) C is involutive; $C^2 = I$

例 3.1
(1) $C_1(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) := (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \cdots, \overline{x_n})$ on $\mathbb{C}^n$
(2) $C_2(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) := (\overline{x_n}, \overline{x_{n-1}}, \overline{x_{n-2}}, \cdots, \overline{x_1})$ on $\mathbb{C}^n$
(3) $(C_3 f)(x) := \overline{f(x)}$ on $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$
(4) $(C_4 f)(x) := \overline{f(1-x)}$ on $L^2([0,1])$
(5) $(C_5 f)(x) := \overline{f(-x)}$ on $L^2(\mathbb{R}^n)$

Godič and Lucenko,:　*On the representation of a unitary operator as a product of two involutions*, Uspehi Mat. Nauk **20**(1965), 64-65 は次を示した．

定理 3.1　U: unitary on a Hilbert space $\Longrightarrow$ ${}^\exists C, J$ (conjugations) ; $U = CJ$

$$\therefore \quad T = U|T|\text{: polar decomposition, } U\text{: unitary} \Longrightarrow {}^\exists C, J;\ T = CJ|T|$$

定義 3.2　T:　C-symmetric $\iff$ $CTC = T^*$

C-symmetric 作用素の例としては Toeplitz matrix があげられる．

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-(n-1)} \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_{-(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \quad \text{(Toeplitz matrix)} \quad \text{Then} \quad C_2TC_2 = T^*$$

これを最初に示したのは高木貞治先生と言われる．Garcia and Putinar, Complex symmetric operators, Trans. Amer. Math. Soc. **358**(2005) 1285-1315 の論文では次の定理が示されている．

定理 3.2 (Takagi Factorization). T: a symmetric matrix, (C-*symmetric*) $\Longrightarrow$ $^\exists U$: unitary, $^\exists N$: normal and symmetric matrix ; $T = UN\,{}^tU$

定義 3.3 T: skew C-symmetric $\iff$ $CTC = -T^*$

L. -K. Hua, On the theory of automorphic functions of a matrix level I. Geometrical basis, Amer. J. Math. 66(1944), 470-488.

定理 3.3 (Hua Factorization).

T : skew symmetric real matrix, i.e., $T = -\,{}^tT$ $\Longrightarrow$
$^\exists U$: unitary, $^\exists S$; $T = US\,{}^tU$ and

$$S = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 0 & a_k \\ -a_k & 0 \end{pmatrix} \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0$$

For a skew C-symmetric operator T, we have following result by C. G. Li and S. Zhu: Skew symmetric normal operators, Proc. AMS (2013), 2755-2762.

定理 3.4 T : normal. Then the following statements are equivalent:
(1) T : skew C-symmetric, i.e., $CTC = -T^*$.
(2) $^\exists\mathcal{K}$: Hilbert space, $^\exists N$: normal operator on $\mathcal{K}$;

$$T_{|\ker(T)^\perp} \simeq N \oplus (-N)$$

スペクトルの性質については S. Jung, E. Ko and J. E. Lee, *On complex symmetric operator matrices*, J. Math. Anal. Appl., **406**(2013), 373-385 で次の定理が基本である．

定理 3.5 $T \in B(\mathcal{H})$, C: conjugation のとき次が成り立つ

$$\sigma(CTC) = \sigma(T)^*, \sigma_p(CTC) = \sigma_p(T)^*, \sigma_a(CTC) = \sigma_a(T)^*,$$

$$\sigma_s(CTC) = \sigma_s(T)^*, \sigma_e(CTC) = \sigma_e(T)^*, \sigma_w(CTC) = \sigma_w(T)^*,$$

ここで順に，スペクトル，点スペクトル，近似点スペクトル，surjective スペクトル，essential スペクトル，Weyl スペクトル と $E^* = \{\overline{z} : z \in E\} \subset \mathbb{C}$ である．

4. $[m, C]$-isometric operators

定義 4.1　$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$: $[m, C]$-*isometric operator* with $C \iff$

$$\lambda_m(T; C) := \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} CT^{m-j}C \cdot T^{m-j} = 0$$

これは

$$(yx-1)^m(T; C) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} y^{m-j}x^{m-j} \Big|_{y=CTC,\ x=T}$$

と考えれば良いので，$(yx-1)^{m+1} = y(yx-1)^m - (yx-1)^m x$ より次の等式が成り立つ．

$$CTC \cdot \lambda_m(T; C) \cdot T - \lambda_m(T; C) = \lambda_{m+1}(T; C).$$

最初に次の定理が成り立つ．

定理 4.1　T : $[m, C]$-isometric のとき次が成り立つ
(1) T : bounded below
(2) $0 \notin \sigma_a(T)$
(3) T : injective and $R(T)$: closed

定理 4.2　T : $[m, C]$-isometric $z \in \sigma_a(T) \implies \overline{z}^{-1} \in \sigma_a(T)$

従って T : $[m, C]$-isometric $\implies \|T\| \geq 1$

定理 4.3　T : $[m, C]$-isometric のとき次が成り立つ :
(1) T : invertible $\implies T^{-1}$: $[m, C]$-isometric
(2) T^n : $[m, C]$-isometric for all $n \in \mathbb{N}$

定理 4.4　T : $[m, C]$-isometric, N : n-nilpotent
$TN = NT \implies T + N$: $[m + 2n - 2, C]$-isometric

定理 4.5　T : $[m, C]$-isometric, S : $[n, C]$-isometric
$TS = ST$, $S \cdot CTC = CTC \cdot S \implies TS$: $[m + n - 1, C]$-isometric

積 TS については 等式 (1-3) により一般的には難しい．

- If C and D are conjugations on $\mathcal{H}$, then $C \otimes D$ is a conjugation on $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.

定理 4.6 T : $[m, C]$-isometric,　S : $[n, D]$-isometric

$\implies T \otimes S$: $[m + n - 1, C \otimes D]$-isometric on $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$

5. ∞-complex symmetric operators

$$\delta_m(T;C) := \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \binom{m}{j} T^{*m-j} \cdot CT^jC$$

とおく.

定義 5.1 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$: ∞-*complex symmetric with* C $\iff$ $\limsup_{m\to\infty} \|\delta_m(T;C)\|^{\frac{1}{m}} = 0$
各クラスの関係は次である

$$\{1\text{−CSO}\} \subset \{2\text{−CSO}\} \subset \{3\text{−CSO}\} \subset \cdots \subset \{m\text{−CSO}\} \subset \cdots \subset \{\infty\text{−CSO}\}$$

例 5.1 C : on $\mathcal{H} = \ell^2$

$$C(\sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{x_n} e_n$$

where $\{e_n\}$: orthonormal basis of $\mathcal{H}$. $^\forall\epsilon > 0$, choose a $N > 0$; $\dfrac{1}{N} < \epsilon$ このとき，定数 $m > N$ に対して W : weighted shift on $\mathcal{H}$ defined by

$$We_n = \frac{1}{2^{m+n}} e_{n+1} \ (n = 0, 1, 2, ...)$$

$\Longrightarrow$ $T = I + W$: ∞-complex symmetric

例 5.2 C_n : conjugation on $\mathbb{C}^n$ defined by $C_n(z_1, z_2, \cdots, z_n) := (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \cdots, \overline{z_n})$ and let $T = \oplus_{n=1}^{\infty} T_n$ where T_n has the following form;

$$T_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \frac{1}{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_n & \frac{1}{n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

for a bounded set $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...\}$. Then T is an ∞-*complex symmetric operator* with conjugation $C = \oplus_{n=1}^{\infty} C_n$.

- x, y : C-*orthogonal* $\iff$ $\langle Cx, y\rangle = 0$ と定義する．このとき次の定理が成り立つ．

定理 5.1 T : ∞-complex symmetric operator with C, λ, μ : distinct eigenvalues of T
(1) Eigenvectors of T corresponding to λ and μ : C-orthogonal
(2) $\{x_n\}$, $\{y_n\}$: sequences of unit vectors; $\lim_{n\to\infty}(T-\lambda)x_n = 0$ and $\lim_{n\to\infty}(T-\mu)y_n = 0$
$\Longrightarrow$ $\lim_{k\to\infty}\langle Cx_{n_k}, y_{n_k}\rangle = 0$, where $\langle Cx_{n_k}, y_{n_k}\rangle$: convergent subsequence of $\langle Cx_n, y_n\rangle$

定理 5.2 Q : quasinilpotent $\Longrightarrow$ $T = aI + Q$: ∞-complex symmetric $^\forall a \in \mathbb{C}$

定理 5.3 T : m-complex symmetric with C $\quad \lambda \in \sigma_p(T) \Longrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$

T : ∞-complex symmetric のときは 定理 5.3 は成り立たない.

例 5.3 C : the conjugation on $\mathcal{H}$ given by

$$C(\sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \overline{x_n} e_n$$

where $\{e_n\}$ is an orthonormal basis of $\mathcal{H}$ and let W be the weighted shift on $\mathcal{H}$ defined by $We_n = \frac{1}{n+1} e_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$.
If $T = \lambda I + W^*$, then T is an ∞-complex symmetric operator. Moreover, $(T - \lambda I)e_0 = W^* e_0 = 0$, but $(T^* - \overline{\lambda} I)Ce_0 = WCe_0 = We_0 = e_1 \neq 0$.

次に結果を羅列する.
定理 5.4 $\{T_n\}$: sequence of commuting ∞-complex symmetric with C such that $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0 \quad \Longrightarrow T$: ∞-complex symmetric with C

定理 5.5 C : conjugation on $\mathcal{H}$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$: complex symmetric with C and $ST = TS$
(1) ST : m-complex symmetric with C $\rightleftharpoons$ S : m-complex symmetric on $\overline{\mathrm{R}(T^m)}$
(2) S : ∞-complex symmetric with C $\Longrightarrow$ ST : ∞-complex symmetric with C

定理 5.6 $S, T \in B(\mathcal{H})$, C : conjugation on $\mathcal{H}$ (T, S) : C-doubly commuting
(1) T : m-complex symmetric, S : n-complex symmetric
$\Longrightarrow$ $T + S$: $(m + n - 1)$-complex symmetric
(2) T : complex symmetric, S : ∞-complex symmetric
$\Longrightarrow$ $T + S$: ∞-complex symmetric

定理 5.7 T, S :∞-complex symmetric operators with conjugations C and D
(T, S) : doubly commuting $\Longrightarrow$ $T \otimes S$: ∞-complex symmetric with conjugation $C \otimes D$.

6. m-isometric commuting tuple

ここでは n-tuple $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_n) \in B(\mathcal{H})^n$ について紹介するので, conjugation C の入らない m-isometric tuple の研究を紹介します.

$\mathbf{T} = (T_1, ..., T_n) \in B(\mathcal{H})^n$: 可換な n-tuple に対して

$$\Phi_m(\mathbf{T}) := \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \sum_{|\alpha|=k} (-1)^{m-k} \frac{k!}{\alpha!} \mathbf{T}^{*\alpha} \mathbf{T}^{\alpha}$$

とする. ここで $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ のとき $\mathbf{T}^* = (T_1^*, ..., T_n^*)$, $\mathbf{T}^\alpha = T_1^{\alpha_1} \cdots T_n^{\alpha_n}$ であり $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ である.

定義 6.1 $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_n) \in B(\mathcal{H})^n$: 可換な n-tuple に対して, $\Phi_m(\mathbf{T}) = 0$ が成り立つとき, m-isometric tuple と呼ぶ.

$$\Omega_{\mathbf{T}}(S) := \sum_{k=0}^{m} T_k^* \, S T^k$$

とすれば $\Phi_{m+1}(\mathbf{T}) = \Omega_{\mathbf{T}}\big(\Phi_m(\mathbf{T})\big) - \Phi_m(\mathbf{T})$ が成り立つので $\mathbf{T}$: m-isometric tuple ならば n-isometric tuple $(n \geq m)$ である．スペクトルの性質として次の定理があげられる．

定理 6.1 (Gleason-Richter) $\mathbf{T}$: m-isometric tuple とするとき，次が成立する．
(1) $r(\mathbf{T}) = 1$ (スペクトルは n 次元単位円の内部にある)
(2) $z \in \sigma_{ja}(\mathbf{T}) \implies |z| = 1$ (joint 近似点スペクトルは n 次元単位円周上にある)

$\mathbf{Q} = (Q_1, ..., Q_n)$: nilpotent tuple of order k とは，すべての $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n); |\alpha| = k$ に対して $\mathbf{Q}^\alpha = 0$ のときをいう．最初に次の補題が成り立つ．

補題 6.1 (Gu) $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_n), \mathbf{S} = (S_1, ..., S_n) \in B(\mathcal{H})^n$: 可換な n-tuple に対して $\Phi_m(\mathbf{T}+\mathbf{S}) = (T_1 + S_1, ..., T_n + S_n)$ とすると

$$\Phi_m(\mathbf{T}+\mathbf{S}) =$$
$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k}\sum_{|\alpha|=j}\sum_{|\beta|=k-j} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k-j \\ \beta \end{pmatrix} (\mathbf{T}^* + \mathbf{S}^*)^\beta \mathbf{S}^{*\alpha} \Phi_{m-k}(\mathbf{T}) \mathbf{T}^\alpha \mathbf{S}^\beta$$

この等式により，次の定理を得る．

定理 6.2 $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_n), \mathbf{Q} = (Q_1, ..., Q_n) \in B(\mathcal{H})^n$: 可換な n-tuples
$\mathbf{T}$: m-isometric tuple, $\mathbf{Q}$: nilpotent of order n のとき $\mathbf{T}+\mathbf{Q}$: $(m+2n-2)$-isometric tuple

2 つの n-tuple $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_n), \mathbf{S} = (S_1, ..., S_n)$ に対して double 可換とは

$$T_i S_j = S_j T_i, \quad T_i^* S_j = S_j T_i^* \quad (i, j = 1, 2, ..., n)$$

のときであり，$\mathbf{T} * \mathbf{S} = (T_1 \cdot S_1, ..., T_n \cdot S_n)$ と定義すると次の等式が成り立つ．

補題 6.3 (Gu) $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_n), \mathbf{S} = (S_1, ..., S_n) \in B(\mathcal{H})^n$: double 可換な n-tuple に対して

$$\Phi_m(\mathbf{T} * \mathbf{S}) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{|\alpha|=k} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ \alpha \end{pmatrix} \mathbf{T}^{*\alpha} \, \Phi_{m-k}(\mathbf{T}) \, \mathbf{T}^\alpha \, \beta_{\alpha_1}(S_1) \cdots \beta_{\alpha_n}(S_n)$$

この等式により，次の定理を得る．

定理 6.4 (Gu) $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_n), \mathbf{S} = (S_1, ..., S_n) \in B(\mathcal{H})^n$: double 可換な n-tuple とする．
$\mathbf{T}$: m-isometric tuple, S_i: k_i-isometry $(i = 1, ..., n)$
$\implies$ $\mathbf{T} * \mathbf{S}$: $(m + k_1 + \cdots + k_n - n)$-isometric tuple

最後に： 最近活発に，Hardy 空間上の multiplication 作用素の n-tuple などの研究が進められています．詳しくは論文 [15, [16], [17], [18] をご覧ください．これまですべてヒルベルト空間上の作用素についての研究を紹介しましたが，T が m-isometric とは

$$\beta_m(T) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} T^{*m-j} T^{m-j} = 0$$

なので　バナッハ空間 $\mathcal{X}$ 上の作用素 T のときは

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} \|T^{m-j}x\|^2 = 0 \quad ({}^\forall\, x \in \mathcal{X})$$

を満たすときと定義され，多くの研究があります．例えば文献 [4], [21] をご覧ください．さらに 距離空間 $(E; d)$ においても

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} d(T^{m-j}x,\, T^{m-j}y) = 0 \quad ({}^\forall\, x, y \in E)$$

を満たすときに，T を距離空間 E 上の m-isometric 作用素と定義され，研究が進められています．これについては文献 [5] をご覧ください．もちろん conjugation C についてもバナッハ空間で定義され，C に関連する研究も進められています．これについては文献 [12], [25] をご覧ください．(∞, C)-isometric 作用素についての研究は紹介出来ませんでしたが，文献 [9] をご覧ください．

参考文献

[1] J. Agler and M. Stankus, *m-Isometric transformations of Hilbert space. I*, Integr. Equat. Oper. Theory 21(1995), 383-429.

[2] J. Agler and M. Stankus, *m-Isometric transformations of Hilbert space. II*, Integr. Equat. Oper. Theory 23(1995), 1-48.

[3] J. Agler and M. Stankus, *m-Isometric transformations of Hilbert space. III*, Integr. Equat. Oper. Theory 24(1996), 379-421.

[4] T. Bermúdes, A. Martión and J.A. Noda, *Weighted shift and composition operators on ℓ_p which are (m, q)-isometries*, Linear Algebra Appl. 505(2016), 152-173.

[5] T. Bermúdes, A. Martión and V. Müller, *(m, q)-Isometric on metric spaces*, J. Operator Theory 72(2014), 313-329.

[6] M. Chō, C. Gu and W.Y. Lee, *Elementary properties of ∞-isometries on a Hilbert space*, Linear Alg. Appl. 511(2016), 378-402.

[7] M. Chō, E. Ko and Ji Eun Lee, *On (m, C)-isometric operators*, Complex Anal. Oper. Theory, 10(2016), 1679-1694.

[8] M. Chō, E. Ko and Ji Eun Lee, *On ∞-complex symmetric operators*, Glasgow Math. J. (2017), 1-16.

[9] M. Chō, E. Ko and Ji Eun Lee, *(∞, C)-isometric operators*, Operators and Matrices, 11(2017), 793-806.

[10] M. Chō, E. Ko and Ji Eun Lee, *Properties of m-complex symmetric operators*, Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. 62(2017), No. 2, 233-248.

[11] M. Chō, S. Ôta, K. Tanahashi, *Invertible weighted shift operators which are m-isometries*, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013) 4241-4247.
[12] M. Chō and K. Tanahashi, *On conjugations for Banach spaces*, Sci. Math. Jpn. **81** (2018), 37-45.
[13] S. R. Garcia and M. Putinar, *Complex symmetric operators and applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **358**(2006), 1285-1315.
[14] ―――――, *Complex symmetric operators and applications* II, Trans. Amer. Math. Soc. **359**(2007), 3913-3931.
[15] J. Gleason and S. Richter, *m-Isometric commuting tuples of operators on a Hilbert spaces*, Integr. Equat. Oper. Theory, 56(2006), 181-196.
[16] C. Gu, *Examples of m-isometric tuples of operators on a Hilbert space*, J. Korean Math. Soc. 55(2018), 225-251.
[17] C. Gu, *Common reducing subspaces of several weighted shifts with operator weights*, to appear in J. Math. Soc. Japan.
[18] C. Gu and M. Stankus, *Some results on higher order isometries and symmetries: Products and sums with a nilpotent operators*, Linear Algebra Applications, 469(2015), 500-509.
[19] J. W. Helton, *Operators with a representation as multiplication by x on a Sobolev space*, Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai **5**, Hilbert Space Operators, Tihany, Hungary (1970), 279-287.
[20] J. W. Helton, *Infinite dimensional Jordan operators and Strum-Liouville conjugate point theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 170 (1972), 305-331.
[21] P. Hoffman and M. Mackey, *(m,p)-Isometric and (m,∞)-isometric operator operator tuples on normed spaces*, Asian-Eur. J. Math. 8(2005), 1550022, 32pp.
[22] S. Jung, E. Ko, M. Lee, and J. Lee, *On local spectral properties of complex symmetric operators*, J. Math. Anal. Appl. **379**(2011), 325-333.
[23] S. Jung, E. Ko, and J. Lee, *On scalar extensions and spectral decompositions of complex symmetric operators*, J. Math. Anal. Appl. **382**(2011), 252-260.
[24] ―――――, *On complex symmetric operator matrices*, J. Math. Anal. Appl. **406**(2013), 373-385.
[25] H. Motoyoshi, *Linear operators and conjugations on a Banach space*, preprint.

Muneo Chō
Department of Mathematics, Kanagawa University, Hiratsuka 259-1293, Japan
e-mail: chiyom01@kanagawa-u.ac.jp

距離空間におけるリプシッツ作用素半群*

小林良和 (中央大学・理工学部，新潟大学) †

1. リプシッツ作用素半群

$X = (X, d)$ を $d(\cdot,\cdot)$ を距離とするを距離空間とし，$D \subset X$ とする．

定義 1. 連続写像 $\vartheta : [0,\infty) \times D \to D$ は，次の条件が満たされるとき，D 上の **セミフロー (連続半力学系)** とよばれる．

(f1) すべての $x \in D$ に対して，$\vartheta(0,x) = x$ である．
(f2) すべての $x \in D$ と $t, h \in [0,\infty)$ に対して，$\vartheta(t+h,x) = \vartheta(h,\vartheta(t,x))$ である．

各 $t \in [0,\infty)$ に対して，$T(t)x = \vartheta(t,x)(x \in D)$ とおいて，D からその中への連続作用素 (連続写像) の族 $\{T(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ が得られ，次の条件 (s1)(s2)(s3) を満たす．このような連続作用素の族は D 上の**連続作用素半群**とよばれる．さらに，次の (s4) が満たされるとき, $\{T(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ は D 上の**リプシッツ作用素半群** ([12]) と呼ばれる．

(s1) すべての $x \in D$ に対して，$T(0)x = x$ である．
(s2) すべての $x \in D$ と $t, h \in [0,\infty)$ に対して，$T(t+h)x = T(h)T(t)x$ である．
(s3) すべての $x \in D$ と $t \in [0,\infty)$ に対して，$\displaystyle\lim_{(h,y)\to(0,x)} T(t+h)y = T(t)x$ である．
(s4) 任意の $\tau > 0$ に対し, $M_\tau \geq 1$ が定まり, 任意の $t \in [0,\tau]$, $x, y \in D$ に対し, 次が成り立つ.

$$d(T(t)x, T(t)y) \leq M_\tau d(x,y).$$

命題 1 ([12])**.** $\{T(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ を D 上の連続作用素半群とする．$\{T(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ が D 上のリプシッツ作用素半群であるためには，次の互いに同値な条件が成り立つことが必要十分である．

---

* 本研究は，田中直樹氏 (静岡大学・理学部) との一連の共同研究に基づく．また，科学研究費補助金（課題番号 16K05212）の支援を受けています．

† kobayashi@math.chuo-u.ac.jp

(1) $M \geq 1$, $\omega \in [0,\infty)$ が定まり, 任意の $t \in [0,\infty)$, $x,y \in D$ に対し, 次が成り立つ.

$$d(T(t)x, T(t)y) \leq Me^{\omega t} d(x,y).$$

(2) $M \geq m > 0$, $\omega \in [0,\infty)$ と D 上の距離 $\Phi(\cdot,\cdot)$ が定まり, 任意の $t \in [0,\infty)$, $x,y \in D$ に対し, 次が成り立つ.

$$md(x,y) \leq \Phi(x,y) \leq Md(x,y), \quad \Phi(T(t)x, T(t)y) \leq e^{\omega t}\Phi(x,y). \tag{1}$$

(3) $M \geq m > 0$, $\omega \in [0,\infty)$ と $X \times X$ 上でリプシッツ連続な非負値汎関数 $\Phi(\cdot,\cdot)$ が定まり, 任意の $t \in [0,\infty)$, $x,y \in D$ に対し, (1) が成り立つ.

証明. $\tau > 0$ とし, $M \geq 1$ に対し,

$$d(T(t)x, T(t)y) \leq Md(x,y)$$

が，任意の $t \in [0,\tau]$, $x,y \in D$ に対し成り立つものとする．このとき，$\omega = (\log M)/\tau (\geq 0)$ と定める．$t \in [0,\infty)$ に対し，$h \in [0,\tau)$ と非負整数 n を $t = n\tau + h$ を満たすように選ぶと，$M^n = e^{n\tau\omega} \leq e^{\omega t}$ であるから，$x,y \in D$ に対し,

$$d(T(t)x, T(t)y) = d(T(\tau)^n T(h)x, T(\tau)^n T(h)y) \leq M^{n+1} d(x,y) \leq Me^{\omega t} d(x,y)$$

となる．次に，これを仮定する．$x,y \in D$ のとき,

$$\Phi(x,y) = \sup_{s \in [0,\infty)} e^{-\omega s} d(T(s)x, T(s)y)$$

とおけば，仮定より $\Phi(x,y) \leq Md(x,y)$ であり，また明らかに $\Phi(x,y) \geq d(x,y)$ である．$\Phi(\cdot,\cdot)$ が，D 上の距離を与えることも明らかである．さらに，$t \in [0,\infty)$, $x,y \in D$ のとき,

$$\begin{aligned}
\Phi(T(t)x, T(t)y) &= \sup_{s \in [0,\infty)} e^{-\omega s} d(T(s)T(t)x, T(s)T(t)y) \\
&= e^{\omega t} \sup_{s \in [0,\infty)} e^{-\omega(s+t)} d(T(s+t)x, T(s+t)y) \\
&\leq e^{\omega t}\Phi(x,y)
\end{aligned}$$

となる．(2) を仮定する．$x,y,\hat{x},\hat{y} \in D$ のとき，三角不等式により,

$$\begin{aligned}
|\Phi(x,y) - \Phi(\hat{x},\hat{y})| &\leq |\Phi(x,y) - \Phi(\hat{x},y)| + |\Phi(\hat{x},y) - \Phi(\hat{x},\hat{y})| \\
&\leq \Phi(x,\hat{x}) + \Phi(y,\hat{y}) \\
&\leq M(d(x,\hat{x}) + d(y,\hat{y}))
\end{aligned}$$

である．そこで，$\Phi(\cdot,\cdot)$ の $D\times D$ 上の最小のリプシッツ定数を L とする：

$$|\Phi(x,y)-\Phi(\hat{x},\hat{y})|\leq L(d(x,\hat{x})+d(y,\hat{y}))\quad \text{for}\quad x,y,\hat{x},\hat{y}\in D.$$

ここで，$\hat{y}=\hat{x}=y$ とおけば，$\Phi(x,y)\leq Ld(x,y)$ が $x,y\in D$ に対して成り立つことがわかる．そこで，$x,y\in X$ のとき，

$$\widetilde{\Phi}(x,y)=\sup\{\Phi(x',y')-L(d(x,x')+d(y,y'));x',y'\in D\}$$

と定める．$x',y'\in D$ のとき，

$$\Phi(x',y')-L(d(x,x')+d(y,y'))\leq Ld(x',y')-L(d(x,x')+d(y,y'))\leq Ld(x,y)$$

であるから，任意の，$x,y\in X$ に対し，$\widetilde{\Phi}(x,y)\leq Ld(x,y)$ である．$x,y\in D$ のとき，$\widetilde{\Phi}(\cdot,\cdot)$ の定め方から，$\widetilde{\Phi}(x,y)\geq\Phi(x,y)$ であるが，ある $x,y\in D$ に対し $\widetilde{\Phi}(x,y)>\Phi(x,y)$ であると仮定すると，ある $x',y'\in D$ に対し，

$$\Phi(x',y')-L(d(x,x')+d(y,y'))>\Phi(x,y)$$

となり，これは L のとりかたに反する．ゆえに，$x,y\in D$ のとき，$\widetilde{\Phi}(x,y)=\Phi(x,y)$ である．$x,y,\hat{x},\hat{y}\in X$ で，$x',y'\in D$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}&(\Phi(x',y')-L(d(x,x')+d(y,y')))-(\Phi(x',y')-L(d(\hat{x},x')+d(\hat{y},y')))\\&\leq L(d(x,\hat{x})+d(y,\hat{y}))\end{aligned}$$

である．これから，

$$\widetilde{\Phi}(x,y)-\widetilde{\Phi}(\hat{x},\hat{y})\leq L(d(x,\hat{x})+d(y,\hat{y}))$$

が従う．ゆえに，$\widetilde{\Phi}(\cdot,\cdot)$ は $X\times X$ 上で， リプシッツ 連続である．これで，$\Phi(x,y)=\max\{\widetilde{\Phi}(x,y),0\}$ を汎関数 として (3) が成り立つことがわかる．最後に，(3) が成り立てば，$\{T(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ は D 上のリプシッツ作用素半群になることは自明である． □

定義 2. $\{T(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ を D 上の**リプシッツ作用素半群**とし，$\Phi(\cdot,\cdot)$ を $X\times X$ 上のリプシッツ連続な非負値汎関数とする．$\omega\in[0,\infty)$ が定まり，任意の $t\in[0,\infty)$，$x,y\in D$ に対し, 次が成り立つとき，$\{T(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ は D 上で $\Phi(\cdot,\cdot)$ について，$(\omega-)$ **準縮小的**であるという．また，特に $\omega=0$ にとれるときは，単に**縮小的**であるという．

$$\Phi(T(t)x,T(t)y)\leq e^{\omega t}\Phi(x,y). \tag{2}$$

$M\geq m>0$ を定数, 汎関数 $\Phi(\cdot,\cdot):X\times X\to[0,\infty)$ は $X\times X$ 上でリプシッツ連続で，次の条件をみたすものとする：

(Φ1) $x, y, \hat{x}, \hat{y} \in D$ に対し

$$|\Phi(x,y) - \Phi(\hat{x},\hat{y})| \leq M(d(x,\hat{x}) + d(y,\hat{y}))$$

(Φ2) $x, y \in D$ に対し

$$md(x,y) \leq \Phi(x,y) \leq Md(x,y)$$

$\omega \in [0,\infty)$ とし，$\{T(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ は，$\Phi(\cdot,\cdot)$ につい ω-準縮小的な D 上のリプシッツ作用素半群とする．

命題 2. 任意の $x, y \in D$ と，$t, s \in [0,\infty)$ に対して，次が成り立つ．

$$\int_0^s \bigl(\Phi(T(t)x, T(\sigma)y) - \Phi(x, T(\sigma)y)\bigr)d\sigma$$
$$+ \int_0^t \bigl(\Phi(T(\tau)x, T(s)y) - \Phi(T(\tau)x, y)\bigr)d\tau \leq \omega \int_0^t \int_0^s \Phi(T(\tau)x, T(\sigma)y)d\tau d\sigma$$

証明．$x, y \in D$ とする．$0 \leq s \leq t$ とする．

$$\int_0^s \Phi(T(t)x, T(\sigma)y)e^{-\omega t}\, d\sigma = \int_0^s \Phi(T(\sigma)T(t-\sigma)x, T(\sigma)y)e^{-\omega t}\, d\sigma$$
$$\leq \int_0^s \Phi(T(t-\sigma)x, y)e^{-\omega(t-\sigma)}\, d\sigma = \int_{t-s}^t \Phi(T(\tau)x, y)e^{-\omega\tau}\, d\tau$$

$$\int_0^t \Phi(T(\tau)x, T(s)y)e^{-\omega\tau}\, d\tau = \int_0^s \Phi(T(\tau)x, T(\tau)T(s-\tau)y)e^{-\omega\tau}\, d\tau$$
$$+ \int_s^t \Phi(T(s)T(\tau-s)x, T(s)y)e^{-\omega\tau}\, d\tau$$
$$\leq \int_0^s \Phi(x, T(s-\tau)y)\, d\tau + \int_s^t \Phi(T(\tau-s)x, y)e^{-\omega(\tau-s)}\, d\tau$$
$$= \int_0^s \Phi(x, T(\sigma)y)\, d\sigma + \int_0^{t-s} \Phi(T(\tau)x, y)e^{-\omega\tau}\, d\tau$$

$$\therefore \quad \int_0^s \Phi(T(t)x, T(\sigma)y)e^{-\omega t}\, d\sigma + \int_0^t \Phi(T(\tau)x, T(s)y)e^{-\omega\tau}\, d\tau$$
$$\leq \int_0^s \Phi(x, T(\sigma)y)\, d\sigma + \int_0^t \Phi(T(\tau)x, y)e^{-\omega\tau}\, d\tau$$

対称性からこの不等式は $0 \le t \le s$ のときも成り立つ．$h > 0$ とすると，次が従う．

$$
\begin{aligned}
0 \ge \frac{1}{h}&\biggl(\int_0^s \Bigl(\int_t^{t+h} \Phi(T(\tau)x, T(\sigma)y)e^{-\omega h}\, d\tau - \int_0^h \Phi(T(\tau)x, T(\sigma)y)e^{-\omega h}\, d\tau\Bigr)\biggr)d\sigma \\
&+ \frac{1}{h}\biggl(\int_0^s (e^{-\omega h} - 1)\int_0^t \Phi(T(\tau)x, T(\sigma)y)\, d\tau\biggr)d\sigma \\
&+ \frac{1}{h}\int_0^t \biggl(\int_0^h \bigl(\Phi(T(\tau'+\tau)x, T(s)y) - \Phi(T(\tau'+\tau)x, y)\bigr)e^{-\omega\tau'} d\tau'\biggr)d\tau
\end{aligned}
$$

ここで $h \downarrow 0$ とすればよい．　□

$\Psi : X \to [0, \infty]$ の値を次で定める：ある列 $x_n \in D$ と $h_n > 0$ が存在して，$n \to \infty$ のとき，$x_n \to x \in X$ で，$h_n \to 0$ が成り立ち，さらに，すべての n に対して

$$\Phi(T(h_n)x_n, x_n)/h_n \le L$$

を満たす正定数 L が存在するときは，その正定数の下限を $\Psi(x)$ とし，その他の場合は $\Psi(x) = +\infty$ とする．また，$D(\Psi) = \{x \in X\,;\, \Psi(x) < \infty\}$ を Ψ の有効域とする．

命題 3. D は閉集合と仮定する．

(1) Ψ は X 上で下半連続で, $t \in [0, \infty), x \in D(\Psi)$ のとき, 次がなりたつ：

$$\Psi(T(t)x) \le e^{\omega t}\Psi(x).$$

(2) $x \in D$ について，$\Psi(x) < \infty$ となるのは，$u(t) = T(t)x$ が $[0, \infty)$ 上で局所リプシッツ連続になるときで，かつ，そのときに限られる．また，このとき，

$$\Phi(T(t+h)x, T(t)x) \le \frac{M}{m}\Psi(x)e^{\omega t}\int_0^h e^{\omega(h-s)}\, ds, \quad t, h \in [0, \infty)$$

が成り立つ．

証明．$x_n \in X$ は $x_n \to x$ で $\Psi(x_n) \le L < \infty$ とする．このとき，$y_n \in D$ と $h_n \in (0, 1/n)$ を選んで

$$d(y_n, x_n) < 1/n,\ \Phi(T(h_n)y_n, y_n) \le h_n(L + 1/n)$$

を満たすようにできる．このとき，$y_n \to x$ だから，$\Psi(x) \le L$ となる．ゆえに，Ψ は X 上で下半連続である．次に $x \in D(\Psi)$ で $x_n \in D,\ h_n > 0$ で $x_n \to x, h_n \to 0$, $\sup_n \Phi(T(h_n)x_n, x_n)/h_n \le L$ とする．このとき，

$$\sup_n \Phi(T(h_n)T(t)x_n, T(t)x_n)/h_n \le e^{\omega t}\sup_n \Phi(T(h_n)x_n, x_n)/h_n \le Le^{\omega t}$$

で，$T(t)x_n \to T(t)x$ であるから，$T(t)x \in D(\Psi)$ で，$\Psi(T(t)x) \le e^{\omega t}\Psi(x)$ がなりたつ．$x \in D$ で $u(t) = T(t)x$ は $[0, \infty)$ 上で局所リプシッツ連続とする．$\tau > 0$ として，ある $L > 0$ に対し，$d(T(t)x, x) \le Lt$ $(t \in [0, \tau])$ である．$\Phi(T(t)x, x) \le Md(T(t)x, x) \le LMt$ であるから，$x \in D(\Psi)$ となる．逆に $x \in D(\Psi)$ とし，$x_n \in D$, $h_n > 0$ で $x_n \to x, h_n \to 0, \sup_n \Phi(T(h_n)x_n, x_n)/h_n \le L$ とする．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h_n}\int_0^{h_n} (\Phi(T(t)x_n, T(\sigma)x_n) - \Phi(x_n, T(\sigma)x_n))\,d\sigma \\
&-\frac{\omega}{h_n}\int_0^{h_n}\left(\int_0^t \Phi(T(\tau)x_n, T(\sigma)x_n)\,d\tau\right)d\sigma \\
\le\ &\frac{1}{h_n}\int_0^t (\Phi(T(\tau)x_n, x_n) - \Phi(T(\tau)x_n, T(h_n)x_n))\,d\tau \\
\le\ &\frac{1}{h_n}\int_0^t Md(x_n, T(h_n)x_n)\,d\tau \le t(M/m)\Phi(T(h_n)x_n, x_n)/h_n
\end{aligned}$$

ここで，$n \to \infty$ とすると，

$$\Phi(T(t)x, x) - \omega\int_0^t \Phi(T(\tau)x, x)\,d\tau \le \frac{M}{m}tL$$

を得る．これから，

$$\Phi(T(t)x, x) \le \frac{M}{m}\Psi(x)\int_0^t e^{\omega(t-s)}\,ds$$

を得て，結果の評価を得る．また，$u(t) = T(t)x$ は $[0, \infty)$ 上で局所リプシッツ連続であることがわかる．

注意 1. $\Phi(\cdot, \cdot)$ が D 上の距離になるとき，$x \in D(\Psi)$, $t, h \in [0, \infty)$ のとき，

$$\Phi(T(t+h)x, T(t)x) \le \Psi(x)e^{\omega t}\int_0^h e^{\omega(h-s)}\,ds$$

が成り立つ．また，このことから，

$$\Psi(x) = \lim_{h\downarrow 0}\Phi(T(h)x, x)/h$$

が従う．

2. 推移と変異空間

定義 3 ([4])**.** X 上のリプシッツ作用素半群 $\{T(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ により, $\vartheta(t, x) = T(t)x((t, x) \in [0, \infty) \times X))$ で与えられる写像 $\vartheta : [0, \infty) \times X \to X$ は，任意の $\tau > 0$ に対して，ある定

数 $L_\tau \in [0,\infty)$ が存在して,

$$d(\vartheta(t,x),\vartheta(s,x)) \le L_\tau |t-s|$$

がすべての $x \in X$ と $t,s \in [0,\tau]$ に対して成り立つとき,X 上の**推移** (transition) とよばれる.

命題 4. $\vartheta : [0,\infty) \times X \to X$ を X 上のセミフローとする.このとき,ϑ が (X,d) 上の推移になるための必要十分条件は,実数 $\alpha \in [0,\infty)$, $\beta \in [0,\infty)$, $\gamma \in [1,\infty)$ と X 上の距離 $d_\vartheta(\cdot,\cdot)$ が存在して,以下の条件が満たされることである.

(t1) すべての $t \in [0,\infty)$ と $x,y \in X$ に対して,$d_\vartheta(\vartheta(t,x),\vartheta(t,y)) \le e^{\alpha t} d_\vartheta(x,y)$ である.

(t2) すべての $t \in [0,\infty)$ と $x \in X$ に対して $d_\vartheta(\vartheta(t,x),x) \le \beta t e^{\alpha t}$ である.

(t3) すべての $x,y \in X$ に対して $d(x,y) \le d_\vartheta(x,y) \le \gamma d_\vartheta(x,y)$ である.

このとき,

$$\begin{aligned} d_\vartheta(\vartheta(t+h,x),\vartheta(t,y)) &\le \beta \int_0^h e^{s\alpha}\,ds + e^{t\alpha} d_\vartheta(x,y) \qquad (3) \\ d_\vartheta(\vartheta(t+h,x),\vartheta(t,x)) &\le h\beta e^{h\alpha} \end{aligned}$$

がすべての $t,h \in [0,\infty)$ と $x,y \in X$ に対して成り立つ.

定義 4. 上のとき,

$$\begin{aligned} \alpha(\vartheta) &= \limsup_{h\downarrow 0} h^{-1}(\max\{1, \mathrm{Lip}_\vartheta(\vartheta(h,\cdot))\} - 1) \\ \beta(\vartheta) &= \sup_{x\in X}\bigl(\limsup_{h\downarrow 0} h^{-1} d_\vartheta(\vartheta(h,x),x)\bigr) \\ \gamma(\vartheta) &= \sup\Bigl\{ d_\vartheta(x,y)/d(x,y) \,\Big|\, x,y \in X,\ x \ne y \Bigr\} \end{aligned}$$

とかく.ただし,

$$\mathrm{Lip}_\vartheta(\vartheta(t,\cdot)) = \sup\{d_\vartheta(\vartheta(t,x),\vartheta(t,y))/d_\vartheta(x,y) \,|\, x,y \in X,\ x \ne y\}$$

である. なお.$x \in X$ のとき

$$\limsup_{h\downarrow 0} h^{-1} d_\vartheta(\vartheta(h,x),x) = \liminf_{h\downarrow 0} h^{-1} d_\vartheta(\vartheta(h,x),x)$$

が成り立つ.

定義 5. $\Theta(X)$ を (X,d) 上の推移の空でない集合とするとき，対 $(X,\Theta(X))$ を**変異空間** (mutational space) という．$(X,\Theta(X))$ を変異空間とする．$\vartheta,\tau\in\Theta(X)$ に対して，

$$D(\vartheta,\tau)=\sup_{x\in X}\left(\limsup_{h\downarrow 0}h^{-1}d(\vartheta(h,x),\tau(h,x))\right)$$

とおいて，$D(\cdot,\cdot):\Theta(X)\times\Theta(X)\to[0,\infty)$ を定義する．$\vartheta\in\Theta(X)$ のとき，

$$\hat{\beta}(\vartheta)=\sup_{x\in X}\bigl(\limsup_{h\downarrow 0}h^{-1}d(\vartheta(h,x),x)\bigr)$$

とかく．$\vartheta,\tau\in\Theta(X)$ のとき

$$\hat{\beta}(\vartheta)\le\beta(\vartheta)\le\gamma(\vartheta)\hat{\beta}(\vartheta)$$

と

$$|\hat{\beta}(\vartheta)-\hat{\beta}(\tau)|\le D(\vartheta,\tau)\le\hat{\beta}(\vartheta)+\hat{\beta}(\tau)$$

が成り立つ．よって，$D(\vartheta,\tau)\to 0$ のとき，$|\hat{\beta}(\vartheta)-\hat{\beta}(\tau)|\to 0$ である．

次の命題から，$D(\cdot,\cdot)$ は $\Theta(X)$ 上の距離を与える．$\Theta(X)$ はこの距離を伴う距離空間とする．

命題 5. $\vartheta,\tau\in\Theta(X)$ とする．このとき，$x,y\in X$ と $t\in[0,\infty)$ に対して，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}d_\vartheta(\vartheta(t,x),\tau(t,y))&\le e^{\alpha(\vartheta)t}d_\vartheta(x,y)+\gamma(\vartheta)D(\vartheta,\tau)\int_0^t e^{\alpha(\vartheta)s}\,ds\\&\le\gamma(\vartheta)\bigl(d(x,y)+tD(\vartheta,\tau)\bigr)e^{\alpha(\vartheta)t}\end{aligned}\tag{4}$$

$$d_\vartheta(\vartheta(t,x),\tau(t,x))\le\gamma(\vartheta)D(\vartheta,\tau)\int_0^t e^{\alpha(\vartheta)s}\,ds\le t\gamma(\vartheta)D(\vartheta,\tau)e^{\alpha(\vartheta)t}$$

証明. $x,y\in X$ とし，$\varphi(t)=d_\vartheta(\vartheta(t,x),\tau(t,y))$ $(t\in[0,\infty))$ とおく．$0\le t<t+h<\infty$ とする．次が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\varphi(t+h)-\varphi(t)\\&=d_\vartheta(\vartheta(t+h,x),\tau(t+h,y)))-d_\vartheta(\vartheta(t,x),\tau(t,y))\\&\le d_\vartheta(\vartheta(t+h,x),\vartheta(h,\tau(t,y)))+d_\vartheta(\vartheta(h,\tau(t,y)),\tau(t+h,y))\\&\quad-d_\vartheta(\vartheta(t,x),\tau(t,y))\\&=d_\vartheta(\vartheta(h,\vartheta(t,x)),\vartheta(h,\tau(t,y)))-d_\vartheta(\vartheta(t,x),\tau(t,y))\\&\quad+d_\vartheta(\vartheta(h,\tau(t,y)),\tau(h,\tau(t,y)))\\&\le(e^{h\alpha(\vartheta)}-1)d_\vartheta(\vartheta(t,x),\tau(t,y))+d_\vartheta(\vartheta(h,\tau(t,y)),\tau(h,\tau(t,y)))\end{aligned}$$

よって，

$$
\begin{aligned}
&\overline{D}_{+}\varphi(t) = \limsup_{h\downarrow 0}(\varphi(t+h)-\varphi(t))/h \\
&\le \alpha(\vartheta)d_{\vartheta}(\vartheta(t,x),\tau(t,y)) + \limsup_{h\downarrow 0} d_{\vartheta}(\vartheta(h,\tau(t,y)),\tau(h,\tau(t,y)))/h \\
&\le \alpha(\vartheta)d_{\vartheta}(\vartheta(t,x),\tau(t,y)) + \gamma(\vartheta)\limsup_{h\downarrow 0} d(\vartheta(h,\tau(t,y)),\tau(h,\tau(t,y)))/h \\
&\le \alpha(\vartheta)\varphi(t) + \gamma(\vartheta)D(\vartheta,\tau).
\end{aligned}
$$

である．$\varphi(\cdot)$ は $[0,\infty)$ 上で局所的にリプシッツ連続だから，(4) を得る． $\square$

定義 6 ([4])**.** $u:[0,T]\to X$ とする． 各 $t\in[0,T)$ に対して

$$\overset{\circ}{u}(t) = \{\vartheta\in\Theta(X) \mid \lim_{h\downarrow 0} d(u(t+h),\vartheta(h,u(t)))/h = 0\} \tag{5}$$

を u の t における**変異** (mutation) という．関数 $F:D(\subset X)\to\Theta(X)$ が与えられているとし，$u:[0,T]\to X$ は $[0,T]$ 上でリプシッツ連続とする．すべての $t\in[0,T)$ に対して， $u(t)\in D$ で，

$$\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}d(x(t+h),F(x(t))(h,x(t))) = 0 \tag{6}$$

が成り立つとき，u は**変異方程式** (mutational equation)

$$\overset{\circ}{u}(\cdot)\ni F(u(\cdot)) \quad \text{または} \quad \overset{\circ}{u}(t)\ni F(u(t)), \quad t\in[0,T] \tag{7}$$

の解であるという．

3. 変異方程式の可解性とリプシッツ作用素半群の生成

$X=(X,d)$ は完備な距離空間，$(X,\Theta(X))$ を変異空間とする．X の中心 $x\in X$ で半径 $r\in(0,\infty)$ の閉球を $B[x,r]$ で表す．D を X の閉集合，$\Phi:X\times X\to[0,\infty)$ は次の条件を満たすものとする．

(Φ1) $\qquad |\Phi(x,y)-\Phi(\hat{x},\hat{y})| \le \overline{M}(d(x,\hat{x})+d(y,\hat{y})) \quad (x,y),\ (\hat{x},\hat{y})\in X\times X,$

(Φ2) $\qquad \underline{m}d(x,y)\le\Phi(x,y)\le\overline{M}d(x,y), \quad (x,y)\in D\times D.$

ここで $0<\underline{m}\le\overline{M}<\infty$ である．

$F:D\to\Theta(X)$ とし，$\omega\in[0,\infty)$ とする．次の条件が満たされていると仮定する．

$(F0)$ (同程度リプシッツ性) ある定数 $\overline{L} \in [1, \infty)$ が存在して, すべての $z \in D$, $x, y \in D$, $h \in [0,1]$ に対して $d(F(z)(h,x), F(z)(h,y)) \leq \overline{L} d(x,y)$ である.

$(F1)$ (連続性) F は D 上で連続である：

$$\lim_{y \to x} D(F(y), F(x)) = 0, \quad x \in D.$$

$(F2)$ (準消散性) ある定数 $\omega \in [0, \infty)$ が存在して，すべての $x, y \in D$ に対して，次が成り立つ：

$$\liminf_{h \downarrow 0} h^{-1} \big(\Phi(F(x)(h,x), F(y)(h,y)) - \Phi(x,y) \big) \leq \omega \Phi(x,y)$$

$(F3)$ (劣接触条件) すべての $x \in D$ に対して，次が成り立つ：

$$\liminf_{h \downarrow 0} h^{-1} d(F(x)(h,x), D) = 0.$$

ここで $d(x, D) = \inf_{y \in D} d(x,y)$ である.

次の定理が成り立つ.

定理 1 ([13])**.** 各 $x \in D$ に対して，次の初期値問題の $[0, \infty)$ 上で局所リプシッツ連続な一意解が存在する：

$$\overset{\circ}{u}(t) \ni F(u(t)), \quad t \in [0, \infty), \quad u(0) = x.$$

さらに，このとき，$T(t)x = u(t)$ とおくと，$\{T(t)\}_{t \in [0,\infty)}$ は D 上のリプシッツ作用素半群になり，

$$\Phi(T(t)x, T(t)y) \leq e^{\omega t} \Phi(x,y), \qquad t \in [0, \infty) \qquad x, y \in D$$

が満たされる.

条件 (F0) により，必要ならば距離 $d_{F(x)}(\cdot, \cdot)(x \in D)$ を取り直して，適当な $\overline{\alpha} \in [0, \infty)$ と $\overline{\gamma} \in [1, \infty)$ が存在して，すべての $x \in D$ に対し，$\alpha(F(x)) \leq \overline{\alpha}$, と $\gamma(F(x)) \leq \overline{\gamma}$ が成り立つことがわかるので，以下，このように仮定する．このとき，定理は，論文 [12] と同様に，以下の補題と命題を用いて証明される.

補題 1. $x_0 \in D$ とする．このとき，$\rho \in (0, \infty)$, $M \in (0, \infty)$ と $\sigma \in (0, \infty)$ で，すべての $x \in D \cap B[x_0, \rho]$ に対して $\sigma\big(1 + \overline{\gamma} M e^{\overline{\alpha}\sigma}\big) \leq \rho$ と $\hat{\beta}(F(x)) \leq M$ を満たすものが存在する.

補題 2. $x_0 \in D$, $\rho \in (0,\infty)$, $M \in (0,\infty)$ と $\sigma \in (0,\infty)$ とし，すべての $x \in D \cap B[x_0,\rho]$ に対して，$\sigma\bigl(1+\overline{\gamma}Me^{\overline{\alpha}\sigma}\bigr) \le \rho$ と $\hat{\beta}(F(x)) \le M$ が成り立つとする．$s_0 \in (0,\infty)$ と $\lambda \in (0,1]$ とする．$\{(s_k,x_k)\}_{k=1}^{N}$ は，$[s_0, s_0+\sigma] \times D$ 内の列で

(i) $s_0 < s_1 < \cdots < s_k < \cdots < s_N \le s_0 + \sigma$,

(ii) $d(F(x_{k-1})(s_k - s_{k-1}, x_{k-1}), x_k)) \le \lambda(s_k - s_{k-1}) \quad (k = 1,2,\ldots,N)$.

を満たすものとする．このとき，すべての $k = 0,1,\ldots,N$ に対して

$$
(\mathrm{P}_k) \qquad \begin{cases} \text{(a)} \quad d(x_l, x_k) \le (s_k - s_l)\bigl(\lambda + \overline{\gamma}Me^{\overline{\alpha}(s_k - s_0)}\bigr), \quad l = 0,1,\ldots,k, \\ \text{(b)} \quad x_k \in D \cap B[x_0, \sigma(1+\overline{\gamma}Me^{\overline{\alpha}\sigma})], \\ \text{(c)} \quad \hat{\beta}(F(x_k)) \le M. \end{cases}
$$

が成り立つ.

命題 6. $x_0 \in D$, $t_0 \in [0,\infty)$, $\varepsilon \in (0,1]$ とする．$\rho \in (0,\infty)$, $M \in (0,\infty)$ と $\tau \in (0,\infty)$ は $\tau\bigl(1+\overline{\gamma}Me^{\overline{\alpha}\tau}\bigr) \le \rho$ と $\hat{\beta}(F(x)) \le M$ $(x \in D \cap B[x_0,\rho])$ を満たすと仮定する．このとき，$[t_0, t_0+\tau] \times D$ 内の列 $\{(t_j,x_j)\}_{j=0}^{\infty}$ で以下を満たすものが存在する.

(i) $t_0 < t_1 < \cdots < t_j < \cdots < t_0 + \tau$,

(ii) $t_j - t_{j-1} \le \varepsilon,\ j = 1,2,\ldots,$

(iii) $d(F(x_{j-1})(t_j - t_{j-1}, x_{j-1}), x_j)) \le \varepsilon(t_j - t_{j-1}),\ j = 1,2,\ldots,$

(iv) if $x \in D \cap B[x_{j-1}, (t_j - t_{j-1})(1+\overline{\gamma}Me^{\overline{\alpha}\tau})]$, then
$D(F(x), F(x_{j-1})) \le \varepsilon,\ j = 1,2,\ldots,$

(v) $\lim_{j\to\infty} t_j = t_0 + \tau$.

補題 3. $x_0 \in D$ とする．このとき，任意の $\varepsilon \in (0,1]$ に対して，$h_\varepsilon \in (0,\infty)$ が定まり，任意の $h \in (0,h_\varepsilon]$ に対して，$x_h \in D$ が存在して，

$$
d_{F(x_0)}(F(x_0)(h,x_0)), x_h) \le 2h\varepsilon e^{\alpha(F(x_0))h}.
$$

となる.

命題 7. $x_0, \hat{x}_0 \in D$, $\varepsilon, \hat{\varepsilon} \in (0,1]$ とする．$\rho, \hat{\rho} \in (0,\infty)$, $M, \hat{M} \in (0,\infty)$, $\tau \in (0,\infty)$ は $\tau\bigl(1+\overline{\gamma}Me^{\overline{\alpha}\tau}\bigr) \le \rho$, $\tau\bigl(1+\overline{\gamma}\hat{M}e^{\overline{\alpha}\tau}\bigr) \le \hat{\rho}$, $\hat{\beta}(F(x)) \le M$ を任意の $x \in D \cap B[x_0,\rho]$ に対して，$\hat{\beta}(F(x)) \le \hat{M}$ を任意の $x \in D \cap B[\hat{x}_0,\rho]$ に対して満たすと仮定する．ε と $\hat{\varepsilon}$ は $(0,1]$ に属し，$3e^{\overline{\alpha}\tau}\varepsilon \le 1$ と $3e^{\overline{\alpha}\tau}\hat{\varepsilon} \le 1$ を満たすとする．$\{(t_j,x_j)\}_{j=0}^{\infty}$ を $[0,\tau] \times D$ 内の

列で，つぎを満たすものとする：

(i) $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_j < \cdots < \tau,$

(ii) $t_j - t_{j-1} \le \varepsilon/\overline{\gamma},\ j = 1, 2, \ldots,$

(iii) $d(F(x_{j-1})(s_j - s_{j-1}, x_{j-1}), x_j)) \le \varepsilon(s_j - s_{j-1})/\overline{\gamma},\ j = 1, 2, \ldots,$

(iv) $x \in D \cap B[x_{j-1}, (t_j - t_{j-1})(1 + \overline{\gamma} M e^{\overline{\alpha}\tau})]$ ならば
$D(F(x), F(x_{j-1})) \le \varepsilon/\overline{\gamma},\ j = 1, 2, \ldots,$

(v) $\lim_{j\to\infty} t_j = \tau.$

$[0,\tau] \times D$ 内の列 $\{(\hat{t}_j, \hat{x}_j)\}_{j=0}^{\infty}$ は対応する上の条件を満たすものとする．$\{s_j\}_{j=0}^{\infty}$ は $\{s_j \,|\, j = 0, 1, \ldots\} = \{\hat{t}_j \,|\, j = 0, 1, \ldots\} \cup \{t_j \,|\, j = 0, 1, \ldots\}$ と $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots$ を満たす列とする．このとき，$D \times D$ 内の列 $\{z_j, \hat{z}_j\}_{j=0}^{\infty}$ で，各 $j = 0, 1, 2, \ldots$ に対してつぎを満たすものが存在する：

(a) ある $p = 0, 1, \ldots,$ に対して $s_j = t_p$ ならば $z_j = x_p$; そうでないときは
$$d(F(z_{j-1})(s_j - s_{j-1}, z_{j-1}), z_j) \le 3\varepsilon(s_j - s_{j-1}) e^{\overline{\alpha}(s_j - s_{j-1})}.$$

(b) ある $\hat{p} = 0, 1, \ldots$ に対して $s_j = \hat{t}_{\hat{p}},$ ならば $z_j = \hat{x}_{\hat{p}}$; そうでなければ
$$d(F(\hat{z}_{j-1})(s_j - s_{j-1}, \hat{z}_{j-1}), \hat{z}_j) \le 3\hat{\varepsilon}(s_j - s_{j-1}) e^{\overline{\alpha}(s_j - s_{j-1})}.$$

(c) $k = 0, 1, \cdots, j$ に対して
$$d(z_k, z_j) \le (1 + \overline{\gamma} M e^{\overline{\alpha}\tau})(s_j - s_k) + 5\overline{\gamma}\varepsilon e^{\overline{\alpha}\tau} \sum_{t_p \in \{s_{k+1}, \ldots, s_j\}} (t_p - t_{p-1}).$$

(d) $k = 0, 1, \cdots, j$ に対して
$$d(\hat{z}_k, \hat{z}_j) \le (1 + \overline{\gamma} \hat{M} e^{\overline{\alpha}\tau})(s_j - s_k) + 5\overline{\gamma}\hat{\varepsilon} e^{\overline{\alpha}\tau} \sum_{\hat{t}_p \in \{s_{k+1}, \ldots, s_j\}} (\hat{t}_p - \hat{t}_{p-1}).$$

(e)
$$\Phi(z_j, \hat{z}_j) \le e^{\omega s_j} \Bigg\{ \Phi(x_0, \hat{x}_0) + L(\varepsilon + \hat{\varepsilon}) s_j + 5L\overline{\gamma} e^{\overline{\alpha}\tau} \Bigg[\varepsilon \sum_{t_p \in \{s_1, \ldots, s_j\}} (t_p - t_{p-1}) + \hat{\varepsilon} \sum_{\hat{t}_p \in \{s_1, \ldots, s_j\}} (\hat{t}_p - \hat{t}_{p-1}) \Bigg] \Bigg\}.$$

命題 8. 任意の $x_0 \in D$ に対して,$\tau \in (0, \infty)$ と次の問題の $[0,\tau]$ 上でリプシッツ連続な解 $u : [0,\tau] \to X$ が存在する：
$$\mathring{u}\,(t) \ni F(u(t)), \quad t \in [0,\tau], \quad u(0) = x_0.$$

命題 9. $x_0, y_0 \in D,\ \tau \in (0, \infty)$ とし，$u : [0,\tau] \to X,\ v : [0,\tau] \to X$ はそれぞれ次の $[0,\tau]$ 上でリプシッツ連続な解とする：
$$\mathring{u}\,(t) \ni F(u(t)), \quad t \in [0,\tau], \quad u(0) = x_0; \quad \mathring{v}\,(t) \ni F(v(t)), \quad t \in [0,\tau], \quad v(0) = y_0.$$

このとき，

$$\Phi(u(t), v(t)) \leq e^{\omega t}\Phi(x_0, y_0), \quad t \in [0, \tau]$$

が成り立つ．

4. Lax-Richtmyer の定理と Van Kampen の一意性定理

$X = (X, d)$ は $d(\cdot,\cdot)$ を距離とする完備距離空間とし，$D \subset X$ とする．

定義 7. D からその中への作用素の族 $\{C_h\}_{h\in(0,\infty)}$ はつぎの条件が満たされるとき**安定**であるという．

(S) 任意の $\tau > 0$ に対して，定数 $M_\tau \geq 1$ が存在して，すべての x, $y \in D$ と，$nh \in (0, \tau]$ であるすべての $h \in (0, \infty)$ と $n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$d(C_h^n x, C_h^n y) \leq M_\tau d(x, y)$$

が成り立つ．

注意 2. D 上の連続作用素の半群 $\{T(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ が安定であるのは，それがリプシッツ作用素半群のときである．

定義 8. $\{T(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ を D 上の半群，$\{C_h\}_{h\in(0,\infty)}$ を D から D の中への作用素の族とする．族 $\{C_h\}_{h\in(0,\infty)}$ は次を満たすとき $\{T(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ に**適合** であるという．

(C) D で稠密な集合 D_0 が存在して，任意の $x \in D_0$ と $\tau > 0$ に対して， $h \downarrow 0$ のとき，

$$\int_0^\tau h^{-1} d(T(t+h)x, C_h T(t)x)\, dt \to 0$$

となる．

次の命題が成り立つ．

命題 10. $u : [0, \tau] \to D$ は連続で，$\{C_h\}_{h\in(0,\infty)}$ は D からその中への作用素の族とする．族 $\{C_h\}_{h\in(0,\infty)}$ は D 上で安定とする．このとき，各 $\tau > 0$ に対して，

$$\limsup_{h\downarrow 0}\big(\sup_{t\in[0,\tau]} d(u(t), C_h^{[t/h]}u(0))\big) \leq \limsup_{h\downarrow 0}\int_0^\tau h^{-1} d(u(t+h)x, C_h u(t))\, dt.$$

である．

次の定理は安定な非線形作用素の族で，あるリプシッツ作用素半群に適合であるものは必ず収束することを示していて，Lax-Richtmyer の定理 [18] の非線形版と考えられる．

定理 2. $\{T(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ は D 上のリプシッツ作用素半群，$\{C_h\}_{h\in(0,\infty)}$ は D からその中への作用素の族とする．族 $\{C_h\}_{h\in(0,\infty)}$ は D 上で安定で半群 $\{T(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ に適合であるとする．そのとき，各 $x\in D$ と $\tau>0$ に対して，

$$\sup_{t\in[0,\tau]} d(T(t)x, C_h^{[t/h]}x)\to 0$$

$(h\downarrow 0)$ となる．

定理 3. (Van Kampen の一意性定理) $u:[0,\infty)\to X$ は連続で $u(t)\in D(t\in[0,\infty))$ とする．$\{T(t)\}_{t\in(0,\infty)}$ は D 上のリプシッツ作用素半群とする．任意の $\tau>0$ に対して，

$$\lim_{h\downarrow 0}\int_0^\tau h^{-1}d(u(t+h), T(h)u(t))\,dt = 0$$

ならば，$u(t)=T(t)u(0)$ $(t\in[0,\infty))$ である．

系 1. 定理 1 の条件が満たされ，$\{T(t)\}_{t\in(0,\infty)}$ は定理 1 における D 上のリプシッツ作用素半群とする．$u:[0,\infty)\to X$ はリプシッツ連続，$u(t)\in D$ $(t\in[0,\infty))$ で，ほとんどすべての $t\in[0,\infty)$ に対して

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}d(u(t+h), F(u(t))(h,u(t)))=0$$

であるとする．このとき，$u(t)=T(t)u(0)(t\in[0,\infty))$ である．

証明．$x\in D$ に対して，$\lim_{h\downarrow} h^{-1}d(F(x)(h,x),T(h)x)=0$ であることに注意すればよい． □

上の命題は次の補題から直ちに従う．

補題 4. u は $[0,\tau]$ 上で定義された D 値連続関数とする．$\{C_h\}_{h\in(0,\infty)}$ は D からその中への作用素の族で安定条件 (S) を満たすものとする．このとき，$t\in[0,\tau]$ と $h\in(0,h_0]$ に対して，

$$\begin{aligned} d(u(t), C_h^{[t/h]}u(0)) &\le \frac{M_\tau}{h}\int_0^\tau d(u(s+h), C_h u(s))\,ds \\ &\quad + (1+M_\tau)\sup\{d(u(s),u(\hat{s}));\ s,\hat{s}\in[0,\tau+h],\ |s-\hat{s}|\le h\} \end{aligned} \tag{8}$$

が成り立つ．ここで，$[a]$ は実数 a を超えない最大の整数とする．

証明.$h \in (0, h_0]$ とし $\tau \geq t \geq h > 0$ とする.

$$\varphi_h(s) = d(C_h^{[t/h]-[s/h]}u(s), C_h^{[t/h]}u(0)), \quad s \in [0, t].$$

とおく．このとき，条件 (S) から

$$\begin{aligned}
&\varphi_h(s+h) - \varphi_h(s) \\
&= d(C_h^{[t/h]-[(s+h)/h]}u(s+h), C_h^{[t/h]}u(0)) - d(C_h^{[t/h]-[s/h]}u(s), C_h^{[t/h]}u(0)) \\
&\leq d(C_h^{[t/h]-[s/h]-1}u(s+h), C_h^{[t/h]-[s/h]}u(s)) \\
&\leq M_\tau d(u(s+h), C_h u(s))
\end{aligned}$$

$(s \in [0, t-h])$ が従う．s について，0 から $[t/h]h - h$ まで積分すると

$$\begin{aligned}
\int_{[t/h]h-h}^{[t/h]h} \varphi_h(s)\,ds - \int_0^h \varphi_h(s)\,ds &= \int_0^{[t/h]h-h} \varphi_h(s+h)\,ds - \int_0^{[t/h]h-h} \varphi_h(s)\,ds \\
&\leq M_\tau \int_0^{[t/h]h-h} d(u(s+h), C_h u(s))\,ds. \qquad (9)
\end{aligned}$$

を得る．条件 (S) から不等式

$$\int_0^h \varphi_h(s)\,ds = \int_0^h d(C_h^{[t/h]}u(s), C_h^{[t/h]}u(0))\,ds \leq M_\tau \int_0^h d(u(s), u(0))\,ds.$$

も従う．さらに，

$$\begin{aligned}
&\int_{[t/h]h-h}^{[t/h]h} \varphi_h(s)\,ds = \int_{[t/h]h-h}^{[t/h]h} d(C_h u(s), C_h^{[t/h]}u(0))\,ds \\
&\geq hd(u(t), C_h^{[t/h]}u(0)) - \int_{[t/h]h-h}^{[t/h]h} d(C_h u(s), u(t))\,ds \\
&\geq hd(u(t), C_h^{[t/h]}u(0)) - \int_{[t/h]h-h}^{[t/h]h} d(C_h u(s), u(s+h))\,ds \\
&\quad - \int_{[t/h]h-h}^{[t/h]h} d(u(s+h), u(t))\,ds.
\end{aligned}$$

である．よって，不等式 (9) から

$$
\begin{aligned}
&d(u(t), C_h^{[t/h]}u(0)) \\
&\le \frac{1}{h}\int_{[t/h]h-h}^{[t/h]h} d(C_h u(s), u(s+h))\,ds + \frac{1}{h}\int_{[t/h]h-h}^{[t/h]h} d(u(s+h), u(t))\,ds \\
&+ \frac{M_\tau}{h}\int_0^h d(u(s), u(0))\,ds + \frac{M_\tau}{h}\int_0^{[t/h]h-h} d(u(s+h), C_h u(s))\,ds \\
&\le \frac{M_\tau}{h}\int_0^{[t/h]h} d(u(s+h), C_h u(s))\,ds + \frac{1}{h}\int_{[t/h]h}^{[t/h]h+h} d(u(s), u(t))\,ds \\
&\quad + \frac{M_\tau}{h}\int_0^h d(u(s), u(0))\,ds.
\end{aligned}
$$

が従う．従って，各 $t \in [h, \tau]$ に対して不等式 (8) が成り立ち，$t \in [0, h)$ のときは自明に成り立つ.

非線形作用素の族が安定であることを示すために，実用上は次が使われる.

定理 4. $\{C_h\}_{h\in(0,\infty)}$ は D からその中への作用素の族とする．このとき，次は互いに同値である.

(1) 族 $\{C_h\}_{h\in(0,\infty)}$ は D 上で安定である.
(2) 実数 $M \ge 1$ と $\omega \ge 0$ と $h_0 \in (0, 1/\omega)$ が存在して，

$$d(C_h^n x, C_h^n y) \le M(1-h\omega)^{-n} d(x,y)$$

が $n = 1, 2, \cdots$， $h \in (0, h_0]$ と $x, y \in X$ に対して成り立つ.
(3) 実数 $M \ge 1$， $\omega \ge 0$， $h_0 \in (0, 1/\omega)$ と D 上の距離の族 $d_h(\cdot,\cdot)$， $h \in (0, h_0]$ が存在して，

$$d(x,y) \le d_h(x,y) \le M d(x,y)$$

と

$$d_h(C_h x, C_h y) \le (1-h\omega)^{-1} d_h(x,y)$$

が $h \in (0, h_0]$ と　x， $y \in X$ に対して成り立つ.

5.　応用例

$\omega_0 > \nu > 0$ は定数とし固定する．$\beta \geq 0$ をパラメターとする次の線形波動方程式の初期値境界値問題を考える；

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \left(\omega_0^2 + \beta^2\right)\frac{\partial u}{\partial s} - 2\nu v,\ t \in [0,\infty), \quad s \in [0,1].$$

ただし，境界条件は $v(t,0) = v(t,1) = 0,\ t \in [0,\infty)$ で，初期条件は $u(0,s) = u_0(s),\ v(0,s) = v_0(s),\ s \in [0,1],$ である．各 $\beta \in [0,\infty)$ に対して，その解は

$$\begin{bmatrix} u(t,\cdot) \\ v(t,\cdot) \end{bmatrix} = T^{(\beta)}(t)\left(\begin{bmatrix} u_0(\cdot) \\ v_0(\cdot) \end{bmatrix}\right) = \exp\left(tA_\beta\right)\left(\begin{bmatrix} u_0(\cdot) \\ v_0(\cdot) \end{bmatrix}\right), \quad \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \in E.$$

で与えられる．ただし，$E = L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ を $\|(u,v)\| = \left(\int_0^1 (u^2+v^2)\,ds\right)^{1/2}$ をノルムとするバナッハ空間とし，作用素族 $\{T^{(\beta)}(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ は，定義域を $D(A_\beta) = H^1(0,1) \times H_0^1(0,1)$ とする作用素 $A_\beta = \begin{bmatrix} 0, & \dfrac{\partial}{\partial s} \\ \left(\omega_0^2+\beta^2\right)\dfrac{\partial}{\partial s}, & -2\nu \end{bmatrix}$ が生成する E 上の有界線形作用素の C_0-級半群である．

各 $t \in [0,\infty)$ に対して

$$E^{(\beta)}(T^{(\beta)}(t)(u_0,v_0)) \leq E^{(\beta)}(u_0,v_0),\ H^{(\beta)}(T^{(\beta)}(t)(u_0,v_0)) \leq H^{(\beta)}(u_0,v_0),$$

が成り立つ．ここで,

$$E^{(\beta)}(u,v) = \int_0^1 \frac{v^2}{2}\,ds + \omega_0^2\int_0^1 \frac{u^2}{2}\,ds + \beta^2\int_0^1 \frac{u^2}{2}\,ds,$$

$$H^{(\beta)}(u,v) = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial s} + 2\nu u\right)^2 ds + \int_0^1 \frac{\omega_0^2+\beta^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 ds.$$

である．

$E_0 > 0,\ H_0 > 0,\ B_0 > 0$ とし,

$$X^{(B_0)} = \left\{(u,v) \in H^1(0,1) \times H_0^1(0,1)\ \middle|\ E^{(B_0)}(u,v) \leq E_0,\ H^{(B_0)}(u,v) \leq H_0\right\}.$$

とおく．$\beta \in [0,B_0]$ のとき，$\vartheta_\beta(t,(u,v)) = T^{(\beta)}(t)(u,v)((t,(u,v)) \in [0,\infty) \times X)$ は $X = X^{(B_0)}$ 上の推移になる．$X = X^{(B_0)}$ はバナッハ空間 E の閉部分集合として，完備距離空間になる．

$\beta_0 > 0$ とする．次のキリヒホッフ型非線形方程式の初期値境界値問題を考える：

$$\text{(NW)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \left(\omega_0^2 + \beta_0^2 \|u\|^2\right)\frac{\partial u}{\partial s} - 2\nu v,\ t \in [0,\infty), \quad s \in [0,1],$$

ただし, 境界条件は $v(t,0) = v(t,1) = 0,\ t \in [0,\infty)$, である．また, $\|u\| = \left\{\int_0^1 u^2\, ds\right\}^{1/2}$ である．次のように定める：

$$E(u,v) = \int_0^1 \frac{v^2}{2}\, ds + \omega_0^2 \int_0^1 \frac{u^2}{2}\, ds + \beta_0^2\left(\int_0^1 \frac{u^2}{2}\, ds\right)^2$$

$$H(u,v) = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial s} + 2\nu u\right)^2 ds + \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 ds\left(\omega_0^2 + \beta_0^2 \int_0^1 u^2\, ds\right)$$

$E_0 > 0,\ H_0 > 0$ とし，

$$D = \left\{(u,v)) \in H^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \,\middle|\, E(u,v) \le E_0, \quad H(u,v) \le H_0\right\},$$

とおく．十分に大きな $B_0 > 0$ をとり，$X = X^{B_0} \supset D$ で，$(u,v) \in D$ に対して $\beta_0\|u\| \le B_0$ が満たされるようにする．$\Theta(X)$ は上で定めた $\vartheta_\beta(\cdot,\cdot)$ $(\beta \in [0,B_0])$ の全体とする．このように定められた $(X,\Theta(X))$ に対して，推移場 $F : D \to \Theta(X)$ を $F(u,v) = \vartheta_{\beta_0\|u\|}$ $((u,v) \in D)$ で定める．十分に小さな $H_0 > 0$ を選ぶと，D 上の推移場 F は条件 (F0)–(F3) を満たす．ただし，$(u,v),(\hat{u},\hat{v}) \in X$ に対して，

$$\begin{aligned}&\Phi((u,v),(\hat{u},\hat{v}))\\ &= \left\{\int_0^1 \left((v-\hat{v})^2 + \omega_0^2(u-\hat{u})^2 + \beta_0^2(u-\hat{u})^2\|u\|^2\right) ds\right\}^{1/2},\end{aligned}$$

である．よって，定理 1 により，D 上のリプシッツ作用素半群 $\{T(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ で各 $(u_0,v_0) \in D$ に対して $(u(t),v(t)) = T(t)(u_0,v_0)$ $(t \ge 0)$ が，境界条件 $v(t,0) = v(t,1) = 0,\ t \in [0,\infty)$ と初期条件 $\left.\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$ を満たす方程式 (NW) の一意的な解を与えるものが存在することになる．

参考文献

[1] R. P. Agarwal and V. Lakshmikantham, Uniqueness and Nonuniqueness Criteria for Ordinary Differential Equations, Series in Real Analysis, **6**, World Scientific, 1993.

[2] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, Gradient flows in metric spaces and in the spaces of probability measures, Lectures in Mathematics ETH, Birkhäuser, Zürich, 2005.

[3] J.-P. Aubin, "Mutational and Morphological Analysis: Tools for Shape Evolution and Morphogenesis," Birkhäuser, 1999.

[4] J.-P. Aubin, Mutational equations in metric spaces. Set-Valued Analysis, 1993, Volume 1, Issue 1, 3–46.

[5] V. Barbu, Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Noordhoff Int. Publ., Leyden, 1976.

[6] Ph. Bénilan, Équation d'évolution dans un espace de Banach quelconque et application, Thèse, Orsay, 1972.

[7] C. Calcaterra, Generating flows on metric spaces, J. of Mathematical Analysis and Applications, **248**(2000), 645–677.

[8] R. M. Colombo and G. Guerra, Differential equations in metric spaces with applications, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **23**(2009), 733-753.

[9] M. Crandall, Nonlinear semigroups and evolution governed by accretive operators, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **45**(1986), 305-337.

[10] T. R. Hughes, T. Kato and J. E. Marsden, Well-posed quasi-linear second-order hyperbolic systems with applications to nonlinear elastodynamics and general relativity, Arch. Rational Mech. Anal., 63 (1976), 273–294.

[11] T. Iwamiya and H. Okochi, Monotone operators on Hilbert manifolds (in Japanese), RIMS Kokyuroku, **785**(1992), 139-151.

[12] Y. Kobayashi and N. Tanaka, Semigroups of Lipschitz operators. Adv. Differential Equations, 6 (2001), 613–640.

[13] Y. Kobayashi and N. Tanaka, Well-posedness for mutational equations under a general type of dissipativity conditions, Israel J. Math., 225 (2018), 1–33

[14] Y. Kobayashi, S. Oharu and N. Tanaka, An approximation theorem of Lax Tyle for semigroups of Lipschitz operators, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, **42**(2000), 159-166

[15] Y. Kōmura, Nonlinear semigroups in Hilbert spaces, J. Math. Soc. Japan, **19**(1967), 503–520.

[16] V. Lakshmikantham, R. Mitchell and R Mitchell, Differential equations on closed subsets of a Banach space, Trans. Amer. Math. Soc. , **220**(1976), 103-113.

[17] V. Lakshmikantham and S. Leela, Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces, International Series in Nonlinear Mathematics, **2**, Pergamon Press, Oxford, 1981.

[18] P. D. Lax and R. D. Richtmyer, Survey of the stability of linear finite difference equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **9**(1956), 267–293.

[19] T. Lorenz, Mutational Analysis. A joint framework for Cauchy problems in and beyond vector spaces. Lecture Notes in Mathematics, 1996. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[20] R. H. Martin, Jr. , Differential equations on closed subsets of a Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. , **179**(1973), 399-414.

[21] R. H. Martin, Jr. , Lyapunov functions and autonomous differential equations in a Banach space, Math. Sys. Theory, **7**(1973), 66-72.

[22] M. Nagumo, Über die Lage Integralkurve gewöhnicher Differetialgleichungen, Proc. Phys. -Math. Soc. Japan, **25**(1943), 221-226.

[23] H. Murakami, On nonlinear ordinary and evolution equations, Funkcialaj Ekvacioj, **9**(1966), 151-162.

[24] H. Okamura, Condition nécessaire et suffisante remplie par les équations différentielles ordinaires sans points de Peano, Mem. Coll. Sci. , Kyoto Imperial Univ. , Series A, **24**(1942), 21-28.

[25] A. I. Panasyuk, Quasidifferential equations in a complete metric space under Carathéodory-type conditions. II. translation in Differential Equations **31** (1995), no. 8, 1308–1317 (1996).

[26] A. I. Panasyuk, Quasidifferential equations in a complete metric space under Carathéodory-type conditions. I. translation in Differential Equations **31** (1995), no. 6, 901–910.

[27] J. P. Penot, Infinitesimal calculus in metric spaces, J. of Geometry and Physics, **57**(2007), 12455-2465.

[28] S. I. Pohožaev, On a class of quasilinear hyperbolic equations, Math. USSR Sbornik, **25**(1975), 145-158.

[29] B. Skovajsa, Generalized ordinary differential equations in metric Spaces, arXiv:1802.03083v1 [math.CA] 9 Feb 2018.

[30] J. Tabor, Differential equations in metric spaces. Proceedings of EQUADIFF, 10(Prague, 2001). Math. Bohem. **127** (2002), no. 2, 353–360.

多調和ベルグマン空間の解析

田中 清喜（大同大学・教養部数学教室）

1 はじめに

$\mathbb{C}$ 上の領域 D において正則かつ 2 乗可積分函数全体から成るヒルベルト空間 $L^2_a(D, dA)$ はベルグマン空間と呼ばれる. ここで測度 dA は area measure である. 任意の $z \in D$ に対して $K_z \in L^2_a(D, dA)$ が唯一意に存在し任意の $f \in L^2_a(D, dA)$ に対して再生公式

$$f(z) = \int_D f(w)\overline{K_z(w)}dA(w)$$

を持つことが知られている. $K(z, w) := \overline{K_z(w)}$ はベルグマン核と呼ばれる. ベルグマン空間は 1922 年に Bergman[4] (正確には 1921 年の学位論文とされている) によって提唱されて今なお盛んに研究されている. 一つの大きな研究としてはベルグマン空間上での作用素解析があげられる. テプリッツ作用素, ハンケル作用素といった作用素の性質の特徴付けは設定によってはかなり深く成果が挙げられている. このことについては洋書では Zhu[27], 和書では中路 [15] が詳しい. 一方ベルグマン空間の一つの一般化として Aronszajn[1] によって再生核ヒルベルト空間が提唱されている. 領域 D 上の複素数値 (もしくは実数値) 函数からなるヒルベルト空間 $\mathcal{H}(D)$ のうち, 任意の点 $z \in D$ に対して point evaluation map $ev_z(f) = f(z)$ $(f \in \mathcal{H}(D))$ が有界であるヒルベルト空間 $\mathcal{H}(D)$ のことを再生核ヒルベルト空間と呼ぶ. Riesz の表現定理から任意の $z \in D$ に対して唯一つ再生核 $K_z \in \mathcal{H}(D)$ が存在し point evaluation map ev_z は内積表現

$$ev_z(f) = \langle f, K_z \rangle$$

を持つ. ベルグマン空間における point evaluation map ev_z の有界性は正則函数 f に対して $|f|^2$ が劣調和であることから導かれるためベルグマン空間は再生核ヒルベルト空間でありベルグマン核が再生核である. 劣調和性に限らず各点での値が積分平均で評価される函数の族は point evaluation map の有界性が導かれることから再生核ヒルベルト空間となる. そのような構成によって与えられた 2 乗可積分函数のなす再生核ヒルベルト空間はベルグマン型空間と呼ばれる. さらにこの型の空間は p 乗可積分函数のなす空間を考えた時にも同様の積分表示を持つ場合が多々あり, その p 乗可積分函数のなす空間もベルグマン型空間と呼ばれる. これまでの研究としては調和関数の成すベルグマン型空間 (調和ベルグマン空間)[5, 8] や放物型方程式の解から成るベルグマン型空間 [17] といった他のベルグマン型空間も解析が進められている. 講演者はこの流れに沿って多調和函数 (polyharmonic function)[*1]の成すベルグマン

[*1] 多変数函数論に現れる pluriharmonic function とは異なる.

型空間 (多調和ベルグマン空間) の解析として主に函数空間の性質と函数空間上の作用素の性質の特徴付けを研究している．本稿では既知の結果として単位球上の調和ベルグマン空間に関する諸性質を復習した後に, 単位球上の多調和ベルグマン空間における講演者の最近の結果 [21, 22, 23] を紹介する．

2　設定と再生核の表示・評価

2.1　設定

以下, 考える函数は実数値函数とする．$\mathbb{B}$ を $\mathbb{R}^N$ における単位球とし, 任意の正の整数 m に対して $H^m(\mathbb{B})$ を $\mathbb{B}$ 上における m 次多調和函数 (polyharmonic function of order m) のなす空間とする．ここで m 次多調和函数とは古典的な意味で偏微分方程式 $\Delta^m f = 0$ を満たす函数とする．正の整数 m と可積分指数 $1 \leq p < \infty$ と重みに関する指数 $\alpha > -1$ に対し, 単位球上の重み付き多調和ベルグマン空間を

$$b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B}) := H^m(\mathbb{B}) \cap L^p(\mathbb{B}, dV_\alpha)$$

と定義する．ここで dV を通常のルベーグ体積測度とし $dV_\alpha(x) := (1-|x|^2)dV(x)$ とする．また, $b^{m,\infty}(\mathbb{B}) := H^m(\mathbb{B}) \cap L^\infty(\mathbb{B}, dV)$ とする．重みを考えない際には $b^{m,p}(\mathbb{B})$ と省略して書き, $m = 1$ のときすなわち調和ベルグマン空間は $b_\alpha^p(\mathbb{B})$ と書くことにする．Nicolescu[16] より単位球上の多調和函数に対しては体積平均に関する一般化された劣平均値の定理

$$|f(x)|^p \leq \frac{C}{V_\alpha(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(x)|^p \, dV_\alpha(x)$$

が成り立つため $b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B})$ はベルグマン型空間である．ここで, $B(x,r)$ は中心 x 半径 r の球である．$b_\alpha^{m,2}(\mathbb{B})$ の再生核 (多調和ベルグマン核) を $R_{m,\alpha}(x,y)$ と書くことにする．$m = 1$, $\alpha = 0$ のとき, つまり重み無しの調和ベルグマン空間について再生核 (調和ベルグマン核) は $R(x,y)$ と書くことにする．また $p = 2$ のとき,

$$b_\alpha^{(m),2}(\mathbb{B}) := b_\alpha^{m,2}(\mathbb{B}) \ominus b_\alpha^{m-1,2}(\mathbb{B}) \quad (m \geq 2)$$

を true-m-polyharmonic Bergman space と呼ぶ*2．便宜上 $b_\alpha^{(1),2}(\mathbb{B}) := b_\alpha^{1,2}(\mathbb{B})$ と書くことにする．この空間も再生核ヒルベルト空間であり再生核を $R_{(m),\alpha}(x,y)$ と書くことにする．これらの空間と核については性質

$$b_\alpha^{m,2}(\mathbb{B}) = b_\alpha^{1,2}(\mathbb{B}) \oplus b_\alpha^{(2),2}(\mathbb{B}) \oplus \cdots \oplus b_\alpha^{(m),2}(\mathbb{B})$$

*2 用語は Vasilevski[25] による poly-analytic 函数に関するベルグマン型空間の用語に倣った．

及び

$$R_{m,\alpha}(x,y) = R_{1,\alpha}(x,y) + R_{(2),\alpha}(x,y) + \cdots + R_{(m),\alpha}(x,y) \tag{1}$$

が成り立つ．また，$L^2(\mathbb{B}, dV_\alpha)$ から $b_\alpha^{m,2}(\mathbb{B})$ への直交射影を $P_{m,\alpha}$ とし，$L^2(\mathbb{B}, dV_\alpha)$ から $b_\alpha^{(m),2}(\mathbb{B})$ への直交射影を $P_{(m),\alpha}$ とする．このとき直交射影は

$$P_{m,\alpha}f(x) = \int_{\mathbb{B}} R_{m,\alpha}(x,y)f(y)dV_\alpha(y), \quad P_{(m),\alpha}f(x) := \int_{\mathbb{B}} R_{(m),\alpha}(x,y)f(y)dV_\alpha(y)$$

と表され,

$$P_{m,\alpha} = P_{1,\alpha} + P_{(2),\alpha} + \cdots + P_{(m),\alpha}$$

が成り立つ．

以下, 調和ベルグマン核の表示・評価に関する既存の結果を紹介し, その後に [21, 22] による多調和ベルグマン核の評価を与える．以下の同次調和多項式, ポアソン核, 調和ベルグマン空間に関する事実については例えば [3] を見よ．

2.2 調和ベルグマン空間の性質と再生核

正の整数 k に対して $\mathcal{H}_k(\mathbb{S})$ を k 次同次調和多項式*3(harmonic homogeneous polynomial of degree k) を $\mathbb{S} = \partial\mathbb{B}$ 上に制限した函数全体の成す空間とする．$\{e_j^k\}_j$ は $\mathcal{H}_k(\mathbb{S}, d\sigma)$ を $L^2(\mathbb{S}, d\sigma)$ 内の有限次元ヒルベルト空間としてみた際の正規直交基底とし，$\mathcal{H}_k(\mathbb{S}, d\sigma)$ の次元を h_k と書く．ここで σ は $\mathbb{S}$ 上の球面測度で $\sigma(\mathbb{S}) = 1$ となるように正規化したものとする．さらに $\mathcal{H}_k(\mathbb{S})$ の再生核

$$Z_k(\eta, \zeta) := \sum_j e_j^k(\eta) e_j^k(\zeta)$$

は zonal harmonic of degree k と呼ばれる．このとき

$$L^2(\mathbb{S}, d\sigma) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k(\mathbb{S})$$

であり, $\mathcal{H}_k(\mathbb{B})$ を k 次同次調和多項式を $\mathbb{B}$ 上に制限した函数全体の成す空間とすると

$$b^2(\mathbb{B}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k(\mathbb{B})$$

*3 k 次同次多項式のうち調和性を満たす函数のことである.k 次多調和という意味ではない.

が成り立つ．$\mathbb{S}$ 上に制限した k 次同次多項式 p_k の同次拡張 $p_k(x) := |x|^k p_k(\frac{x}{|x|})$ によって zonal harmonic Z_k を拡張することによりポアソン核 $P(x,\zeta)$ は

$$P(x,\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(x,\zeta) \quad (x \in \mathbb{B}, \zeta \in \mathbb{S}) \tag{2}$$

と表される．$e_j^k(x)$ を正規化することで調和ベルグマン空間の完全正規直交系 (C.O.N.S.) を具体的にあたえることができるため, 調和ベルグマン核も

$$R(x,y) = \frac{1}{N|\mathbb{B}|}\sum_{k=0}^{\infty}(N+2k)Z_k(x,y) = \frac{1}{N|\mathbb{B}|}\left(P(x,y) + \frac{d}{dt}P(tx,ty)\Big|_{t=1}\right)$$

と表示される．ここで $P(x,y)$ は表示 (2) の ζ 変数に関して同次拡張したものとする．この拡張されたポアソン核は

$$P(x,y) = \frac{1-|x|^2|y|^2}{(1-2x\cdot y+|x|^2|y|^2)^{\frac{N}{2}}}$$

となるため, 調和ベルグマン核は

$$R(x,y) = \frac{(N-4)|x|^4|y|^4 + (8x\cdot y - 2N - 4)|x|^2|y|^2 + N}{N|\mathbb{B}|(1-2x\cdot y+|x|^2|y|^2)^{1+\frac{N}{2}}}$$

となり, 評価としては

$$\left|\partial_x^{\beta}\partial_y^{\gamma}R(x,y)\right| \le \frac{C}{(1-2x\cdot y+|x|^2|y|^2)^{\frac{N+|\beta|+|\gamma|}{2}}}, \tag{3}$$

$$R(x,x) \ge \frac{C'}{(1-|x|^2)^N} \tag{4}$$

を得る．$(1-2x\cdot x+|x|^2|x|^2)^{\frac{N}{2}} = (1-|x|^2)^N$ であるため評価 (3) は $|R(x,y)|$ に対するシャープな評価である．

2.3 重み付き多調和ベルグマン核の表示と評価

以下, 多調和ベルグマン空間の構造と多調和ベルグマン核の評価について述べる．単位球上の m 次多調和函数 f に関してはアルマンジ分解（たとえば [2] を見よ）と呼ばれる次の一意分解が存在する： $f \in H^m(\mathbb{B})$ に対して

$$f(x) = u_0(x) + |x|^2 u_1(x) + |x|^4 u_2(x) + \cdots + |x|^{2(m-1)} u_{m-1}(x)$$

となるように調和函数 $u_j (j=0,1,\cdots,m-1)$ をとることができる．この u_j は一意的に選ぶことができる．

さらに $f \in b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B})$ の際は Pavlović [18] によって次の意味で分解した函数の L^p 性が保証されている．以下の定理は [18] の Theorem 2 のうち今回の議論に必要な部分を我々の記号に書き直したものである．

定理 (Theorem 2 in [18])**.** $f \in H^m(\mathbb{B})$ をアルマンジ分解定理から構成しなおして

$$f(x) = f_0(x) + (1-|x|^2)f_1(x) + (1-|x|^2)^2 f_2(x) + \cdots + (1-|x|^2)^{m-1} f_{m-1}(x),$$

(f_j: 調和函数) と分解する．$1 \leq p < \infty$ と $\alpha > -1$ に対して，f が $b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B})$ に属することの必要十分条件は各 $(1-|x|^2)^j f_j(x)$ $(j = 0, 1, \cdots, m-1)$ が $L^p(\mathbb{B}, dV_\alpha)$ に属することである．

この結果を基に $b_\alpha^{(m),2}(\mathbb{B})$ の C.O.N.S. を具体的に記述することができる．なぜならば上記 Pavlović の定理と重み付き調和ベルグマン空間の C.O.N.S. の具体例から $\mathrm{span}\{e_j^k, (1-|x|^2)e_j^k, \cdots, (1-|x|^2)^{m-1}e_j^k\}$ の閉包は $b_\alpha^{m,2}(\mathbb{B})$ となる．この系列の直交化を行うことで次の定理を得た [21, 22]．

定理 1. 任意の正の整数 m と $\alpha > -1$ に対して

$$\left\{ C_{m,\alpha,k} G_{m-1}\left(k + \frac{N}{2} + \alpha, k + \frac{N}{2}; |x|^2\right) e_j^k(x) \right\}_{j=1,\cdots,h_k, k=0,1,\cdots}$$

は $b_\alpha^{(m),2}(\mathbb{B})$ の *C.O.N.S.* である．ここで，$G_n(a, b; t)$ はヤコビ多項式

$$G_n(a, b; t) := \frac{\Gamma(b) t^{1-b} (1-t)^{b-a}}{\Gamma(b+n)} \frac{d^n}{dt^n} \left[t^{b+n+1} (1-t)^{a+n-b} \right]$$

であり[*4]，正規化定数 $C_{m,\alpha,k}$ は

$$C_{m,\alpha,k} := \sqrt{\frac{2(k + \frac{N}{2} + \alpha + 2m - 2)\Gamma(k + \frac{N}{2} + \alpha + m - 1)\Gamma(k + \frac{N}{2} + m - 1)}{|\mathbb{S}|\Gamma(m)\Gamma(m+\alpha)\Gamma(k + \frac{N}{2})^2}}$$

である．

このことから再生核 $R_{(m),\alpha}(x, y)$ は調和ベルグマン核と同様 zonal harmonic $Z_k(x, y)$ を用いた表示を持ち，fractional calculus を用いることでポアソン核の評価に持ち込むことで以下を得る [22]．

[*4] 区間 $(-1, 1)$ 上における重み $(1-t)^a(1+t)^b$ に関する直交多項式をヤコビ多項式と呼ぶことの方が一般的かもしれない [9] が、本稿では区間 $(0, 1)$ 上における重み $t^{b-1}(1-t)^{a-b}$ に関する直交多項式をヤコビ多項式と呼ぶ.

定理 2. 任意の正の整数 m と $\alpha > -1$ と多重指数 β, γ に対して, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\left|\partial_x^\beta \partial_y^\gamma R_{(m),\alpha}(x,y)\right| \leq \frac{C}{(1 - 2x \cdot y + |x|^2 |y|^2)^{\frac{N+\alpha+|\beta|+|\gamma|}{2}}}$$

を満たす.

注意. 上の定理の定数 C は m に依存しているが指数は m によらない. よって表示 (1) より

$$\left|\partial_x^\beta \partial_y^\gamma R_{m,\alpha}(x,y)\right| \leq \frac{C}{(1 - 2x \cdot y + |x|^2 |y|^2)^{\frac{N+\alpha+|\beta|+|\gamma|}{2}}}$$

が成り立つ. 指数は m によらないためこの評価は重み付き調和ベルグマン核の評価 [8] と同じである.

3 多調和ベルグマン空間の性質と多調和ベルグマン空間上の作用素

この節では, 前節での多調和ベルグマン核の表示と評価を基に多調和ベルグマン空間の性質と多調和ベルグマン空間上の正のテプリッツ作用素の有界性の特徴付けを与える.

3.1 多調和ベルグマン空間の性質

調和ベルグマン空間 $b_\alpha^{1,2}(\mathbb{B})$ と true-m-polyharmonic Bergman space $b_\alpha^{(m),2}(\mathbb{B})$ はともに可分ヒルベルト空間である. そのためこの空間たちの間に全単射写像が存在する. 前節においてこれらの空間の C.O.N.S. が具体的にわかっていることから次の対応関係が与えられた [22].

定理 3. m を正の整数とし $\alpha > -1$ とする. $S_{m,\alpha} f(x) := \Delta_\alpha^{m-1}\left[(1-|x|^2)^{m-1} f(x)\right]$ とする. そのとき作用素 $S_{m,\alpha} : b_\alpha^{1,2}(\mathbb{B}) \to b_\alpha^{(m),2}(\mathbb{B})$ は有界全単射作用素である. ここで,

$$\Delta_\alpha f(x) := (1-|x|^2)^{-\alpha} \Delta (1-|x|^2)^\alpha f(x)$$

である.

補足.

1. Ramazanov[20] によって単位円板上の正則ベルグマン空間と true poly-Bergman space についても同様の有界全単射写像が考えられている. その際はラプラシアン Δ の代わりに $\dfrac{\partial}{\partial z}$ を用いて有界全単射写像は記述される. 上の定理はこの Ramazanov[20] のアナロジーともいえる. ただ, 証明方法は全く違う.

2. Pessoa[19] は単位円板上 (次元 $N = 2$) かつ重みを考えない設定にて poly-Bergman space の議論を用いて上の定理を証明している．上の定理はその結果の拡張であるといえる．
3. $\alpha = 0$ とするとき, 作用素 $S_{m,0}$ 自体は Choe-Koo-Yi[6] にて調和ベルグマン核を変形する際に現れている．この定理は Choe-Koo-Yi[6] の作法で変形した調和ベルグマン核がどのクラスに属するかを明示したことにもなっている．

3.2 再生公式・射影の拡張とその応用

再生核 $R_{m,\alpha}(x, y)$ の評価が得られていることから多項式近似を考えて $1 \leq p < \infty$ のとき $f \in b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B})$ に対しても再生公式

$$f(x) = \int_{\mathbb{B}} R_{m,\alpha}(x, y)f(y)dV_\alpha(y)$$

が成り立つ．ここで核 $R_{m,\alpha}(x, y)$ は各 $1 \leq p < \infty$ に対して Riesz の表現定理から $b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B})$ に関する積分核を与えているわけではなく, $b_\alpha^{m,2}(\mathbb{B})$ の再生核を用いた表示であることを注意しておく．

また, $b_\alpha^{m,2}(\mathbb{B})$ の直交射影の積分表示から $L^p(\mathbb{B}, dV_\alpha)$ 上の作用素 $P_{m,\alpha}$ を

$$P_{m,\alpha}f(x) := \int_{\mathbb{B}} R_{m,\alpha}(x, y)f(y)dV_\alpha(y) \tag{5}$$

と定義する． この作用素 P_m のことも射影と呼ぶことにする． この射影については核の評価から $p > 1$ のとき $P_{m,\alpha} : L^p(\mathbb{B}, dV_\alpha) \to b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B})$ は有界となり $p = 1$ のとき $P_{m,\alpha} : L^1(\mathbb{B}, dV_\alpha) \to b_\alpha^{m,1}(\mathbb{B})$ は非有界であることがわかる．この作用素を用いることで $1 \leq p < \infty$ のとき $b^{m,\infty}(\mathbb{B})$ は $b_\alpha^{m,p}$ の稠密な部分集合であることがわかる．

上記表示 (5) から $f \in b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B})$ $(1 \leq p < \infty)$ に対する次の微分の L^p 評価が得られる [22].

補題 1. $1 \leq p < \infty$ とし $\alpha > -1$ とする．$f \in b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B})$ に対して

$$\|f - f(0)\|_{b_\alpha^{m,p}} \approx \left\|(1 - |x|^2)\mathcal{R}f\right\|_{L^p(dV_\alpha)}$$

が成り立つ．ここで $\mathcal{R}f(x) := \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ である．

この微分の評価を用いることでベルグマン空間において成り立っていた性質である Gleason's problem[7] が肯定的に解ける, Lipschitz type characterization が成り立つ [26] 等が多調和ベルグマン空間においても成り立つ [22].

定理 4 (Gleason's problem for $b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B})$)**.** m を正の整数, $1 \le p < \infty$ とし $\alpha > -1$ とする. $f \in b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B})$ に対してある $g_j \in b_\alpha^{m,p}(\mathbb{B})$ $(j = 1, \cdots, N)$ が存在して表示

$$f(x) - f(0) = \sum_{j=1}^{N} x_j g_j(x)$$

が成り立つ.

定理 5 (Lipschitz type characterization for $b^{m,p}(\mathbb{B})$)**.** m を正の整数, $1 \le p < \infty$ とし $f \in H^m(\mathbb{B})$ とする. f が $b^{m,p}(\mathbb{B})$ に属するための必要十分条件はある $g \in L^p(\mathbb{B}, (1 - |x|^2)^p dV)$ が存在して

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y| \, (g(x) + g(y)) \qquad x, y \in \mathbb{B}$$

を満たすことである.

3.3 多調和ベルグマン空間上のテプリッツ作用素

この項では重みの無い多調和ベルグマン空間 $b^{m,p}(\mathbb{B})$ 上のテプリッツ作用素の性質の特徴付けを考える. $\phi \in L^1(\mathbb{B}, dV)$ に対して $b^{m,p}(\mathbb{B})$ 上の表象 ϕ を持つテプリッツ作用素 $T_{m,\phi}$ を densely defined の意味で

$$T_{m,\phi} f(x) := P_m[f\phi](x) = \int_B R_m(x,y) f(y) \phi(y) dV(y) \quad f \in b^{m,\infty}(\mathbb{B})$$

として定義する. 通常のベルグマン空間においては ϕ として少なくとも有界正則函数をとれば f がベルグマン空間の元であるとき $f\phi$ もベルグマン空間の元となるため, 再生公式からテプリッツ作用素は掛け算作用素の拡張とみなすことができる. その事実を一つの要因として, これらの作用素の有界性, コンパクト性等の特徴付けが考えられている (一連の研究の流れは [15, 27] がわかりやすい). ただ, 任意の $f \in b^{m,p}(\mathbb{B})$ に対して $f\phi \in b^{m,p}(\mathbb{B})$ を満たす ϕ は定数函数しかないことを容易に確かめることができる. そのため, 多調和ベルグマン空間においては掛け算作用素を考えることは無意味である. しかし, テプリッツ作用素を考えることは無意味ではないため, 既存のベルグマン空間における結果と比較することを目指す.

記号. $\mathbb{B}$ 上の正関数 ϕ に対して, Berezin 変換を

$$\tilde{\phi}_{m,p}(x) := \frac{\int_{\mathbb{B}} \phi(y) \, |R_m(x,y)|^p \, dV(y)}{\int_{\mathbb{B}} |R_m(x,y)|^p \, dV(y)} \tag{6}$$

とし, $0 < \delta < 1$ として平均函数を

$$\hat{\phi}_\delta(x) := \frac{\int_{E_\delta(x)} \phi(y) dV(y)}{|E_\delta(x)|} \tag{7}$$

とする．ここで, $E_\delta(x) := \{y \in \mathbb{B} : |y-x| < \delta(1-|x|)\}$ である．$x \in \mathbb{B}$ を固定して多調和ベルグマン核 $R_m(x,\cdot)$ を L^2 に関して正規化した核を $r_m(x,\cdot)$ と書く．つまり, $r_m(x,y) := R_m(x,y)/\|R_m(x,\cdot)\|_{b^{m,2}(\mathbb{B})}$ とする．そのとき, $\tilde{\phi}_{m,2}(x) = \langle T_{m,\phi} r_m(x,\cdot), r_m(x,\cdot)\rangle$ となるため (6) を Berezin 変換と呼ぶことにしている.

単位円板上においても同様の作法で平均函数, Berezin 変換を定義する*5．McDonald-Sundberg[13] は, ベルグマン空間上の正の表象 ϕ を持つテプリッツ作用素 (正テプリッツ作用素と呼ぶ) を考え, 正の表象 ϕ を持つテプリッツ作用素が有界であること, ϕ の平均函数が有界であること, ϕ の Berezin 変換が有界であることが同値であることを示した．この McDonald-Sundberg[13] の結果の調和ベルグマン空間版も Miao[14] によって示されている. 多調和ベルグマン空間においても平均函数, Berezin 変換を用いて正テプリッツ作用素の有界性を特徴付けることができた [23].

定理 6 (正の表象を持つテプリッツ作用素の有界性の特徴付け)**.** ϕ を正かつ $L^1(\mathbb{B})$ を満たす函数とし $1 < p < \infty$ とする．そのとき次は同値である.

1. テプリッツ作用素 $T_{m,\phi} : b^{m,p}(\mathbb{B}) \to b^{m,p}(\mathbb{B})$ は有界作用素である.
2. *Berezin* 変換 $\tilde{\phi}_{m,p}$ は $\mathbb{B}$ 上の有界函数である.
3. 任意の $0 < \delta < 1$ に対して平均函数 $\hat{\phi}_\delta$ は $\mathbb{B}$ 上の有界函数である.

補足. $p=1$ のときはこの特徴付けが成り立つかどうかは不明である. $p=1$ のときは射影 P_m が有界でないためテプリッツ作用素が有界となるためには ϕf が相当良いクラスとなる必要がある. $p=1$ のときは講演者の知る限りではベルグマン空間上のテプリッツ作用素においても特徴付けは与えられていない.

4 おわりに

本稿では, 単位球上の多調和ベルグマン空間の性質, 多調和ベルグマン空間上の正テプリッツ作用素の特徴付け問題を扱った．調和ベルグマン空間の性質と何か違いが出ることを期待していたが, 多調和ベルグマン核は次数 m に依らない評価を持つことがわかり, 結果としては調和ベルグマン空間の理論のアナロジーの域を出ない内容となってしまった．講演者の力不足のところもあり true-m-polyharmonic Bergman kernel $R_{(m),\alpha}(x,x)$ の下からの評価は一般の m に対しては明らかになっていない．しかし, $m=2$ の場合のみは直接計算を行い, やはり調和ベルグマン核と同様の評価が得られた [24]．そのため, この方向では性質に違いの出る空間の例は得られないと予想される.

*5 正確には平均函数を考える際には $E_\delta(x)$ の代わりに双曲距離に関する円での平均を用いて定義する．定義 (7) は双曲距離を別の形で表現しようとした定義である.

また, 本稿では函数の定義域を単位球に限った. 単位球上の函数は級数展開の観点からとても扱いやすいがベルグマン空間の研究としては他の領域上でも多くの研究がなされている. 講演者の勉強不足故標準的な教科書, 論文として文献をあげることはできないが例えば Krantz[11] をあげておく. Kerzman[12] は境界が滑らかな有界領域上のベルグマン空間において射影をグリーン作用素と $\bar{\partial}$ 作用素を用いて表し, 偏微分方程式の理論からベルグマン核の評価を導いている. この方法とほぼパラレルな議論によって Kang-Koo[10] は境界が滑らかな有界領域における調和ベルグマン核の評価を与えている. 同様の議論から導かれるかは不明であるが, 境界が滑らかな有界領域上の多調和ベルグマン核の評価は今後の課題である.

参考文献

[1] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.

[2] N. Aronszajn, T. M. Creese and L. J. Lipkin, Polyharmonic functions, Clarendon press, Oxford, 1983.

[3] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic function theory, Springer-Verlag, New York, 1992.

[4] S. Bergman, *Ueber die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen* Math. Ann. **86** (1922), 238-271. (Thesis, Berlin, 1921.)

[5] B. R. Choe, H. Koo and H. Yi, *Derivative of harmonic Bergman and Bloch functions on the ball*, J. Math. Anal. Appli. **260** (2001), 100 –123.

[6] B. R. Choe, H. Koo and H. Yi, *Projection for harmonic Bergman spaces and applications*, J. Funct. Anal. **216** (2004), 388–421.

[7] A. M. Gleason, *Finitely generated ideals in Banach algebra*, J. Math. Mechanics **13** (1964), 125–132.

[8] M. Jevtić and M. Pavlović. *Harmonic Bergman functions on the unit ball* $\mathbb{R}^n$, Acta Math. Hungar. **85** (1999), 81–96.

[9] 金子尚武, 松本道男, 現代数学レクチャーズ C-3 特殊関数, 培風館, 1984.

[10] H. Kang and H. Koo, *Estimates of the harmonic Bergman kernek on smooth domain*, J. Funct. Anal. **185** (2001), 220–239.

[11] S. Krantz, Geometric analysis of the Bergman kernel and metric, Springer-Verlag, New York, 2013.

[12] N. Kerzman, The Bergman kernel function. Differentiability at the boundary, Math. Ann. **195** (1972), 149–158.

[13] G. McDonald and C. Sundberg, *Toeplitz operators on the disk*, Indiana Univ. Math. J. **28** (1979), 595–611.

[14] J. Miao, *Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces*, Integral Equations Operator Theory **27** (1997), 426–438.

[15] 中路貴彦, 正則関数のなすヒルベルト空間, 岩波書店, 2009.

[16] M. Nicolescu, Les Fonctions Polyharmoniques, Hermann & Cie, Paris, 1936.

[17] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, *α-parabolic Bergman spaces*, Osaka J. Math. **42** (2005), 133–162.

[18] M. Pavlović, *Decompositions of L^p and Hardy spaces of polyharmonic functions*, J. Math. Anal. Appl. **216** (1997), 499–509.

[19] L.V. Pessoa, *On the structure of polyharmonic Bergman type spaces over the unit disk*, Complex Var. Elliptic Equ. **60** (2015), 1668–1684.

[20] A. K. Ramazanov, *On the structure of spaces of polyanalytic functions*, Math. Notes **72** (2002), 692–704.

[21] K. Tanaka, *Biharmonic Bergman space and its reproducing kernel*, Complex Var. Elliptic Equ., Published online 2017 Nov. 7, 22p. doi :10.1080/17476933.2017.1403424.

[22] K. Tanaka, *Estimates for polyharmonic Bergman spaces and its application*, submitted.

[23] K. Tanaka, *Positive Toeplitz operators on the polyharmonic Bergman space over the unit ball*, preparation.

[24] K. Tanaka, *Note on a lower bound estimate for the true biharmonic Bergman kernel over the unit ball*, 大同大学紀要 **52** (2016), 1–4.

[25] N. L. Vasilevski, Commutative algebras of Toeplitz operators on the Bergman space, Operator Theory: Advances and Applications **185** 2008.

[26] H. Wulan and K. Zhu, *Lipschitz type characterization for Bergman spaces*, Canad. Math. Bull. **52** (2009), 613–626.

[27] K. Zhu, Operator theory in function spaces, Dekker, New York, 1990.

Kiyoki Tanaka
School of Liberal Arts and Sciences
Daido University
Nagoya 457-8530, Japan
E-mail: ktanaka@daido-it.ac.jp

概均質ベクトル空間の正則性と 次数付きLie代数の構造

佐々野 詠淑 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)

Abstract

本稿では, 有限次元代数群とその表現, 有限次元簡約可能 Lie 代数とその表現, および次数付き Lie 代数を主な考察対象とする. これらの対象の間の橋渡しをするのが標準的な五つ組, あるいは H.Rubenthaler による fundamental triplet であり, 有限次元簡約可能 Lie 代数およびその表現を, 次数付き Lie 代数の構造に埋め込むすることができる. これは, H.Rubenthaler による放物型概均質ベクトル空間理論の拡張である. 有限次元簡約可能代数群の表現に関する問題は次数付き Lie 代数の構造論に帰着されるのだが, 本稿ではこのことを一般的な枠組みで解説したのち, 特別な場合として (簡約可能) 概均質ベクトル空間論に応用する. そして, 概均質ベクトル空間の相対不変式及び正則性などの性質に着目し, これらを次数付き Lie 代数の言葉で記述する.

導入

0.1 研究の背景と動機

概均質ベクトル空間（prehomogeneous vector space, 以下 PV）とは, ある連結な代数群 G とその (有理) 表現 (π, V) からなる三つ組 (G, π, V) であって, 表現空間 V の中に Zariski 位相で稠密な軌道 $\pi(G)v \subset V$, $\overline{\pi(G)v} = V$ が存在することを言う. 特に, G が簡約可能代数群であるとき, PV (G, π, V) は簡約可能 PV であるという. PV の概念はゼータ関数を構成するために佐藤幹夫によって導入され, 現在までに様々な興味深い空間や結果が報告されている. 例えば, Riemann のゼータ関数は最も簡単な PV $(GL_1, \Lambda_1, \mathbb{C}^1)$ (Λ_1 は自然表現) から構成できるし ([3, p.229, 例 1]), Epstein のゼータ関数は $(GL_1 \times SO_n, \Lambda_1, \mathbb{C}^n)$ という PV から構成できる ([3, p.230, 例 2]). 今挙げた二つの例は PV 理論の発見以前から知られていたゼータ関数の例であるが, PV 理論を使うと, 代数群の表現を用いて既知または未知のゼータ関数を “発見” することができる.

PV のクラスの特別な場合として, 放物型 PV と呼ばれる部分クラスがある. E.B.Vinberg は次数づけられた有限次元半単純 Lie 代数の local part から自然に誘導される簡約可能代数群とその表現を考察し, これが常に PV となることを証明した. 後に, H.Rubenthaler が E.B.Vinberg の方法で得られる PV を放物型 PV と名付け, 研究し, 完全な分類を与えた. すなわち, Lie 代数論を用いて系統的に “発見” できる PV のクラスであり, ひいてはゼータ関数を系統的に “発見” できる方法を与えている. 放物型 PV は有限次元 Lie 代数の構造に “埋め込む” ことができるため, Lie 代数の豊かな理論を援用して系統的に分析することができる. 放物型 PV 理論については本文中で要点をかいつまんで説明している.

このようなメリットがあって扱いやすい放物型PV理論だが, PV全体のクラスの中で見るとほんのわずかな例外的な部分クラスに過ぎないという弱点がある．H.Rubenthalerによる放物型PVの完全な分類は優れた研究結果だが, 同時に残念な結果でもある．自然な問題意識として, 何とかして放物型PVの理論を拡張できないだろうか, という疑問が思い浮かぶ．

本稿のテーマはこの疑問に答えることである．放物型PV理論の拡張とは, 一般の簡約可能PVに対し, これを次数付きLie代数に "埋め込む" ことでPVの構造論を次数付きLie代数の構造論に帰着させることだと位置づける．まず, 一般に(概均質性に関係なく)簡約可能Lie代数およびその表現が何らかの次数付きLie代数の構造に "埋め込む" ことができることを説明する．そのために必要になるのが次節から始まる**標準的な五つ組**の概念である．

- 本稿では特に断らない限り, 全てのobjectは複素数体$\mathbb{C}$上で定義されているものとする．

1 標準的な五つ組とそれに付随する次数付きLie代数

1.1 標準的な五つ組１（構造の存在）

まず, 最初に標準的な五つ組の定義と基本的な結果について紹介する．

定義 1.1 ([7, Definitions 2.1, 2.2])**.** $\mathfrak{g}$を（有限または無限次元の）Lie代数, (ρ, V)を$\mathfrak{g}$の（有限または無限次元）加群とする．また, $((\varrho, \mathcal{V}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$を$\mathfrak{g}$の（有限または無限次元）加群と双線形形式$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$の組とする．最後に, $B\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$を$\mathfrak{g}$上の双線形形式で非退化かつ不変なものとする．ただし, Lie代数上の双一次形式が不変であるとは, $B([a,b],c) = B(a,[b,c])$がすべての$a,b,c \in \mathfrak{g}$について成り立つことを意味するものとする．五つ組$(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B)$が以下の条件を満たすとき, これは**標準的な五つ組 (standard pentad)** であるという：

- 写像$\Phi_\rho\colon V \otimes \mathcal{V} \to \mathfrak{g}$で, 等式

$$B(a, \Phi_\rho(v \otimes \phi)) = \langle \rho(a \otimes v), \phi\rangle = \langle v, \varrho(a \otimes \phi)\rangle \tag{1.1}$$

  がすべての$a \in \mathfrak{g}$, $v \in V$, $\phi \in \mathcal{V}$について成り立つものが存在する．

また, 式(1.1)で定義される写像をΦ-写像と呼ぶことにする．

注意 1.2. 論文[7]では標準的な五つ組の定義として

- 双線形写像$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$が非退化である

という条件も併せて仮定していた．しかし, この条件は次数付きLie代数の構成(後述する定理1.4)とは関係なく, 概均質ベクトル空間論への応用にて必要になる仮定である．本稿ではこの点を強調するために, あえて標準的な五つ組の定義から上記仮定を削除する．

標準的な五つ組の定義において, 各objects $\mathfrak{g}, V, \mathcal{V}$は有限次元でも無限次元でもよかった．もし, $\mathfrak{g}$が有限次元であれば, どのような$V, \mathcal{V}, B$に対しても五つ組$(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B)$は標準的な五つ組となる

([7, Lemma 2.3]). ただし, $\mathfrak{g}$ が無限次元の場合はそうでないこともあるので注意が必要である (cf. [7, Example 2.6]).

標準的な五つ組の例で重要な意味を持つのは, $\mathfrak{g}$ が有限次元簡約可能 Lie 代数の場合である. 任意の有限次元簡約可能 Lie 代数は非退化対称不変双一次形式を持つことが知られているため, 有限次元簡約可能 Lie 代数およびその表現は何らかの標準的な五つ組を構成する.

例 1.3. (1): 五つ組 $(\mathfrak{gl}_n, \Lambda_1, \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n, \mathrm{Tr})$ (ただし, Λ_1 は $\mathfrak{gl}_n$ の縦ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ への自然表現, $\langle v, \phi \rangle = {}^t v \cdot \phi$, Tr は $\mathrm{Tr}(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$ で定まる双一次形式) は以下の Φ-写像を持つ標準的な五つ組である：

$$\Phi_{\Lambda_1}(v \otimes \phi) = v \cdot {}^t\phi.$$

(2): 五つ組 $(\mathfrak{sl}_n, \Lambda_1 |_{\mathfrak{sl}_n}, \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n, \mathrm{Tr} |_{\mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_n})$ は以下の Φ-写像を持つ標準的な五つ組である：

$$\Phi_{\Lambda_1|_{\mathfrak{sl}_n}}(v \otimes \phi) = v \cdot {}^t\phi - \frac{1}{n}({}^t v \cdot \phi)E_n.$$

(3): 五つ組 $(\mathfrak{so}_n, \Lambda_1 |_{\mathfrak{so}_n}, \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n, \mathrm{Tr} |_{\mathfrak{so}_n \times \mathfrak{so}_n})$ は以下の Φ-写像を持つ標準的な五つ組である：

$$\Phi_{\Lambda_1|_{\mathfrak{so}_n}}(v \otimes \phi) = \frac{1}{2}\left(v \cdot {}^t\phi - {}^t\phi \cdot v\right).$$

標準的な五つ組はそれぞれ以下の性質を持った固有の次数付き Lie 代数を持つ. これが標準的な五つ組を考察する “意味” である.

定理 1.4. 任意の標準的な五つ組 $(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B)$ に対し, 次数付き *Lie* 代数 $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ で

$$\begin{aligned} &V_{-1} \simeq \mathcal{V},\ V_0 \simeq \mathfrak{g},\ V_1 \simeq V \quad (\textit{as } \mathfrak{g} \simeq V_0\textit{-modules}),\\ &[v_1, \phi_{-1}] = \Phi_\rho(v_1 \otimes \phi_{-1}) \quad (v_1 \in V_1 \simeq V,\ \phi_{-1} \in V_{-1} \simeq \mathcal{V}) \end{aligned}$$

となるものが存在する. すなわち, 標準的な五つ組を持ちうる $\mathfrak{g}, \rho, V$ は何らかの次数付き *Lie* 代数に部分構造として “埋め込む” ことができる. また, B が対称な双一次形式であるという特別な場合においては, B という構造も $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B)$ の構造に “埋め込む” ことができる. すなわち, B が対称であるとき, $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B)$ 上の非退化対称不変双一次形式 B_L であって, B_L の $V_0 \times V_0 \simeq \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ への制限が B に等しいものが存在する.

未解決問題 1. 与えられた五つ組 $(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B)$ が標準的であるための条件を記述・分類できるか. また, $\mathfrak{g}$, V が条件

- 五つ組 $(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B)$ が標準的であるような $\mathcal{V}, B$ が存在し, $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ は非退化である

を満たすのはどのような場合だろうか. この条件を満たす $\mathfrak{g}, V$ の分析は次数付き *Lie* 代数の構造論に帰着できる.

尚, H.Rubenthaler も著者と独立に標準的な五つ組と類似した fundamental triplet という概念を発表している ([5, Definition 3.1.1]). 彼の fundamental triplet は

(1): (簡約可能 Lie 代数とは限らない) quadratic Lie algebra $(\mathfrak{g}_0, B_0)$, ただし, 有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}_0$ が非退化対称不変双一次形式 B_0 を持つとき $\mathfrak{g}_0$ は quadratic Lie algebra と呼ばれる,

(2): $\mathfrak{g}_0$ の有限次元表現 (ρ, V)

から成る triplet $(\mathfrak{g}_0, B_0, (\rho, V))$ を表す. そして, fundamental triplet $(\mathfrak{g}_0, B_0, (\rho, V))$ からこれを埋め込むような次数付き Lie 代数 $\mathfrak{g}_{min}(\Gamma(\mathfrak{g}_0, B_0, \rho))$ が構成できる ([5, §3.3]). 標準的な五つ組理論と fundamental triplet 理論では次数つき Lie 代数の構成法（証明法）が多少異なるくらいで本質的な差異はない. いずれの構成法でも最終的に構成される次数付き Lie 代数は同型である ([10, Theorem 1.3])：

$$L(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}), B) \simeq \mathfrak{g}_{min}(\Gamma(\mathfrak{g}, B, \rho)).$$

標準的な五つ組では local part $V_{-1} + V_0 + V_1 \simeq \mathcal{V} + \mathfrak{g} + V$ の外側 $V_{\pm 2}, V_{\pm 3}, \ldots$ は数学的帰納法によって構成されるが, fundamental triplet では V.Kac の理論 [1, p.1276, Proposition 4] を用いて次数付き Lie 代数を構成する. 証明としての見通しが良いのは fundamental triplet の方だろう. 本稿では著者による標準的な五つ組の記号や用語をベースに用いる.

定理 1.4 (または H.Rubenthaler, [5, §3.3]) によって任意の有限次元簡約可能 Lie 代数とその表現に対して, 次数付き Lie 代数という “補助線” を引くことができた. この “補助線” から何が見えてくるか, を以降で紹介する. だが, それを述べる前に, 定理 1.4 を別視点から見てみよう. 表現論ではなく, Lie 代数の構造論の立場から見れば, 定理 1.4 は小さい Lie 代数とその表現を生成系とした新しい Lie 代数の構成法を提示している. この構成法と, Kac-Moody Lie 代数論などの先行する Lie 代数の構成法とを比較してみよう.

1.2 標準的な五つ組とそれに付随する Lie 代数２（構造の分析と明示）

次数付き Lie 代数 $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B)$ は勿論それ自身も Lie 代数として何らかの表現を持つ. ここでは $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B)$ の表現のうち, 非負整数, あるいは非正整数で次数付けされているものを考えよう.

定義 1.5 ([7, Theorems 3.14, 3.17])**.** 標準的な五つ組 $(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B)$ と $\mathfrak{g}$ の表現 (π, U) に対し, 次数付き Lie 代数 $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ との表現で以下の条件を満たすものが存在し, これを $(\tilde{\pi}^+, \tilde{U}^+)$ (resp. $(\tilde{\pi}^-, \tilde{U}^-)$) と書くことにする：

- $\tilde{U}^+$ は $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で次数付けされ (resp. $\mathbb{Z}_{\leq 0}$), その 0 次の component は U に等しい：

$$\tilde{U}^+ = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \tilde{U}^+_m, \quad \tilde{U}^+_0 \simeq U_0, \quad \tilde{\pi}^+(V_n)\tilde{U}^+_m \subset \begin{cases} \tilde{U}^+_{n+m} & (n+m \geq 0) \\ \{0\} & (n+m \leq -1) \end{cases}$$

$$\left(resp. \quad \tilde{U}^- = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}_{\leq 0}} \tilde{U}^-_m, \quad \tilde{U}^-_0 \simeq U_0, \quad \tilde{\pi}^-(V_n)\tilde{U}^-_m \subset \begin{cases} \tilde{U}^-_{n+m} & (n+m \leq 0) \\ \{0\} & (n+m \geq 1) \end{cases} \right)$$

- $\tilde{U}^+$ (resp. $\tilde{U}^-$) は $V_0, V_1, \tilde{U}_0^+ \simeq U_0$ (resp. $V_0, V_{-1}, \tilde{U}_0^- \simeq U_0$) で生成される.

- $\tilde{U}^+$ (resp. $\tilde{U}^-$) は $L(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B)$-加群として transitive である. すなわち, $\tilde{\pi}^+(V_{-1})u_m^+ = 0$ $(m \geq 1)$ (resp. $\tilde{\pi}^-(V_1)u_m^- = 0$ $(m \leq -1)$) であるとき $u_m^+ = 0$ (resp. $u_m^- = 0$).

定理 1.6 ([7, Theorem 3.26])**.** *2 つの標準的な五つ組 $(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B)$, $(\mathfrak{g}, \pi, U, \mathcal{U}, B)$ が与えられているとする (Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその上の双一次形式 B が共通). B が対称な双一次形式であるとき, 以下の (次数付けを無視した) Lie 代数の同型関係式が成り立つ：*

$$L(L(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathcal{V}, B), \tilde{\pi}^+, \tilde{U}^+, \tilde{\mathcal{U}}^-, B_L) \simeq L(\mathfrak{g}, \rho + \pi, V + U, \mathcal{V} + \mathcal{U}, B). \tag{1.2}$$

この関係式 (1.2) を通じて, 標準的な五つ組から Lie 代数を構成するという操作は “連鎖” していると言える. そのため, 定理 1.6 を chain rule と呼んでいる.

未解決問題 2. *定理 1.6 における B が対称という仮定は B_L の存在を保証するために必要である. そのため, 式 (1.2) の左辺は B が対称でないと意味を持たないが, 一方で, 右辺は B が対称であるか否かに関係なく意味を持つ. この点を踏まえて, 定理 1.6 を B が対称でない場合にも拡張できないだろうか.*

さて, 定理 1.6 より, 標準的な五つ組に付随する Lie 代数の構造を調べるには五つ組に含まれる Lie 代数をできるだけ簡単なものにしてよいことが分かる. 連鎖の “根本” である最も簡単な五つ組とは, 可換 Lie 代数とその表現から成る五つ組である. これを次のように定式化しよう.

定義 1.7 ([8, Definitions 2.1, 2.2, 2.3, 2.4])**.** 2 つの自然数 $r, n \in \mathbb{N}$, 3 つの行列 $A = (a_{ij}) \in M(r, r)$, $D = (d_{ij}) \in M(r, n)$, $\Gamma = (\gamma_i \delta_{ij}) \in M(n, n)$ をとる. ただし, A は可逆行列であり, Γ は可逆な対角行列とする. 次に, 3 つのベクトル空間 $\mathfrak{h}^r$, $\mathbb{C}_D^\Gamma$, $\mathbb{C}_{-D}^\Gamma$ を以下のように定義する：

- 基底 $\mathfrak{h}^r = \mathrm{Span}\{\epsilon_1, \dots \epsilon_r\}$, $\mathbb{C}_D^\Gamma = \mathrm{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathbb{C}_{-D}^\Gamma = \mathrm{Span}\{f_1, \dots, f_n\}$ をとる. 特に, $\dim \mathfrak{h}^r = r$, $\dim \mathbb{C}_D^\Gamma = \dim \mathbb{C}_{-D}^\Gamma = n$ である.

- 空間 $\mathfrak{h}^r$ は r 次元可換 Lie 代数の構造を持つ.

- 可換 Lie 代数 $\mathfrak{h}^r$ は表現 $\square_D^r(\epsilon_i)e_j = d_{ij}e_j$, $\square_{-D}^r(\epsilon_i)f_j = -d_{ij}f_j$ でそれぞれ $\mathbb{C}_D^\Gamma$, $\mathbb{C}_{-D}^\Gamma$ に作用する.

- 空間 $\mathbb{C}_D^\Gamma$ と $\mathbb{C}_{-D}^\Gamma$ は双一次形式 $\langle e_k, f_l \rangle = \gamma_k \delta_{kl}$ を通じて互いに双対 $\mathfrak{h}^r$-加群となっている.

また, $\mathfrak{h}^r$ 上の非退化不変双一次形式 B_A を

$$B_A(c_1\epsilon_1 + \cdots + c_r\epsilon_r, c'_1\epsilon_1 + \cdots + c'_r\epsilon_r) = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_r \end{pmatrix} \cdot {}^tA^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_r \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, 五つ組 $(\mathfrak{h}^r, \square_D^r, \mathbb{C}_D^\Gamma, \mathbb{C}_{-D}^\Gamma, B_A)$ を記号 $P(r, n; A, D, \Gamma)$ で表し, この形の五つ組を Cartan 型の五つ組 (pentad of Cartan type) と呼ぶ.

注意 1.8. 本稿における standard pentad の定義では pairing $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{C}_D^\Gamma \times \mathbb{C}_{-D}^\Gamma \to \mathbb{C}$ の非退化性を仮定していなかったが, pentad of Cartan type ではこれを仮定する ($\Leftrightarrow \Gamma$ の可逆性).

定義 1.9 ([8, Definition 3.6])**.** Cartan 型の五つ組 $P(r,n;A,D,\Gamma)$ に対応する Lie 代数を PC Lie 代数（Pentad of Cartan type の頭文字から）と呼び, 記号 $L(r,n;A,D,\Gamma)$ で表す.

PC Lie 代数を考える "意味" は次の定理である.

定理 1.10 ([8, Theorem 3.27], [9, Theorems 2.1, 3.2])**.** *1.* 任意の有限次元簡約可能 *Lie* 代数は適当な *PC Lie* 代数として書くことができる. 任意に有限次元簡約可能 *Lie* 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_1^k \oplus [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ をとり, X_l を $\mathfrak{g}$ の半単純部分 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ の *Cartan* 行列, Γ を $X_l' = X_l \cdot \Gamma$ が対称行列であるような対角行列とする. このとき, *Lie* 代数の *(*次数付けを無視した*)* 同型関係式

$$\mathfrak{g} \simeq L\left(k+l, l; \left(\begin{array}{c|c} I_k & O \\ \hline O & (X_l')^{-1} \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} O \\ \hline X_l \end{array}\right), \Gamma\right)$$

が成り立つ.

2. $\mathfrak{g}$ が有限次元簡約可能 *Lie* 代数, (ρ, V) が有限次元完全可約表現, B が対称な双一次形式であるとき, 次数付き *Lie* 代数は何らかの *PC Lie* 代数と同型になる：

$$L(\mathfrak{g}, \rho, V, \mathrm{Hom}(V,\mathbb{C}), B) \simeq \exists L(r,n;A,D,\Gamma).$$

これは, 上の主張 *1.* と定理 *1.6* から導くことができる. $\mathfrak{g}, \rho, V, B$ から具体的なパラメータ $r,n;A,D,\Gamma$ を指定することもできるが, 説明が煩雑になってしまうのでここでは深入りしない. 詳細は *[8, Theorem 3.28]* や *[9, Example 3.6]* を参照されたい.

3. *PC Lie* 代数は *contragredient Lie* 代数を使って記述することができる：

$$L(r,n;A,D,\Gamma) \simeq (G'(C) \oplus Z) \oplus \Delta.$$

ここで, $G'(C)$ は $C = \Gamma \cdot {}^tD \cdot A \cdot D$ を *Cartan* 行列とする *reduced contragredient Lie* 代数[1]であり, 以下が成り立つ.

$$\dim Z = \operatorname{rank} D - \operatorname{rank} C, \quad \dim \Delta = r - \operatorname{rank} D,$$
$$[Z, L(r,n;A,D,\Gamma)] = 0, \quad [L(r,n;A,D,\Gamma), L(r,n;A,D,\Gamma)] \subset G'(C) \oplus Z,$$
Δ は次数付き *Lie* 代数 $L(r,n;A,D,\Gamma)$ の各 *component* に対角に作用する.

[1](reduced) contragredient Lie 代数について一言で説明するならば, Kac-Moody Lie 代数の前身である. Cartan 行列と呼ばれる勝手な（特に, "対角成分はすべて 2 である" のような条件を課されていない）正方行列から構成される Lie 代数である. 特に, 正則な一般 Cartan 行列 A を持つ Kac-Moody Lie 代数（ここでは A は "対角成分はすべて 2 である" のような一般 Cartan 行列の条件を仮定されている）は同じく A を Cartan 行列とする contragredient Lie 代数と同型である. さらに詳しい説明や構成法については V.Kac の 1968 年の論文 [1, Chapter 2] を参照されたい.

すなわち, 有限次元簡約可能 Lie 代数の表現論は PC Lie 代数の構造論に帰着できる．また, PC Lie 代数が対称な双一次形式 B_A をもつとき（すなわち, A が対称行列であるとき）, その "最低ウェイト表現" から再度標準的な五つ組の操作で構成できる Lie 代数は, 再び PC Lie 代数になっている．この意味で, PC Lie 代数のクラスは "最低または最高ウェイト表現論について閉じている" ということもできるだろう．ただし, PC Lie 代数の表現は常に最低または最高ウェイトを持つとは限らない．例えば, 無限次元 PC Lie 代数の自分自身への adjoint 表現は最低ウェイトも最高ウェイトも持たない．

未解決問題 3. *PC Lie 代数のクラスの中で "極大" なものは存在するだろうか．無限個の PC Lie 代数が与えられたとき, これをすべて含むような "単一の" PC Lie 代数は存在するだろうか．もし存在するとしたら, 有限次元簡約可能 Lie 代数の表現論や構造論は単一の Lie 代数の構造分析に帰着できるのだろうか．*

まとめ 1. *(1)*: 有限次元簡約可能 *Lie* 代数およびその表現は何らかの次数付き *Lie* 代数に埋め込むことができる．

(2): 特に, 表現が有限次元かつ完全可約であるときには, その次数付き *Lie* 代数は *PC Lie* 代数になる．

(3): 従って, 有限次元簡約可能 *Lie* 代数およびその有限次元完全可約表現に関する問題は *PC Lie* 代数 *(contragredient Lie* 代数*)* の構造論に帰着できる．

2 表現の概均質性と次数付き Lie 代数

2.1 "概均質性" の読み換え

以降では前節の結果を踏まえ, 表現論, 特に概均質ベクトル空間論 (PV) に関する性質を次数付き Lie 代数の構造でどのように記述すればよいか考えよう．

まず, 本稿で用いる "表現の概均質性" という言葉の意味について約束しておこう．

定義 2.1 (cf. [3, p.33])**.** 本稿では PV を次のように定義する．連結代数群 G の有限次元ベクトル空間 V における (有理) 表現 $\pi\colon G \to GL(V)$ が与えられているとする．三つ組 (G,π,V) が PV であるとは, V の中に Zariski 位相で稠密な軌道が存在することを言う：

$$\exists v \in V \quad \text{s.t.} \quad \overline{\pi(G)v} = V.$$

命題 2.2 ([3, p.34, 命題 2.2])**.** 三つ組 (G,π,V) と点 $v \in V$ について以下の条件はすべて同値である．

(1): $\overline{\pi(G)v} = V$, *すなわち*, (G,π,V) *は* $\pi(G)v$ *を稠密軌道とする* PV *である．このとき,* v *は生成点であると言う．*

(2): $\pi(G)v$ *は* V *の Zariski 開集合である．*

(3): $\dim G_v = \dim G - \dim V$, *ただし,* $G_v = \{g \in G \ ;\ \pi(g)v = v\}$*．この* G_v *を生成的等方部分群という．*

(4): $\dim \mathrm{Lie}(G_v) = \dim \mathrm{Lie}(G) - \dim V$, ただし, G_v の *Lie* 代数 $\mathrm{Lie}(G_v)$ は $\mathrm{Lie}(G_v) = \{A \in \mathrm{Lie}(G) \ ; \ d\pi(A)v = 0\}$ で与えられる．この $\mathrm{Lie}(G_v)$ を生成的等方部分 *Lie* 代数という．

(5): $d\pi(\mathrm{Lie}(G))v = \{d\pi(A)v \ ; \ A \in \mathrm{Lie}(G)\} = V$.

PV という言葉は "群" 表現の特徴を指す言葉であるが, Lie 代数の微分表現を使って特徴づけることもできる．以降では命題 2.2 を踏まえ, Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現 (ρ, V) が $\rho(\mathfrak{g})v = V$ となる $v \in V$ を持つとき, $(\mathfrak{g}, \rho, V)$ は概均質性を持つ, ということにしよう．

定理 1.4 を使えば, 簡約可能 Lie 代数の表現は**概均質性をもつどうかに関係なく**次数付き Lie 代数の構造に埋め込むことができる．表現の概均質性という性質が次数付き Lie 代数の構造でどのように記述できるかを考えよう．

定理 2.3 ([6, Theorem 2.4])**.** *G を連結な簡約可能代数群, (π, V) を G の有限次元表現とする．$\mathrm{Lie}(G)$ を G の Lie 代数, $(d\pi, V)$ を (π, V) の微分表現とする．このとき, (G, π, V) が概均質ベクトル空間 (PV) である ($\Leftrightarrow$ $(\mathrm{Lie}(G), d\pi, V)$ が概均質性をもつ) ための必要かつ十分な条件は, 任意の双一次形式 B に対し,*

$$L(\mathrm{Lie}(G), d\pi, V, \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}), B) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$$

が次の条件を満たす $x \in V_1$ を持つことである：

- *$\mathrm{ad}\, x \colon V_{-1} \to V_0$ は線形写像として単射である．*

すなわち, 簡約可能概均質ベクトル空間とは, (PC) Lie 代数の部分クラスで, ある Lie 代数的な性質をもつものと同一視できる．ここで, $\mathcal{V} = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ と取っている, すなわち, $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ が非退化であることを要求していることに注意されたい.

略証. (必要性：PV $\Rightarrow$ $\mathrm{ad}\, x$ の単射). (G, π, V) が $x \in V \simeq V_1$ を生成点とする PV であるとき, $\mathrm{ad}\, x \colon V_{-1} \to V_0$ は単射である．実際, $(\mathrm{ad}\, x)(y) = [x, y] = 0$ となる $0 \neq y \in V_{-1}$ が存在したとすると

$$\langle d\pi(\mathrm{Lie}(G))x, y \rangle = B(d\pi(\mathrm{Lie}(G)), [x, y]) = 0$$

が成り立つ．**ここで,** $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ **が非退化であるから**, $d\pi(\mathrm{Lie}(G))x \subsetneq V$ でなければならない．これは x が生成点であることに矛盾する．

(十分性：$\mathrm{ad}\, x$ の単射 $\Rightarrow$ PV). 今の議論を逆からたどればよい． ∎

注意 2.4. 三つ組 (G, π, V) あるいは $(\mathrm{Lie}(G), d\pi, V)$ が PV であるためには

$$\dim G = \dim \mathrm{Lie}(G) > \dim V$$

でなければならない．そうでなければ $\dim G_v = \dim G - \dim V < 0$ となる $v \in V$ など存在し得ない．また, $\mathrm{ad}\, x \colon V_{-1} \simeq \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}) \to V_0 \simeq \mathrm{Lie}(G)$ は単射になり得ない．

特別な例として, $(GL_n \times G, \Lambda_1 \otimes \pi, \mathbb{C}^n \otimes V)$ という形の三つ組を考えよう. ただし, Λ_1 は GL_n の自然表現である. 群 GL_n の自然表現とその Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n = \mathrm{Lie}(GL_n)$ における微分表現 (例 1.3) をどちらも記号 Λ_1 で書いているが, 文脈で判断していただきたい.

命題 2.5 ([6, Lemma 2.7])**.** *G を連結な簡約可能代数群, (π, V) を G の有限次元表現とする. 三つ組 $(GL_n \times G, \Lambda_1 \otimes \pi, \mathbb{C}^n \otimes V)$ が PV であるための必要かつ十分な条件は, $\mathrm{Lie}(G)$ 上の任意の非退化不変双一次形式 B に対して, 次数付き Lie 代数 $L(\mathrm{Lie}(G), d\pi, V, \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}), B) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ が*

$$\begin{aligned} S_{(v_1,\ldots,v_n)} =& \{(\phi_1,\ldots,\phi_n) \in (V_{-1})^n \mid \langle v_k, \phi_l\rangle = 0 \quad (\forall k,l), \quad \sum_{k=1}^{n}[v_k,\phi_k] = 0\} \\ =& \{(\phi_1,\ldots,\phi_n) \in (V_{-1})^n \mid \langle v_k, \phi_l\rangle = 0 \quad (\forall k,l), \quad \sum_{k=1}^{n}\Phi_{d\pi}(v_k\otimes\phi_k) = 0\} = 0 \end{aligned}$$

となる $v_1,\ldots,v_n \in V_1 \simeq V$ を持つことである.

略証. 五つ組 $(\mathfrak{gl}_n + \mathrm{Lie}(G), \Lambda_1 \otimes d\pi, \mathbb{C}^n \otimes V, \mathbb{C}^n \otimes \mathrm{Hom}(V,\mathbb{C}), \mathrm{Tr} + B)$ の Φ-写像 $\Phi_{\Lambda_1\otimes d\pi}$ は五つ組 $(\mathrm{Lie}(G), d\pi, V, \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}^n), B)$ の Φ-写像 $\Phi_{d\pi}$ を使って

$$\Phi_{\Lambda_1\otimes d\pi}\left(\left(\sum_k \mathbf{e}_k \otimes v_k\right)\otimes\left(\sum_l \mathbf{e}_l\otimes\phi_l\right)\right) = \sum_{k,l}\left(\langle v_k,\phi_l\rangle E_{kl}, \delta_{kl}\Phi_{d\pi}(v_k\otimes\phi_l)\right)$$

とかける. これを定理 2.3 に適用すればよい. ∎

これを応用すると, 三つ組 $(GL_n \times G, \Lambda_1 \otimes \pi, \mathbb{C}^n \otimes V)$ $(\dim V > n)$ の概均質性は $(GL_{\dim V - n} \times G, \Lambda_1 \otimes \pi^*, \mathbb{C}^{\dim V - n} \otimes V^*)$ ((π^*, V^*) は (π, V) の dual 表現) のそれと一致するという, 裏返し変換 ([3, p.284, 定理 7.3]) の別証明が（G が簡約可能代数群であるという場合に限り）得られる. 詳しくは [6] を参照されたい.

未解決問題 4. 裏返し変換の他に "概均質性の同値条件" を発見することができるか.

2.2 概均質性を表す "関数"

表現の概均質性という 代数幾何学的な性質は, 線形写像 $\mathrm{ad}\, x\colon V_{-1} \to V_0$ の単射性という 線形代数の性質で記述できることを述べた. 本節ではこれを踏まえ, 概均質性を表す "関数" を考えよう.

命題 2.6. 自然数 $n, m_1, \ldots, m_r$ を $n > m_i$ $(i = 1,\ldots,r)$ となるようにとる. また, $m := m_1 + \cdots + m_r$ とおき, $m > n$ も仮定する[2]. 三つ組

$$(G,\pi,V) = (GL_n \times (GL_{m_1}\times\cdots\times GL_{m_r}), \Lambda_1 \otimes (\Lambda_1 \boxplus \cdots \boxplus \Lambda_1), \mathbb{C}^n \otimes (\mathbb{C}^{m_1} + \cdots + \mathbb{C}^{m_r})), \tag{2.1}$$

$$\pi(g, h_1,\ldots,h_r)(X_1,\ldots,X_r) = (gX_1{}^t h_1, \ldots, gX_r{}^t h_r) \tag{2.2}$$

[2] $n, m_1, \ldots, m_r, m$ の大小関係の仮定は自明な PV ([3, p.281, 命題 7.1]) を避けるための仮定である

を考える．ただし, $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^{m_i}$ は $n \times m_i$ 行列全体のなすのベクトル空間 $M(n, m_i)$ と同一視している．このとき, 三つ組 *(2.1)* が PV であるための必要かつ十分な条件は下記の形の行列 $U \in M(n(n+m), nm, \mathbb{C})$ で, フルランク（$rank\, nm$）なものが存在することである:

$$U = \left(\begin{array}{cccc} U_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & U_r \\ \hline W_{1,1} & W_{1,2} & \cdots & W_{1,r} \\ W_{2,1} & W_{2,2} & \cdots & W_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n,1} & W_{n,2} & \cdots & W_{n,r} \end{array}\right) \in M(n(m+n), nm, \mathbb{C}) \tag{2.3}$$

ただし,

$$U_j := \begin{pmatrix} u_{1,j}{}^t u_{1,j} & \cdots & u_{n,j}{}^t u_{1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1,j}{}^t u_{n,j} & \cdots & u_{n,j}{}^t u_{n,j} \end{pmatrix} \in M(nm_j, nm_j, \mathbb{C}), \tag{2.4}$$

$$W_{i,j} := \begin{pmatrix} {}^t u_{i,j} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {}^t u_{i,j} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & {}^t u_{i,j} \end{pmatrix} \in M(n, nm_j, \mathbb{C}), \tag{2.5}$$

$$u_{i,j} \in \mathbb{C}^{m_j} = M(m_j, 1, \mathbb{C}) \ (1 \le i \le n, 1 \le j \le r). \tag{2.6}$$

略証. (十分性：フルランク $\Rightarrow$ 概均質性) 式 (2.3) で定義されたフルランクの行列 U が存在するとする．ここで, $u_i = (u_{i,1}, \ldots, u_{i,r})$ とおくと, $S_{(u_1,\ldots,u_n)} = \{(0,\ldots,0)\}$ であり, 従って, 三つ組 (2.1) は PV である．このことを証明しよう．任意に元 $(\psi_1, \ldots, \psi_n) \in S_{(u_1,\ldots,u_n)}$, $\psi_i = (\psi_{i,1}, \ldots, \psi_{i,r})$, $\psi_{i,j} \in \mathbb{C}^{m_j}$ をとる．このとき,

$$\sum_{i=1}^n \Phi_{\Lambda_1 \boxplus \cdots \boxplus \Lambda_1}\big(u_i \otimes \psi_i\big) = \big(\sum_{i=1}^n u_{i,1}{}^t\psi_{i,1}, \ldots, \sum_{i=1}^n u_{i,r}{}^t\psi_{i,r}\big) = (0, \ldots, 0)$$

が成り立つので, 任意の $1 \le k \le n$ および $1 \le l \le r$ に対して

$$\big(\sum_{i=1}^n u_{i,l}{}^t\psi_{i,l}\big)u_{k,l} = \sum_{i=1}^n u_{i,l}{}^t u_{k,l}\psi_{i,l} = 0$$

が成立する. 従って, 任意の $1 \le k, k' \le n$ および $1 \le l \le r$ に対して以下の連立方程式が成り立つ:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{1\le i\le n} u_{i,l}{}^t u_{k,l}\psi_{i,l} = 0, \\ \displaystyle\sum_{1\le j\le r} {}^t u_{k,j}\psi_{k',j} = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

これを行列の形で書くと,

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & U_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & U_r \\ \hline W_{1,1} & W_{1,2} & \cdots & W_{1,r} \\ W_{2,1} & W_{2,2} & \cdots & W_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n,1} & W_{n,2} & \cdots & W_{n,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{1,1} \\ \vdots \\ \psi_{n,1} \\ \hline \vdots \\ \hline \psi_{1,r} \\ \vdots \\ \psi_{n,r} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \psi_{1,1} \\ \vdots \\ \psi_{n,1} \\ \hline \vdots \\ \hline \psi_{1,r} \\ \vdots \\ \psi_{n,r} \end{pmatrix} = 0. \tag{2.8}$$

従って, U がフルランクであることから $(\psi_1, \ldots, \psi_n) = (0, \ldots, 0)$.

(必要性：概均質性 $\Rightarrow$ フルランク)

証明のスケッチとしては, 今の議論を逆からたどればよい. ただし, 厳密な証明のためには仮定 $n > m_i$ を使う. ∎

命題 2.7. *式 (2.3) で定義される U を, 変数を成分とする行列と考える. このとき, U の nm 次小行列式として得られる "関数" のうちに 0 でないものが存在することが, 三つ組 (2.1) が PV であるための必要かつ十分な条件である.*

例 2.8. 三つ組 (2.1) で特に, $n = 2, m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$ の場合を考えよう. すなわち,

$$\begin{aligned} &(G, \pi, V) \\ =&(GL_2 \times (GL_1 \times GL_1 \times GL_1 \times GL_1), \Lambda_1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1 + \Lambda_1 + \Lambda_1), \mathbb{C}^2 \otimes (\mathbb{C}^1 + \mathbb{C}^1 + \mathbb{C}^1 + \mathbb{C}^1)) \end{aligned}$$

である. この三つ組は

$$(GL_1^4 \times SL_2, \Lambda_1 + \Lambda_1 + \Lambda_1 + \Lambda_1, \mathbb{C}^2 + \mathbb{C}^2 + \mathbb{C}^2 + \mathbb{C}^2) \tag{2.9}$$

という三つ組と同型である (三つ組の同型については [3, p.310, 定義 7.39] を参照). 三つ組 (2.9) は

$$(\text{群の次元}) = \dim(GL_1^4 \times SL_2) = 7 < 8 = (\text{空間の次元})$$

なので PV ではないが, これに対応する行列を計算すると

$$U = \left(\begin{array}{cccccccc} x_1^2 & x_1x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1x_2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1^2 & y_1y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1y_2 & y_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_1^2 & z_1z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_1z_2 & z_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_1^2 & w_1w_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_1w_2 & w_2^2 \\ \hline x_1 & 0 & y_1 & 0 & z_1 & 0 & w_1 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & y_1 & 0 & z_1 & 0 & w_1 \\ x_2 & 0 & y_2 & 0 & z_2 & 0 & w_2 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & y_2 & 0 & z_2 & 0 & w_2 \end{array}\right)$$

であり, そのランクはどんな x_i, y_i, z_i, w_i に対しても 7 以下であることがわかる.

三つ組 (2.1) は quiver の理論とも深くかかわっている. ここでは quiver についての詳しい説明は省略する. 特に, $r = 1, 2, 3$ のときはそれぞれ A_2, A_3, D_4 型の quiver から自然に構成される三つ組で, どんな $n, m_1, \ldots, m_r$ に対しても PV になることが知られている (Gabriel の定理). しかし, $r \geq 4$ となると, 上で挙げた例 2.8 のように PV でない三つ組が存在する.

未解決問題 5. 三つ組 *(2.1)* が *PV* であるための $n, m_1, \ldots, m_r$ の条件を求めよ. あるいは, U の小行列式の *"係数"* を $n, m_1, \ldots, m_r$ を使って明示できるか.

未解決問題 6. 上記の *(2.1)* に限らず, 何らかのパターンの三つ組で, その概均質性の十分条件, または必要十分条件を明示できるようなものが存在しないだろうか. もし, そのような三つ組のパターンを発見できたなら, 系統的に *PV* を *"発見"* できる.

まとめ 2. 表現の概均質性を *Lie* 代数の表現論に関する性質と読み換えることによって, 簡約可能 *PV* は次数付き *(PC) Lie* 代数の, *adjoint* 表現 *(bracket* 積*)* の *"単射性"* という構造的特徴を持った部分クラスと見做すことができる. そのため, 簡約可能 *PV* の *"発見"* 問題は抽象的には *Lie* 代数, 線形代数あるいは多項式の問題に帰着できるが, 未だその解決に至っていない.

3　PV の正則性と次数付き Lie 代数

PV の性質と次数付き Lie 代数の構造との関係について考察しよう. まずは, 先行する放物型 PV の理論について復習しておこう.

3.1　放物型 PV 理論 (H.Rubenthaler)

放物型 PV 理論（H.Rubenthaler）では, 次数付き有限次元半単純 Lie 代数の構造によって PV の性質を記述することができた. 詳細は [4] 等を参照されたい.

任意に有限次元半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ をとり, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の一つの Cartan 部分代数とする. R を $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ に関する root 系, ψ を R の基本系の一つとする. ψ の部分集合 θ に対して元 $H^\theta \in \mathfrak{h}$ を

$$\alpha(H^\theta) = \begin{cases} 0 & (\alpha \in \theta) \\ 2 & (\alpha \in \psi \setminus \theta) \end{cases}$$

で定め, $\mathfrak{g}$ の次数付けを

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} d_n(\theta), \quad d_n(\theta) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H^\theta, X] = 2nX\} \tag{3.1}$$

で定める. また, H^θ を次数付け (3.1) に対する grading element と呼ぶ ([4, p.193]).

第 0 次の component $d_0(\theta)$ は自然に $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数の構造を持ち, 簡約可能 Lie 代数になる. これを記号 $d_0(\theta) = \mathfrak{l}_\theta$ で置き換え, $\mathfrak{l}_\theta$ に対応する $G = \mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$ の部分群を L_θ とおく. すると, L_θ は簡約可能代数群であり, 各 $d_n(\theta)$ に自然に作用する. このとき, $(L_\theta, d_1(\theta))$ は E.B.Vinberg の結果により PV となるが, こうして得られる PV を**放物型 PV (PV of parabolic type)** と呼ぶ ([4, THEOREME Ⅱ.2.1.]). 放物型 PV は表現空間 $d_1(\theta)$ を有限個の L_θ-軌道に分解する.

放物型 PV は $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形に "重み" をつけることで記述できる. $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形の各頂点 (ψ の元と 1 対 1 に対応する) が $\psi \setminus \theta$ に含まれればこれを○で囲み (circled root), θ に含まれれば何もしない. こうして Dynkin 図形の頂点たちを 2 つのグループに分けることで放物型 PV を指定する.

放物型 PV の表現空間 $d_1(\theta)$ は $\sharp(\psi \setminus \theta)$ 個の既約成分に分解することができる. 特に, $\sharp(\psi \setminus \theta) =$ (circled root の個数) $= 1$ であれば, 放物型 PV$(L_\theta, d_1(\theta))$ は既約 PV である. また, 簡約可能代数群 L_θ の中心は $\sharp(\psi \setminus \theta) =$ ($d_1(\theta)$ の既約成分の個数) に等しい次元を持ち, $d_1(\theta)$ の各既約成分に過不足なくスカラー倍として作用する.

定理 3.1 ([4, COROLLAIRE. Ⅱ. 2.15.])**.** *放物型 PV $(L_\theta, d_1(\theta))$ が既約であったと仮定する ($\Leftrightarrow$ 簡約可能代数群 L_θ の中心 (スカラー) が 1 次元). このとき, 以下の 3 条件は同値である.*

(1): *放物型 PV $(L_\theta, d_1(\theta))$ が正則 (後述) である.*

(2): *放物型 PV $(L_\theta, d_1(\theta))$ が非自明な相対不変式 (後述) を持つ.*

(3): *grading element H^θ に対して (Y, H^θ, X) が $\mathfrak{sl}_2$-triplet, つまり $\mathbb{C}Y + \mathbb{C}H^\theta + \mathbb{C}X \simeq \mathfrak{sl}_2$ となる $Y \in d_{-1}(\theta)$, $X \in d_1(\theta)$ が存在する.*

すなわち, 放物型 PV の正則性という PV 論領域の性質は, 有限次元半単純 Lie 代数の $\mathfrak{sl}_2$ 部分 Lie 代数という Lie 代数領域の知見で記述できるのである. 実際, H.Rubenthaler は E.B.Dynkin による有限次元半単純 Lie 代数の中の $\mathfrak{sl}_2$ の分類表 (E.B.Dynkin, 1957) を活用して正則な既約放物型 PV の分類を与えている. もちろん, Dynkin はこの分類を PV 理論と無関係な問題意識から研究している[3].

[3]尚, 佐藤幹夫によって PV の理論が発見されるのは 1960 年代はじめごろである.

3.2 放物型とは限らないPVの正則性と次数付きLie代数

本節では放物型とは限らない PV に対して定理 3.1 の拡張を考えよう．概均質とは限らない, もちろん放物型 PV とも限らない, 任意の簡約可能代数群の表現は, 微分表現を通じて次数付き (PC) Lie 代数に埋め込むことができるのであった．この次数付き Lie 代数の構造と相対不変式及び PV の正則性との関係について考察しよう．その前に, 相対不変式と正則 PV の定義を約束しておこう．

定義 3.2 ([5, Definition 4.2.1])**.** 連結な代数群 G とその (概均質とは限らない) 表現 (π, V) をとる．元 X を通る G-軌道 $\mathcal{O}_X = \pi(G)X$ に対してその閉包 $\overline{\mathcal{O}_X}$ は既約 affine 多様体である．$\mathcal{O}_X$ 上の有理関数 $R \in \mathbb{C}(\overline{\mathcal{O}_X})$ が相対不変式であるとは, G 上の有理指標 $\chi\colon G \to \mathbb{C}$ が存在して

$$R(\pi(g)x) = \chi(g)R(x)$$

が任意の $g \in G$, $x \in \mathcal{O}_X$ に対して成立することを言う．

定義 3.3 ([11, p.119])**.** 三つ組 (G, π, V) を PV とし, 生成点として $x \in V$ を持つとする．G_x を x における生成的等方部分群, $\mathfrak{g}_1$ を $\mathrm{Lie}(G_x)$ と $[\mathrm{Lie}(G), \mathrm{Lie}(G)]$ で生成される $\mathrm{Lie}(G)$ の部分 Lie 代数とする．集合 $\overline{X}_1$ を $\overline{X}_1 = \{\omega \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})\ ;\ \omega\ |_{\mathfrak{g}_1} = 0\}$ で定める．このとき, (G, π, V) が擬正則 (quasi-regular) であるとは, $\omega \in \overline{X}_1$ と有理写像 $\varphi_\omega\colon \rho(G)x \to \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ で

$$\varphi_\omega(\pi(g)x') = \pi^*(g)\varphi_\omega(x'), \tag{3.2}$$

$$\langle d\pi(A)x', \varphi_\omega(x')\rangle = \omega(A) \tag{3.3}$$

を満たすものが存在し, φ_ω の像が Zariski 位相で稠密なことをいう：

$$\overline{\varphi_\omega(\pi(G)x)} = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}). \tag{3.4}$$

特に, ω が何らかの相対不変式に対応する G の指標 χ の微分としてとれるとき ($\omega = d\chi$), (G, π, V) は正則 (regular) であるという．正則な PV は常に擬正則であるが, 代数群 G が簡約可能代数群であるとき, 擬正則性と正則性は同値になる ([11, Proposition 1.3])．

簡約可能 PV の正則 (擬正則) 性については [3, p.44, 定義 2.14, p.61, 定理 2.28] も参照されたい．

定理 3.4 ([5, Theorem 4.2.3])**.** *G_0 を連結な代数群とし, (π, V) をその有限次元表現とする．Lie 代数 Lie(G_0) は中心が 1 次元の簡約可能 Lie 代数 $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}(G_0) = \mathbb{C}\,H + [\mathrm{Lie}(G_0), \mathrm{Lie}(G_0)]$ であり, H は $d\pi$ で V 全体にスカラー倍として作用するとする．このとき, $X \in V$ について以下の 4 条件は同値である．*

(1): $X \notin d\pi([\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0])X$,

(2): 軌道 $\pi([G_0, G_0])X$ は *non-conical* である,

(3): 軌道 $\pi(G_0)X$ 上に非自明な相対不変式が存在する,

(4): X は (Y, H, X) が $\mathfrak{sl}_2$-*triplet* となるような $Y \in \mathfrak{g}_{min}(\Gamma(\mathfrak{g}_0, B_0, d\pi))$ をもつ．

ここでは, 軌道 (既約 affine 多様体) $\mathcal{O}_X$ が稠密であることを要求していない点に注目していただきたい. H.Rubenthaler の定理 3.4 は PV 理論だけを対象とするものではない.

では, 考察の対象を PV に限り, 相対不変式の性質で定義される PV の正則性は次数付き Lie 代数の言葉でどのように記述できるだろうか. その問いに対する答えが以下の定理である.

定理 3.5 ([10, Theorem 2.6])**.** *連結な簡約可能代数群およびその表現からなる三つ組* (G, π, V) *をとる. 簡約可能 Lie 代数* $\mathrm{Lie}(G)$ *の中心* $Z(\mathrm{Lie}(G))$ *は 1 次元であり, 空間* V *にスカラー倍として作用するとする：*

$$\exists H \in Z(\mathrm{Lie}(G)) \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{Lie}(G) = \mathbb{C}\,H + [\mathrm{Lie}(G), \mathrm{Lie}(G)], \quad d\pi(H)x = 2x \quad (\forall x \in V)$$

このとき, (G, π, V) *が PV であり, かつ正則 (⇔ 擬正則) であるための必要かつ十分な条件は, 任意の非退化不変双一次形式* B *に対して次数付き Lie 代数* $L(\mathrm{Lie}(G), d\pi, V, \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}), B) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ *が以下の 3 条件を同時に満たす* $X \in V_1$ *と* $Y \in V_{-1}$ *を持つことである.*

1. (Y, H, X) *は* $\mathfrak{sl}_2$*-triplet である. すなわち,* Y, H, X *で生成される* $L(\mathrm{Lie}(G), d\pi, V, \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}), B)$ *の部分 Lie 代数は* $\mathfrak{sl}_2$ *に同型である.*

2. (Y, H, X) *が* $\mathfrak{sl}_2$*-triplet となるような* Y *は* X, H *に対してただ一つに定まる. すなわち,* $\mathbb{C}\,\eta + \mathbb{C}\,H + \mathbb{C}\,X \simeq \mathfrak{sl}_2$ *ならば* $\eta = Y$*.*

3. (Y, H, X) *が* $\mathfrak{sl}_2$*-triplet となるような* X *は* Y, H *に対してただ一つに定まる. すなわち,* $\mathbb{C}\,Y + \mathbb{C}\,H + \mathbb{C}\,\xi \simeq \mathfrak{sl}_2$ *ならば* $\xi = X$*.*

解説. ここでは証明のアイディアだけを簡単にまとめて紹介する. 厳密な証明の流れについては原論文 [10, Theorem 2.6] を参照されたい.

三つ組が正則 PV であるかどうかは

(1): 稠密な軌道 $\mathcal{O}_X = \pi(G)X$,

(2): $V = V_1$ の中の軌道 $\mathcal{O}_X$ 上の相対不変式 $R \leftrightarrow \chi$ の存在,

(3): $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}) = V_{-1}$ の中の軌道 $\varphi_{d\chi}(\mathcal{O}_X)$ の稠密性

の 3 点で評価される. ここで $Y = \varphi_{d\chi}(X)$ とおけば, 順番に

(1): $\leftrightarrow \mathrm{ad}\,X \colon V_{-1} \to V_0$ の単射性 $\leftrightarrow (H, X)$ に対する Y の一意性,

(2): $\leftrightarrow (Y, H, X)$ が $\mathfrak{sl}_2$-triplet になる (定理 3.4),

(3): $\leftrightarrow \mathrm{ad}\,Y \colon V_1 \to V_0$ の単射性 $\leftrightarrow (H, Y)$ に対する X の一意性

と対応する. これを整理してまとめたのが 定理 3.5 である. ∎

ここで既約放物型 PV に対しては, 正則性は相対不変式の存在と同値であったことを思い出して頂きたい. しかし, 非放物型の PV には定数でない相対不変式を持ちながら, 正則でない空間の例が存在する. 例えば, 既約 PV

$$(G, \pi, V) = (GL_1 \times Sp_n \times SO_3, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 \otimes \Lambda_1, \mathbb{C}^1 \otimes \mathbb{C}^{2n} \otimes \mathbb{C}^3) \quad (n \geq 2)$$

は定数でない相対不変式を持つが, 正則ではない ([3, p.97, 例 2.30]). この PV は定理 3.5 の仮定を満たし, 対応する Lie 代数 $L(\mathrm{Lie}(G), d\pi, V, \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}), B)$ は条件 1. ($\mathfrak{sl}_2$-triplet (Y, H, X) の存在) を満たす. このとき, X が条件 2. (Y の一意性) を満たすようにとることができるが, こうして選んだ Y は同時に条件 3. (X の一意性) を満たすことはできない ([10, Example 2.8]).

注意 3.6. 放物型 PV 理論においては, 代数群 $G = L_\theta$ のスカラーの個数 (G の中心の次元) は表現空間 $V = d_1(\theta)$ の既約成分の個数に支配されていた. しかし, 同理論が拡張された今では, もはや G のスカラーと V の既約成分の個数は無関係にとることができる. 定理 3.5 では表現空間が既約であるとは限らない, (代数的に独立な) 相対不変式が 1 本だけ存在するような PV を想定している.

未解決問題 7. *定理 3.5 において G のスカラーが 1 次元であるという仮定は $X, \varphi_{d_X}(X)$ を含む (によって生成される) Lie 代数が $\mathfrak{sl}_2$ という扱いやすい構造になるために必要である. これを拡張し, スカラーが 2 次元以上の場合にも定理 3.5 の類似を得られないだろうか.*

未解決問題 8. *定理 3.5 では次数付き Lie 代数を使って相対不変式の "存在" だけを抽象的に記述できるのみである. さらにここから踏み込んで相対不変式の b-関数 ([3, p.319]) などの性質を次数付き Lie 代数で記述することはできないだろうか.*

まとめ 3. *中心が 1 次元であるような簡約可能代数群が作用する軌道上の相対不変式の存在は, 次数付き (PC) Lie 代数の $\mathfrak{sl}_2$-triplet ($\mathfrak{sl}_2$-部分 Lie 代数) と対応している (H.Rubenthaler). これは, 先行する放物型 PV 理論の結果の拡張である. そして, PV の正則性 (相対不変式の性質で特徴づけられる) は $\mathfrak{sl}_2$-triplet に関するある種の "一意性" で記述できる. だが, 未解決の問題も多く残されている.*

4 最後に

標準的な五つ組理論に関する展望を述べて本稿を終わりにしよう.

標準的な五つ組理論, fundamental triplet 理論のいずれも作用する Lie 代数上の非退化不変双一次形式を媒介とし, これから大きな次数付き Lie 代数を構成するものである. その意味で, 双一次形式の存在が最も重要な前提になっているのだが, このような双一次形式は Lie 代数だけでなく, Lie"超" 代数の一部も持っている (cf. [2, Propositions 4.1, 4.2, 4.3, 4.5]).

未解決問題 9. *本稿で紹介した内容を Lie 超代数分野に拡張できるか.*

References

[1] V. G. Kac. Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth. Math. USSR-Izvestija vol. 2 (1968), No.6. 1271–1311.

[2] V. G. Kac. A sketch of Lie superalgebra theory. Commun. math. Phys. 53, (1977), 31–64.

[3] 木村達雄. 概均質ベクトル空間. 岩波書店. 1998.

[4] H.Rubenthaler. Espaces préhomogènes de type parabolique. Lect. Math. Kyoto Univ. **14**, (1982), 189–221.

[5] H.Rubenthaler. Minimal graded Lie algebras and representations of quadratic algebras. Journal of Algebras 473, (2017), 29–65.

[6] N.Sasano. Lie algebras associated with a standard quadruplet and prehomogeneous vector spaces. Tsukuba Journal of Mathematics vol. 39, No.1, (2015), 1–14.

[7] N. Sasano. Lie algebras constructed with Lie modules and their positively and negatively graded modules. Osaka J. Math. vol. 54, No.3 (2017), 533–568.

[8] N. Sasano. Contragredient Lie algebras and Lie algebras associated with a standard pentad. arXiv:1604.02225v3 (2017).

[9] N. Sasano. Reduced contragredient Lie algebras and PC Lie algebras. arXiv:1607.07546v4 (2017).

[10] N.Sasano. Graded Lie algebras and regular prehomogeneous vector spaces with one-dimensional scalar multiplication. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. vol. 93, No.10, (2017), 124–128.

[11] M.Sato, M.Kashiwara, T.Kimura, T.Oshima. Micro-local analysis of prehomogeneous vector spaces. Inventiones math. 62 (1980), 117–179.

直交群の Weingarten calculus と Weingarten グラフ

松本 詔
鹿児島大学大学院 理工学研究科

1 序

Weingarten calculus とは, コンパクト Lie 群 G から定まる Haar ランダム行列 $X = (x_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ に対して, 行列成分の混合モーメント

$$\mathbb{E}[x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_2} \cdots x_{i_n j_n}]$$

を計算する手法のことである. 言い換えると, G 上の Haar 確率測度 dg と座標関数 $G \in g \mapsto g_{ij} \in \mathbb{C}$ $(1 \le i,j \le N)$ に対し,

$$\int_G g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_n j_n} \, dg$$

の形の積分を計算することである. Weingarten calculus の名前は 1978 年の Don Weingarten の先駆的研究 [12] に由来し, Collins [1] によって命名された. 以降の発展については, 例えば論文 [2–4, 6, 7] や, 拙著の日本語文献 [8–11] を参照されたい.

本講演の目的は, 実直交群

$$\mathrm{O}(N) = \{g \in \mathrm{GL}(N, \mathbb{R}) \mid gg^{\mathrm{T}} = I_N\}$$

における Weingarten calculus の概要を解説することである. 実は, 直交群 $\mathrm{O}(N)$ よりもユニタリ群 $\mathrm{U}(N) = \{g \in \mathrm{GL}(N, \mathbb{C}) \mid gg^* = I_N\}$ の方が易しく, 解説しやすいのだが, 本研究会は「実函数論・函数解析学合同シンポジウム」なので複素ではなく実の場合を扱うことにした.

本研究は JSPS 科研費 17K05281 の助成を受けたものである.
2018 年度（第 57 回）実函数論・函数解析学合同シンポジウム, 平成 30 年 9 月 3 日〜5 日.

2 Wick calculus

Weingarten calculus は Wick calculus の類似と見なせる．ここでは [13] にしたがって Wick calculus を復習する．この節の内容は直接 Weigarten calculus に必要なわけではないが, 理解の助けになるだろう．

2.1 正規分布

$\Sigma = (\sigma_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ を N 次の正定値実対称行列とする．平均 $\mathbf{0}$ で共分散行列が Σ で与えられる n 次元正規分布 $\mathrm{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ を考える．このとき N 次元の確率変数 $\mathbf{X}^{(N)} = (X_1, X_2, \ldots, X_N) \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ の同時密度関数は

$$(2\pi)^{-N/2}(\det \Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \mathbf{x}, \Sigma^{-1}\mathbf{x}\rangle\right), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$

で与えられる．ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^N$ の標準内積.

Question 1. $i_1, \ldots, i_m \in \{1, 2, \ldots, N\}$ が与えられているとする．混合モーメント $\mathbb{E}[X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_m}]$ をどうやって計算するか？　例えば, $\mathbb{E}[X_1 X_2 X_3^2] =?$

2.2 Wick の公式

Wick の公式は Question 1 の答えを与える．まずペアリング (pairing, perfect matching) を用意しよう．集合 $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ 上の**ペアリング**とは, $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ の 2 点集合への分割であり,

$$\mathfrak{p} = \{\{p_1, p_2\}, \{p_3, p_4\}, \ldots, \{p_{2n-1}, p_{2n}\}\}$$

もしくは省略して

$$\mathfrak{p} = \{p_1, p_2\}\{p_3, p_4\} \cdots \{p_{2n-1}, p_{2n}\} \tag{2.1}$$

と表す.

定義 2.1. 集合 $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ 上のペアリング全体を $\mathcal{M}_{2n}$ で表す.

例えば $\mathcal{M}_4$ は

$$\{1, 2\}\{3, 4\}, \qquad \{1, 3\}\{2, 4\}, \qquad \{1, 4\}\{2, 3\}$$

の 3 つから構成される．ここで, 例えば $\{1,3\}\{2,4\}$ は $\{2,4\}\{3,1\}$ と書いても同じものを表すことに注意せよ．一般に $|\mathcal{M}_{2n}| = (2n-1)!! = \prod_{i=1}^{n}(2i-1)$ である．

命題 2.2 (Wick の公式 [13])**.** m が奇数ならば $\mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_m}] = 0$ である．また $m=2n$ のとき

$$\mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_{2n}}] = \sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{M}_{2n}} \mathbb{E}[X_{i_{p_1}}X_{i_{p_2}}]\mathbb{E}[X_{i_{p_3}}X_{i_{p_4}}]\cdots\mathbb{E}[X_{i_{p_{2n-1}}}X_{i_{p_{2n}}}]$$

となる．

例 2.3.

$$\mathbb{E}[X_1X_2X_3X_4] = \mathbb{E}[X_1X_2]\mathbb{E}[X_3X_4] + \mathbb{E}[X_1X_3]\mathbb{E}[X_2X_4] + \mathbb{E}[X_1X_4]\mathbb{E}[X_2X_3].$$

$X_3 = X_4$ として,

$$\mathbb{E}[X_1X_2X_3^2] = \mathbb{E}[X_1X_2]\mathbb{E}[X_3^2] + 2\mathbb{E}[X_1X_3]\mathbb{E}[X_2X_3].$$

このように, 正規分布たちの混合モーメント $\mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_m}]$ は, 共分散 $\sigma_{ij} = \mathbb{E}[X_iX_j]$ の積和として容易に計算することができる．

行列成分が正規分布に従う確率変数となっているランダム行列を, ガウス型ランダム行列という．GOE, GUE, Ginibre 行列などがある．これらのランダム行列の行列成分の混合モーメントは, Wick の公式を用いること — Wick calculus — で計算することが可能である．一方, ガウス型以外のランダム行列では Wick の公式以外の手法が当然必要になる．次節以降では, Haar 直交行列と呼ばれるランダム行列において, Wick の公式に相当するものがどうなるか, という問題を扱う．

3 直交群の Weingarten calculus

3.1 直交群

実直交群

$$\mathrm{O}(N) = \{g \in \mathrm{GL}(N,\mathbb{R}) \mid gg^{\mathrm{T}} = I_N\}$$

を考える．これは N 次の実直交行列 ($g^{\mathrm{T}} = g^{-1}$) 全体のなす集合であって, 行列の積に関して群になる．さらにコンパクト Lie 群になっている．一般に, コンパクト Lie 群 G は Haar 確率測度 μ_G を持つ．

定義 3.1. $R = (r_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ を $\mathrm{O}(N)$ の Haar 確率測度 $\mu_{\mathrm{O}(N)}$ にしたがうランダム行列とする．R を単に N 次 Haar 直交行列と呼ぶ.

$RR^{\mathrm{T}} = I_N$ であり, Haar 測度の定義から任意の $g_1, g_2 \in \mathrm{O}(N)$ に対し $g_1 R g_2$ と R は同分布である.

Question 2. $i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m \in \{1, 2, \ldots, N\}$ が与えられているとする．混合モーメント $\mathbb{E}[r_{i_1 j_1} r_{i_2 j_2} \cdots r_{i_m j_m}]$ をどうやって計算するか？

まず, 命題 2.2 と同様に, m が奇数ならば $\mathbb{E}[r_{i_1 j_1} r_{i_2 j_2} \cdots r_{i_m j_m}] = 0$ となる．実際, Haar 確率測度の性質から R と $-R = (-I_N)R$ が同分布であるので, $\mathbb{E}[r_{i_1 j_1} r_{i_2 j_2} \cdots r_{i_m j_m}] = \mathbb{E}[(-r_{i_1 j_1})(-r_{i_2 j_2}) \cdots (-r_{i_m j_m})] = (-1)^m \mathbb{E}[r_{i_1 j_1} r_{i_2 j_2} \cdots r_{i_m j_m}]$ が成り立つことからしたがう.

3.2　$N = 2$ の計算

$\mathrm{O}(2)$ について考えてみよう．簡単な線形代数の考察から

$$\mathrm{O}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi) \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

が分かる．次を得る.

命題 3.2. $R = \left(\begin{smallmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{smallmatrix}\right)$ を 2 次 Haar 直交行列とする．非負整数 a, b, c, d に対し,

$$\mathbb{E}[r_{11}^a r_{12}^b r_{21}^c r_{22}^d] = \varepsilon_{a,b,c,d} \frac{(a+d-1)!!\,(b+c-1)!!}{(a+b+c+d)!!}$$

となる．ここで,

$$\epsilon_{a,b,c,d} = \begin{cases} 1 & a, b, c, d \text{ がすべて偶数} \\ -1 & a, b, c, d \text{ がすべて奇数} \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}$$

略証．非負整数 a, b, c, d に対し

$$\mathbb{E}[r_{11}^a r_{12}^b r_{21}^c r_{22}^d] = \frac{(-1)^b + (-1)^d}{2} \int_0^{2\pi} \cos^{a+d}\theta \cdot \sin^{b+c}\theta \, \frac{d\theta}{2\pi}$$

となる．右辺の積分計算は簡単な演習問題であり, 特に $a+d$ と $b+c$ が共に偶数のときのみ 0 にならない．また, $\frac{(-1)^b + (-1)^d}{2}$ は, b, d が同符号のときのみ 0 でない．これらのことから結論を得る. □

このように $N=2$ の場合は Question 2 は明瞭な答えを得る．ところが一般の N ではもっと複雑な形になる．

3.3 Weingarten 公式

次の定理は Question 2 の部分的な答えを与える．

定理 3.3 (Collins–Śniady [4])**.** $R=(r_{ij})$ を N 次の Haar 直交行列とする．$\{1,2,\ldots,N\}$ の元からなる 2 つの列 $\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_{2n})$, $\mathbf{j}=(j_1,\ldots,j_{2n})$ に対し，

$$\mathbb{E}[r_{i_1j_1}r_{i_2j_2}\cdots r_{i_{2n}j_{2n}}]=\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{M}_{2n}}\sum_{\mathfrak{q}\in\mathcal{M}_{2n}}\delta_{\mathfrak{p}}(\mathbf{i})\delta_{\mathfrak{q}}(\mathbf{j})\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q},N)$$

となる．ここで

$$\delta_{\mathfrak{p}}(\mathbf{i})=\prod_{\{a,b\}\in\mathfrak{p}}\delta_{i_a,i_b}$$

と定める．

$\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q},N)$ の定義も含め，様々な角度からこの量を研究することが本稿の後半の内容である．

3.4 Weingarten calculus の具体例

あとで見るが，$\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}\in\mathcal{M}_4$ に対し

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p},\mathfrak{p},N)=\frac{N+1}{N(N+2)(N-1)},\qquad \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q},N)=-\frac{1}{N(N+2)(N-1)} \tag{3.1}$$

である．これと定理 3.3 を用いて，4 次の混合モーメントをいくつか計算してみよう．

$$\mathfrak{p}_1=\{1,2\}\{3,4\},\qquad \mathfrak{p}_2=\{1,3\}\{2,4\},\qquad \mathfrak{p}_3=\{1,4\}\{2,3\}$$

とおく．

例 3.4. $\mathbb{E}[r_{11}^2r_{22}^2]=\mathbb{E}[r_{11}r_{11}r_{22}r_{22}]$ を考える．定理 3.3 を $\mathbf{i}=\mathbf{j}=(1,1,2,2)$ として適用する．$\delta_{\mathfrak{p}}(\mathbf{i})=\delta_{\mathfrak{q}}(\mathbf{j})=1$ となるのは，$\mathfrak{p}=\mathfrak{q}=\mathfrak{p}_1$ のときのみ．よって，

$$\mathbb{E}[r_{11}^2r_{22}^2]=\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_1,N)=\frac{N+1}{N(N+2)(N-1)}.$$

例 3.5. $\mathbb{E}[r_{11}r_{12}r_{21}r_{22}]$ を考える．定理 3.3 を $\mathbf{i}=(1,1,2,2)$, $\mathbf{j}=(1,2,1,2)$ として適用する．$\delta_{\mathfrak{p}}(\mathbf{i})=\delta_{\mathfrak{q}}(\mathbf{j})=1$ となるのは, $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}_2$ のときのみ．よって,

$$\mathbb{E}[r_{11}r_{12}r_{21}r_{22}]=\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,N)=\frac{-1}{N(N+2)(N-1)}.$$

例 3.6. $\mathbb{E}[r_{22}^2]$ を考える．定理 3.3 を $\mathbf{i}=\mathbf{j}=(2,2,2,2)$ として適用する．すべての $\mathfrak{p},\mathfrak{q}\in\mathcal{M}_4$ で $\delta_{\mathfrak{p}}(\mathbf{i})=\delta_{\mathfrak{q}}(\mathbf{j})=1$ となるので,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[r_{22}^2]=&\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{M}_4}\sum_{\mathfrak{q}\in\mathcal{M}_4}\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q},N)\\ =&3\times\frac{N+1}{N(N+2)(N-1)}+6\times\frac{-1}{N(N+2)(N-1)}\\ =&\frac{3}{N(N+2)}.\end{aligned}$$

例 3.7. $\mathbb{E}[r_{13}r_{12}r_{22}^2]$ を考える．定理 3.3 を $\mathbf{j}=(3,2,2,2)$ として適用するが, $\delta_{\mathfrak{q}}(\mathbf{j})=1$ となる $\mathfrak{q}$ は存在しない．よって $\mathbb{E}[r_{13}r_{12}r_{22}^2]=0$.

注意 3.8. これらのような計算は `Maple` 上で実行できる [5].

3.5 ここまでの話とこれから

定理 3.3 により, Question 2 は次の問題に帰着された.

Question 3. 一般に, 値 $\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q},N)$, $\mathfrak{p},\mathfrak{q}\in\mathcal{M}_{2n}$, をどうやって求めるか？　またこれはどういう性質を持つか？

次節以降で, この Question に対し 3 通りの答えを与える.

- $\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q},N)$ を線形代数的に定義する.
- 対称群の調和解析を通じて $\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q},N)$ を求める.
- $\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q},N)$ を N^{-1} に関して展開し, その係数を組合せ論的に記述する.

4 Weingarten 関数の定義

まずは $\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q},N)$ がどのように定義されるかを見よう．この節の内容は [9] とも重複している.

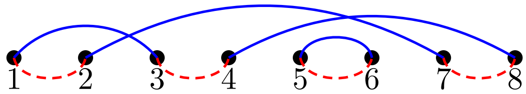
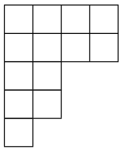


図 1　$\sigma = [3,1,6,5,2,7,4,8]$ の $\Gamma(\sigma)$. coset-type は $\texttt{type}(\sigma) = (3,1) \vdash 4$.

4.1　整数の分割

有限個の正整数からなる非増加列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ を**分割**という. l をしばしば $\ell(\lambda)$ で表し, 分割 λ の長さと呼ぶ. $|\lambda| := \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = n$ のとき, λ は n の分割であるといい, $\lambda \vdash n$ とかく. 例えば $\lambda = (4,4,2,2,1)$ は 13 の分割で, 長さは $\ell(\lambda) = 5$ である. 分割はしばしば Young 図形で表示される. 例えば $\lambda = (4,4,2,2,1)$ の Young 図形は



である.

4.2　coset-type

$\mathfrak{S}_{2n}$ を $\{1,2,\ldots,2n\}$ 上の対称群とする. 置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}$ に対し, 次のように定まる無向グラフ $\Gamma(\sigma)$ を考える. $\Gamma(\sigma)$ の頂点集合 V は $\{1,2,\ldots,2n\}$ である. 辺集合は「赤い辺（破線）」$\{2i-1, 2i\}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ と, 「青い辺（実線）」$\{\sigma(2i-1), \sigma(2i)\}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ で構成される. このとき各頂点からは, 「赤い辺（破線）」と「青い辺（実線）」が一つずつ繋がっている. 図 1 は置換 $\sigma = [3,1,6,5,2,7,4,8] \in \mathfrak{S}_8$ に対応するグラフである.

$\Gamma(\sigma)$ はいくつかの連結成分に分かれるが, 各連結成分は偶数個の頂点を含む. それらの個数を並べて, $2\mu_1, 2\mu_2, \ldots, 2\mu_l$ と書く. ここで $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_l$ となるようにしてよい. このとき $\sum_{i=1}^{l} \mu_i = n$ が成り立つので, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$ は n の分割になる. この分割 μ を σ の **coset-type** と呼び, $\texttt{type}(\sigma)$ と表す. coset-type という名前の由来は後述する（§5.1）.

例えば, σ が恒等置換のときは $\Gamma(\sigma)$ は n 個の連結成分に分かれ, それぞれが頂点 $2i-1, 2i$ を持つので, $\texttt{type}(\sigma) = (1^n) = (1,1,\ldots,1)$ (n times) となる. 図 1 のように置換 $\sigma = [3,1,6,5,2,7,4,8]$ は $\texttt{type}(\sigma) = (3,1) \vdash 4$ となる.

4.3 ペアリングと置換

$\mathcal{M}_{2n}$ の 2 元

$$\begin{aligned}\mathfrak{p} =& \{p_1, p_2\}\{p_3, p_4\}\cdots\{p_{2n-1}, p_{2n}\}, \\ \mathfrak{q} =& \{q_1, q_2\}\{q_3, q_4\}\cdots\{q_{2n-1}, q_{2n}\}\end{aligned}$$

に対し, $p_i \mapsto q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ で定まる置換を $\sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ で表す．ただし, ペアリングの表示の仕方は一意的ではなかった（例えば $\{1, 3\}\{2, 4\}$ は $\{2, 4\}\{3, 1\}$ と書いてもよいのだった）ので, $\sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ は一意的に定まらないが, このことは後で問題にならない.

注意 4.1. $\sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ が一意的に定まらないことが気に入らないときは, $\mathfrak{p}$ たちの表示を $p_{2i-1} < p_{2i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $p_{2i-1} < p_{2i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ のように条件を付けて p_i, q_j たちを一意的に決めればよい.

4.4 $\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, N)$ の定義

行列 $\mathbf{G}_{n,N}$ を

$$\mathbf{G}_{n,N} = (N^{\ell(\mathtt{type}(\sigma(\mathfrak{p},\mathfrak{q})))})_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}\in\mathcal{M}_{2n}}$$

と定める．各行列成分に現れる指数は, 分割 $\mathtt{type}(\sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}))$ の長さである.

$N \geq n$ のとき行列 $\mathbf{G}_{n,N}$ は可逆である．逆行列を $\mathbf{W}_{n,N}$ で表す．$N < n$ のときは $\mathbf{G}_{n,N}$ の擬似逆行列を $\mathbf{W}_{n,N}$ とすればよいのだが, 簡単のために以下この節では $N \geq n$ と仮定する.

定義 4.2. 行列 $\mathbf{W}_{n,N}$ の第 $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$-成分を $\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, N)$ と書く.

例 4.3. $N \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{2,N} =& \begin{pmatrix} N^2 & N & N \\ N & N^2 & N \\ N & N & N^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{W}_{2,N} =& \frac{1}{N(N+2)(N-1)} \begin{pmatrix} N+1 & -1 & -1 \\ -1 & N+1 & -1 \\ -1 & -1 & N+1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

これより (3.1) を得る.

命題 4.4. $\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q},N)$ は $\mathtt{type}(\sigma(\mathfrak{p},\mathfrak{q}))$ で決定される.

分割 μ に対し, $\mu=\mathtt{type}(\sigma(\mathfrak{p},\mathfrak{q}))$ ならば

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mu,N):=\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q},N)$$

と書くことにする. $\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mu,N)$ のリストを以下に記す.

例 4.5.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}((1),N)&=\frac{1}{N},\\
\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}((1^2),N)&=\frac{N+1}{N(N+2)(N-1)},\\
\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}((2),N)&=\frac{-1}{N(N+2)(N-1)},\\
\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}((1^3),N)&=\frac{N^2+3N-2}{N(N+2)(N+4)(N-1)(N-2)},\\
\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}((2,1),N)&=\frac{-N-2}{N(N+2)(N+4)(N-1)(N-2)},\\
\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}((3),N)&=\frac{2}{N(N+2)(N+4)(N-1)(N-2)}.
\end{aligned}$$

5 Weingarten 関数と対称群の調和解析

この節の目的は, 対称群の調和解析を通じて $\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q},N)$ $(\mathfrak{p},\mathfrak{q}\in\mathcal{M}_{2n})$ の表示を得ることである. 実際, 我々は関数

$$\mathfrak{S}_{2n}\ni\sigma\mapsto\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\sigma,N)\in\mathbb{Q}$$

を定め, 目的の $\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q},N)$ を（記号を濫用しているが）

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p},\mathfrak{q},N):=\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\sigma(\mathfrak{p},\mathfrak{q}),N) \tag{5.1}$$

で再現する. ここでの結果は [2,9] が詳しい.

5.1 超八面体群

定義 5.1. 次の元で生成される $\mathfrak{S}_{2n}$ の部分群を $\mathfrak{B}_n$ で表し, **超八面体群**と呼ぶ.

$$\begin{gathered}
(2i-1\ 2i)\quad(1\le i\le n),\\
(2i-1\ 2j-1)(2i\ 2j)\quad(1\le i<j\le n).
\end{gathered}$$

ただし, $(k\ l)$ は k と l の互換を表す. 位数は $|\mathfrak{B}_n| = 2^n n!$.

例 5.2.

$$\mathfrak{B}_2 = \{\mathrm{id}_4,\ (1\ 2),\ (3\ 4),\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3),\ (1\ 3\ 2\ 4),\ (1\ 4\ 2\ 3)\}.$$

ただし, $(a\ b\ c\ d)$ はサイクル置換 $a \to b \to c \to d \to a$ を表す.

§4.2 で定義した coset-type $\mathtt{type}(\sigma)$ を思い出そう. 次が成り立つ.

命題 5.3. $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_{2n}$ とする. このとき, $\mathtt{type}(\sigma) = \mathtt{type}(\tau)$ となる必要十分条件は $\mathfrak{B}_n \sigma \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_n \tau \mathfrak{B}_n$ となることである.

すなわち, coset-type は $\mathfrak{S}_{2n}$ の $\mathfrak{B}_n$ に関する両側剰余類をパラメトライズしている. このため, $\mathtt{type}(\sigma)$ を σ の coset-type と呼ぶのである. これはちょうど, 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の共役類が n の分割でパラメトライズされることの類似である.

5.2 Gelfand 対と Hecke 代数

関数の空間 $\mathcal{H}_n$ を

$$\mathcal{H}_n = \{f : \mathfrak{S}_{2n} \to \mathbb{C} \mid f(\zeta_1 \sigma \zeta_2) = f(\sigma)\ (\sigma \in \mathfrak{S}_{2n},\ \zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{B}_n)\}$$

と定める. これは複素ベクトル空間を成す. $\mathcal{H}_n$ の元は, 各両側剰余類 $\mathfrak{B}_n \sigma \mathfrak{B}_n$ で定数となるような関数である. 両側剰余類は n の分割で決定されるので（命題 5.3）, $\mathcal{H}_n$ の次元は n の分割数に等しい. さらに合成積 $f_1 * f_2$ が

$$(f_1 * f_2)(\sigma) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{2n}} f_1(\sigma \tau^{-1}) f_2(\tau), \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_{2n}$$

で定まり, $\mathcal{H}_n$ は $\mathbb{C}$-代数となる. $\mathcal{H}_n$ を組 $(\mathfrak{S}_{2n}, \mathfrak{B}_n)$ の Hecke 代数という.

命題 5.4. $\mathcal{H}_n$ は合成積 $*$ に関して可換である.

一般に, 有限群 $\mathtt{G}$ とその部分群 $\mathtt{H}$ に対し, 上と同様に Hecke 代数を定義する. Hecke 代数が合成積に関して可換であるとき, 組 $(\mathtt{G}, \mathtt{H})$ は Gelfand 対であるという. すなわち, 上の命題は $(\mathfrak{S}_{2n}, \mathfrak{B}_n)$ が Gelfand 対であることを述べている.

代数 $\mathcal{H}_n$ は以下のような基底を持つ. n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に対し, $2n$ の分割 $(2\lambda_1, 2\lambda_2, \dots)$ を 2λ で表す. 関数 $\omega^\lambda : \mathfrak{S}_{2n} \to \mathbb{C}$ を

$$\omega^\lambda(\sigma) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\zeta \in \mathfrak{B}_n} \chi^{2\lambda}(\sigma \zeta), \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_{2n}$$

で定める．ただし，$\chi^{2\lambda}$ は 2λ に対応する $\mathfrak{S}_{2n}$ の既約指標である．$\omega^\lambda \in \mathcal{H}_n$ となっていることは直ちに分かる．

命題 5.5. $\{\omega^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ は $\mathcal{H}_n$ の基底をなす．

5.3 調和解析による Weingarten 関数の表示

分割 μ に対し，既約指標 χ^μ の単位元での値を f^μ で表す．これは μ に対応する対称群の既約表現の次数に他ならない．f^μ は正の整数であるが，「型 μ の標準 Young 盤の個数」という組合せ的意味を持つこともよく知られている．

定義 5.6. $\mathcal{H}_n$ の元 $\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\cdot, N)$ を

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\sigma, N) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \ell(\lambda) \le N}} \frac{f^{2\lambda}}{\prod_{(i,j)\in\lambda}(N+2j-i-1)} \omega^\lambda(\sigma), \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_{2n} \tag{5.2}$$

で定義する．右辺の和は，長さが N 以下である n の分割全体を走る．また右辺の分数における分母の積は，λ の Young 図形の箱 $\square = (i,j)$ 全体を走る．言い換えると，$1 \le i \le \ell(\lambda)$, $1 \le j \le \lambda_i$ となる範囲を動く．

定理 3.3 を扱うときは，$\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, N)$ を (5.1) で定める．

例 5.7. $\sigma = [1,3,2,4] \in \mathfrak{S}_4$, $N \ge 2$, とする．このとき，(5.2) は

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\sigma, N) = \frac{2^2 \cdot 2!}{4!}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{N(N+2)} \cdot 1}_{\lambda=\square\square} + \underbrace{\frac{2}{N(N-1)} \cdot (-\tfrac{1}{2})}_{\lambda=\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}\Bigg) = \frac{-1}{N(N+2)(N-1)}$$

となる．さらに，$\mathfrak{p} = \{1,2\}\{3,4\}$, $\mathfrak{q} = \{1,3\}\{2,4\}$ のとき，$\sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = [1,3,2,4]$ となるので，$\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, N) = \frac{-1}{N(N+2)(N-1)}$ を得る．このように再度 (3.1) の第 2 式を復元できた．

6 Weingarten グラフ

前節では $\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, N)$ を調和解析を用いて記述した．本節では組合せ的にこれを構成してみよう．詳細については [3] を参照．

6.1　行列の性質と Weingarten 関数の等式

ペアリング $\mathfrak{p} \in \mathcal{M}_{2n}$ を (2.1) のように表示するとき, 対称群 $\mathfrak{S}_{2n}$ は集合 $\mathcal{M}_{2n}$ に次のように左から推移的に作用する.

$$\sigma.\mathfrak{p} = \{\sigma(p_1), \sigma(p_2)\}\{\sigma(p_3), \sigma(p_4)\} \cdots \{\sigma(p_{2n-1}), \sigma(p_{2n})\}.$$

Weingarten 関数が次の性質を持つことは容易に分かる.

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\sigma.\mathfrak{p}, \sigma.\mathfrak{q}, N) = \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, N), \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_{2n},\ \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathcal{M}_{2n}.$$

したがって, 今

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}, N) := \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}, \mathfrak{e}_n, N), \qquad \mathfrak{e}_n = \{1,2\}\{3,4\} \cdots \{2n-1, 2n\}, \tag{6.1}$$

を扱えば十分である.

命題 6.1 (Lemma 4.3 in [3])**.** 任意の $\mathfrak{p} \in \mathcal{M}_{2n}$ に対し, 次が成り立つ.

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}, N) = -N^{-1} \sum_{i=1}^{2n-2} \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}((i\ 2n-1).\mathfrak{p}, N) + \delta_{\{2n-1,2n\} \in \mathfrak{p}} N^{-1} \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}^{\downarrow}, N).$$

ここで, 記号 $\delta_{\{2n-1,2n\} \in \mathfrak{p}}$ は $\mathfrak{p}$ がペア $\{2n-1, 2n\}$ を含むときに限り 1 を与え（それ以外では 0）, またこのとき $\mathfrak{p}$ から $\{2n-1, 2n\}$ を取り除いたものを $\mathfrak{p}^{\downarrow} \in \mathcal{M}_{2n-2}$ と表す.

命題の証明の代わりに, $n = 2$, $\mathfrak{p} = \{1,2\}\{3,4\}$ の場合の等式

$$\begin{aligned} &N \cdot \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\{1,2\}\{3,4\}, N) = \\ &\qquad - \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\{3,2\}\{1,4\}, N) - \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\{1,3\}\{2,4\}, N) + \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\{1,2\}, N) \end{aligned} \tag{6.2}$$

を確認してみよう. 定理 3.3 を利用して次の期待値を計算する:

$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[r_{11}^2 r_{i2}^2].$$

各項 $\mathbb{E}[r_{11}^2 r_{i2}^2]$ は §3.4 で見たように次のように計算される.

- $i = 1$ のとき,

$$\mathbb{E}[r_{11}^2 r_{12}^2] = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathcal{M}_4} \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}, \mathfrak{e}_2, N) = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathcal{M}_4} \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}, N).$$

- $i = 2, \ldots, N$ のとき,

$$\mathbb{E}[r_{11}^2 r_{i2}^2] = \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\{1,2\}\{3,4\}, \mathfrak{e}_2, N) = \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\{1,2\}\{3,4\}, N).$$

したがって,

$$\begin{aligned}\mathcal{I} =& \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[r_{11}^2 r_{i2}^2] \\ =& N\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\{1,2\}\{3,4\}, N) + \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\{1,4\}\{2,3\}, N) + \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\{1,3\}\{2,4\}, N)\end{aligned}$$

となる. 一方, $R = (r_{ij})$ は N 次直交行列だったので, $\sum_{i=1}^{N} r_{i2}^2 = 1$ が成り立つ. よって

$$\mathcal{I} = \mathbb{E}[r_{11}^2] = \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\{1,2\}, \mathfrak{e}_1, N) = \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\{1,2\}, N)$$

となる. 以上より (6.2) を得る.

6.2 Weingarten グラフの定義

唐突だが, 次のような無限有向グラフを考える. 図 2 を参照.

定義 6.2. 以下で定まるグラフ $\mathcal{G}$ を, 直交群の **Weingarten グラフ**と呼ぶ. 頂点集合は $V = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_{2n}$ からなる. ただし $\mathcal{M}_0 = \{\emptyset\}$ とする. グラフの辺は次の 2 種類がある:

- $n \geq 2$, $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathcal{M}_{2n}$ とする. ある互換 $(i\ 2n-1)$, $1 \leq i \leq 2n-2$, が存在して $\mathfrak{q} = (i\ 2n-1).\mathfrak{p}$ となるとき,

$$\mathfrak{p} \xleftrightarrow{(i\ 2n-1)} \mathfrak{q}$$

とかく. これは双方向の辺である. $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ の場合は, 頂点 $\mathfrak{p}$ にループをかく.

- $n \geq 1$, $\mathfrak{p} \in \mathcal{M}_{2n}$, $\mathfrak{q} \in \mathcal{M}_{2n-2}$ とする. 命題 6.1 の記号で $\delta_{\{2n-1,2n\}\in\mathfrak{p}} = 1$ かつ $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^{\downarrow}$ のとき,

$$\mathfrak{p} \dashrightarrow \mathfrak{q}$$

と書く.

命題 6.1 の式は

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}, N) = -N^{-1} \sum_{\mathfrak{q}:\mathfrak{p} \leftrightarrow \mathfrak{q}} \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{q}, N) + N^{-1} \sum_{\mathfrak{q}:\mathfrak{p} \to \mathfrak{q}} \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{q}, N)$$

と表せることに注意せよ.

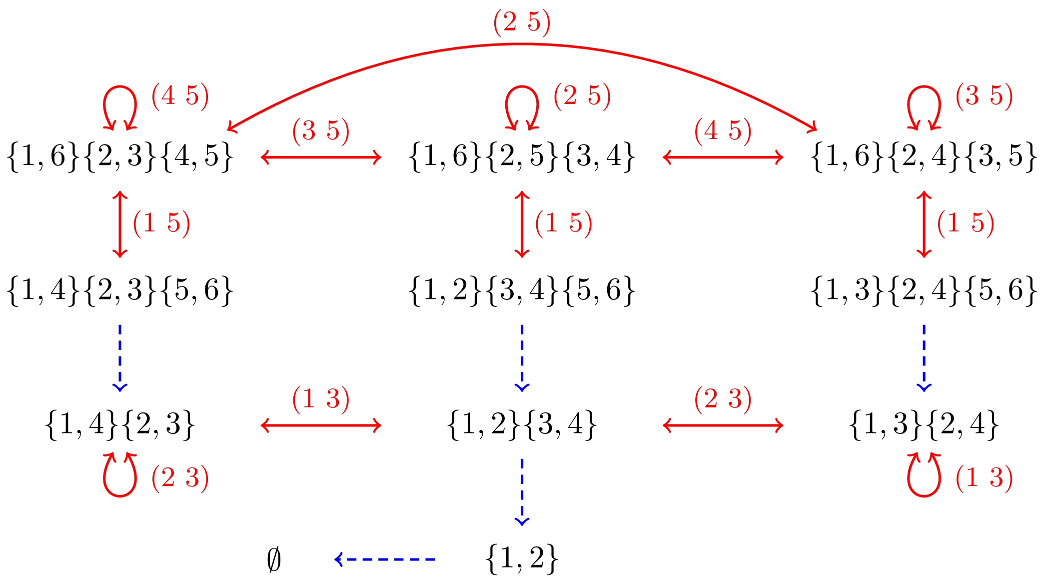


図 2　直交群の Weingarten グラフの一部

6.3　ウォークの数え上げ

定義 6.3. l を非負整数とする．$\mathfrak{p} \in \mathcal{M}_{2n}$ に対して，次の条件を満たす $\mathcal{G}$ の頂点の列 $w = (\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{n+l})$ を考える．

- $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_{n+l} = \emptyset$;
- 各 $i = 0, 1, 2, \ldots, n+l-1$ に対し，$\mathfrak{p}_i$ から $\mathfrak{p}_{i+1}$ への辺が存在する．すなわち，$\mathfrak{p}_i \longleftrightarrow \mathfrak{p}_{i+1}$ または $\mathfrak{p}_i \dashrightarrow \mathfrak{p}_{i+1}$ が成立する．

このとき w を，長さ l の $\mathfrak{p}$ から $\emptyset$ への**ウォーク**と呼び，これらの個数を $\mathbf{w}(\mathfrak{p}, l)$ で表す．w が経由する辺 $\mathfrak{p}_i \longleftrightarrow \mathfrak{p}_{i+1}$ の個数は l で，辺 $\mathfrak{p}_j \dashrightarrow \mathfrak{p}_{j+1}$ の個数は n となっている．

注意 6.4. 論文 [3] では上で定義されるものを path と呼んでいたが，walk の方が用語の使い方として正しいと思われる．

例 6.5. $\mathbf{w}(\mathfrak{p}, 0) \neq 0$ となるのは，$\mathfrak{p} = \mathfrak{e}_n$, $n \geq 0$, のときに限り，$\mathbf{w}(\mathfrak{e}_n, 0) = 1$.

例 6.6. $\mathfrak{p} = \{1,4\}\{2,3\} \in \mathcal{M}_4$ とし，$\mathbf{w}(l) := \mathbf{w}(\mathfrak{p}, l)$ を求めてみよう．まず，$\mathbf{w}(0) = 0$, $\mathbf{w}(1) = 1$, $\mathbf{w}(2) = 1$ は図 2 から直ちに分かる．次に漸化式

$$\mathbf{w}(l) = \mathbf{w}(l-1) + 2\mathbf{w}(l-2), \qquad l \geq 3,$$

が成り立つことを見よう．長さ $l \geq 3$ の $\mathfrak{p} = \{1,4\}\{2,3\}$ から $\emptyset$ へのウォークを次の 3 つに場合分けをする．

- ウォークの通る最初の辺がループ $\mathfrak{p} \longleftrightarrow \mathfrak{p}$ である．このようなウォークの個数は $\mathbf{w}(l-1)$ に等しい．
- ウォークの最初が $\mathfrak{p} \longleftrightarrow \{1,2\}\{3,4\} \longleftrightarrow \mathfrak{p}$ となっている．このようなウォークの個数は $\mathbf{w}(l-2)$ に等しい．
- ウォークの最初が $\mathfrak{p} \longleftrightarrow \{1,2\}\{3,4\} \longleftrightarrow \{1,3\}\{2,4\}$ となっている．グラフの形から分かるように，このようなウォークの個数も $\mathbf{w}(l-2)$ に等しい．

以上で漸化式が示せた．$\mathbf{w}(l)$ の一般項は次のようになることが帰納法で示せる．

$$\mathbf{w}(l) = \frac{2^l - (-1)^l}{3}, \qquad l = 0,1,2,3,\ldots.$$

6.4 Weingarten 関数の組合せ論的表示

命題 6.1 を用いて，次を得ることができる．すなわち，Weingarten 関数はウォークの数え上げ母関数とみなすことができる．

定理 6.7 (Collins-M [3])**.** $\mathfrak{p} \in \mathcal{M}_{2n}$ に対し，

$$\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}, N) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l \mathbf{w}(\mathfrak{p}, l) N^{-n-l}$$

が成り立つ．

例 6.8. 例 6.6 より，

$$\begin{aligned}\mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\{1,4\}\{2,3\}, N) =& \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{2^l - (-1)^l}{3} \right) N^{-2-l} \\ =& \frac{1}{3N^2} \left(\frac{1}{1+\frac{2}{N}} - \frac{1}{1-\frac{1}{N}} \right) \\ =& \frac{-1}{N(N+2)(N-1)}\end{aligned}$$

を得る．これは (3.1) で見た表示に一致する（(6.1) に注意）．

注意 6.9. $\mathfrak{p} \in \mathcal{M}_{2n}$ とする．$\mathbf{w}(\mathfrak{p}, l)$ は，グラフの言葉を用いない組合せ的意味付けもできる．すなわち，$\mathbf{w}(\mathfrak{p}, l)$ は次の条件を満たす列 $f = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l)$ の個数に等しい:

- 各 $i = 1, 2, \ldots, l$ に対し, τ_i は $\tau_i = (s_i\ 2t_i - 1)$, $s_i < 2t_i - 1$, の形の互換である;
- $n \geq t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_l \geq 2$;
- $\mathfrak{p}$ は $(\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_l).\mathfrak{e}_n$ に一致する.

定理 6.7 はこの組合せ的解釈で [6] で既に得られていたが, [6] での手法は Jucys–Murphy 元の作用を用いた代数的なアプローチであった. 一方, [3] の手法はそのような代数学を特に用いない. 互換の列 f とウォーク w の対応は簡単で, w の通る辺 $\mathfrak{p} \overset{\tau_i}{\longleftrightarrow} \mathfrak{q}$ の τ_i を並べることで f が構成できる.

6.5 Weingareten 関数の一様な評価式

$\mathbf{w}(\mathfrak{p}, l)$ をやや大雑把に評価することで, 次の不等式を得る.

定理 6.10 (Collins-M [3]). $\mathfrak{p} \in \mathcal{M}_{2n}$ とする. $N > 6n^{7/2}$ ならば次の不等式が成り立つ.

$$\frac{1 - \frac{24n^{7/2}}{N}}{1 - \frac{144n^7}{N^2}} \leq \frac{(-1)^{|\mathfrak{p}|} N^{|\mathfrak{p}|+n} \mathrm{Wg}^{\mathrm{O}}(\mathfrak{p}, N)}{\mathbf{w}(\mathfrak{p}, |\mathfrak{p}|)} \leq \frac{1}{1 - \frac{144n^7}{N^2}}.$$

ここで $|\mathfrak{p}|$ は次のように定める: §4.3 の記号で, 置換 $\sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{e}_n)$ の coset-type を $\mu = \mathtt{type}(\sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{e}_n))$ とするとき $|\mathfrak{p}| = n - \ell(\mu)$.

不等式の右辺と左辺はいずれも $\mathfrak{p}$ の取り方には寄らず, n と N のみに依存する. この意味で一様な評価になっている. このような不等式評価は, 量子情報理論への応用が期待されている.

参考文献

[1] B. Collins. Moments and cumulants of polynomial random variables on unitary groups, the Itzykson-Zuber integral, and free probability. *Int. Math. Res. Not.* (2003), no. 17, 953–982.

[2] B. Collins, S. Matsumoto. On some properties of orthogonal Weingarten functions. *J. Math. Phys.* **50** (2009), no. 11, 113516, 14 pp.

[3] B. Collins, S. Matsumoto. Weingarten calculus via orthogonality relations: new applications. *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **14** (2017), 631–656.

[4] B. Collins, P. Śniady. Integration with respect to the Haar measure on unitary, orthogonal and symplectic group. *Commun. Math. Phys.* **264** (2006), 773–795.

[5] A. Ginory, J. Kim. Weingarten calculus and the `IntHaar` package for integrals over compact matrix groups. arXiv:1612.07641.

[6] S. Matsumoto. Jucys–Murphy elements, orthogonal matrix integrals, and Jack measures. *Ramanujan J.* **26** (2011), 69–107.

[7] S. Matsumoto. Weingarten calculus for matrix ensembles associated with compact symmetric spaces. *Random Matrices: Theory Appl.* **02** (2013), no. 2, 1350001, 26 pages.

[8] 松本 詔. Jucys-Murphy 元を変数とする対称関数. 数理解析研究所講究録 no. 1770 (2011), 35–51.

[9] 松本 詔. 直交群の Weingarten 関数と帯多項式. 数理解析研究所講究録 別冊 **B36** (2012), 113–129.

[10] 松本 詔. コンパクト対称空間に付随する行列空間上の多項式積分について. 数理解析研究所講究録 no. 1945 (2015), 1–20.

[11] 松本 詔. Weingarten calculus と 対称群の調和解析. 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 函数解析学分科会 特別講演アブストラクト.

[12] D. Weingarten. Asymptotic behavior of group integrals in the limit of infinite rank. *J. Math. Phys.* **19** (1978), no. 5, 999–1001.

[13] A. Zvonkin. Matrix integrals and map enumeration: An accessible introduction. *Mathl. Comp. Modelling* **26** (1997), 281–304.

高階項を持つ非線形シュレディンガー方程式の解析

岸本 展　(京都大学数理解析研究所)

1. 導入

本講演では以下のような，高階項が付いた空間1次元の非線形Schrödinger方程式の初期値問題を考える。

(1.1)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + i\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i|u|^2 u = \varepsilon \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \beta \dfrac{\partial}{\partial x}(|u|^2 u) + \Gamma u \dfrac{\partial}{\partial x}(|u|^2), & t \in [-T, T],\ x \in \Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

但し，未知関数 $u = u(t,x)$ は複素数値で，$\varepsilon > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\underline{\Gamma \in \mathbb{C}}$ は定数[1]，$i = \sqrt{-1}$ である。空間領域 Ω としては本講演では $\mathbb{R}$ または $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ のいずれかを扱う（後者の場合は周期境界条件を課した初期値境界値問題となる）。

1.1. 方程式の性質，物理背景

(1.1) の右辺を 0 とした方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + i\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i|u|^2 u = 0, & t \in [-T, T],\ x \in \Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

は可積分系としてよく知られた**非線形 Schrödinger 方程式**で，非線形分散型方程式の最も簡単な例であり,

- ゲージ不変性： 変換 $u \mapsto e^{i\theta}u$ $(\theta \in \mathbb{R})$ で不変
- 尺度不変性： 変換 $u(t,x) \mapsto \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ $(\lambda > 0)$ で不変
- 非線形項が滑らか（未知関数とその導関数，それらの複素共役の多項式で書ける）
- 質量（L^2 ノルム），運動量，エネルギーなど保存量が無限個ある

などの性質を持つ。(1.1) はこれに 3 階の分散項と 2 つの微分型非線形項を加えたものであるが，非線形項はある意味でこれらの性質を保つように選ばれている。実際，ゲージ不変性と滑らかな非線形項を持っており，質量保存則が成立する（$\Gamma \in \mathbb{R}$ であればさ

[1] 方程式右辺の最後の 2 項はいずれも $|u|^2\partial_x u$ と $u^2\partial_x\overline{u}$ の線形結合で書けるので，$\beta_1|u|^2\partial_x u + \beta_2 u^2\partial_x\overline{u}$ という纏め方をすることも多いが，(1.1) のように書くことで $\Gamma \notin \mathbb{R}$ でも質量保存則が成り立つようにできる。

らに運動量とエネルギーも保存する）。また，β, Γ が ε に応じた特別な値をとるときは可積分（Hirota 方程式）となることも知られている。

方程式 (1.1) は，渦糸の運動のモデル（[14, 6]）や光ファイバー中のパルスの伝播のモデル（[7, 1]）において，いずれも非線形Schrödinger 方程式 (1.2) からの摂動として登場する。渦糸のモデルにおいては，β は ε の定数倍で与えられ，$\Gamma = 0$ である。一方，パルス伝播のモデルにおいては，(1.1) の右辺 3 項はそれぞれ別の意味を持つので係数は独立と考えられる。また，後者においては “Raman 散乱” と呼ばれる現象を記述するために**虚部が 0 でない** Γ を含む方程式が導入されている。

1.2. 本講演の目的，先行研究

本講演では，初期値問題 (1.1) についての最も基本的な性質である（時間局所）**適切性**を考える。ここで，空間変数のみに依存する関数からなる Banach 空間 $(X, \|\ \|_X)$ に対し，(1.1) が X において（時間局所的に）適切であるとは

- 任意の初期値 u_0 に対してある $T = T(\|u_0\|_X) > 0$ が定まり，初期値問題 (1.1) の（適当な意味での）$[-T, T]$ 上の解 u が $C([-T, T]; X)$ において存在する；
- 初期値問題の解は（適当な意味で）一意である；
- 初期値 u_0 が X において連続に変化するとき，解 u も $C([-T, T]; X)$ において連続に変化する，

以上の性質をみたすこととする。Banach 空間 X としては Sobolev 空間 H^s：

$$H^s(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \,\middle|\, \|f\|_{H^s} := \|(1 + |\cdot|^2)^{s/2} \widehat{f}(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty \right\}, \qquad s \in \mathbb{R}$$

を用いる。ここで，Fourier 変換 $\widehat{f}$ は

$$\widehat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x}\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}$$

で定義し，$\Omega = \mathbb{T}$ の場合の Sobolev 空間 $H^s(\mathbb{T})$ も Fourier 係数

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

を用いて同様に定義する。

非線形 Schrödinger 方程式 (1.2) は非常によく研究されており，初期値問題は $\Omega = \mathbb{R}, \mathbb{T}$ いずれも Sobolev 空間 H^s, $s \geq 0$ で時間大域的に適切であることが知られている（[20, 3]）。(1.1) の Sobolev 空間における（時間局所）適切性については，**係数** $\varepsilon, \beta, \Gamma$ **が固定されている場合は**，$\Omega = \mathbb{T}$ で $\mathrm{Im}\,\Gamma \neq 0$ の場合を除いて既に研究が進んでおり，$\mathbb{R}$ の場合は $s \geq 1/4$ ([16]), $\mathbb{T}$ で $\mathrm{Im}\,\Gamma = 0$ の場合は $s \geq 1/2$ ([17]) において適切性が示され

ている（cf. [11, 12]）。いずれの場合も s をこれより小さくすると初期値-解の対応が一様連続にならないことがわかっている [2]。

本講演の1つ目の目的は，係数が有界な範囲を動くとき係数について**一様な適切性**が得られるか（例えば解の存在時間 T や初期値に対する連続依存性の度合いが係数について一様かどうか）ということを考え，その簡単な応用として，係数が0に収束するときの対応する (1.1) の解の (1.2) の解への収束を示すことである。このような**解の収束の問題**を考えるのは，方程式 (1.1) が (1.2) の摂動として導入された背景からも極めて自然であるが，固定した係数に対する適切性と比較して研究は進んでいないようである [3]。別の方程式に対する同様の研究については [10, 13] などがある。

また，先行研究で扱われていない $\Omega = \mathbb{T}$ かつ $\mathrm{Im}\,\Gamma \neq 0$ の場合を扱うことが2つ目の目的である。この場合には，Sobolev 空間 H^s においてはどれだけ正則性が高く（s が大きく）ても初期値問題は**非適切**であることを，（滑らかでない初期値に対する）解の非存在によって示す。

1.3. 主結果

初期値問題 (1.1) の一様な適切性について，初めに $\Omega = \mathbb{R}$ の場合の結果を述べる。

定理 1 ([8]; cf. [4])**.** $\Omega = \mathbb{R}$, $s' > s \geq 1/4$, $0 < \varepsilon \leq 1$ とする。このとき $s, s', \varepsilon, \beta, \Gamma$ に依存する定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在し，以下が成り立つ。

(i) 任意の $R > 0$ に対し $T = T(R) > 0$ が取れて、任意の $u_0 \in B_s(R) := \left\{ f \in H^s \,\middle|\, \|f\|_{H^s} \leq R \right\}$ に対して初期値問題 (1.1) の解 $u \in C([-T, T]; H^s)$ が存在し，

$$\max_{t \in [-T,T]} \|u(t)\|_{H^s} \leq C_1 \|u_0\|_{H^s}$$

をみたす。

(ii) 解は，$C([-T, T]; H^s)$ に連続に埋め込まれるある *Banach* 空間において一意である。

(iii) 解写像 $S : B_s(R) \ni u_0 \mapsto u \in C([-T, T]; H^s)$ は *Lipschitz* 連続である。

(iv) もし $u_0 \in H^{s'}(\mathbb{R})$ であれば，解 u も $C([-T, T]; H^{s'})$ に属し，

$$\max_{t \in [-T,T]} \|u(t)\|_{H^{s'}} \leq C_2 \|u_0\|_{H^{s'}}$$

をみたす。

---

[2] 一般に，ある指数 s に対して H^s での適切性が得られれば $s' > s$ に対する $H^{s'}$（より狭い空間）での適切性は自然に導かれる。この意味で，適切性が成り立つ指数 s の下限を特定することが一つの目標となる。

[3] 但し，正則性が十分に高い（s が十分に大きい）場合は比較的容易に示されると思われる。

さらに，定数$C_1, C_2, T(R)$および解写像Sの*Lipschitz*定数は，$|\beta|/\varepsilon$と$|\Gamma|/\varepsilon$が有界な範囲にとどまる限り $\varepsilon, \beta, \Gamma$について一様にとれる。

解の収束に関する結果は，定理 1と標準的な近似の議論により従う。

系 2 ([8]). $\Omega =\ \mathbb{R},\ s \geq 1/4$とし，$\{(\varepsilon_j, \beta_j, \Gamma_j, u_{0,j})\}_{j\geq 1}$は

$$\varepsilon_j \to 0, \quad u_{0,j} \to \exists u_0 \ \ in\ H^s \quad (j \to \infty), \qquad \sup_{j\geq 1} \frac{|\beta_j| + |\Gamma_j|}{\varepsilon_j} < \infty$$

をみたすとする。$u_j, u \in C([-T,T]; H^s)$を対応する初期値問題(1.1)および(1.2)の初期値$u_{0,j}$およびu_0に対する解とする（定理 *1*により，一様な時間区間$[-T,T]$上での解の存在は保証される）。このとき，$u_j \to u\ in\ C([-T,T]; H^s)\ (j \to \infty)$が成り立つ。

$\Omega = \mathbb{T}$の場合の結果は次のようになる。

定理 3. $\Omega = \mathbb{T},\ s' > s \geq 1/2,\ 0 < \varepsilon \leq 1$とし，$\mathrm{Im}\,\Gamma = 0$とする。さらに次を仮定する：

$$\frac{2}{3\varepsilon} \notin \mathbb{Z} \qquad i.e. \qquad \kappa(\varepsilon) := \mathrm{dist}\,(\frac{2}{3\varepsilon}, \mathbb{Z}) > 0. \tag{1.3}$$

このとき，定理 *1 (i)–(iv)*と同様のことが成り立ち，さらに定数は$|\beta|/\varepsilon,\ |\Gamma|/\varepsilon$および$\kappa(\varepsilon)^{-1}$が有界な範囲にとどまる限り一様にとれる。また，解の収束に関する系 *2*と同様の結果が，追加の仮定：$\sup_{j\geq 1} \kappa(\varepsilon_j)^{-1} < \infty$の下で成立する。

注意 1. (a) 解の収束について，現時点では上記の結果のように “微分を含む非線形項が3階の分散項と同程度以上の速さで0に収束する” ことを要請する必要がある。この条件は，渦糸の運動のモデルに対しては良いが，パルス伝播のモデルに対しては必ずしも妥当とは言えない。微分を含む非線形項を残したまま3階の分散の係数を0とする極限問題での解の収束を示すことが，今後取り組むべき大きな問題の1つである。

(b) 定理 3における追加の条件(1.3)は周期境界値問題に特有の “非共鳴条件” であり，係数を固定した問題についての先行研究[17, 11, 12]でも仮定されている。単に技術的な条件と思えるものの，今のところ排除できていない。

次に示すのは$\Omega = \mathbb{T},\ \mathrm{Im}\,\Gamma \neq 0$の場合の初期値問題の非適切性に関する結果である。

定理 4 ([9]). $\Omega = \mathbb{T},\ \mathrm{Im}\,\Gamma \neq 0$とし，(1.3)を仮定する。このとき，以下が成り立つ。

(i) s, s'は$1 \leq s' \leq s < s'+1$をみたすとする。このとき，ある$u_0 \in H^s(\mathbb{T})$が存在して，初期値問題(1.1)は$H^{s'}(\mathbb{T})$に属する解を正負いずれの時間方向にも持たない。すなわち，このu_0に対してはどのように$T > 0$をとっても，$C([0,T]; H^{s'}(\mathbb{T}))$に属する$[0,T]$上の解も$C([-T,0]; H^{s'}(\mathbb{T}))$に属する$[-T,0]$上の解も存在しない。

(ii) $T>0$とし，$u(t)$を$C([-T,T];H^1)$に属する(1.1)の$[-T,T]$上の解とする。このとき，$u(0)\in C^\infty(\mathbb{T})$で，$\|u(0)\|_{H^s}\le C^{s^2}$ *($\forall s\ge 1$)*となる定数$C>1$がとれる。

特に，$u_0\notin C^\infty$であるか，または$u_0\in C^\infty$であっても任意の$C>1$に対して

$$\sup_{s\ge 1} C^{-s^2}\|u_0\|_{H^s}=\infty$$

であれば，(1.1)の正負両方向に解ける解は$C([-T,T];H^1(\mathbb{T}))$には存在しない。

注意 2. (a) 定理の(i), (ii)はいずれも解の非存在を主張している。(i)では(ii)のように時間両方向に解けないだけでなく正負どちらの一方向にも解けないことを主張しているが，初期値より正則性が1以上低いクラス（例えば初期値H^2に対して$C([0,T];H^1)$等）における解の存在は排除していない。一方で，(ii)では初期値が何回微分できたとしてもC^∞でなければ$C([-T,T];H^1)$に属する解が存在しないことを出張しているが，正負のどちらか一方向にのみ解ける可能性は排除していない。

(b) (ii)より，たとえ$u_0\in C^\infty$でも（時間両方向の）解が存在しない場合がある。このような初期値の例としては，$u_0(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-[\log(1+|k|)]^{4/3}}e^{ikx}$がある。

注意 3. 1次元トーラス$\mathbb{T}$上の非線形Schrödinger方程式について，最近のTsugawaによる研究で，非線形項が未知関数とその1階までの導関数で書ける一般の場合に，初期値問題がSobolev空間において適切となるための非線形項の必要十分条件が与えられた。（関連結果として[19]で5階の分散型方程式が扱われている。）方程式(1.1)において$\varepsilon=0$とした場合はこの枠組みに当てはまり，実際にTsugawaによる必要十分条件はこの場合 “$\mathrm{Im}\,\Gamma=0$” となって上記の結果と一致する。定理 4の証明では，[19]に始まる一連の結果で非適切性（解の非存在）を示すのと基本的に同じ原理（[19]では*parabolic resonance*と呼ばれている）を用いているが，剰余項の取り扱いが異なっている。また，方程式を限定することで，その非適切性をより具体的に示すことができる。

注意 4. $\mathrm{Im}\,\Gamma\neq 0$の場合の方程式(1.1)については，$\mathbb{T}$上の初期値問題が定理 4で示したように非適切であるにもかかわらず，パルス伝播におけるRaman散乱の影響を評価できることから多くの数値実験が行われている。実際，実解析的な初期値に対しては，実解析的な関数のクラスで初期値問題(1.1)の解の一意存在および（弱い意味での）初期値連続依存性を示すことができるので[4][5]，定理 4は数値計算の正当性を否定するも

[4] 但し，この場合にも解写像はSobolevノルムでは（どれだけ正則性sを高くとっても）連続になり得ないことがわかる。

[5] 実解析的な周期関数u_0に対しては$\|u_0\|_{H^s}\le C^{s\log s+1}$ $(\forall s\ge 1)$が成り立つので，定理 4 (ii)の結果とは矛盾しない。GevreyクラスG^σ $(\sigma>1)$の初期値に対して解けたとしても依然として(ii)と矛盾しないが，G^σにおける可解性は現時点では示されていない。

のではない。一方，いくつかの数値計算（例えば[2, 15, 5, 18]）においてはある種の不安定性が観測・考察されている。これらの不安定性が定理 4 の意味での非適切性と関連するかどうかは議論を要するが，少なくとも定理 4 が示している現象は周期境界値問題に特有であり $\Omega = \mathbb{R}$ の場合には起こらないということを再度注意しておく。

2. 定理の証明のアイデア

解の構成は Picard の逐次近似法による。線形方程式の解作用素 $S(t)$ を，

$$[S(t)f](x) = [e^{t(-i\partial_x^2+\varepsilon\partial_x^3)}f](x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi+it\phi_\varepsilon(\xi)}\widehat{f}(\xi)\,d\xi, \qquad \phi_\varepsilon(\xi) := \xi^2 - \varepsilon\xi^3$$

で定義する（$\Omega = \mathbb{T}$ の場合も同様）。$v = S(t)u_0$ は線形方程式の初期値問題

$$\partial_t v + i\partial_x^2 v = \varepsilon\partial_x^3 v; \qquad v(0,x) = u_0(x)$$

の解を与え，$S(t)$ は任意の s に対して H^s 上のユニタリ作用素となる。また，Duhamel の原理により初期値問題 (1.1) は積分方程式

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-t')\big[-i|u|^2u + \beta\partial_x(|u|^2u) + \Gamma u\partial_x(|u|^2)\big](t')\,dt' \tag{2.1}$$

に置き換わる。

初めに $\beta = \Gamma = 0$ の場合を考える。$s > 1/2$ で成り立つ Sobolev の積評価

$$\|fg\|_{H^s} \le C\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}$$

と $S(t)$ のユニタリ性を用いれば，$s > 1/2$ のとき (2.1) の右辺は

$$\sup_{|t|\le T}\Big\|S(t)u_0 - i\int_0^t S(t-t')\big[|u|^2u\big](t')\,dt'\Big\|_{H^s} \le \|u_0\|_{H^s} + CT\sup_{|t|\le T}\|u(t)\|_{H^s}^3$$

と評価でき，T を小さくとることで $C([-T,T];H^s)$ において逐次近似列の収束を示せる。

しかし，微分を含む非線形項がある場合に同じことをすると，左辺の H^s ノルムを抑えるために右辺に H^{s+1} ノルムが必要になり（**微分の損失**），評価が閉じない。この場合，方程式が持つ何らかの平滑化効果を用いる必要がある。

分散型方程式の平滑化効果については既に多くの研究がなされてきた。上の計算では t に関する積分を右辺の小さな因子 T として出す以外に何ら用いていないが，この積分（の一部）を通して被積分関数 $S(t-t')\big[|u|^2u\big](t')$ が持つ時間振動の平均化を行うことによって平滑化を得よう，というのが大雑把なアイデアである [6]。

[6] 時間積分を平滑化に使った分だけ，評価式右辺の T の冪が小さくなるが，そもそも正の冪であれば十分である。

2.1. $\Omega=\mathbb{R}$ の場合：線形の平滑化効果

$\Omega=\mathbb{R}$ の場合，線形解 $S(t)u_0$ に対して成り立つ **Strichartz 評価**ならびに **Kato 平滑化評価**が有効である。これらは線形部が Schrödinger：$i\partial_x^2$ の場合には

$$\left\| e^{it\partial_x^2}u_0\right\|_{L_t^4(\mathbb{R};L_x^\infty(\mathbb{R}))}\le C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})},$$
$$\left\| |\partial_x|^{1/2}e^{it\partial_x^2}u_0\right\|_{L_x^\infty(\mathbb{R};L_t^2(\mathbb{R}))}\le C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

線形部が Airy：$\varepsilon\partial_x^3$ の場合には

$$\left\| |\partial_x|^{1/4}e^{\varepsilon t\partial_x^3}u_0\right\|_{L_t^4(\mathbb{R};L_x^\infty(\mathbb{R}))}\le C\varepsilon^{-1/4}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})},$$
$$\left\| \partial_x e^{\varepsilon t\partial_x^3}u_0\right\|_{L_x^\infty(\mathbb{R};L_t^2(\mathbb{R}))}\le C\varepsilon^{-1/2}\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

となり（いずれも一例），確かに微分の損失をいくらか回復できそうである。基本的にこれらの評価式は，stationary phase method などを用いて線形解の持つ時間振動を精密に評価することにより得られる。特に，平滑化の強さは時間振動の位相関数（Schrödinger と Airy に対してはそれぞれ $-\xi^2$, $-\varepsilon\xi^3$）の導関数の大きさで決まる。

ここで，(1.1) の線形部 $-i\partial_x^2+\varepsilon\partial_x^3$ に対応する位相関数 $\phi_\varepsilon(\xi)=\xi^2-\varepsilon\xi^3$ の導関数は $\phi_\varepsilon'(\xi)=2\xi-3\varepsilon\xi^2$ であるから，大雑把にいって

- $|\xi|\gg\varepsilon^{-1}$ の周波数領域では Airy と同程度の平滑化が得られる；
- $|\xi|\ll\varepsilon^{-1}$ の周波数領域では Schrödinger と同程度の平滑化が得られる；
- $\xi=2/3\varepsilon$ のまわりでは上記のいずれよりも弱い平滑化しか得られない。

実際，定理の証明において以下の困難さが生じる：

(i) 2 階の分散（Schrödinger）による平滑化だけでは微分の損失を完全に回復できないが，3 階の分散（Airy）の平滑化は ε が小さくなるにつれて弱くなる。

(ii) 平滑化が得られない周波数領域 $\xi\sim\varepsilon^{-1}$ が $\varepsilon\to 0$ で非有界となる。

3 階の分散の強さ ε を固定している場合はこれらの困難は生じないことに注意する。定理 1 において，定数の一様性のために $|\beta|/\varepsilon$, $|\Gamma|/\varepsilon$ が有界であることを仮定せざるを得ないのは主に (i) によるものである。実際の非線形評価の証明では，各関数を周波数領域に応じて分解し，それぞれの場合に最も有効な平滑化効果を選んで適用することで (ii) の問題を解決する。

2.2. $\Omega = \mathbb{T}$ の場合：非線形の平滑化効果

上述のような平滑化効果は，トーラスをはじめとするコンパクトな空間においてはほとんど得られない。そこで，線形発展による平滑化ではなく，非線形構造に内在する平滑化効果を利用する。キーワードは "共鳴・非共鳴" である。

簡単のため，(1.1) の左辺の非線形項および右辺の 2 つ目の項を落とした次の方程式を考える：

$$\partial_t u = (-i\partial_x^2 + \varepsilon\partial_x^3)u + \Gamma u\partial_x(|u|^2).$$

非線形方程式の解 u が線形解 $S(t)u_0$ に近いとみなして，$u(t) = S(t)v(t)$ という変換（interaction representation）を行うと，v の方程式として

$$\partial_t v = \Gamma S(-t)\Big[\partial_x\big(|S(t)v(t)|^2\big)S(t)v(t)\Big]$$

が得られる。さらに Fourier 級数展開 $v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{v}(t,k)e^{ikx}$ により

$$\partial_t\widehat{v}(t,k) = \frac{\Gamma}{2\pi}\sum_{\substack{k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}\\ k=k_1+k_2+k_3}} i(k_1+k_2)\widehat{v}(t,k_1)\widehat{\overline{v}}(t,k_2)\widehat{v}(t,k_3)e^{it\Phi} \tag{2.2}$$

を得る。ここで，Φ は合計 4 回現れる線形発展作用素 $S(t)$ に付随する時間振動の位相関数の和で，

$$\begin{aligned}\Phi &:= -\phi_\varepsilon(k_1+k_2+k_3) + \phi_\varepsilon(k_1) - \phi_\varepsilon(-k_2) + \phi_\varepsilon(k_3)\\ &= 3\varepsilon(k_1+k_2)(k_2+k_3)(k_3+k_1-\tfrac{2}{3\varepsilon})\end{aligned}$$

と因数分解される。これを基に，(2.2) の右辺の和を $\Phi \neq 0$ となる (k_1,k_2,k_3) の組合せ（**非共鳴相互作用**）と $\Phi = 0$ となる場合（**共鳴相互作用**）に分解する。

非共鳴相互作用については，時間振動に伴って平均化が起こり，ある種の平滑化が期待できる。これを実際の非線形評価に組み込むには，時間に関して部分積分する方法（normal form reduction）や，いわゆる Fourier 制限ノルムを用いる方法などがあるが，やや専門的であるのでここでは省略する。

以上により，問題は如何にして共鳴相互作用を処理するか，という点に集約された。ここで，仮定 (1.3) により

$$\Phi = 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad k_1+k_2=0 \ \text{ or } \ k_2+k_3=0$$

が成り立つことに注意する。(1.3) を仮定しないと $k_1+k_3 = 2/3\varepsilon$ という別の共鳴相互作用が現れるが，これは対称性の観点から処理が難しいので現時点では排除している。

方程式 (2.2) の右辺の共鳴相互作用だけを取り出して計算すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{i\Gamma}{2\pi}\sum_{\substack{k=k_1+k_2+k_3\\ k_1+k_2=0 \text{ or } k_2+k_3=0}}(k_1+k_2)\widehat{v}(k_1)\widehat{\overline{v}}(k_2)\widehat{v}(k_3)\\
&=\frac{i\Gamma}{2\pi}\sum_{k=k_1,\,k_2+k_3=0}(k_1+k_2)\widehat{v}(k_1)\overline{\widehat{v}}(-k_2)\widehat{v}(k_3)=\frac{i\Gamma}{2\pi}\sum_{k_3\in\mathbb{Z}}(k-k_3)\widehat{v}(k)|\hat{v}(k_3)|^2\\
&=\frac{\Gamma}{2\pi}\|v(t)\|_{L^2}^2 ik\widehat{v}(k)-\frac{i\Gamma}{2\pi}\Big(\sum_{k'\in\mathbb{Z}}k'|\widehat{v}(k')|^2\Big)\widehat{v}(k)
\end{aligned}
$$

となる。最後の第 2 項は無害なので忘れると，結局 $\widehat{v}(t)$ の方程式として

$$\partial_t\widehat{v}(t,k)=\frac{\Gamma}{2\pi}\|v(t)\|_{L^2}^2 ik\widehat{v}(t,k)+\cdots$$

さらに逆 Fourier 変換により

$$\partial_t v(t)=\frac{\Gamma}{2\pi}\|v(t)\|_{L^2}^2\partial_x v(t)+\cdots$$

が得られる。ここで，変換

$$w(t,x)=v\Big(t,\,x-\frac{\operatorname{Re}\Gamma}{2\pi}\int_0^t\|v(t')\|_{L^2}^2\,dt'\Big)$$

を考えると，w は方程式

$$\partial_t w(t)=\frac{\operatorname{Im}\Gamma}{2\pi}\|w(t)\|_{L^2}^2\cdot i\partial_x w(t)+\cdots \tag{2.3}$$

をみたす。2 つの変換 $u\mapsto v$, $v\mapsto w$ はいずれも $C(H^s)$ 上の等長変換で可逆である。

方程式 (2.3) を見れば，$\operatorname{Im}\Gamma$ によって適切か非適切かが決まるのは明快である。実際，$\operatorname{Im}\Gamma=0$ の場合は (2.3) にはすでに共鳴相互作用が残っていないので，上に述べた “非共鳴相互作用に内在する平滑化効果” を用いて適切性が示せる。方程式の係数に対する依存性を詳しく見るにはまだまだ議論が必要であるが，ひとまず望ましい状況である。一方，$\operatorname{Im}\Gamma\neq 0$ の場合には (2.3) に Cauchy-Riemann 型の作用素 $\partial_t+ia\partial_x$ ($a:=-\frac{1}{2\pi}(\operatorname{Im}\Gamma)\|w(t)\|_{L^2}^2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$) が現れるため，もはや分散型方程式とは言えず，楕円型方程式の性質が支配的になる。定理 4 (ii) のような正則性定理を示すためには (2.3) で省略している様々な項が実際に邪魔をしないことを示す必要があるが，初期値問題が非適切となるメカニズムを説明するにはこれで十分である。

参考文献

[1] G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 4th Edition. Elsevier/Academic Press, 2007.

[2] G.P. Agrawal and C. Headley III, *Kink solitons and optical shocks in dispersive nonlinear media*, Phys. Rev. A **46** (1992), 1573–1577.

[3] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations I. Schrödinger equations*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), 107–156.

[4] M. Darwich, N. Kishimoto, and L. Molinet, *Dispersive limits for some perturbations of the NLS equation*, preprint.

[5] M. Erkintalo, G. Genty, B. Wetzel, and J. Dudley, *Limitations of the linear Raman gain approximation in modeling broadbandnonlinear propagation in optical fibers*, Opt. Express **18** (2010), 25449–25460.

[6] Y. Fukumoto and T. Miyazaki, *Three-dimensional distortions of a vortex filament with axial velocity*, J. Fluid Mech. **222** (1991), 369–416.

[7] A. Hasegawa and Y. Kodama, *Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide*, IEEE J. Quant. Elect. **23** (1987), 510–524.

[8] N. Kishimoto, *Dispersive limit for the third order nonlinear Schrödinger equations*, preprint.

[9] N. Kishimoto and Y. Tsutsumi, *Ill-posedness of the third order NLS equation with Raman scattering term*, to appear in Math. Res. Lett.

[10] H. Kozono, T. Ogawa, and H. Tanisaka, *Well-posedness for the Benjamin equations*, J. Korean Math. Soc. **38** (2001), no. 6, 1205–1234.

[11] T. Miyaji and Y. Tsutsumi, *Existence of global solutions and global attractor for the third order Lugiato-Lefever equation on* **T**, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **34** (2017), 1707–1725.

[12] T. Miyaji and Y. Tsutsumi, *Local well-posedness of the NLS equation with third order dispersion in negative Sobolev spaces*, Differential Integral Equations **31** (2018), 111–132.

[13] L. Molinet and Y. Wang, *Dispersive limit from the Kawahara to the KdV equation*, J. Differential Equations **255** (2013), no. 8, 2196–2219.

[14] D.W. Moore and P.G. Saffman, *The motion of a vortex filament with axial flow*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Sci. **272** (1972), no. 1226, 403–429.

[15] D.R. Solli, C. Ropers, P. Koonath, and B. Jalali, *Optical rogue waves*, Nature **450** (2007), 1054–1057.

[16] G. Staffilani, *On the generalized Korteweg-de Vries-type equations*, Differential Integral Equations **10** (1997), 777–796.

[17] H. Takaoka, *Well-posedness for the higher order nonlinear Schrödinger equation*, Adv. Math. Sci. Appl. **10** (2000), 149–171.

[18] T.X. Tran and F. Biancalana, *Unphysical metastability of the fundamental Raman soliton in the reduced nonlinear Scroedinger equation*, preprint.

[19] K. Tsugawa, *Parabolic smoothing effect and local well-posedness of fifth order semilinear dispersive equations on the torus*, preprint.

[20] Y. Tsutsumi, *L^2-solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups*, Funkcial. Ekvac. **30** (1987), 115–125.

On the Feynman path integral for the Schrödinger equations with polynomially growing potentials in the spatial direction

Wataru Ichinose*

Sept. 4, 2018 at Tokyo

The Joint Conference of Real Analysis and Functional Analysis

Department of Mathematics, Shinshu University, Matsumoto 390-8621, Japan.

E-mail: ichinose@math.shinshu-u.ac.jp

Abstract

The Feynman path integral for the Schrödinger equation is defined mathematically, in particular, with polynomially growing potentials in the spatial direction. For example, we can handle potentials $A_j = 0$ and $V(t,x) = |x|^{2l}+$ " a lower order term " $(l = 1, 2, ...)$. The Feynman path integral is defined as an L^2-valued continuous function with respect to the time variable.

*This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP18K03361.

1 Summary

Let $T > 0$ be an arbitrary constant, $0 \le t \le T$ and $x = (x_1, \dots, x_d) \in R^d$. Let $E(t,x) = (E_1, \dots, E_d) \in R^d$ and $B(t,x) = (B_{jk}(t,x))_{1\le j<k\le d} \in R^{d(d-1)/2}$ denote the electric strength and the magnetic strength tensor, respectively and $(V(t,x), A(t,x)) = (V, A_1, \dots, A_d) \in R^{d+1}$ an electromagnetic potential, i.e.

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x}, \\ B_{jk} &= \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k} \quad (1 \le j < k \le d), \end{aligned} \tag{1.1}$$

where $\partial V/\partial x = (\partial V/\partial x_1, \dots, \partial V/\partial x_d)$. Then the Lagrangian function is given by

$$\mathcal{L}(t,x,\dot{x}) = \frac{m}{2}|\dot{x}|^2 + e\dot{x}\cdot A(t,x) - eV(t,x)\ \dot{x} \in R^d, \tag{1.2}$$

with mass $m > 0$ and charge $e \in \mathbb{R}$. Then the corresponding Schrödnger equation is given by

$$\begin{aligned} & i\hbar\frac{\partial u}{\partial t}(t) = H(t)u(t) \\ & := \left[\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} - eA_j(t,x)\right)^2 + eV(t,x)\right]u(t), \end{aligned} \tag{1.3}$$

Hereafter we suppose $\hbar = 1$ and $q = 1$ for simplicity.

Let $L^2(R^d)$ denote the space of all square integrable functions on R^d with inner product $(f,g) := \int f(x)g(x)^* dx$ and norm $\|f\|$, where $g(x)^*$ denotes the complex conjugate of $g(x)$. Let $S(t,s;q)$ be the classical action

$$S(t,s;q) = \int_s^t \mathcal{L}(\theta, q(\theta), \dot{q}(\theta))d\theta \tag{1.4}$$

for paths $q(\theta) \in \mathbb{R}^d$ $(s \le \theta \le t)$ where $\dot{q}(\theta) = dq(\theta)/d\theta$. Our aim in the present talk is to prove that for any $f \in L^2$ we can determine the Feynman path integral

$$K(t,0)f = \int e^{iS(t,0;q)} f(q(0)) \mathcal{D}q \tag{1.5}$$

in $L^2(\mathbb{R}^d)$ for the system (1.2) with potentials (V, A) growing polynomially in the spatial direction x. A typical example of potentials that we can handle is

$$V(t,x) = |x|^{2(M+1)} + \sum_{|\alpha| \le 2M+1} a_\alpha(t) x^\alpha, \tag{1.6}$$

$$A_j(t,x) = \sum_{|\alpha| \le M} b_{j\alpha}(t) x^\alpha \ (j = 1, 2, \ldots, d) \tag{1.7}$$

with an integer $M \ge 0$ and functions $a_\alpha(t) \in \mathbb{R}, b_{j\alpha}(t) \in \mathbb{R}$ in $C^1([0,T])$, i.e. continuously differentiable functions, where $|x|^2 = \sum_{j=1}^d x_j^2$ and for a multi-index $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ we write $|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}, \partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$ and $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$.

In the present talk the Feynman path integral (1.5) is defined by the time-slicing method in terms of piecewise free moving paths or piecewise straight lines. This method is the most familiar in physics and the most simple in mathematics (cf. p.32 in [8] and p. 278 in [18]).

The Feynman path integral for the system (1.2) with potentials $A = 0$ and V satisfying $|V(t,x)| \le C(1 + |x|^2)$ has been studied mathematically by many authors for a long time since Feynman had published his famous paper [7] in 1948. See §10.4 in [1] and [4] for detailed knowledge of it. In addition, see [9], [12] and their references for the recent study.

On the other hand, if $|V(t,x)| \ge C(1 + |x|^2)^{1+\delta}$ holds with positive constants C and δ, it may be not simple to construct the Feynman path integral mathematically as stated on p. 101 in [1] and on p. 88 in [16]. In fact, there seems to be only a few papers on it as far as the author knows. In addtion, as well known, it should be noted that the uniqueness of solutions to

(1.3) doesn't hold in general if $V(t,x)$ satisfies $V(t,x) \le -C(1+|x|^2)^{1+\delta}$ with positive constants C and δ (cf. pp. 157-159 in [5] or the introduction in [14]).

Nelson in [17] has constructed the Feynman path integral for (1.2) with $A = 0$ and a general continuous function $V(x)$, independent of $t \in [0,T]$, outside a set of capacity 0 in $\mathbb{R}^d$ by using the Trotter product formula. It is to be noted that in [17] the classical action $S(t,0;q)$ is replaced with some formal approximation. See (9) on p. 333 of [17].

Daubechies and Klauder in [6] has showed the following. Take $(V,A) = (V(x),A(x))$, independent of t, satisfying $|V(x)| \le C(1+|x|^2)^M$ $|A(x)| \le C(1+|x|^2)^M$ with constants $C \ge 0$ and $M \ge 0$ and define H on $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ by (1.3), where $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ is the space of all infinitely differentiable functions with compact support on $\mathbb{R}^d$. Let H' be the maximal extension of H on L^2 and suppose that H' has a core consisting of the finite linear spans generated by eigenvalues of $(-\Delta + |x|^2)/2$, where $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2$. Let $F_0(x)$ be the ground state of $(-\Delta + |x|^2)/2$ and define the canonical coherent states $|p,q >= e^{ip\cdot x}F_0(x-q)$ for all $(q,p) \in \mathbb{R}^{2d}$, where $p \cdot x = \sum_{j=1}^d p_j x_j$. We denote the deficiency indices of H' by $n_+(H')$ and $n_-(H')$. Daubechies and Klauder have constructed the phase space Feynman path integral, in the form of weak topology of L^2, giving $(|p'',q''>, e^{-itH't}|p',q'>)$ if $n_+(H') = 0$ and $(|p'',q''>, e^{-itH'^\dagger}|p',q'>)$ if $n_-(H') = 0$ in terms of the Winer measure pinned at (p',q') at $t=0$ and at (p'',q'') at t, where $H'^\dagger$ denotes the adjoint operator of H'.

Albeverio and Mazzucchi in [2] and [3] have studied the Feynman path integral for the systems (1.2) with $A = 0$, $V(x) = |\Omega x|^2/2 + \lambda C(x,x,x,x)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ and with $A = 0$, a positive homogeneous polynomial $V(x)$ of $2M$-order $(M = 1,2,\dots)$, respectively in terms of infinite dimensional oscillatory integrals and the Wiener measure, where Ω is a $d \times d$ regular matrix and $C(x,y,w,z)$ is a completely symmetric positive 4 th-order covariant tensor on $\mathbb{R}^d$. It is noted that all Feynman path integrals in [2, 3] are defined in the form of weak topology of L^2. See §10.2 in [1] and §3.5 in [16] for topics relating to [2, 3].

The present talk is having four points to be emphasized: (1) In our system (1.2) there exists a magnetic field $B(t,x)$. (2) Our magnetic field $B(t,x)$ and electric field $E(t,x)$ can vary on time t. (3) Our Feynman path integral can be defined as an L^2- valued function on $[0,T]$ as in [17], not in the form of weak topology of L^2 as in [2, 3, 6]. (4) Our method of constructing the Feynman path integral can not be applied to systems with potentials satisfying $V(t,x) \leq -C(1+|x|^2)^{1+\delta}$ $(C > 0, \delta > 0)$. On the other hand, in [2, 6, 17] the Feynman path integrals for such systems are constructed. Then, since the uniqueness of solutions to (1.3) doesn't hold as stated in the above, it is unclear which solution to (1.3) is being expressed by the Feynman integral.

In the present talk the Feynman path integrals will be constructed not only for the one-particle systems (1.2), but also the multi-particle systems with spin. In addition, we will construct the Feynman path integrals for bosons and fermions, i.e. quantum systems consisting of many identical particles with spin.

We will prove the results in the present talk as in the proofs in [10, 11, 12, 13]. That is, we introduce the fundamental operators $\mathcal{C}(t,s)$, and prove its stability and consistency. Combining these results and the existence theorem to the Schrödinger equations (1.3) in both of L^2 and the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ of all rapidly decreasing functions on $\mathbb{R}^d$, we can prove our results. In particular, in the present talk we will use the delicate result below concerning the L^2-boundedness of pseudo-differential operators, which is stated as Theorem 13.13 on p. 322 in [21]. We note that this result plays an essential role in our proofs.

THEOREM 1.A. *Suppose* $p(x,\xi,x') \in S^0(\mathbb{R}^{3d})$, *i.e.*

$$\sup_{x,\xi,x'} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_{x'}^\gamma p(x,\xi,x')| \le C_{\alpha,\beta,\gamma} < \infty \tag{1.8}$$

for all α, β *and* γ. *Let* $P(X, \hbar D_x, X')$ *be the pseudo-differential operator defined by*

$$\int e^{ix\cdot\xi}\, đ\xi \int e^{-ix'\cdot\xi} p(x,\xi,x') f(x') dx', \quad đ\xi = (2\pi)^{-d} d\xi$$

for $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. *Then we have*

$$\|P(X,\hbar D_x, X')\|_{L^2\to L^2} = \sup_{x,\xi,x'} |p(x,\xi,x')| + O(\hbar), \tag{1.9}$$

where $\|P\|_{L^2\to L^2}$ *denotes the operator norm from* L^2 *into* L^2.

2 The Feynman path integral for the quantum system

Let t in $[0,T]$. For an arbitrary integer ν we take $\tau_j \in [0,T]$ $(j = 1,2,\dots,\nu-1)$ such that $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{\nu-1} < \tau_\nu = t$, set $\Delta := \{\tau_j\}_{j=1}^{\nu-1}$ and write $|\Delta| := \max\{\tau_{j+1} - \tau_j; j = 0,1,\dots,\nu-1\}$. Let $x \in R^d$ be fixed. We take arbitrary points $x^{(j)} \in R^d$ $(j = 0,1,\dots,\nu-1)$ and determine the piecewise free moving path or the piecewise straight line $q_\Delta(\theta; x^{(0)},\dots,x^{(\nu-1)},x) \in \mathbb{R}^d$ by joining $x^{(j)}$ at τ_j $(j = 0,1,\dots,\nu, x^{(\nu)} = x)$ in order. Let $\mathcal{L}(t,x,\dot{x})$ be the Lagrangian function defined by (1.2) and $S(t,s;q)$ the classical action defined by (1.4). Take $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ such that $\chi(0) = 1$ and determine the approximations of the Feynman path integral (1.6) for $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ by

$$K_\Delta(t,0)f = \lim_{\epsilon\to 0+} \prod_{j=0}^{\nu-1} \sqrt{\frac{m}{2\pi i(\tau_{j+1}-\tau_j)}}^{\,d} \int \cdots \int_{R^d} e^{iS(t,0;q_\Delta)}$$
$$\times f(x^{(0)}) \prod_{j=1}^{\nu-1} \chi(\epsilon x^{(j)}) dx^{(0)} dx^{(1)} \cdots dx^{(\nu-1)}. \tag{2.1}$$

The right-hand side of (2.1) is called the oscillatory integral and written as

$$\prod_{j=0}^{\nu-1}\sqrt{\frac{m}{2\pi i(\tau_{j+1}-\tau_j)}}^{\,d}\mathrm{Os}-\int\cdots\int_{R^d}e^{iS(t,0;q_\Delta)}f(x^{(0)})dx^{(0)}dx^{(1)}\cdots dx^{(\nu-1)}$$

(cf. p. 45 of [15]). Feynman path integral $K(t,0)f$ is defined by

$$K(t,0)f=\lim_{|\Delta|\to 0}K_\Delta(t,0)f. \tag{2.2}$$

We consider potentials (V,A) growing polynomially in the spatial direction, for example (1.6) and (1.7). Then we can prove that for any $f\in L^2$ (2.2) holds in the strong topology of L^2.

3 The Feynman path integrals for the identical particle system with spin

In this section we consider a quantum spin system consisting of N particles. We write $x=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_N)\in\mathbb{R}^{3N}$. The Lagrangian function is given by

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{is}^{\sharp}(t,x,\dot{x})=\sum_{i=1}^{N}\Big\{&\frac{m_i}{2}|\dot{\mathbf{x}}_i|^2+e_i\dot{\mathbf{x}}_i\cdot\mathbf{A}_i(t,\mathbf{x}_i)-e_iV_i(t,\mathbf{x}_i)-I_1\otimes\cdots\otimes I_{i-1}\\ &\otimes\frac{e_i}{m_i}\mathbf{B}_i(t,\mathbf{x}_i)\cdot\mathbf{s}_i\otimes I_{i+1}\otimes\cdots\otimes I_N\Big\}-2\sum_{1\le j<k\le N}e_je_kV_{jk}(t,\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_k)\end{aligned} \tag{3.1}$$

in terms of the tensor product, where $\mathbf{A}_i\in\mathbb{R}^3,\mathbf{B}_i\in\mathbb{R}^3,V_i\in\mathbb{R},V_{jk}\in\mathbb{R}$, $\mathbf{s}_i$ are spin matrices with three components and I_j the identity matrix for the j-th particle. In particular we suppose that all particles are identical. Hence we suppose $m_i=m,e_i=e,\mathbf{A}_i=\mathbf{A},\mathbf{B}_i=\mathbf{B},V_i=V,V_{jk}=W$ and $\mathbf{s}_i=\mathbf{s}$. The

Schrödinger equation for (3.1) is given by

$$i\frac{\partial u}{\partial t}(t) = \Bigg[\sum_{j=1}^{N}\Bigg\{\frac{1}{2m}\left|\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} - e\mathbf{A}(t,\mathbf{x}_j)\right|^2 + eV(t,\mathbf{x}_j) + I_1\otimes\cdots\otimes I_{i-1}$$

$$\otimes\frac{e}{m}\mathbf{B}(t,\mathbf{x}_i)\cdot\mathbf{s}\otimes I_{i+1}\otimes\cdots\otimes I_N\Bigg\} + 2e^2\sum_{1\le j<k\le N} e_j e_k W(t,\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_k)\Bigg]u(t). \tag{3.2}$$

For a path $q(\theta)\in\mathbb{R}^{3N}$ $(s\le\theta\le t)$ we define $\mathcal{F}_i^\sharp(t,s;q)$ by the solution

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(t) = -iH_1(t,q(t))\mathcal{A}(t),\ \mathcal{A}(s) = \text{Identity}, \tag{3.3}$$

where $H_1(t,x) = \sum_{j=1}^N I_1\otimes\cdots\otimes I_{i-1}\otimes e\mathbf{B}(t,\mathbf{x}_i)\cdot\mathbf{s}/m\otimes I_{i+1}\otimes\cdots\otimes I_N$. Then we will define the approximation $K^\sharp_{is\Delta}(t,0)f$ of the Feynman path integral $K^\sharp_{is}(t,0)f$ for the system (3.1) by using $\mathcal{F}^\sharp$ as we did $K_\Delta(t,0)f$.

Let s be the magnitude of spin of particles. We note $L^2(\mathbb{R}^3)^{2s+1}\otimes\cdots\otimes L^2(\mathbb{R}^3)^{2s+1} = L^2(\mathbb{R}^{3N})^l$ with $l=(2s+1)^N$ (cf. Theorem II.10 on p. 52 in [19]), which we write as $\mathfrak{H}$.

We first consider the system of bosons. Let $f = f(\mathbf{x}_1,s_1,\mathbf{x}_2,s_2,\dots,\mathbf{x}_N,s_N)\in\mathfrak{H}$ $(s_j=-s,-s+1,\dots,s-1,s)$ be symmetric with respect to the exchange of two variables $(\mathbf{x}_i,s_i)$ and $(\mathbf{x}_,s_j)$ $(i\ne j)$. Then, using the symmetry of (3.1), we can easily prove that $K^\sharp_{is\Delta}(t,0)f$ is also symmetric. Hence we see that the Feynman path integral $K^\sharp_{is}(t,0)f$ is symmetric. Therefore we see that the Feynman path integral expresses the system of bosons. In the same way we can prove that if $f = f(\mathbf{x}_1,s_1,\mathbf{x}_2,s_2,\dots,\mathbf{x}_N,s_N)\in\mathfrak{H}$ is antisymmetric with respect to the exchange of two variables, so is $K^\sharp_{is\Delta}(t,0)f$. Thus we can construct the Feynman path integrals for bosons and fermions.

References

[1] Albeverio, S. A, Høegh-Krohn, R. J., Mazzucchi, S.: Mathematical Theory of Feynman Path Integrals, An Introduction, 2nd corrected and enlarged edition. Lecture Notes in Math. **523**, Berlin, Heidelberg: Springer, 2008

[2] Albeverio, S. A, Mazzucchi, S.: Feynman path integrals for polynomially growing potentials. J. Funct. Anal. **221**, 83-121 (2005)

[3] Albeverio, S. A, Mazzucchi, S.: An asymptotic functional-integral solution for the Schr̈dinger equation with polynomial potential. J. Funct. Anal. **257**, 1030-1052 (2009)

[4] Asada, K., Fujiwara, D.: On the construction of the fundamental solution for the Schrödinger equation. In Japanese, Sugaku **33**, 97-119 (1981)

[5] Berezin, F. A., Shubin, M. A.: The Schrödinger Equation. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991

[6] Dubechies, I., Klauder, J. R.: Quantum-mechanical path integrals with Wiener measure for all polynomial Hamiltonians. II. J. Math. and Phys. **26**, 2239-2256 (1985)

[7] Feynman, R. P.: Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. Rev. Mod. Phys. **20**, 367-387 (1948)

[8] Feynman, R. P., Hibbs, A. R.: Quantum Mechanics and Path Integrals. New York: McGraw-Hill, 1965

[9] Fujiwara, D.: Rigorous Time Slicing Approach to Feynman Path Integrals. Tokyo: Springer Japan, 2017

[10] Ichinose, W.: On the formulation of the Feynman path integral through broken line paths. Commun. Math. Phys. **189**, 17-33 (1997)

[11] Ichinose, W.: On convergence of the Feynman path integral formulated through broken line paths. Rev. Math. Phys. **11**, 1001-1025 (1999)

[12] Ichinose, W.: A mathematical theory of the Feynman path integral for the generalized Pauli equations. J. Math. Soc. Japan **59**, 649-668 (2007)

[13] Ichinose, W.: Notes on the Feynman path integral for the Dirac equation. J. Psedo-Differ. Op. and Applications, JPDO-D-17-00082R1 (2017)

[14] Ichinose, W. On the Feynman path integral for the Schrödinger equations with potentials growing polynomially in the spatial direction. Submitted. LPDE-2017-0250 (2017)

[15] Kumano-go, H.: Pseudo-differential Operators. Cambridge: MIT Press, 1981

[16] Mazzucchi, S.: Mathematical Feynman Path Integrals and Their Applications. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2009

[17] Nelson, E.: Feynman integrals and the Schrödinger equation. J. Math. and Phys. **5**, 332-343 (1964)

[18] Peskin, M. E., Schroeder, D. V.: An Introduction to Quantum Field Theory. Cambridge MA: Westview Press, 1995

[19] Reed, M., Simon, S.: Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis, Revised and Enlarged Edition. San Diego: Academic Press, 1980

[20] Schwartz, J. T.: Nonlinear Functional Analysis. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1969

[21] Zworski, M.: Semiclassical Analysis. Providence, RI: American Mathematical Society, 2012

非加法的単調測度による積分と L_p 空間

岡崎 悦明　(一般財団法人ファジィシステム研究所)*

1. はじめに

非加法的単調測度 μ に関する積分概念 $\int f d\mu$ は数多く提案されている (Choquet 積分 [1]，菅野積分 [22]，Shilkret 積分 [25]，今岡積分，Lehrer 積分 (concave integral)[20]，pan integral(decomposition integral)[19]，convex integral[21]，superdecomposition integral[21]，包除積分 など)．従って L_p 空間も積分に応じて多種の定義が考えられる．L_p の自然な位相構造として

$$d(f,g) = \left(\int |f-g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

を f と g との距離とするのは自然である．しかし，μ の非加法性により通常の距離の公理は満たさない場合がほとんどである．このためここでは距離の条件を弱めた準距離を考える．本講演では非加法的単調測度の作る L_p 空間 を定義しその準距離構造または準ノルム構造を調べる．

非加法的単調測度 μ に関する積分概念の一つである Shilkret 積分は，通常の加法的測度に関する積分論では弱積分と呼ばれと呼ばれているものである．さらに, 加法的測度に関する Shilkret L_p 空間 は 弱 L_p 空間 と呼ばれ $L^{p,\infty}(\mu)$ で表される．この弱 L_p 空間は実解析学分野において Marcinkiewicz の作用素補間定理で重要な役割を果たしている．

本講演の内容は本田あおい氏との共同研究であり，数年来 μ が劣加法的という仮定の下に研究してきた [5]-[12]. しかし劣加法性を仮定すると優加法的測度を除外することになり不十分である．劣加法性より弱い条件の導入を試行した結果，近年，準劣加法性の仮定から一様準劣加法性が従うことや，準劣加法性の仮定から L_p は準距離空間 (多くは準ノルム空間) になることが分かり [13]-[16],「準劣加法性」を仮定とした議論が可能となった．.

2. 準距離空間・準ノルム空間

定義 1 [4, 26, 27]　T を集合とする．関数 $\rho(x,y) : T \times T \to [0,+\infty)$ が **準距離** とは

1. $\rho(x,y) \geq 0, \quad \rho(x,y) = 0 \iff x = y, \quad x, y \in T,$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x), \quad x, y \in T,$
3. $\exists K \geq 1\ ;\ \rho(x,y) \leq K\left(\rho(x,z) + \rho(z,y)\right), \quad x, y, z \in T$

が満たされること．

* e-mail: okazaki@flsi.or.jp

準距離は $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n \in T$ に対して次の式が成り立つ：

$$\rho(x_0, x_n) \leq K^{n-1}(\rho(z_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \cdots + \rho(x_{n-1}, x_n)).$$

ここで一般に $K^{n-1} \to +\infty$ なので，完備性を考察する場合は不都合が出そうである．更には三角不等式が成り立たないので

関数$\rho(x, y)$ はそれ自身の定める位相に関して連続とは限らない

という事態が起こり得る．従って準距離を扱う際には注意深く議論を進める必要がある．実際は以下に述べる Frink の距離付定理 ([3]1938) によりある程度これらの不都合は緩和される．

準距離より良い性質を持つものとして **準ノルム** がある．

定義 2 [24]　線形空間 L 上の関数 $|x|_L : L \to [0, \infty)$ が **準ノルム** とは

1. $|x|_L = 0 \iff x = 0,$
2. $|cx|_L = |c||x|_L,$
3. $\exists M \geq 1\ ;\ |x+y|_L \leq M\left(|x|_L + |y|_L\right)$

が満たされること．

このとき $d(x, y) = |x - y|_L$ は L 上の準距離である．

準距離空間 (X, ρ) は一様空間であり，一様構造は可算個の基本系 $\{D_{1/n} \mid n = 1, 2, \cdots\}$ をもつ．ここに，$D_{1/n} = \{(x, y) \mid \rho(x, y) < \frac{1}{n}\}$ である．従って (X, ρ) は距離が付く，即ち，距離 $d(x, y)$ が存在して $d(x, y)$ は $\rho(x, y)$ と同じ位相を X 上に導く．しかし，距離 $d(x, y)$ と準距離 $\rho(x, y)$ との相互関係は明らかではない．この節では準距離 $\rho(x, y)$ と密接に関連した距離の存在を Heinonen[4] に従って見て行く．

補題 2-1 [3, 4, 26].
準距離 ρ が

$$\rho(x, y) \leq 2\mathrm{Max}\{\rho(x, z), \rho(z, y)\}, \quad x, y, z \in X$$

を満たすとする．このとき，次を満たす距離 $d(x, y)$ が構成できる：

$$\frac{1}{4}\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq \rho(x, y), \quad x, y \in X.$$

実際距離 $d(x, y)$ は次で与えられる：

$$d(x, y) := \inf\left\{\sum_{k=1}^{n} \rho(z_{k-1}, z_k) \mid z_0 = x, z_n = y, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1} \in X, n \in I\!N\right\}.$$

$\rho(x,y)$ を準距離とすれば任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\rho^{\varepsilon}(x,y)$ もまた準距離である．実際 $\rho(x,y)$ の準距離定数を K とするとき $\rho^{\varepsilon}(x,y)$ の準距離定数 K_{ε} として

$$K_{\varepsilon} = \begin{cases} K & 0 < \varepsilon \leq 1 \\ K^{\varepsilon}2^{\varepsilon} & 1 < \varepsilon < +\infty \end{cases}$$

と取ることが出来る．従って準距離 $\rho(x,y)$ を ε-乗した準距離 $\rho^{\varepsilon}(x,y)$ は次の不等式を満たす：

$$\rho^{\varepsilon}(x,y) \leq (2K)^{\varepsilon}\mathrm{Max}\{\rho^{\varepsilon}(x,z), \rho^{\varepsilon}(z,y)\}, \quad x,y,z \in X.$$

Heinonen[4], Prop. 14.5, は $\varepsilon \to 0$ のとき $(2K)^{\varepsilon} \to 1$ となることに着目し，準距離空間の距離付けに関し次の結果を得た．

定理 2-1 [4].
(X,ρ) を準距離空間とする．このときある $\varepsilon \in (0,1]$ および距離 $d_{\varepsilon}(x,y)$ が存在して

$$\frac{1}{4}\rho^{\varepsilon}(x,y) \leq d_{\varepsilon}(x,y) \leq \rho^{\varepsilon}(x,y), \quad x,y,z \in X$$

を満たす．
証明
$(2K)^{\varepsilon} = 2$ を満たす ε をとる．この ε に対して補題 2-1 を適用する．

言い換えれば準距離空間 (X,ρ) は距離 $d_{\varepsilon}(x,y)$ から構成された準距離空間 $(X, d_{\varepsilon}^{1/\varepsilon}(x,y))$ と位相同型である．

準ノルム空間も距離付け可能であるが、この場合は特別な平行移動不変距離が与えられる．

定理 2-2 [24]　$(L,|x|)$ を準ノルム空間とする．このとき $\alpha \in (0,1]$，および関数 $|||x||| : L \to [0,\infty)$ で次を満たすものが存在する：

1. $|||x||| \leq |x|^{\alpha} \leq 2|||x|||,\ x \in L,$

2. $|||x+y||| \leq |||x||| + |||y|||,\ x,\ y \in L,$ および

3. $|||cx||| = |c|^{\alpha}|||x|||,\ x \in L,\ c \in \mathbb{R}.$

$|||x|||$ は具体的に次で与えられる．まず $(2M)^{\alpha} = 2$ を満たす $\alpha \in (0,1]$ を取れば，$|x+y|^{\alpha} \leq 2\max\{|x|^{\alpha}, |y|^{\alpha}\}$ を満たしている．このとき，

$$|||x||| = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{n} |x_j|^{\alpha} \,\middle|\, x = \sum_{j=1}^{n} x_j, n \in \boldsymbol{N}, x_j \in E \right\}.$$

即ち，準ノルム位相は距離 $d(x,y) = |||x-y|||$ の定める位相と同相である．

3. 非加法的単調測度

定義 3 [2, 17, 18, 22]　$(X, \mathcal{B}(X))$ を可測空間，即ち $\mathcal{B}(X)$ は集合 X 上の $\sigma-$ 加法族，とする．集合関数 $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty]$ が **非加法的単調測度** とは

1. $\mu(\emptyset) = 0$, および
2. $A \subset B,\ A, B \in \mathcal{B}(X)$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$

が成り立つこと．

μ が **準劣加法的** とは

3. $\exists K$; $\mu(A \cup B) \leq K(\mu(A) + \mu(B)),\ A, B \in \mathcal{B}(X)$

を満たすこと．$K = 1$ のとき **劣加法的** と呼ばれる．

μ が **一様準劣加法的** とは

4. $\exists L$; $\mu(\cup_{j=1}^{n} A_j) \leq L(\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)),\ \forall n, A_j \in \mathcal{B}(X)$

が成り立つこと．L は n によらない定数である．

μ が **零加法的** とは

5. $\mu(B) = 0$ ならば $\mu(A \cup B) = \mu(A)$

を満たすこと．

μ が **弱零加法的** とは

6. $\mu(A) = \mu(B) = 0$ ならば $\mu(A \cup B) = 0$

を満たすこと．

μ が **零連続** とは

7. $A_n \uparrow A, \mu(A_n) = 0$ ならば $\mu(A) = 0$

を満たすこと．

μ が **下から連続** とは

8. $A_n \uparrow A$ ならば $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$,

を満たすこと．

定義 4(測度のべき乗変換)　$c > 0$ とし μ を非加法的単調測度とする．c 乗変換 μ^c を $\mu^c(A) = (\mu(A))^c$ で定義する．

一般には準劣加法的でも一様準劣加法的とは限らない．しかし，μ が準劣加法的かつ零加法的ならばある正数 $c \in (0, 1]$ が存在して，c 乗変換 μ^c は一様準劣加法的にできる (11 節)．

可測関数を考察する際，$\mu - a.e.$ で同値関係を導入する．即ち

$$f \sim g \iff f = g\ \mu - a.e. \iff \mu(|f - g| > 0) = 0.$$

この条件を考慮し，μ は零加法的であること，または零連続性を仮定することがある(これはその都度明示する)．

4. Choquet 積分による L_p 空間 $L_p(CH)$

Choquet integral [1, 2] :
非負可測関数 $f:(X,\mathcal{B}(X))\to[0,+\infty)$ の Choquet 積分は次で定義される：

$$(\mathrm{C})\int_X f d\mu := \int_0^{+\infty}\mu(\{f>r\})dr$$

$1\le p<+\infty$ とする．可測関数 $f:(X,\mathcal{B}(X))\to(-\infty,+\infty)$ に対して

$$\begin{aligned}
|f|_p &= \left[\int_0^{+\infty} pr^{p-1}\mu(|f|>r)dr\right]^{\frac{1}{p}}, \\
\mathcal{L}_p &= \{f \mid |f|_p<+\infty\}, \\
\mathcal{N}_p &= \{f\in\mathcal{L} \mid |f|_p=0\} \quad \text{and}, \\
L_p(CH) &= \mathcal{L}_p/\mathcal{N}_p.
\end{aligned}$$

とする．

Remark　$|f|_p=0 \iff \mu(|f|>r)=0\ \ \forall r>0$ である．従って，零連続性を仮定すれば $|f|_p=0 \iff f=0,\mu-a.e.$ となる．

補題 4-1　μ は零加法的とする．このとき，$|f\pm h|_p=|f|_p, \forall f\in\mathcal{L}_p,\ \forall h\in\mathcal{N}_p.$

この補題により $|f|_p$ を商空間 $L_p(CH):=\mathcal{L}_p/\mathcal{N}_p$ 上にうまく定義できる．

定理 4-1　μ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき $(L_p(CH),|f|_p)$ 準ノルム空間であり次が成り立つ：

$$|af|_p=|a|\cdot|f|_p,\quad a\in\mathcal{R},\quad f\in L_p(\mathrm{CH}),$$

$$|f+g|_p\le 2K^{\frac{1}{p}}\left(|f|_p+|g|_p\right),\quad f,\ g\in L_p(\mathrm{CH}).$$

Remark　μ が submodular, i.e.,

$$\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)\leqq\mu(A)+\mu(B),$$

であれば L_p(CH) はノルム空間である． (Denneberg[2]).

5. 菅野 積分による L_p 空間 $L_p(SU)$

Sugeno integral [22]

非負可測関数 $f:(X,\mathcal{B}(X))\to[0,+\infty)$ の 菅野 積分は次で定義される：

$$\text{(SU)}\int_X f d\mu := \sup_{r\geq 0} r\wedge\mu(\{f>r\}),$$

ただし $a\wedge b=\min\{a,b\}$.

$1\leq p<+\infty$ とする．可測関数 $f:(X,\mathcal{B})\to(-\infty,+\infty)$ に対して

$$\begin{aligned}
|f|_p &= \left[\sup_{r\geq 0} r\wedge\mu(|f|^p>r)\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\text{(SU)}\int_X |f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}, \\
\mathcal{L}_p &= \{f \mid |f|_p<+\infty\}, \\
\mathcal{N}_p &= \{f\in\mathcal{L}_p \mid |f|_p=0\} \text{ and} \\
L_p(\text{SU}) &= \mathcal{L}_p/\mathcal{N}_p.
\end{aligned}$$

とする．

Remark $|f|_p=0 \iff \mu(|f|>r)=0\ \ \forall r>0$ である．従って，零連続性を仮定すれば $|f|_p=0 \iff f=0,\mu-a.e.$ となる．

補題 5-1 μ は零加法的とする．このとき

$$|f\pm h|_p=|f|_p,\ f\in\mathcal{L}_p,\ h\in\mathcal{N}_p.$$

この補題により $|f|_p$ を商空間 $L_p(SU)=\mathcal{L}_p/\mathcal{N}_p$ 上にうまく定義できる．

定理 5-1 μ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき $(L_p(SU),|f-g|_p)$ は準距離空間であり次が成り立つ．

$$|af|_p\leq\max\{|a|,1\}\cdot|f|_p,\quad a\in\mathcal{R},\quad f\in L_p(\text{SU}),$$
$$|f\pm g|_p\leq 2K^{\frac{1}{p}}\left(|f|_p+|g|_p\right),\quad f,\ g\in L_p(\text{SU}).$$

Remark $|f|_p$ は準ノルムではない．．スカラー倍 $a\to af$ は連続とは限らない．

命題 5-1 $L_p(\text{SU})=L_1(\text{SU}),\ \forall p.$

(Proof) 次の不等式が成り立つ．

(1) $|f|_p^p\leq|f|_1^p+|f|_1$, and

(2) $|f|_1^p\leq|f|_p^{p^2}+|f|_p^p$.

実際定義より $|f|_p = \left[\sup_{r\geq 0} r \wedge \mu(|f|^p > r)\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sup_{r\geq 0} r^p \wedge \mu(|f| > r)\right]^{\frac{1}{p}}$，$|f|_1 = \sup_{r\geq 0} r \wedge \mu(|f| > r)$. ここで

$$a^p \wedge b \leq (a\wedge b)^p + a \wedge b,\ (a\wedge b)^p \leq (a^p \wedge b)^p + a^p \wedge b$$

が成り立つことに注意して結論を得る.

6. Shilkret 積分による L_p 空間 $L_p(SH)$

Shilkret integral [25] :
非負可測関数 $f:(X,\mathcal{B}(X)) \to [0,+\infty)$ の Shilkret 積分は次で定義される：

$$(\mathrm{SH})\int_X f d\mu := \sup_{r\geq 0} r\cdot\mu(\{f>r\}).$$

$1 \leq p < +\infty$ とする. 可測関数 $f:(X,\mathcal{B}) \to (-\infty,+\infty)$ に対して

$$\begin{aligned} |f|_p &= \left[\sup_{r\geq 0} r\cdot\mu(|f|^p > r)\right]^{\frac{1}{p}} = \left[(\mathrm{SH})\int_X |f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}, \\ \mathcal{L}_p &= \{f \mid |f|_p < +\infty\}, \\ \mathcal{N}_p &= \{f\in\mathcal{L}_p \mid |f|_p = 0\} \text{ and} \\ L_p(\mathrm{SH}) &= \mathcal{L}_p/\mathcal{N}_p. \end{aligned}$$

とする.

補題 6-1　μ は零加法的とする. このとき

$$|f\pm h|_p = |f|_p,\ f\in\mathcal{L}_p,\ h\in\mathcal{N}_p.$$

この補題により $|f|_p$ を商空間 $L_p(SH) := \mathcal{L}_p/\mathcal{N}_p$ 上にうまく定義できる.

定理 6-1　μ は準劣加法的かつ零加法的とする. このとき $(L_p(SH), |f|_p)$ は準ノルム空間であり次が成り立つ.

$$|af|_p = |a|\cdot|f|_p,\quad a\in\mathcal{R},\quad f\in L_p(\mathrm{SH}),$$
$$|f\pm g|_p \leq 2K^{\frac{1}{p}}(|f|_p + |g|_p),\quad f,\ g\in L_p(\mathrm{SH}).$$

Remark　μ が通常の加法的な測度の場合，$L_p(SH)$ は **弱** L_p **空間** と呼ばれており $L^{p,\infty}(\mu)$ と表される準ノルム空間である [24].

命題 6-1　$L_p(\mathrm{CH}) \subset L_p(\mathrm{SH}) \subset L_p(\mathrm{SU})$.

(Proof)
$(\mathrm{SH})|f|_p \leq (\mathrm{CH})|f|_p$ および $(\mathrm{SU})|f|_p^2 \leq (\mathrm{SH})|f|_p$ が成り立つ. 後者は $(a\wedge b)^2 \leq ab$ より従う.

7. Lehrer 積分による L_p 空間 $L_p(LEH)$

concave integral(Lehrer 積分) [20]:
非負可測関数 $f:(X,\mathcal{B}(X))\to[0,+\infty)$ の Lehrer 積分 (concave integral) は次で定義される：

$$(LEH)\int fd\mu = cav(f) :=$$
$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i)\ \middle|\ \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i} \leqq f, n\in I\!N, a_i\geq 0, A_i\in\mathcal{B}\right\}.$$

$1\leqq p<+\infty$ とする．可測関数 $f:(X,\mathcal{B})\to I\!R$ に対して, $|f|_p := \left((LEH)\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ とし，

$$\mathcal{L}_p := \{f \mid |f|_p<+\infty\},$$
$$\mathcal{N}_p := \{f\in\mathcal{L}_p \mid |f|_p=0\},$$
$$\mathcal{Z}_p := \{f\in\mathcal{L}_p \mid f=0\ \mu-a.e.\}.$$

とする．

ここでは，Choquet, 菅野および Shilkret 積分の場合と異なり，新たに部分空間 $\mathcal{Z}_p$ を導入し，$\mathcal{Z}_p$ による商空間をとる．

命題 7-1. **[20]**

(1) $f=0\ \mu-a.e.\ \Rightarrow (LEH)\int fd\mu=0.$
(2) $0\leqq f\leqq g\ \Rightarrow 0\leqq (LEH)\int fd\mu \leqq (LEH)\int gd\mu.$
(3) $(LEH)\int \chi_A d\mu \geqq \mu(A).$
(4) for $c>0, f\geq 0 \Rightarrow (LEH)\int (cf)d\mu = c\cdot (LEH)\int fd\mu.$
(5) for $f,g\geqq 0, (LEH)\int (f+g)d\mu \geqq (LEH)\int fd\mu + (LEH)\int gd\mu.$

(5) は concavity と呼ばれる．ノルムの三角不等式とは逆である．

補題 7-1

1. μ が零加法的ならば $\mathcal{Z}_p$ は $\mathcal{L}_p$ の線形部分空間.
2. $\mathcal{Z}_p\subset\mathcal{N}_p$.
3. μ が零連続ならば $\mathcal{Z}_p=\mathcal{N}_p$.
4. μ は零加法的とする．このとき $h\in\mathcal{Z}_p$ に対し, $|f\pm h|_p=|f|_p$.

Remark concavity (5) により, 任意の $h\in\mathcal{N}_1$, に対して $|f\pm h|_1=|f|_1$.

補題 7-2
μ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき

$$|f+g|_p \leqq 2K^{\frac{1}{p}}\{|f|_p+|g|_p\},\ f,g\in\mathcal{L}_p.$$

系 7-1
μ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき $\mathcal{N}_p$ は $\mathcal{L}_p$ の線形部分空間である．

$1 \leqq p < +\infty$ とする．μ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき

$$L_p(LEH) = \mathcal{L}_p / \mathcal{Z}_p$$

$$\|f + \mathcal{Z}_p\|_p := |f|_p \text{ for } f + \mathcal{Z}_p \in L_p(LEH).$$

と定義する．

補題 7-1 より，$\|f + \mathcal{Z}_p\|_p$ は代表元の取り方に依らない．以下同値類 $f + \mathcal{Z}_p$ と代表元 f を同一視し，$\|f\|_p = |f|_p$ と記す．

定理 7-1 μ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき $(L_p(LEH), |f|_p)$ は準ノルム空間であり以下を満たす：
(1) $|cf|_p = |c||f|_p,\ c \in I\!R, f \in L_p(LEH)$.
(2) $|f + g|_p \leqq 2K^{\frac{1}{p}}(|f|_p + |g|_p)$ for $f, g \in L_p(LEH)$.

8. Pan integral による L_p 空間 $L_p(PAN)$

pan integral(decomposition integral) [19]：
非負可測関数 $f : (X, \mathcal{B}(X)) \to [0, +\infty)$ の pan integral は次で定義される：

$$(pan)\int f d\mu :=$$

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \leqq f, n \in I\!N, a_i \geq 0, \{A_i\} \subset \mathcal{B} \text{ is a decomposition of } X\right\}.$$

$1 \leqq p < +\infty$ とする．可測関数 $f : (X, \mathcal{B}) \to I\!R$ に対して，$|f|_p := \left((pan)\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ とし，

$$\mathcal{L}_p := \{f \mid |f|_p < +\infty\},$$

$$\mathcal{N}_p := \{f \in \mathcal{L}_p \mid |f|_p = 0\},$$

$$\mathcal{Z}_p := \{f \in \mathcal{L}_p \mid f = 0\ \mu - a.e.\}.$$

とする．

ここでも，Choquet, 菅野および Shilkret 積分の場合と異なり，Lehrer 積分と同様に部分空間 $\mathcal{Z}_p$ を導入する．

命題 8-1. [19]

(1) $f=0\ \mu-a.e.\ \Rightarrow (pan)\int f d\mu = 0$.

(2) $0 \leqq f \leqq g\ \Rightarrow 0 \leqq (pan)\int f d\mu \leqq (pan)\int g d\mu$.

(3) $(pan)\int \chi_A d\mu \geqq \mu(A)$.

(4) for $c>0, f\geq 0 \Rightarrow (pan)\int (cf) d\mu = c\cdot(pan)\int f d\mu$.

(5) for $f,g \geqq 0$ with $supp(f)\cap supp(g)=\emptyset \Rightarrow (pan)\int (f+g)d\mu \geqq (pan)\int f d\mu + (pan)\int g d\mu$. [weak concavity]]

(5) は concavity に相当する．ノルムの三角不等式とは逆である．

補題 8-1

1. μ が零加法的ならば $\mathcal{Z}_p$ は $\mathcal{L}_p$ の線形部分空間.
2. $\mathcal{Z}_p \subset \mathcal{N}_p$.
3. μ が零連続ならば $\mathcal{Z}_p = \mathcal{N}_p$.
4. μ は零加法的とする．このとき $h\in\mathcal{Z}_p$ に対し, $|f\pm h|_p = |f|_p$.

補題 8-2　μ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき

$$|f+g|_p \leqq 2K^{\frac{1}{p}}\{|f|_p+|g|_p\} \text{ for every } f,g\in\mathcal{L}_p.$$

系 8-1　μ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき $\mathcal{N}_p$ は $\mathcal{L}_p$ の線形部分空間である.

$1\leqq p<+\infty$ とする. μ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき

$$L_p(PAN) := \mathcal{L}_p/\mathcal{Z}_p$$

$$\|f+\mathcal{Z}_p\|_p := |f|_p \text{ for } f+\mathcal{Z}_p \in L_p(PAN).$$

と定義する．

補題 8-1 より, $\|f+\mathcal{Z}_p\|_p$ は代表元の取り方に依らない．以下同値類 $f+\mathcal{Z}_p$ と代表元 f を同一視し， $\|f\|_p = |f|_p$ と記す.

定理 8-1　μ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき $(L_p(PAN), |f|_p)$ は準ノルム空間であり以下を満たす：

(1) $|cf|_p = |c||f|_p,\ c\in I\!R, f\in L_p(PAN)$.

(2) $|f+g|_p \leqq 2K^{\frac{1}{p}}(|f|_p+|g|_p)$ for $f,g\in L_p(PAN)$.

9. Convex integral による L_p 空間 $L_p(VEX)$

convex integral [21]

非負可測関数 $f:(X,\mathcal{B}(X))\to[0,+\infty)$ の convex integral は次で定義される：

$(VEX)\int f d\mu = vex(f) :=$

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i} \geqq f, n\in I\!N, a_i\geq 0, A_i\in\mathcal{B}\right\}.$$

Remark $\{A_i\}$ は必ずしも disjoint ではない集合列を考える．

$1\leqq p<+\infty$ とする．可測関数 $f:(X,\mathcal{B})\to I\!R,$ に対して $|f|_p := (\mathrm{vex}(|f|^p))^{\frac{1}{p}}$ とし，

$$\mathcal{L}_p := \{f \mid |f|_p < +\infty\},$$

$$\mathcal{N}_p := \{f\in\mathcal{L}_p \mid |f|_p = 0\},$$

$$\mathcal{Z}_p := \{f\in\mathcal{L}_p \mid f=0\ \mu-a.e.\}.$$

とする．ここでも部分空間 $\mathcal{Z}_p$ を導入する．

命題 9-1. [21]

(1) $f=0\ \mu-a.e.\ \Rightarrow \mathrm{vex}(f)=0.$
(2) $0\leqq f\leqq g\ \Rightarrow 0\leqq \mathrm{vex}(f)\leqq \mathrm{vex}(g).$
(3) $\mathrm{vex}(\chi_A)\leqq\mu(A).$
(4) For $c>0\Rightarrow \mathrm{vex}(cf)=c\cdot\mathrm{vex}(f).$
(5) For $f,g\geqq 0\Rightarrow \mathrm{vex}(f+g)\leqq\mathrm{vex}(f)+\mathrm{vex}(g)$ [convexity].

補題 9-1

1. μ が零加法的ならば $\mathcal{Z}_p$ は $\mathcal{L}_p$ の線形部分空間.
2. $\mathcal{Z}_p\subset\mathcal{N}_p$.
3. μ は零加法的とする．このとき is $h\in\mathcal{Z}_p$ に対し， $|f\pm h|_p=|f|_p$.

Remark 積分の凸性 (命題 9-1 (5)) により, $h\in\mathcal{N}_1$ に対し, $|f\pm h|_1=|f|_1$.

補題 9-2 μ は零加法的とする．このとき

$$|f+g|_p\leqq 2^{\frac{p-1}{p}}\{|f|_p+|g|_p\} \text{ for every } f,g\in\mathcal{L}_p.$$

系 9-1 μ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき $\mathcal{N}_p$ は $\mathcal{L}_p$ の線形部分空間である．.

$1\leqq p<+\infty$ とする. μ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき

$$L_p(VEX) := \mathcal{L}_p/\mathcal{Z}_p$$

$$\|f+\mathcal{Z}_p\|_p := |f|_p \text{ for } f+\mathcal{Z}_p\in L_p(VEX).$$

とする．

補題 9-1 より, $\|f+\mathcal{Z}_p\|_p$ は代表元 f の取り方によらない．以下同値類 $f+\mathcal{Z}_p$ と代表元 f を同一視し， $\|f\|_p = |f|_p$ と記す.

定理 9-1　μ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき $(L_p(VEX), |f|_p)$ は準ノルム空間であり，以下を満たす．

(1) $|cf|_p = |c||f|_p,\ c \in I\!R, f \in L_p(VEX)$.

(2) $|f+g|_p \leqq 2^{\frac{p-1}{p}}\,(|f|_p + |g|_p)$ for $f, g \in L_p(VEX)$.

$L_1(\mathrm{vex})$ はノルム空間である．これは命題 9-1 (5) からも言える.

$L_p(LEH)$ と $L_p(VEX)$ の包含関係は不明である．一見して $L_p(LE) \subset L_p(\mathrm{vex})$ のようではあるが、不明.

例

$D \subset X$ とし，測度 μ を

$$\mu(A) = 1 \text{ if } A \cap D \neq \emptyset$$
$$\mu(A) = 0 \text{ if } A \cap D = \emptyset$$

とする．これは集合 D の定義関数 χ_D を可能性分布関数とする可能性測度と呼ばれる単調測度である．$\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$ を満たす．このとき

$$L_1(LE) = \ell_1(D) = \{(a_d)_{d\in D} \mid \textstyle\sum_{d\in D} |a_d| < +\infty\},$$
$$L_1(\mathrm{vex}) = \ell_\infty(D)$$

である．可測関数 $f(x)$ は次のように一点の定義関数の和で表される：

$$f(x) = \sum_{d\in D} f(d)\chi_{\{d\}}(x),\ \mu - a.e.$$

10. Super decomposition integral による L_p 空間 $L_p(SDC)$

Super decomposition integral [21]

非負可測関数 $f : (X, \mathcal{B}(X)) \to [0, +\infty)$ の super decomposition integral は次で定義される：

$$(SDC)\int f d\mu :=$$

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(A_i) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i} \geqq f, n \in I\!N, a_i \geq 0, \{A_i\} \subset \mathcal{B}(X) \text{ is a decomposition of } X\right\}.$$

Remark convex integral との違いは $\{A_i\}$ は disjoint であること．

$1 \leqq p < +\infty$ とする．可測関数 $f:(X,\mathcal{B}) \to I\!R$, に対して $|f|_p := \left((SDC)\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ とし，

$$\mathcal{L}_p := \{f \mid |f|_p < +\infty\},$$

$$\mathcal{N}_p := \{f \in \mathcal{L}_p \mid |f|_p = 0\},$$

$$\mathcal{Z}_p := \{f \in \mathcal{L}_p \mid f = 0 \ \mu - a.e.\}.$$

とする．ここでも部分空間 $\mathcal{Z}_p$ を導入する．

命題 10-1. [21]

(1) $f = 0 \ \mu - a.e. \ \Rightarrow (SDC)\int f d\mu = 0.$

(2) $0 \leqq f \leqq g \ \Rightarrow 0 \leqq (SDC)\int f d\mu \leqq (SDC)\int g d\mu.$

(3) $(SDC)\int \chi_A d\mu \leqq \mu(A).$

(4) For $c > 0 \Rightarrow (SDC)\int cf d\mu = c \cdot (SDC)\int f d\mu.$

(5) For $f, g \geqq 0, supp(f) \cap supp(g) = \emptyset \Rightarrow (SDC)\int (f+g) d\mu \leqq (SDC)\int f d\mu + (SDC)\int g d\mu$ [weak convexity].

補題 10-1

1. μ が零加法的ならば $\mathcal{Z}_p$ は $\mathcal{L}_p$ の線形部分空間.
2. $\mathcal{Z}_p \subset \mathcal{N}_p$.
3. μ は零加法的とする．このとき is $h \in \mathcal{Z}_p$ に対し， $|f \pm h|_p = |f|_p$.

補題 10-2 μ は零加法的とする．このとき

$$|f+g|_p \leqq 2K^{\frac{1}{p}}\{|f|_p + |g|_p\}, \ f, g \in \mathcal{L}_p.$$

系 10-1 μ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき $\mathcal{N}_p$ は $\mathcal{L}_p$ の線形部分空間である．.

$1 \leqq p < +\infty$ とする. μ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき

$$L_p(SDC) := \mathcal{L}_p / \mathcal{Z}_p$$

$$\|f + \mathcal{Z}_p\|_p := |f|_p \text{ for } f + \mathcal{Z}_p \in L_p(SDC).$$

とする．

補題 10-1 より, $\|f + \mathcal{Z}_p\|_p$ は代表元 f の取り方によらない．以下同値類 $f + \mathcal{Z}_p$ と代表元 f を同一視し， $\|f\|_p = |f|_p$ と記す.

定理 10-1 μ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき $(L_p(SDC), |f|_p)$ は準ノルム空間であり，以下を満たす．

(1) $|cf|_p = |c||f|_p, \ c \in I\!R, f \in L_p(SDC).$

(2) $|f+g|_p \leqq 2K^{\frac{1}{p}}(|f|_p+|g|_p), \ \ f,g \in L_p(SDC)$.

$L_p(PAN)$ と $L_p(SDC)$ の包含関係は不明である．

例
$D \subset X$ とし，χ_D を可能性分布関数とする可能性測度を μ とする．μ の双対測度 $\bar{\mu}$ は

$$\bar{\mu}(A) = 1 - \mu(X \backslash A), \quad A \in \mathcal{B}(X)$$

で定義される．このとき集合 D の濃度が2以上であれば，

$(pan) \int f d\bar{\mu} = \inf_{x \in D} f(x)$

$(SDC) \int f d\bar{\mu} = 0$

である．$D = \{d\}$ が1点集合ならば $\mu = \bar{\mu} = \delta_d$ であり，$(pan) \int f d\bar{\mu} = (SDC) \int f d\bar{\mu} = f(d)$ である．

11. 非加法的単調測度のべき乗変換

$c > 0$ とし μ を非加法的単調測度とする．c 乗変換 μ^c を

$$\mu^c(A) = (\mu(A))^c$$

で定義した．

本節では Choquet 積分 または Shilkret 積分に関する L_1 空間を考える．これらは準ノルム空間であり，さらに次の性質を共通に満たしている．

補題 11-1 $A \in \mathcal{B}(X)$ に対して $|\chi_A|_1 = \mu(A)$ である．ここに χ_A は集合 A の定義関数，$|f|_1$ は L_1(CH) の準ノルム (或いは L_1(SH) の準ノルム) である．

Choquet L_1(CH) (或いは Shilkret L_1(SH)) は距離付け可能であり，定理 2-2 により次が成り立つ．

定理 11-1 μ は準劣加法的かつ零加法的とする．ある $c \in (0,1]$ および距離関数 $|||f|||_1 : L_1(\mathrm{CH})(L_1(\mathrm{SH})) \to [0,\infty)$ が存在して次を満たす：

1. $|||f|||_1 \leq |f|_1^c \leq 2|||f|||_1, \ f \in L_1(\mathrm{CH})(L_1(\mathrm{SH}))$, および

2. $|||f+g|||_1 \leq |||f|||_1 + |||g|||_1, \ f, \ g \in L_1(\mathrm{SH})(L_1(\mathrm{SH}))$.

定理 11-2　μ は準劣加法的かつ零加法的とする．このとき定理 1 の $c \in (0,1]$ に対して

$$\mu^c(\cup_{j=1}^n A_j) \leq 2\sum_{j=1}^n \mu^\alpha(A_j),\ \forall \mathrm{n},\ \forall \mathrm{j} = 1,2,\cdots,\mathrm{n}$$

即ち，μ^c は一様準劣加法的である．さらに μ が下から連続ならば，

$$\mu^c(\cup_{j=1}^\infty A_j) \leq 2\sum_{j=1}^\infty \mu^c(A_j).$$

定理 11- 3　μ は準劣加法的かつ零加法的とする． **定理 11-1** で得られた $c \in (0,1]$ および距離関数 $|||f|||_1$ を考える．このとき， $\lambda(A) = \sup\{|||\chi_C|||_1 \mid C \subset A, C \in \mathcal{B}(X)\}$ とすれば

(1) λ は劣加法的単調測度である．

(2) $\lambda(A) \leq \mu^c(A) \leq 2\lambda(A),\ A \in \mathcal{B}(X)$.

12. L_∞

可測関数 f が本質的に有界であるとは，$\exists\alpha \geq 0$; $\mu(|f| > \alpha) = 0$ が成り立つことである．本質的に有界な関数 f に対して，$|f|_\infty = \inf\{\alpha \geq 0 \mid \mu(|f| > \alpha) = 0\}$　とし

$\mathcal{L}_\infty = \{f \mid |f|_\infty < +\infty\}$,

$\mathcal{N}_\infty = \{f \in \mathcal{L}_\infty \mid |f|_\infty = 0\}$, and

$L_\infty = \mathcal{L}_\infty / \mathcal{N}_\infty$

とする．

補題 12-1　μ は下から連続とする．このとき次は同値である:
$|f|_\infty = a$
$\iff$
(1) $\mu(|f| > a) = 0$ and
(2) for every $b < a, \mu(|f| > b) > 0$.

従って μ が下から連続であれば，$|f|_\infty = \min\{\alpha \geq 0 \mid \mu(|f| > \alpha) = 0\}$.

補題 12-2　μ は零加法的とする．$f \in \mathcal{L}_p, h \in \mathcal{N}_p$ に対して $|f \pm h|_\infty = |f|_\infty$.

この補題により $|f|_\infty$ を商空間 $L_\infty = \mathcal{L}_\infty / \mathcal{N}_\infty$ 上にうまく定義できる．

命題 12-1　μ は零加法的とする．このとき $|f|_\infty$ は L_∞ 上のノルムである．

13. その他の話題

- 可測空間 $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ の完備性，完備化
- $L_p (0 \leq p \leq \infty)$ の完備性
- L_p の双対
- 非分布型積分に関する積分収束定理 (分布関数型積分については [17, 18])
- 収束定理 (Egorov の定理など)[17]

参考文献

[1] G. Choquet, Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier, **5**, 131-295, 1953.

[2] D. Denneberg, Non-additive measure and integral, Springer, 1994.

[3] A. H. Frink, Distance function and the metrization problem, Bull. A. M. S., **43**, 133-142, 1937.

[4] J. Heinonen, Lectures on Analysis on Metric Spaces, Universitext, Springer, 2001.

[5] 本田あおい, 岡崎悦明, ファジィ測度の作る L_p 空間の準距離, 第 20 回曖昧な気持ちに挑むワークショップ講演論文集, pp. 59–60, 2015.

[6] 本田あおい, 岡崎悦明, 劣加法的測度の作る L_p 空間と双対 $L_p^\dagger$，2016 日本数学会年会，実函数論分科会講演，2016 年 3 月 18 日 (筑波大学).

[7] 本田あおい, 岡崎悦明, 劣加法的測度に対する Shilkret-菅野 型積分とその L_p 空間，2016 日本数学会年会秋季総合分科会，実函数論分科会講演，2016 年 9 月 17 日 (関西大学).

[8] A. Honda, Y. Okazaki, L_p-space and its dual for a fuzzy measure, MDAI 2016 (Andorra), 2016

[9] 本田あおい, 岡崎悦明, ファジィ測度に対する concave および convex integrals とその L_p 空間の準距離構造，実解析学シンポジウム 2016 講演集，pp.19–24，2016 年 10 月 21 日 (奈良女子大学).

[10] 本田あおい, 岡崎悦明, ファジィ測度の測度代数および可測関数空間 L_0，第 21 回曖昧な気持ちに挑むワークショップ講演論文集, pp. 33–34, 2016(大分市).

[11] A. Honda and Y. Okazaki, Quasi-metrics on the function spaces $L_p (0 \leq p \leq \infty)$ for a fuzzy measure, RIMS 共同研究 「関数空間の構造とその周辺」, Feb. 6-9, 2017, 数理解析研究所講究録 2041, 199-208, 2017.

[12] A. Honda and Y. Okazaki, L_1-space for Sugeno Integral, MDAI 2017, Lecture Notes on Artificial Intelligence 10571, 63-73, Springer.

[13] 本田あおい, 岡崎悦明, 非加法的単調測度に基づく weak L_p 空間と測度のべき乗変換，第 22 回曖昧な気持ちに挑むワークショップ講演論文集, pp. 54–55, 2017(熊本市).

[14] 本田あおい, 岡崎悦明, 非加法的単調測度に関する積分と L_p 空間 $(0 \leq p \leq \infty)$, 実解析学シンポジウム 2017 講演集, 59-64, 2017 年 11 月 10-12(名古屋大学).

[15] 本田あおい, 岡崎悦明, 非加法的単調測度による L_p 空間, RIMS 共同研究 「関数空間の深化とその周辺」, 2018 年 2 月.

[16] 本田あおい, 岡崎悦明, 準劣加法的単調測度に関する弱 L_p 空間 $L^{p,\infty}$, 2018 日本数学会年会, 実函数論分科会講演, 2018 年 3 月 20 日 (東大駒場).

[17] 河邉　淳，非加法的測度と非線形積分-理論的展開に焦点を当てて-，数学，第 68 巻 第 3 号，2016 年 7 月 夏季号，pp.266–292，2016.

[18] 河邉　淳，非線形積分の収束定理の統一的定式化，第 56 回実函数論・関数解析学合同シンポジウム講演集，pp.35–54，2017.

[19] E. P. Klement, J. Li, R. Mesiar and E. Pap, Integrals based on monotone set functions, Fuzzy Sets and Systems, **281**, 88-102, 2015.

[20] E. Lehrer, A new integral for capacities, Economic Theory, **39**, 157-176, 2009.

[21] R. Mesiar, J. Li and E. Pap, Superdecomposition integrals, Fuzzy Sets and Systems, **259**, 3-11, 2015.

[22] 室伏俊明・菅野道夫 ：ファジィ測度, 講座ファジィ3，日刊工業新聞社，1991.

[23] On linearity of pan-integral and pan-integrable function space, International J. of Approximate Reasoning, **90**, 307-318, 2017.

[24] 柴田　良弘, ルベーグ積分論, 内田老鶴圃, 2006.

[25] N. Shilkret, Maxitive measures and integration, Indagationes Math., **74**, 109-116, 1971.

[26] V. Schroeder, Quasi-metric and metric spaces, arXiv:math/0607304v1 [math:MG] 13 Jul 2006.

[27] H. Triebel, A new approach to function spaces on quasi-metric spaces, Revista Mathematica Complutense, **18**-1, 7-48, 2005.

不動点近似法に対する収束解析について

松下 慎也 (秋田県立大学)

1　はじめに

本講演では、非線形写像の不動点近似法の収束解析およびその応用を紹介する。

不動点問題：

$$\text{find } u \in H \text{ s.t. } T(u) = u \tag{1.1}$$

を考える。ここで、H は実ヒルベルト空間、T は H から H の写像とする。問題 (1.1) の解、つまり写像 T の不動点について考える。写像 T やその定義域等に適切な条件を課せば不動点の存在を証明することができ、そのような結果を不動点定理と呼ぶ。不動点定理は微分方程式の解の存在や一意性を保証するなど、様々な問題の解の存在定理を証明するときの有力な手段となっている。次の縮小写像の不動点定理は、非線形解析学において非常に有名である。

定理 1.1. (縮小写像の不動点定理) (X, d) を完備距離空間とし、S を X から X への縮小写像[1]とする。 このとき、S は唯一つの不動点 $z \in X$ を持ち、任意の $x_0 \in X$ に対して $\{S^k(x_0)\}$ は z に収束する。また、

$$d\left(S^k(x_0), z\right) \leq \frac{r^k}{1-r} d(x_0, S(x_0)) \ (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1.2}$$

が成立する。

定理 1.1 とそれに関連する話題については [2, 27–32] を参照するとよい。定理 1.1 では、不動点の存在定理と不動点への収束定理を一つの枠組みの中で議論している。特に、点列 $\{S^k(x_0)\}$ は任意の初期点 x_0 から不動点 z に収束する性質を持ち、S の不動点を逐次近似する解法になっていることを示している。一方、式 (1.2) は点列 $\{S^k(x_0)\}$ がどのくらいの速さで不動点に近づくかを評価する指標として利用できる。

本研究は科研費 (基盤研究 (C) 課題番号：16K05280) の助成を受けて得られた結果である。

[1] d を完備距離空間 X の距離とする。このとき、S が縮小写像であるとは、ある $r \in [0, 1)$ が存在して，任意の $x,\, y \in X$ について $d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$ を満たす。

本講演では、縮小写像の不動点定理における点列 $\{S^k(x_0)\}$ の評価式 (1.2) に動機付けられて、不動点近似法の収束の速さの評価に関する結果とその応用について解説する。定理 1.1 では、収束を評価する基準として点列と不動点との距離 $d(S^k(x_0), z)$ を用いている。しかし、非拡大写像 (2 節参照) には近似法によって生成された点列が、不動点に弱収束するが強収束しない例が存在する [9]。このことから、点列と不動点との距離は 0 に収束することが保障されない為、新しい評価基準を検討する必要がある。本講演を通して、不動点近似法の収束の評価基準として以下を用いる

$$\|x_k - T(x_k)\|. \tag{1.3}$$

ここで、点列 $\{x_k\}$ は写像 T に対する不動点近似法によって生成された点列とする。$\{x_k\}$ が非拡大写像に対する不動点近似法によって生成された場合、$\|x_k - T(x_k)\|$ が 0 に収束するという性質を持つことが知られている。最近、(1.3) の収束について漸近的な上界を与えたり、その評価を改善するという研究が盛んに行われている [6–8, 12]。ここでは、Krasnosel'skiĭ-Mann 型の不動点近似法 (3 節参照) と近接勾配法 (4 節参照) に焦点を当て、近似法から生成される点列について新しい評価を与えることを目的とする。

2 準備

実数の集合を $\mathbb{R}$、正の整数全体の集合を $\mathbb{N}$ で表す。正の実数列 $\{a_k\}, \{b_k\} \subset (0, \infty)$ について、$\lim_{k\to\infty} a_k b_k = 0$ が成り立つとき、$a_k = o(1/b_k)$ と表す。また、ある $c > 0$ が存在して $a_k \le c/b_k$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ が成り立つとき、$a_k = O(1/b_k)$ と表す。

本稿で扱うヒルベルト空間は全て実ヒルベルト空間である。ヒルベルト空間 H の内積とノルムを $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と $\|\cdot\|$ で表す。任意の $x, y \in H$, $\alpha \in [0, 1]$ に対して

$$\|(1-\alpha)x + \alpha y\|^2 = (1-\alpha)\|x\|^2 + \alpha\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x - y\|^2 \tag{2.1}$$

が成り立つ。$T : H \to H$ が非拡大であるとは、任意の $x, y \in H$ に対して

$$\|T(x) - T(y)\| \le \|x - y\| \tag{2.2}$$

が成り立つときをいう。写像 T の不動点集合を $\mathrm{Fix}(T) := \{u \in H : T(u) = u\}$ とする。非拡大写像の不動点集合は閉凸集合になる。また、T が堅非拡大であるとは、任意の $x, y \in H$ に対して

$$\|T(x) - T(y)\|^2 \le \langle x - y, T(x) - T(y) \rangle \tag{2.3}$$

が成り立つときをいう。T に対してある $\alpha \in (0, 1)$ と非拡大写像 $R : H \to H$ が存在し、$T = (1-\alpha)I + \alpha R$ とあらわせるとき、T は α-平均非拡大であるという。

集合値写像 $A : H \to 2^H$ に対して、その定義域と値域を $\mathrm{dom}(A) := \{x \in H : A(x) \neq \emptyset\}$ と $\mathrm{ran}A := \bigcup\{A(x) : x \in \mathrm{dom}(A)\}$ と表す。また、A のグラフを $G(A) := \{(x, y) \in H \times H : y \in A(x)\}$ と表す。A が単調であるとは、任意の $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G(A)$ に対して

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0 \tag{2.4}$$

が成り立つときをいう。また、A が極大単調であるとは、A のグラフを真に含む単調な集合値写像 $B : H \to 2^H$ が存在しないときをいう。A が極大単調となるための必要十分条件は、任意の $r > 0$ に対して

$$\mathrm{ran}(I + rA) = H \tag{2.5}$$

となることである [30, 31]。ここで、I は H 上の恒等写像である。A が極大単調のとき、性質 (2.5) と A の単調性より、任意の $r > 0$ に対して集合値写像 $I + rA$ の逆写像は定義域を H 全体に持つ一価写像となる。このとき、$(I + rA)^{-1}$ を A のリゾルベントといい、J_{rA} と表す。つまり、

$$J_{rA}(x) := \{z \in H : x \in z + rA(z)\} = (I + rA)^{-1}(x) \tag{2.6}$$

とする。ある $u \in H$ が存在して $0 \in A(u)$ が成り立つとき、u を A の零点といい、A の零点全体の集合を $A^{-1}(0) := \{u \in H : 0 \in A(u)\}$ と表す。A が極大単調であれば、$A^{-1}(0)$ は閉凸集合となる。

例 2.1. $A : H \to 2^H$ を極大単調とする。このとき、任意の $r > 0$ に対して J_{rA} は堅非拡大写像となる。また、$2J_{rA} - I$ は非拡大写像となるため、J_{rA} は $\frac{1}{2}$ -平均非拡大写像となる。また、$A^{-1}(0)$ と $\mathrm{Fix}(J_{rA})$ は一致する。

次に、関数 $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ について考える。任意の $x, y \in H$ と $\alpha \in [0, 1]$ に対して、

$$f((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y) \tag{2.7}$$

が成り立つとき、f は H 上の凸関数であるという。凸関数 f が $\mathrm{dom}f \neq \emptyset$ を満たすとき、f は H 上の真凸関数という。また、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、集合 $\{x \in H : f(x) \leq a\}$ がつねに閉集合となるとき、f は H 上で下半連続であるという。

例 2.2. (劣微分) $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を下半連続な真凸関数、$x \in H$ とし、f の x における劣微分を

$$\partial f(x) := \{z \in H : f(y) \geq f(x) + \langle y - x, z \rangle \ (\forall y \in H)\} \tag{2.8}$$

とする。このとき ∂f は極大単調である [25]。また、$(\partial f)^{-1}(0)$ は f の H における最小点全体の集合と一致する。つまり、$(\partial f)^{-1}(0) = \{u \in H : f(u) = \min_{x \in H} f(x)\}$ が成り立つ。

例 2.3. (近接写像) $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を下半連続な真凸関数とする。このとき、任意の $x \in H$ に対して、

$$J_{r\partial f}(x) = \operatorname*{argmin}_{y \in H} \left\{ f(y) + \frac{1}{2r} \|y - x\|^2 \right\} \tag{2.9}$$

が成り立つ。特に、劣微分に対するリゾルベント $J_{r\partial f}$ を f の近接写像といい、prox_{rf} と表す。例 2.1 より、下半連続な真凸関数 f の最小化問題は、近接写像 prox_{rf} の不動点問題に帰着できる。

例 2.4. (距離射影) C を H の空でない閉凸集合とする。このとき、任意の $x \in H$ に対して

$$\|x - u\| = \min\{\|x - y\| : y \in C\}$$

となるような C の点 u が一意に存在する。任意の $x \in H$ に対して、このような $u \in C$ を対応させる写像を P_C で表し、この写像を H から C 上への距離射影という。距離射影 P_C は、任意の $r > 0$、$x \in H$ に対して、$P_C(x) = \mathrm{prox}_{ri_C}(x) (= J_{ri_C}(x))$ を満たしており，凸関数 i_C に対する近接写像となっている。ここで、i_C は以下のように定義される

$$i_C(x) = \begin{cases} 0 & (x \in C) \\ \infty & (x \notin C). \end{cases} \tag{2.10}$$

例 2.1 より P_C は堅非拡大写像となり、$C = \mathrm{Fix}(P_C)$ となる。

$U \subset H$ を開集合とする。関数 $g : U \to \mathbb{R}$ と $x \in H$ に対して

$$\lim_{t \to 0} \frac{g(x + td) - g(x)}{t} = \langle d, u \rangle \ (\forall d \in H)$$

を満たす $u \in H$ が存在するとき、g は x でガトー微分可能という。このとき、u を g の x における勾配といい、$\nabla g(x) := u$ と表す。g が H 上でガトー微分可能であるとは、任意の点 $x \in H$ においてガトー微分可能のときをいう。また、∇g が H 上でリプシッツ連続であるとは、ある $L > 0$ が存在して任意の $x, y \in H$ に対して

$$\|\nabla g(x) - \nabla g(y)\| \le L \|x - y\|$$

が成り立つときをいう。

本節で述べた非線形解析学と凸解析学の基礎概念については、文献 [2, 28–32] を参照するとよい。

3　非拡大写像に対する不動点近似法の収束解析

本節では、非拡大写像に対する不動点近似法について紹介する。

3.1　Krasnosel'skiĭ-Mann 型の不動点近似法に対する収束解析

H の空でない閉凸集合 C 上で定義される非拡大写像 $T : C \to C$ に対する不動点近似法について検討する。以下の方法で生成される点列 $\{x_k\}$ について考察する。

$$x_0 \in C, \quad x_{k+1} = (1 - \alpha_k)x_k + \alpha_k T(x_k) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.1}$$

ただし、$\{\alpha_k\} \subset [0, 1]$ とする。点列 (3.1) は Krasnosel'skiĭ [15] と Mann [17] によって導入されており、本稿を通して (3.1) による点列の構成方法を Krasnosel'skiĭ-Mann 型の不動点近似法と呼ぶ。(3.1) について、以下の結果が知られている。

定理 3.1. ([24, Theorem 3.1]) 点列 $\{x_k\}$ を (3.1) によって生成された点列とする。ただし、点列 $\{\alpha_k\} \subset [0, 1]$ は $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(1 - \alpha_i) = \infty$ を満たすとする。$\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ のとき、$\{x_k\}$ は $\mathrm{Fix}(T)$ の点 z に弱収束する。

定理 3.1 の証明については [30, 31] を参照するとよい。定理 3.1 は (3.1) によって生成された点列が不動点に弱収束することを保障している。これに関連して、Genel と Lindenstrauss [9] は (3.1) から生成された点列で、不動点に強収束しない例を与えている。したがって、一般の実ヒルベルト空間では近似法の収束の速さを評価する基準として点列 $\{x_k\}$ と T の不動点 z との距離 $\|x_k - z\|$ を用いることはできない。

一方、Krasnosel'skiĭ-Mann 型の不動点近似法は以下の性質を持つ。

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - T(x_k)\| = 0 \tag{3.2}$$

$\{x_k\}$ が性質 (3.2) を持つことは古くから知られている。また、他の不動点近似法 (例えば、Browder [5]、Halpern [11]、Baillon [1]、中條-高橋 [22]) によって生成された点列も同じ性質を持つ (証明の詳細は [29, 30] 等を参照)。特に (3.1) のように弱収束しか保証されていない近似法も性質 (3.2) を満たす。ここでは、不動点近似法の収束の速さ評価する基準として $\|x_k - T(x_k)\|$ を用いる事にする。

Cominetti, Soto と Vaisman [6] は (3.2) に関連して、以下の結果を示した。

定理 3.2. ([6, Proposition 11]) 点列 $\{x_k\}$ を (3.1) によって生成された点列とする。た

だし、点列 $\{\alpha_k\} \subset [0,1]$ は $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(1-\alpha_i) = \infty$ を満たすとする。$\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ のとき、

$$\|x_k - T(x_k)\| \leq \frac{\inf\limits_{y \in \mathrm{Fix}(T)} \|x_0 - y\|}{\sqrt{\sigma_k}} \tag{3.3}$$

が成り立つ。ここで、$\sigma_k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i(1-\alpha_i)$ とする。

$\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \infty$ より $\|x_k - T(x_k)\| \to 0$ が成り立つ。(1.3) は $\|x_k - T(x_k)\|$ の漸近的な上界を与えた事になる。(3.3) が成り立つとき、$\|x_k - T(x_k)\| = O\left(1/\sqrt{\sigma_k}\right)$ と表す。特に $\alpha_k := \alpha \in (0,1)$ $(\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ のとき、$\|x_k - T(x_k)\| = O(1/\sqrt{k+1})$ となる。

以降では、Cominetti, Soto と Vaisman の評価式 (3.3) に動機付けられて、$\|x_k - T(x_k)\|$ の収束について検討する。特に Dong [8] の結果に注目し、$\|x_k - T(x_k)\| = o(1/\sqrt{\sigma_k})$ が成り立つことを示す。これにより、(3.3) を改善する新しい評価を与えた事になる。

主定理を得るため、次の結果は重要である。

補助定理 3.1. [8, Lemma 3.2] $\{b_k\}, \{c_k\} \subset (0,\infty)$ とし、以下の条件を仮定する。

(1) $\sum_{i=0}^{\infty} b_i c_i \leq \infty$;
(2) $\sum_{i=0}^{\infty} b_i = \infty$;
(3) $c_i \leq c_{i-1}$ $(\forall i \in \mathbb{N})$.

このとき、$c_k = o(1/\sum_{i=0}^{k} b_i)$ が成り立つ。

(3.1) によって生成された点列について、以下の結果が成り立つ。

定理 3.3. ([18, Theorem 3.1]) C を H の空でない閉凸集合、$T : C \to C$ を非拡大写像で $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ とし、点列 $\{x_k\}$ を (3.1) によって生成する。ただし、点列 $\{\alpha_k\} \subset (0,1]$ は $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(1-\alpha_i) = \infty$ を満たすとする。このとき、$\|x_k - T(x_k)\| = o(1/\sqrt{\sigma_k})$ が成り立つ。ここで、$\sigma_k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i(1-\alpha_i)$ とする。

証明
$u \in \mathrm{Fix}(T)$ とする。(2.1) と T の非拡大性を用いると、

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - u\|^2 &= \|(1-\alpha_k)(x_k - u) + \alpha(T(x_k) - u)\|^2 \\
&= (1-\alpha_k)\|x_k - u\|^2 + \alpha_k\|T(x_k) - u\|^2 - \alpha_k(1-\alpha_k)\|x_k - T(x_k)\|^2 \\
&\leq \|x_k - u\|^2 - \alpha(1-\alpha_k)\|x_k - T(x_k)\|^2
\end{aligned}$$

となり、

$$\alpha_k(1-\alpha_k)\|x_k - T(x_k)\|^2 \leq \|x_k - u\|^2 - \|x_{k+1} - u\|^2$$

が成り立つ。これより

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(1-\alpha_i)\|x_i - T(x_i)\|^2 < \infty$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - T(x_{k+1})\| &= \|(1-\alpha_k)(x_k - T(x_{k+1})) + \alpha_k(T(x_k) - T(x_{k+1}))\| \\
&\leq (1-\alpha_k)\|x_k - T(x_{k+1})\| + \alpha_k\|x_k - x_{k+1}\| \\
&\leq (1-\alpha_k)\|x_k - x_{k+1}\| + (1-\alpha_k)\|x_{k+1} - T(x_{k+1})\| + \alpha_k\|x_k - x_{k+1}\| \\
&= \|x_k - x_{k+1}\| + (1-\alpha_k)\|x_{k+1} - T(x_{k+1})\| \\
&= \alpha_k\|x_k - T(x_k)\| + (1-\alpha_k)\|x_{k+1} - T(x_{k+1})\|.
\end{aligned}$$

よって、

$$\|x_k - T(x_k)\|^2 \leq \|x_{k-1} - T(x_{k-1})\|^2 \ (\forall k \in \mathbb{N})$$

を得る。ここで、補助定理 3.1 より、$b_k := \alpha_k(1-\alpha_k)$、$c_k := \|x_k - T(x_k)\|^2$ とおくと

$$\|x_k - T(x_k)\|^2 = o(1/\sigma_k)$$

が成り立つ。したがって、

$$\|x_k - T(x_k)\| = o(1/\sqrt{\sigma_k}).$$

■

注意 3.1. 定理 3.3 は、[6] で得られている $\|x_k - T(x_k)\|$ の収束の評価を条件を追加することなく改善できることを示している。

3.2 Douglas-Rachford の分割法への応用

Krasnosel'skiĭ-Mann 型の不動点近似法の結果を Douglas-Rachford の分割法に応用する。

次の問題を考える:

$$\text{find } u \in H \text{ s.t. } 0 \in (A+B)(u), \tag{3.4}$$

ただし、集合値写像 $A, B : H \to 2^H$ は極大単調とする。問題 (3.4) の解集合を $(A+B)^{-1}(0)$ とあらわし、$(A+B)^{-1}(0) \neq \emptyset$ を仮定する。

問題 (3.4) はさまざまな問題を表現できる。例えば、$f, g : H \to (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数、$A := \partial f, B := \partial g$ とする。このとき、問題 (3.4) の解は関数 $f+g$ の最小化問題

$$\min_{x \in H} \ (f+g)(x), \tag{3.5}$$

の解となる。また、C と D を H の空でない閉凸集合としたとき、$f := i_C, g := i_D$ と置くことで、問題 (3.5) は C と D の共通部分 $C \cap D$ を見つける問題 (制約可能性問題) となる。また、問題 (3.5) はノイズ除去等の画像復元問題と密接に関係していることも知られている。これらの詳細については、[2, 3] とその参考文献を参照するとよい。

次に、$r > 0$ に対して A のリフレクション R_{rA} を次のように定義する。

$$R_{rA} := 2J_{rA} - I.$$

ここで、J_{rA} は A のリゾルベントである。次の性質が成り立つ。

命題 3.1. ([2])

(i) $R_{rA} : H \to H$ は非拡大写像;

(ii)
$$\frac{1}{2}(I + R_{rB}R_{rA}) = J_{rB}R_{rA} + I - J_{rA}; \tag{3.6}$$

(iii)
$$J_{rA}\left(\mathrm{Fix}(R_{rB}R_{rA})\right) = (A+B)^{-1}(0).$$

Douglas-Rachford の分割法は以下のように点列を生成する。

$$y_0 \in H,\ y_{k+1} = \frac{1}{2}y_k + \frac{1}{2}R_{rB}R_{rA}(y_k)\ \ (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{3.7}$$

Lions と Mercier [16, Proposition 5] は $A + B$ が極大単調で $(A+B)^{-1}(0) \neq \emptyset$ のとき、$\{y_k\}$ が $\mathrm{Fix}(R_{rB}R_{rA})$ のある点 u に弱収束し、$J_{rA}(u) \in (A+B)^{-1}(0)$ となることを示した。Douglas-Rachford の分割法の収束に関する詳細は [2] を参照するとよい。

命題 3.1 より、Douglas-Rachford の分割法 (3.7) は非拡大写像 $R_{rB}R_{rA}$ に対する Krasnosel'skiĭ-Mann 型の不動点近似法となる。定理 3.3 を応用することで、以下の結果を得ることができる。

定理 3.4. ([18, Theorem 5.3]) 集合値写像 $A, B : H \to 2^H$ は極大単調、$(A+B)^{-1}(0) \neq \emptyset$ とし、点列 $\{y_k\}$ は (3.7) によって生成された点列とする。$(A+B)^{-1}(0) \neq \emptyset$ のとき、$\|y_k - R_{rB}R_{rA}(y_k)\| = o(1/\sqrt{k+1})$ が成り立つ。

注意 3.2. He と Yuan [12, Theorem 3.1] は単調作用素の理論を用いて $\|y_k - R_{rB}R_{rA}(y_k)\| = O(1/\sqrt{k+1})$ を示している。定理 3.4 によってその評価が改善できることがわかった。

4　近接勾配法の収束解析

凸関数の和の最小化問題に対する近接勾配法について紹介する。
次の問題を考える：

$$\text{find } u \in H \text{ s.t. } 0 \in (\partial f + \nabla g)(u), \tag{4.1}$$

ここで、$f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は下半連続な真凸関数、$g : H \to \mathbb{R}$ は H 上でガトー微分可能な凸関数で、その勾配は H 上でリプシッツ連続、そのリプシッツ定数を $L > 0$ とする。問題 (4.1) の解集合を $(\partial f + \nabla g)^{-1}(0)$ と表す。このとき、問題 (4.1) の解は最小化問題

$$\min_{x \in H} \ (f + g)(x), \tag{4.2}$$

の解となる。ここでは、問題 (4.1) を解くために有効な近接勾配法について検討する。特に、その収束の速さを評価する基準として

$$\|z_k - \mathrm{prox}_{\gamma f}(I - \gamma \nabla g)(z_k)\|$$

を用いる。ただし、$\gamma > 0$ とし、写像 $\mathrm{prox}_{\gamma f}(I - \gamma \nabla g)$ は写像 $I - \gamma \nabla g$ と近接写像 $\mathrm{prox}_{\gamma f}$ の合成、$\{z_k\}$ は近接勾配法によって生成された点列とする。

4.1　近接勾配法について

近接勾配法は以下のように点列を生成する。

$$z_0 \in H,\ z_{k+1} = \mathrm{prox}_{\gamma \partial f}(I - \gamma \nabla g)(z_k) \ \ (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{4.3}$$

ここで、$\gamma \in (0, 1/L]$ とする。近接勾配法は Lions と Mercier [16]、Passty [23] によって導入されている。近接勾配法の収束については、Bauschke と Combettes [2] に詳細がまとめられている。近接勾配法には、収束の評価に関する以下の結果が知られている。

定理 4.1. ([3, Theorem 3.1]) $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は下半連続な真凸関数、$g : H \to \mathbb{R}$ は H 上でガトー微分可能な凸関数で、その勾配は H 上でリプシッツ連続でリプシッツ定数を $L > 0$、$\gamma \in (0, 1/L]$ とし、点列 $\{z_k\}$ は (4.3) によって生成された点列とする。$x^* \in (\partial f + \nabla g)^{-1}(0)$ のとき、

$$(f + g)(z_k) - (f + g)(x^*) = O(1/k) \tag{4.4}$$

が成り立つ。

注意 4.1. 定理 4.1 では、点列 $\{z_k\}$ を目的関数に代入した関数値 $(f+g)(z_k)$ が最適値 $(f+g)(x^*)$ に近づく速さを評価している。

一方、近接勾配法には弱収束するが強収束しない例が存在する。

例 4.1. C と D を H の空でない閉凸集合とする。任意の $x \in H$ に対して関数 f, g を次のように定義する。

$$f(x) := i_D(x),\ g(x) := \frac{1}{2}\|x - P_C(x)\|^2\ (\forall x \in H).$$

ここで、i_D は (2.10) によって定義される関数、P_C は集合 C の上への距離射影とする。このとき、$\mathrm{prox}_{\gamma\partial f} = P_D$ となる。また、g は H 上でガトー微分可能で $\nabla g = I - P_C$ となり、∇g のリプシッツ定数は 1 となる ([2] を参照)。$\gamma := 1$ のとき、近接勾配法は以下のようになる。

$$z_0 \in H,\ z_{k+1} = P_D P_C(z_k)\ \ (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{4.5}$$

(4.5) の点列の構成方法を射影法と呼び、$C \cap D$ の点を求めるために有効な近似法として知られている。Hundal [13] は、l^2 において (4.5) によって生成された点列が $C \cap D$ の点に弱収束するが、強収束しない閉凸集合 C と D の例を与えた。したがって、近接勾配法による点列 $\{z_k\}$ と $(\partial f + \nabla g)^{-1}(0)$ の点 z との距離 $\|z_k - z\|$ は 0 に収束することが保障されておらず、$\|z_k - z\|$ を用いて収束の評価を与えることはできない。

近接勾配法は不動点近似法として扱うことができる。以下の性質は重要である。

命題 4.1. ([2])

(i) $\mathrm{prox}_{\gamma\partial f}(I - \gamma\nabla g)$ は非拡大写像;
(ii) $\mathrm{Fix}(\mathrm{prox}_{\gamma\partial f}(I - \gamma\nabla g)) = (\partial f + \nabla g)^{-1}(0)$;
(iii) ある $\alpha \in (0,1)$ が存在して写像 $\mathrm{prox}_{\gamma\partial f}(I - \gamma\nabla g)$ は α-平均非拡大写像となる.

命題 4.1 から、写像 $\mathrm{prox}_{\gamma\partial f}(I - \gamma\nabla g)$ の不動点問題は問題 4.1 と等価であることが分かる。さらに、ある $\alpha \in (0,1)$ と非拡大写像 $N : H \to H$ が存在して、$\{z_k\}$ は

$$z_{k+1} = (1-\alpha)z_k + \alpha N(z_k)\ \ (k = 0, 1, 2, \dots), \tag{4.6}$$

と表すことができる。(4.6) から近接勾配法は非拡大写像 N に対する Krasnosel'skiĭ-Mann 型の不動点近似法となる。定理 3.1 を適用すると $(\partial f + \nabla g)^{-1}(0) \neq \emptyset$ のとき、$\{z_k\}$ は問題 (4.1) のある解 z に弱収束する。また、定理 3.3 より $\|z_k - \mathrm{prox}_{\gamma\partial f}(I - \gamma\nabla g)(z_k)\|$ に関する次の結果が得られる。

定理 4.2. $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は下半連続な真凸関数、$g : H \to \mathbb{R}$ は H 上でガトー微分可能な凸関数で、その勾配は H 上でリプシッツ連続、そのリプシッツ定数を $L > 0$、$\gamma \in (0, 2/L)$ とし、点列 $\{z_k\}$ は (4.3) によって生成された点列とする。$(\partial f + \nabla g)^{-1}(0) \neq \emptyset$ のとき、

$$\|z_k - \mathrm{prox}_{\gamma \partial f}(I - \gamma \nabla g)(z_k)\| = o(1/\sqrt{k+1}) \tag{4.7}$$

が成り立つ。

4.2 近接勾配法に対する収束解析

ここでは定理 4.2 で得られた近接勾配法の評価式 (4.7) についてさらに検討する。

$g(x) := 0$ $(\forall x \in H)$ のとき、問題 (4.1) は下半連続な真凸関数 f の最小化問題となり、近接勾配法は以下のようになる。

$$z_0 \in H,\ z_{k+1} = \mathrm{prox}_{\gamma \partial f}(z_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{4.8}$$

(4.8) の点列の構成方法を近接点法と呼び、$\partial f^{-1}(0)$ の点を求めるために有効な近似法として知られている。Brézis と Lions [4] は (4.8) によって生成された点列が $\partial f^{-1}(0)$ のある点に弱収束することを示した。近接点法は Rockafellar [26] によって極大単調作用素の零点を求める解法として一般化されている。また、バナッハ空間への一般化が上村、高阪と高橋 [14] によって示されている。有限収束に関する結果は [21] で示されている。また、定理 4.1 に関連して、次の結果が示されている。

定理 4.3. ([19, Theorem 3.1]) $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は下半連続な真凸関数、$\gamma > 0$、点列 $\{z_k\}$ は近接点法 (4.8) によって生成された点列とする。$x^* \in \partial f^{-1}(0)$ のとき、

$$f(z_k) - f(x^*) = o(1/k) \tag{4.9}$$

が成り立つ。

注意 4.2. Güler [10, Theorem 2.1] は $f(z_k) - f(x^*) = O(1/k)$ を示している。定理 4.3 によってその評価が改善できることがわかった。

一方、(1.3) に関連して、Güler [10] は近接点法の収束の評価に関する以下の結果を示している。

定理 4.4. ([10, Theorem 2.2]) $\gamma > 0$、$f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は下半連続な真凸関数とし、点列 $\{z_k\}$ は近接点法 (4.8) によって生成された点列とする。$\partial f^{-1}(0) \neq \emptyset$ のとき、

$$\|z_k - \mathrm{prox}_{\gamma\partial f}(z_k)\| = O(1/(k+1)) \tag{4.10}$$

が成り立つ。

注意 4.3. 定理 4.4 は凸解析学の理論を用いて $O(1/(k+1))$ を示している。定理 4.2 を適用して得られる $o(1/\sqrt{k+1})$ と比較すると、評価を改善できることがわかった。

以降では、Güler [10] による評価式 (4.10) に動機付けられて、近接勾配法に対する $\|z_k - \mathrm{prox}_{\gamma\partial f}(I - \gamma\nabla g)(z_k)\|$ の評価が改善できるかどうか検討する。

本節の主定理を証明するために、次の結果は必要である。

補助定理 4.1. ([20]) $L > 0$ とし、$\gamma \in (0, (-L + \sqrt{L^2 + 4})/2]$ とする。このとき、

(a) $\gamma < \frac{2}{L}$;
(b) $\gamma^2 \leq 1 - \gamma L$;
(c) $\gamma < \frac{1}{\gamma} - \frac{L}{2}$.

が成り立つ。

補助定理 4.2. ([20]) $\gamma > 0$、$f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は下半連続な真凸関数、$g : H \to \mathbb{R}$ は H 上でガトー微分可能な凸関数で、その勾配は H 上でリプシッツ連続、そのリプシッツ定数を $L > 0$ とし、$T := \mathrm{prox}_{\gamma\partial f}(I - \gamma\nabla g)$ とする。このとき、任意の $x, y \in H$ に対して、

$$(f+g)(x) - (f+g)(T(y)) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma} - L\right)\|y - T(y)\|^2 + \frac{1}{2\gamma}(\|x - T(y)\|^2 - \|x - y\|^2)$$

が成り立つ。

近接勾配法について、以下の結果が成り立つ。

定理 4.5. ([20]) $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は下半連続な真凸関数、$g : H \to \mathbb{R}$ は H 上でガトー微分可能な凸関数で、その勾配は H 上でリプシッツ連続、そのリプシッツ定数を $L > 0$ とし、点列 $\{z_k\}$ は (4.3) によって生成された点列とする。ただし、$\gamma \in (0, (-L + \sqrt{L^2 + 4})/2]$ とする。$(\partial f + \nabla g)^{-1}(0) \neq \emptyset$ のとき、

$$\|z_k - \mathrm{prox}_{\gamma\partial f}(I - \gamma\nabla g)(z_k)\| = O(1/(k+1)) \tag{4.11}$$

が成り立つ。

注意 4.4. γ の範囲を制限することで、$\|z_k - \mathrm{prox}_{\gamma\partial f}(I - \gamma\nabla g)(z_k)\|$ が 0 に収束する評価式を改善できることを示した。

最後に定理 4.5 の応用例を紹介する。

例 4.2. 次の問題を考える。

$$\text{find } u \in C \cap D, \tag{4.12}$$

ただし、C と D は H の空でない閉凸集合とする。例 4.1 より任意の $x \in H$ に対して

$$f(x) := i_D(x),\ g(x) := \frac{1}{2}\|x - P_C(x)\|^2,$$

とおけば f と g は定理 4.5 の条件を満たす。このとき、近接勾配法は以下のようになる。

$$z_0 \in H,\ z_{k+1} = P_D((1-\gamma)I + \gamma P_C)(z_k)\ (k = 0, 1, 2, \dots).$$

定理 4.5 より、$\gamma \in (0, (-1+\sqrt{5})/2]$ のとき

$$\|z_k - P_D((1-\gamma)I + \gamma P_C)(z_k)\| = O(1/(k+1))$$

が成り立つ。

例 4.3. 次の問題を考える。

$$\min_{x \in H}\ \lambda\|x\|_1 + \frac{1}{2}\|A(x) - b\|_2^2, \tag{4.13}$$

ここで、$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$、$b \in \mathbb{R}^m$、$\lambda > 0$ とする。また、$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ はそれぞれ l^1 ノルムと l^2 ノルムである。ここで、$f(x) := \lambda\|x\|_1, g(x) := (1/2)\|A(x) - b\|_2^2$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$ とする。このとき、g は $\mathbb{R}^n$ 上でガトー微分可能で $\nabla g = A^\top(A(\cdot) - b)$ となる。また、∇g は $\mathbb{R}^n$ 上でリプシッツ連続で、リプシッツ定数は $\lambda_{\max}(A^\top A)$ となる。ここで、$\lambda_{\max}(A^\top A)$ は行列 $A^\top A$ の最大固有値を表す。また、任意の $\gamma > 0$ に対して、

$$[\mathrm{prox}_{\gamma f}(x)]_i = \mathrm{sign}(x_i) \cdot \max\{0, |x_i| - \gamma\lambda\}\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

となる ([3] を参照)。このとき、近接勾配法は以下のようになる。

$$z_0 \in \mathbb{R}^n,\ z_{k+1} = \mathrm{prox}_{\gamma\lambda\|\cdot\|_1}(z_k - \gamma A^\top(A(z_k) - b))\ (k = 0, 1, 2, \dots).$$

定理 4.5 より、$\gamma \in (0, (-\lambda_{\max}(A^\top A) + \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)^2 + 4})/2]$ のとき、

$$\|z_k - \mathrm{prox}_{\gamma\lambda\|\cdot\|_1}(z_k - \gamma A^\top(A(z_k) - b))\| = O(1/(k+1))$$

が成り立つ。

参考文献

[1] J. B. Baillon, *Un théorème de type ergodic pour les contraction non liéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris **280** (1975), 1511-1514.

[2] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Springer, New York, 2017.

[3] A. Beck and M. Teboulle, *A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems*, SIAM J. Imag. Sci. **2** (2009), 183-202.

[4] H. Brézis and P. L. Lions, Produits infinis de resolvants, Israel J. Math. **29** (1978), 329-345.

[5] F. E. Browder, *Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach space*, Archs. Ratio. Anal. **24** (1967), 82-90.

[6] R. Cominetti, J. A. Soto and J. Vaisman, *On the rate of convergence of Krasnosel'skiĭ-Mann iterations and their connection with sums of Bernoullis*, Israel J. Math. **199** (2014), 757-772.

[7] D. Davis and W. Yin, *Convergence rate analysis of several splitting schemes*, in: Splitting Methods in Communication and Imaging, Science and Engineering (eds. R. Glowinski, S. Osher and W. Yin) (2017), New York, Springer, pp. 165-194.

[8] Y. Dong, *Comments on "the proximal point algorithm revisited"*, J. Optim. Theory Appl., **116** (2015), 343-349.

[9] A. Genel and J. Lindenstrauss, *An example concerning fixed points*, Israel J. Math. **22** (1975), 81-86.

[10] O. Güler, *On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization*, SIAM J. Control Optim. **29** (1991), 403-419.

[11] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957-961.

[12] B. S. He and X. M. Yuan, *On the convergence rate of Douglas-Rachford operator splitting method*, Math. Program. **153** (2015), 715-722.

[13] H. Hundal, *An alternating projection that does not converge in norm*, Nonlinear Anal. **57** (2004), 35-61.

[14] S. Kamimura, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems formaximal monotone operators in a Banach space*, Set-Val. Anal. **12**

(2004), 417-429.

[15] M. A. Krasnosel'skiĭ, *Two remarks on the method of successive approximations*, Uspehi Mat. Nauk **10** (1955), 123-127.

[16] P. L. Lions and B. Mercier, *Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators*, SIAM J. Numer. Anal. **16** (1979), 964-979.

[17] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506-510.

[18] S. Matsushita, *On the convergence rate of the Krasnosel'skiĭ-Mann iteration*, Bull. Austral. Math. Soc. **96** (2017), 162-170.

[19] S. Matsushita, *A convergence rate of the proximal point algorithm in Banach spaces*, Optimization **67** (2018), 881-888.

[20] S. Matsushita, *The asymptotic regularity for the forward backward algorithm*, submitted.

[21] S. Matsushita and L. Xu, *On convergence of the proximal point algorithm in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), 4087-4095.

[22] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 372-379.

[23] G. B. Passty, *Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **72** (1979), 383-390.

[24] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274-276.

[25] R. T. Rockafellar, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pac. J. Math. **33** (1970), 209-216.

[26] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim. **14** (1976), 877-898.

[27] 高橋渉, 非線形関数解析学, 近代科学社, 1988.

[28] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis. fixed points theory and its applications*, Yokohama Publishers, Yokohama 2000.

[29] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[30] 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.

[31] 田中謙輔, 凸解析と最適化理論, 牧野書店, 1994.

[32] 山田功, 工学のための関数解析, 数理工学社, 2009.