第56回実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集

期日： 2017年8月21日(月) – 8月23日(水)
会場： お茶の水女子大学

まえがき

本講演集は 2017 年 8 月 21 日 (月) から 8 月 23 日 (水) までの 3 日間にわたり, お茶の水女子大学で開催される第 56 回実函数論・函数解析学合同シンポジウムの講演集です.

本シンポジウムの開催のために多くの方々にご協力をいただきましたが, 関係者皆様のご尽力によって, 講演者の方々の素晴らしい論文を本講演集で発表することができました. 各グループの責任者の方々, 講演者の皆様, 本シンポジウム参加者の皆様方に深く感謝いたします.

また, 特に会場責任者の吉田裕亮先生をはじめとするお茶の水女子大学の皆様には大変お世話になりました. ここに深く感謝の意を表します.

なお, 本シンポジウムの講演集の作成には, 下記の科学研究費補助金の援助を受けています.

基盤研究 (C) (代表: 松井 宏樹) 研究課題番号: 26400108
「作用素環と力学系の多角的研究」

松本敏隆（静岡大学 · 理学部）
渚　勝　（千葉大学 · 理学部)

第56回実函数論・函数解析学合同シンポジウム
プログラム

期日: 2017年8月21日 (月) – 8月23日 (水)
場所: お茶の水女子大学共通講義棟2号館102教室
〒112-8610 東京都文京区大塚2-1-1

8月21日 (月)

13:30–14:30　レオンチェフ アレックス (東京大学大学院・数理科学研究科)
"不定値直交群 $O(p, q)$ の対称性破れ作用素"

14:45–15:45　渡邉 恵一 (新潟大学・自然科学系)
"Fundamental theory of the Möbius gyrovector space"

16:00–17:00　河邊 淳 (信州大学・工学部)
"非線形積分の収束定理の統一的定式化"

8月22日 (火)

9:30–10:30　渡辺 文彦 (防衛大学校・総合教育学群数学教育室)
"Wirtinger積分とテータ因子の配置の幾何"

10:45–11:45　側島 基宏 (東京理科大学・理工学部数学科)
"空間に依存する摩擦を伴う波動方程式に対するエネルギー評価について"

13:45–14:45　小木曽 岳義 (城西大学・理学部数学科)
"Homaloidal多項式の極化に付随する局所関数等式'

15:00–16:00　増田 俊彦 (九州大学・数理学研究院)
"冨田-竹崎理論の紹介とそれに関する話題"

16:15–17:15　高橋 渉 (慶應義塾大学・自然科学研究教育センター)
"MEAN CONVERGENCE THEOREMS AND NONLINEAR ANALYTIC METHODS"

18:00–20:00　懇親会
食彩酒席 ビカヴォ （地下鉄丸の内線 · 茗荷谷駅徒歩 2 分）

8 月 23 日 (水)

9:30–10:30　菱川 洋介 (岐阜大学・教育学部数学教育講座)
" 放物型方程式の解からなる関数空間の解析"

10:45–11:45　町原 秀二 (埼玉大学・理工学研究科数理電子情報部門)
" 空間 1 次元 Dirac-Klein-Gordon 方程式の初期値問題の適切性について"

開催責任者: 松本敏隆（静岡大学理学部）
渚 勝（千葉大学理学部)
会場責任者: 吉田裕亮（お茶の水女子大学理学部）

目次

不定値直交群 $O(p,q)$ の対称性破れ作用素[†]

小林俊行[*] (東京大学 大学院数理科学研究科・
カブリ数物連携宇宙研究機構)
レオンチエフ　アレックス (東京大学 大学院数理科学研究科)

概要

不定値直交群の組 $(G,G')=(O(p+1,q+1),O(p,q+1))$ に対して、G の球退化主系列表現から、G' の球退化主系列表現への全て対称性破れ作用素を構成し、分類を完成させた。対称性破れ作用素の構成と分類問題は 小林俊行氏と B. Speh 氏によって [Memoirs of Amer. Math. Soc. 2015] で初めて提起され、ローレンツ群に対して完全な分類が得られた。ここでは実階数が高い場合に、その結果を一般化する。更に、函数等式、留数公式と対称性破れ作用素の像も具体的に述べる。この結果は分岐則の問題を深く研究するための構想として小林氏に提唱された ABC プログラム [Progr. Math. 2015] のステージ C の特別な場合に対応する。

$n=p+q$ とし、$\mathbb{R}^n$ 上の符号 (p,q) をもつ標準二次形式を

$$Q_{p,q}(x) := {}^t x I_{p,q} x,\ (x\in\mathbb{R}^{p+q})$$

と定める。ここで $I_{p,q}$ は対角行列 $I_{p,q} := \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{p},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{q})\in GL(p+q,\mathbb{R})$.

この二次形式に関する不定値直交群を

$$G := O(p+1,q+1) = \left\{g\in GL\left(p+q+2,\mathbb{R}\right):\ {}^t g I_{p+1,q+1} g = I_{p+1,q+1}\right\}$$

と定義し、その極大放物型部分群 $P=MAN_+$ を以下のように定める、

[†]第５６回実函数論・函数解析学合同シンポジウム講演集、2017 年 8 月 21 日–8 月 23 日、於 お茶の水大学

[*]Partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (A) (25247006), Japan Society for the Promotion of Science.

$$
\begin{aligned}
M \quad &:= \left\{ \left(\begin{array}{ccc} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{array} \right) \middle| A \in O(p,q),\ \epsilon = \pm 1 \right\} && \simeq O(p,q) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\
A \quad &:= \left\{ a(t) := \left(\begin{array}{ccc} \cosh(t) & 0 & \sinh(t) \\ 0 & I_{p+q} & 0 \\ \sinh(t) & 0 & \cosh(t) \end{array} \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\} && \simeq \mathbb{R}, \\
N_+ \quad &:= \left\{ I_{n+2} + \left(\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2}Q_{p,q}(b) & -{}^t(I_{p,q}b) & \frac{1}{2}Q_{p,q}(b) \\ b & 0 & -b \\ -\frac{1}{2}Q_{p,q}(b) & -{}^t(I_{p,q}b) & \frac{1}{2}Q_{p,q}(b) \end{array} \right) \middle| b \in \mathbb{R}^{p+q} \right\} && \simeq \mathbb{R}^{p+q}.
\end{aligned}
$$

放物型部分群 P からの誘導表現として、以下のように G の球退化主系列表現を定める。複素数パラメータ $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$
\begin{aligned}
I(\lambda) &:= \mathrm{Ind}_P^G(\mathbb{C}_\lambda) \\
&\simeq \left\{ f \in C^\infty(G) \mid f(gma(t)n) = e^{-\lambda t} f(g),\ \forall (g, ma(t)n) \in G \times P \right\}.
\end{aligned}
$$

次に第 p 座標の固定部分群を

$$
G' := \left\{ g \in G \middle| g \cdot e_{p+1} = e_{p+1} \right\}
$$

とすると、G' は G の簡約部分群となる。G の放物型部分群 P を定めた split な可換群 A が G' に含まれているため、$P = MAN$ は G' と適合する。すなわち、$P' := P \cap G'$ は G' の極大放物型部分群であり、そのラングランズ分解は $P' = (G' \cap M)A(G' \cap N_+)$ で与えられる。$I(\lambda)$ と同様に、複素数パラメータ $\nu \in \mathbb{C}$ に対して G' の球退化主系列表現 $J(\nu) := \mathrm{Ind}_{P'}^{G'}(\mathbb{C}_\nu)$ を定める。

この講演での主テーマは、 群 G の表現 $I(\lambda)$ から部分群 G' の表現 $J(\nu)$ への G' 絡作用素（対称性破れ作用素、symmetry breaking operator）である。対称性破れ作用素全体のなす空間を $\mathrm{Hom}_{G'}\left(I(\lambda)|_{G'}, J(\nu)\right)$ と表記する。

(G, G') の複素化は $(O(n+2,\mathbb{C}), O(n+1,\mathbb{C}))$ であり、これは強 Gelfand 対となるので、小林–大島 [KO13] の一般理論によって以下のようなアプリオリ評価が得られる。

Fact 1. 対称性破れ作用素のなす空間の次元は表現のパラーメタ (λ, ν) よらずに一様に押さえられている。

対称性破れ作用素のなす線型空間 $\mathrm{Hom}_{G'}(I(\lambda)|_{G'}, J(\nu))$ の基底を具体的に決定しよう。

この空間を分析するために、まず以下のような定義する：

定義 2. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上の関数 $h(\cdot,\cdot)$ を $h(b,x) := 1 - 2\,{}^t b I_{p,q} x + Q_{p,q}(b)Q_{p,q}(x)$ と定める (ここで、$n = p+q$)。$b_p = 0$ を満たすような各 $b \in \mathbb{R}^n$ に対し、開集合 $\left\{x \in \mathbb{R}^{p,q} \middle| h(b,x) \neq 0\right\}$ 上で

$$|h(b,x)|^{\lambda-n} F\left(\frac{x - Q_{p,q}(x)b}{h(b,x)}\right) = F(x)$$

が成り立つとき、超関数 $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{p,q})$ をN'_+ 不変と呼ぶ。(ここで、N'_+ は $\mathbb{R}^{p,q}$ の共形コンパクト化には作用するが、$\mathbb{R}^{p,q}$ には作用していないことに注意する)

定義 3. 群 $O(p-1,q)$ を $\mathbb{R}^n$ $(n = p+q)$ に第 p 座標を固定する形で作用させる。以下のような条件を満たす超関数 $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ のなす空間を $\mathcal{S}ol(\mathbb{R}^{p,q}; \lambda, \nu)$ と表記する。

(1) $F(x) = F(-x)$;

(2) F は $O(p-1,q)$ 不変である;

(3) F は $(\lambda - \nu - n)$ 次の斉次性を持つ;

(4) F は $\mathbb{R}^{p,q}$ 上に N'_+ 不変である。

小林–Speh によって証明された一般理論 ([KS15, Chap. 3]) を今の特別な設定に適用すると、以下の Fact 4が得られる

Fact 4 ([KS15, Thm. 3.16])**.** $n = p+q$ とする。対称性破れ作用素の核超関数を考えることによって 以下の可換図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{G'}(I(\lambda)|_{G'}, J(\nu)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[rr, bend left, "\mathcal{S}upp"] & \left(\mathcal{D}'(G/P, \mathcal{L}_{n-\lambda}) \otimes \mathbb{C}_\nu\right)^{P'} \arrow[r, "F \mapsto \mathrm{supp}(F)"'] \arrow[d, "\mathrm{rest}"', "\simeq"] & 2^{P' \backslash G/P} \\
 & \mathcal{S}ol(\mathbb{R}^{p,q}; \lambda, \nu) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{p,q}) \arrow[ul, "\simeq", "\mathrm{Op}"'] &
\end{tikzcd}$$

特に、$T \in \mathrm{Hom}_{G'}\left(I(\lambda)|_{G'}, J(\nu)\right)$ に対して, $\mathcal{S}upp(T)$ は $P'\backslash G/P$ の閉部分集合である。両側剰余空間 $P'\backslash G/P$ は有限集合であり、その閉部分集合が対称性破れ作用素の大切な不変量となるということがわかる。[KS15] の方針は $\mathcal{S}upp(T)$ に関する帰納法で対称性破れ作用素を分類するというものであった。この方針に沿い、最初のステップとして、両側剰余空間 $P'\backslash G/P$ とその閉包関係を決定する。

$G = O(p+1, q+1)$ の $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ への自然な線型作用は部分集合である以下の錐

$$\Xi^{p+1,q+1} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+1,q+1} - \{0\} \,\middle|\, |x|^2 = |y|^2\right\}$$

を保つので、その商空間 $X^{p,q} := \Xi^{p+1,q+1}/\mathbb{R}^\times$ への作用を導く。幾何の言葉で言うと、$X^{p,q}$ は直積多様体 $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ において、その対跡点を同一視することによって得られる商多様体と同型であり、不定値計量 $g_{\mathbb{S}^p} \oplus (-g_{\mathbb{S}^q})$ を与えて擬リーマン多様体の構造を入れると、そこに群 G は共形変換群として作用する 。

$$\begin{aligned}
X \quad &:= G/P \simeq X^{p,q}, \\
Y \quad &:= \left\{[\xi : \eta] \in G/P \simeq X^{p,q} \,\middle|\, \xi_p = 0\right\} \simeq X^{p-1,q} \\
C \quad &:= \left\{[\xi : \eta] \in G/P \simeq X^{p,q} \,\middle|\, \xi_0 = \eta_q\right\} \simeq X^{p-1,q-1} \cup \Xi^{p,q}, \\
\{[o]\} &:= \{[1 : 0_{p+q} : 1]\}
\end{aligned}$$

とおく.

定理 5 (G/P の P' 不変な閉部分集合の分類)**.** $p, q \geq 1$ とする。G/P の P' 不変閉部分集合は 5 つ *($p > 1$)* または 4 つ *($p = 1$)* であり、それらは以下の *Hasse* 図式で記述される。ここで $\begin{array}{c} A \\ \mid m \\ B \end{array}$ は B の *generic* な点のなす多様体が A において余次元 m の部分多様体であることを表している。

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, dash, "1"'] \arrow[dr, dash, "1"] & \\
Y \arrow[dr, dash, "1"'] & & C \arrow[dl, dash, "1"] \\
& C \cap Y \arrow[d, dash, "p+q-2"] & \\
& \{[o]\} &
\end{tikzcd}$$

(a) $p > 1$ のとき

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, dash, "1"'] \arrow[dr, dash, "1"] & \\
Y \arrow[dr, dash, "p+q-2"'] & & C \arrow[dl, dash, "p+q-2"] \\
& \{[o]\} &
\end{tikzcd}$$

(b) $p = 1$ のとき

次に両側剰余類 $P'\backslash G/P$ のそれぞれの閉集合 S に対して、対称性破れ作用素の族 $R^S_{\lambda,\nu}$ を構成する。

- $R^S_{\lambda,\nu}$ はパラメータ $(\lambda,\nu)\in D_S$ に対して定義されている作用素である。ここで、D_S は $\mathbb{C}^2$ の部分集合である (より詳しくいうと、$\mathbb{C}^2$ 全体或いは 1 次元アフィン空間の加算和である);
- $R^S_{\lambda,\nu}$ は $(\lambda,\nu)\in D_S$ に正則 (holomorphic) に依存する;
- 全て $(\lambda,\nu)\in D_S$ に対して、$\mathcal{S}upp(R^S_{\lambda,\nu})\subset S$ である（更に、一般の位置にある(λ,ν) に対しては等号が成り立つ).

作用素 $R^S_{\lambda,\nu}$ は $\mathbb{C}^2$ の離散集合上で零になる (注意8を参照)。そこで ($\mathbb{C}^2$ 全体ではなく) 次元が低いパラメータ集合 $|||$ 上で 対称性破れ作用素の族 $R^X_{\lambda,\nu}$ を再正規化したのが $\tilde{R}^X_{\lambda,\nu}$ である。ただし、$p=1$ のとき、あるいは $S=C\cap Y$ の場合と $p>1$ のとき、あるいは $S=C$ または Y の場合は分類 (定理9) に用いなくてもよいので、ここでは省略する。以下の定理に用いられるの記号を説明する：

- $$\begin{aligned}
&|||:=\{(\lambda,\nu)\in\mathbb{C}^2\mid \nu\in -2\mathbb{N}\cup(q+1+2\mathbb{Z})\},\\
&\backslash\backslash:=\left\{(\lambda,\nu)\in\mathbb{C}^2\middle|\lambda+\nu-n+1\in-2\mathbb{N}\right\},\\
&//:=\{(\lambda,\nu)\in\mathbb{C}^2\mid \lambda-\nu\in-2\mathbb{N}\},\\
&||:=\left\{(\lambda,\nu)\in\mathbb{C}^2\middle|\nu\in 1+2\mathbb{N}\right\};
\end{aligned}$$
- $\tilde{C}(s,t)$ は [KP16b, (6.5)] で定義された 2 変数多項式であり、正規化された Gegenbauer 多項式から導かれるものである。
- $(\lambda,\nu)\in||$ に対して、$m:=\frac{1}{2}(\nu-1)\in\mathbb{N}$ と定め、$(\lambda,\nu)\in\backslash\backslash$ に対して、$k:=\frac{1}{2}(n-1-\lambda-\nu)\in\mathbb{N}$ と定める。
- $p=1$ に対して、$q^X_C(\lambda,\nu)$ および $q^X_Y(\lambda,\nu)$ を以下のように定義する：

$$q^X_C(\lambda,\nu):=\begin{cases}\Gamma\left(\frac{\lambda+\nu-n+1}{2}\right), & q\text{は偶数},\nu\leqslant q-\nu,\\ \Gamma\left(\frac{\lambda-\nu}{2}\right), & q\text{は偶数},\nu>q-\nu,\\ \Gamma\left(\frac{\lambda+\nu-n+1}{2}\right), & q\text{は奇数}.\end{cases}$$

$$q^X_Y(\lambda,\nu):=\begin{cases}1, & q\text{は奇数},\\ \Gamma\left(\frac{\lambda-\nu}{2}\right)/\Gamma\left(\max\left\{\dfrac{\lambda+\nu}{2},0\right\}-\nu\right), & q\text{は偶数}.\end{cases}$$

定理 6 (対称性破れ作用素の構成)**.** P' 不変な G/P の閉集合 $S = X, Y, C,\ \{o\}$ に対して、パラメータ集合 D_S を以下の表のように定めると、作用素 $R^S_{\lambda,\nu}$ および $\tilde{R}^X_{\lambda,\nu}$ は $I(\lambda)$ から $J(\nu)$ への対称性破れ作用素であり、$(\lambda,\nu) \in D_S$ に正則に依存する。

$R^S_{\lambda,\nu}$	$\mathrm{Op} : \mathcal{S}ol(\mathbb{R}^{p,q};\lambda,\nu) \to \mathrm{Hom}_{G'}(I(\lambda), J(\nu))$	D_S	$\mathcal{S}upp(\cdot)$
$R^X_{\lambda,\nu} =$	$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\lambda-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+\nu-n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}\mathrm{Op}\left(\lvert x_p\rvert^{\lambda+\nu-n}\lvert Q_{p,q}\rvert^{-\nu}\right)$	$\mathbb{C}^2$	$X,\quad (\lambda,\nu) \notin \vert\vert \cup \backslash\backslash \cup //,$ $C,\quad (\lambda,\nu) \in \vert\vert - \backslash\backslash - //,$ $Y,\quad (\lambda,\nu) \in \backslash\backslash - \vert\vert - //,$ $\varnothing,\quad p=1,\ (\lambda,\nu) \in \vert\vert \cap \backslash\backslash - //,$ $C \cap Y,\quad p>1,\ (\lambda,\nu) \in \vert\vert \cap \backslash\backslash - //,$ $\varnothing,\quad (\lambda,\nu) \in // \cap \vert\vert\vert,$ $\{[o]\},\quad (\lambda,\nu) \in // - \vert\vert\vert.$
$\tilde{R}^X_{\lambda,\nu} =$	$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\lambda+\nu-n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}\mathrm{Op}\left(\lvert x_p\rvert^{\lambda+\nu-n}\lvert Q_{p,q}\rvert^{-\nu}\right)$	$\vert\vert\vert$	$X,\quad (\lambda,\nu) \notin \vert\vert \cup \backslash\backslash,$ $C,\quad (\lambda,\nu) \in \vert\vert - \backslash\backslash,$ $Y,\quad (\lambda,\nu) \in \backslash\backslash - \vert\vert,$ $\varnothing,\quad p=1,\ (\lambda,\nu) \in \vert\vert \cap \backslash\backslash - //,$ $\{o\},\quad p=1, (\lambda,\nu) \in \vert\vert \cap \backslash\backslash \cap //,$ $C \cap Y,\quad p>1,\ (\lambda,\nu) \in \vert\vert \cap \backslash\backslash.$
$R^Y_{\lambda,\nu} =$	$\frac{(-1)^k k! q^X_Y(\lambda,\nu)}{\Gamma\left(\frac{\lambda-\nu}{2}\right)}\mathrm{Op}\left(\delta^{(2k)}(x_p)\lvert Q_{p,q}\rvert^{-\nu}\right)$	$\backslash\backslash$	generic には Y 決して空にならない
$R^C_{\lambda,\nu} =$	$\frac{(-1)^m m! q^X_C(\lambda,\nu)}{\Gamma\left(\frac{\lambda-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+\nu-n+1}{2}\right)}\mathrm{Op}\left(\lvert x_p\rvert^{\lambda+\nu-n}\delta^{(2m)}\left(Q_{p,q}\right)\right)$	$\vert\vert$	$\{[o]\},\quad q$: 奇数, $\quad (\lambda,\nu) \in //,$ $C,\quad q$: 奇数, $\quad (\lambda,\nu) \notin //,$ $\{[o]\},\quad q$: 偶数, $\quad (\lambda,\nu) \in // \cap \backslash\backslash,$ $C,\quad q$: 偶数, $\quad (\lambda,\nu) \notin // \cap \backslash\backslash.$
$R^{\{o\}}_{\lambda,\nu} =$	$\mathrm{Op}\left(\tilde{C}^{\lambda-\frac{n-1}{2}}_{\nu-\lambda}\left(-\Delta_{\mathbb{R}^{p-1,q}}\delta_{\mathbb{R}^{p+q-1}}, \delta(x_p)\right)\right)$	$//$	$\{[o]\}$

注 7. 小林–*Pevzner* による微分対称性破れ作用素の一般理論 *([KP16a, Chap. 2])* よって、$S = \{o\}$ ならば、$R^S_{\lambda,\nu}$ は微分作用素である。$\tilde{C}(s,t)$ の定義に基づいて計算すると、定理*6*の微分作用素 $R^{\{o\}}_{\lambda,\nu}$ は以下の形で与えられる。

$$R^{\{o\}}_{\lambda,\nu} = \sum_{j=0}^{\frac{\nu-\lambda}{2}} \frac{(-1)^j 2^{\nu-\lambda-2j}}{j!(\nu-\lambda-2j)!} \prod_{i=1}^{\frac{\nu-\lambda}{2}-j} \left(\frac{n+1}{2} + \frac{\nu+\lambda}{2} + i\right) (-\Delta_{\mathbb{R}^{p-1,q}})^j \left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{\nu-\lambda-2j}.$$

上の公式の $q = 0$ の特別な場合は *[J09, Thms. 5.1.1* および *5.2.1]* や *[KS15, (10.1)]* や *[KP16b, Thm. 6.3]* で現れた微分作用素であり、一般の p, q の場合は *[KØSS15, Thm. 4.3]* で既に得られているものと同一である。

注 8. 定理*6*の表の一番右の列から、定義域に属する任意の (λ,ν) に対して $R^{\{o\}}_{\lambda,\nu}, R^{Y}_{\lambda,\nu}, R^{C}_{\lambda,\nu} \neq 0$ であることがわかる。一方、正則 *(regular)* 対称性破れ作用素 $R^X_{\lambda,\nu}$ に対しては、$R^X_{\lambda,\nu}=0 \iff (\lambda,\nu)$ が以下の離散集合に属していることが証明できる。

$$\begin{cases} //\cap |||, & p>1, \\ (//\cap |||)\cup(\backslash\backslash\cap ||), & p=1. \end{cases}$$

再正規化した作用素 $\tilde{R}^X_{\lambda,\nu}$ に対しては、以下が同値となる。$\tilde{R}^X_{\lambda,\nu}=0 \iff p=1$ かつ (λ,ν) は離散集合 $\backslash\backslash\cap ||$ に属している。

定理6で構成された対称性破れ作用素はいつも線型独立になるとは限らないが、全ての対称性破れ作用素はその線型和で表せることがわかる。任意の $(\lambda,\nu)\in\mathbb{C}^2$ に対して、線型空間 $\mathrm{Hom}_{G'}(I(\lambda)|_{G'}, J(\nu))$ の基底を以下のように具体的に決定した。

定理 9 (対称性破れ作用素の分類)**.** $p,q\geq 1$ とする。

(1) $p=1$ のとき、

$$\mathrm{Hom}_{G'}(I(\lambda)|_{G'}, J(\nu)) = \begin{cases} \mathbb{C}R^X_{\lambda,\nu}, & (\lambda,\nu)\in\mathbb{C}^2-(//\cap |||)-(||\cap\backslash\backslash), \\ \mathbb{C}\tilde{R}^X_{\lambda,\nu}\oplus\mathbb{C}R^{\{o\}}_{\lambda,\nu}, & (\lambda,\nu)\in(//\cap |||)-(||\cap\backslash\backslash), \\ \mathbb{C}R^P_{\lambda,\nu}\oplus\mathbb{C}R^C_{\lambda,\nu}, & (\lambda,\nu)\in(||\cap\backslash\backslash)-//, \\ \mathbb{C}R^{\{o\}}_{\lambda,\nu}, & (\lambda,\nu)\in||\cap\backslash\backslash\cap //. \end{cases}$$

(2) $p>1$ のとき、

$$\mathrm{Hom}_{G'}(I(\lambda)|_{G'}, J(\nu)) = \begin{cases} \mathbb{C}\tilde{R}^X_{\lambda,\nu}\oplus\mathbb{C}R^{\{o\}}_{\lambda,\nu\lambda,\nu}, & (\lambda,\nu)\in //\cap |||, \\ \mathbb{C}R^X_{\lambda,\nu}, & \text{それ以外の場合。} \end{cases}$$

系 10 (対称性破れ作用素の存在定理と次元の上限)**.** どんな $(\lambda,\nu)\in\mathbb{C}^2$ に対しても

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{G'}(I(\lambda)|_{G'}, J(\nu))\in\{1,2\}$$

が成り立つ。

G の球退化主系列表現 $I(\lambda)$ は K 不変ベクトルを含む。部分群 G' の表現 $J(\nu)$ も同様である。いずれの場合も K 不変ベクトルのなす空間は1次元であるので、$\mathbb{1}_\lambda(e)=\mathbb{1}_\nu(e)=1$ と正規化した元を $\mathbb{1}_\lambda\in I(\lambda)^K, \mathbb{1}_\nu\in J(\nu)^{K'}$ と表す。このとき以下のことが成り立つ。

定理 11 (K 不変ベクトルのスペクトラム)**.** $n = p + q$ $(p, q \geq 1)$ という記法は前述の通りとする。このとき、

$$R^X_{\lambda,\nu}\mathbb{1}_\lambda = \frac{2^{1-\lambda}\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+1-q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q-\nu+1}{2}\right)}\mathbb{1}_\nu \text{ が成り立つ。}$$

注 12. $SL(2,\mathbb{R})$ の表現のテンソル積の場合、すなわち、定理*11* の $p = q = 1$ の特別な場合は *Bernstein–Reznikov[BR04, Lem. A.5]* によって得られ、さらに群のランクが高い場合の一般化は *[CKØP11, Thm. 1.1]* で証明されている。また $q = 0$ の場合は *[KS15, Prop. 7.4]* で得られている。

定理6 の 1 段目の主張を次の形で復習しておこう。$(\lambda,\nu) \in \mathbb{C}^2 - //$ に対して、

$$\begin{aligned}\tilde{K}^{\mathbb{R}^{p,q}}_{\lambda,\nu} &:= \frac{|x_p|^{\lambda+\nu-n}}{\Gamma\left(\frac{\lambda+\nu-n+1}{2}\right)} \times \frac{|Q_{p,q}|^{-\nu}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} \in \mathcal{S}ol(\mathbb{R}^{p,q};\lambda,\nu)\\ R^X_{\lambda,\nu} &:= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\lambda-\nu}{2}\right)}\mathrm{Op}\left(\tilde{K}^{\mathbb{R}^{p,q}}_{\lambda,\nu}\right)\end{aligned}$$

と定義する。このとき、$R^X_{\lambda,\nu}$ は $(\lambda,\nu) \in \mathbb{C}^2$ に正則 (holomorphic) に依存する対称性破れ作用素の族に拡張できる、というのが定理6の主張であった。以下では作用素 $\mathrm{Op}\left(\tilde{K}^{\mathbb{R}^{p,q}}_{\lambda,\nu}\right)$ の留数を求める。

定理 13 (留数公式)**.** $(\lambda,\nu) \in //$ に対して、$l := \frac{1}{2}(\nu-\lambda) \in \mathbb{N}$ とおく。このとき

$$R^X_{\lambda,\nu} = \frac{(-1)^l l! \pi^{(n-2)/2}}{2^{\nu+2l-1}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1+q-\nu}{2}\pi\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} R^{\{o\}}_{\lambda,\nu}, \quad (\lambda,\nu) \in //.$$

注 14. 正則 *(regular)* な対称性破れ作用素の留数公式の原型は $q = 0$ の場合で、このときは *[K14]*、*[KS15, Thm. 12.2]* で証明されている。

定義 15. [KS15, Thm. 3.16] を $G = G'$ の場合に適用すると、 Fact 4と同様に、$I(\lambda)$ から $J(\nu)$ への (通常の)G 絡作用素を Bruhat セル上の核超関数で記述することができ、

$$\mathrm{Hom}_G(I(\lambda), I(\nu)) \simeq \mathcal{S}ol_G(\mathbb{R}^{p,q};\lambda,\nu)$$

という全単射が成り立つ。ここで、 $\mathcal{S}ol_G(\mathbb{R}^{p,q};\lambda,\nu) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{p+q})$ は定義3の 4 つ目の条件を満たす $\mathbb{R}^{p+q}$ 上の超関数空間 (ただし、3 つ目の条件で $O(p,q)_{e_p} \simeq O(p-1,q)$ に関する不変性の代わりに、$O(p,q)$ の不変性を課し、4 つ目の条件では N'_+ 不変性の代わりに、N_+ 不変性を課す)。

$G = G'$ の場合は、古くから多く研究 (たとえば、Knapp–Stein 作用素) があり、この場合は $\mathcal{S}ol_G(\mathbb{R}^{p,q}; \lambda, n-\lambda)$ は容易に求めることができる。実際、以下のように定義された超関数は

$$|Q_{p,q}|^{\lambda-n} \times \begin{cases} \Gamma^{-1}(\lambda - n/2), & \min\{p,q\} = 0, \\ \Gamma^{-1}\left(\frac{\lambda-n+1}{2}\right)\Gamma^{-1}(\lambda-n/2), & \min\{p,q\} > 0, n \in 2\mathbb{Z}+1, \\ \Gamma^{-1}\left(\frac{\lambda-n+1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{\lambda-n/2+1}{2}\right), & \min\{p,q\} > 0, \dfrac{n}{2}+p \in 2\mathbb{Z}+1, \\ \Gamma^{-1}\left(\frac{\lambda-n+1}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{\lambda-n/2}{2}\right), & \min\{p,q\} > 0, \dfrac{n}{2}+p \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

いずれも $\mathcal{S}ol_G(\mathbb{R}^{p,q}; \lambda, n-\lambda)$ に入っている。これを積分核として用い、$G = O(p+1, q+1)$ 絡作用素 $\tilde{\mathbb{T}}^G_\lambda : I(\lambda) \to I(n-\lambda)$ が定まる (*Knapp–Stein* 作用素)。G の代わりに $G' = O(p, q+1)$ を代入して、全く同じように構成すれば、作用素 $\tilde{\mathbb{T}}^{G'}_\nu : J(\nu) \to J(n-1-\nu)$ を得る。

定理 16 (函数等式)**.** $n = p+q$ $(p, q \geq 1)$ であったことを思い出そう。このとき、

$$\tilde{\mathbb{T}}^{G'}_{n-1-\nu} \circ R^X_{\lambda, n'-\nu} = q^{TX}_X(\lambda,\nu) R^X_{\lambda,\nu},$$
$$R^X_{n-\lambda,\nu} \circ \tilde{\mathbb{T}}^G_\lambda = q^{XT}_X(\lambda,\nu) R^X_{\lambda,\nu},$$

ここで

$$q^{TX}_X(\lambda,\nu) := \frac{\pi^{\frac{n-3}{2}} \sin\left(\frac{p-\nu}{2}\pi\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1-\nu}{2}\right)} \times \begin{cases} \sqrt{\pi} 2^{1-q+\nu} \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right), & p = 1, \\ \sqrt{\pi} 2^{2-n+\nu}, & n \in 2\mathbb{Z}, \\ \Gamma\left(\frac{n/2-\nu}{2}\right), & \frac{n-1}{2} + p \in 2\mathbb{Z}+1, \\ \Gamma\left(\frac{n/2-\nu-1}{2}\right), & \frac{n-1}{2} + p \in 2\mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$q^{XT}_X(\lambda,\nu) := \frac{2^{2\lambda-n}\pi^{-\frac{n}{2}-1} \sin\left(\frac{p-\lambda+1}{2}\pi\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)} \times \begin{cases} 2^{1-\lambda}\sqrt{\pi}, & n \in 2\mathbb{Z}+1, \\ \Gamma\left(\frac{\lambda-n/2+1}{2}\right), & \frac{n}{2}+p \in 2\mathbb{Z}, \\ \Gamma\left(\frac{\lambda-n/2}{2}\right), & \frac{n}{2}+p \in 2\mathbb{Z}+1. \end{cases}$$

注 17. 函数等式の原型として $q = 0$ の場合は *[K15, Thm. 12.6]* で得られている。

$G' = O(p, q+1)$ 表現 $J(\nu)$ は K' 表現として無重複であり、$p > 1$ のとき、その K' タイプは $\mathbb{N}^2$ の部分集合で表すことができる。実際 $J(\nu)$ の K' 構造は $K' \simeq O(p) \times O(q+1)$ の球面調和関数 $\mathcal{H}^a(\mathbb{S}^{p-1}) \boxtimes \mathcal{H}^b(\mathbb{S}^q)$ 空間への作用 (既約表現) の直和となるので、$(a,b) \in \mathbb{N}^2$ でパラメトライズすることができる。($p = 1$ の場合は a は不要であり、1 個の自然数 $b \in \mathbb{N}$ でパラメトライズできる。)

$\nu \notin \mathbb{Z}$ ならば群 G' の表現 $J(\nu)$ は既約である。一方、$\nu \in \mathbb{Z}$ ならば、長さ有限の Jordan–Hölder 列をもつ。これらの既約部分商は、 その K タイプを $\mathbb{N}^2$ の ($p = 1$ のときは $\mathbb{N}$ の) 部分集合として図示しできる。[HT93] のように、$J(\nu)$ の Jordan–Hölder 列の構造を障壁 $A^{\pm\pm}$ と矢印で表す。このとき、以下の定理が成り立つ。

定理 18 (対称性破れ作用素の像). $\nu \notin \mathbb{Z}$ ならば、正則な *(regular)* 対称性破れ作用素 $R^X_{\lambda,\nu} : I(\lambda) \to J(\nu)$ は全射である。$\nu \in \mathbb{Z}$ ならば、$(\mathfrak{g}, K)$ 加群 $I(\lambda)_K$ の $R^X_{\lambda,\nu}$ における像は以下のようになる。なお、$R^X_{\lambda,\nu}$ が零写像のときは $R^X_{\lambda,\nu}$ の代わりに $\tilde{R}^X_{\lambda,\nu}$ および $R^{\{o\}}_{\lambda,\nu}$ の像を図示する。

(1) $p > 1$ の場合*:*
以下の図の説明をする。

- $(\lambda, \nu) \in //$ に対して、$l := \frac{1}{2}(\nu - \lambda) \in \mathbb{N}$、$(\lambda, \nu) \in \backslash\backslash$ に対して、$k := \frac{1}{2}(n - 1 - \lambda - \nu) \in \mathbb{N}$ とおく。
- 灰色と白色のみで描れている図は $\mathrm{Hom}_{G'}(I(\lambda)|_{G'}, J(\nu)) = \mathbb{C}R^X_{\lambda,\nu}$ の場合に相当し、灰色部分は G 加群 $I(\lambda)$ の $R^X_{\lambda,\nu}$ による像が G' 加群 $J(\nu)$ のとのような部分加群になっているかを与える。
- 灰色の代わりに

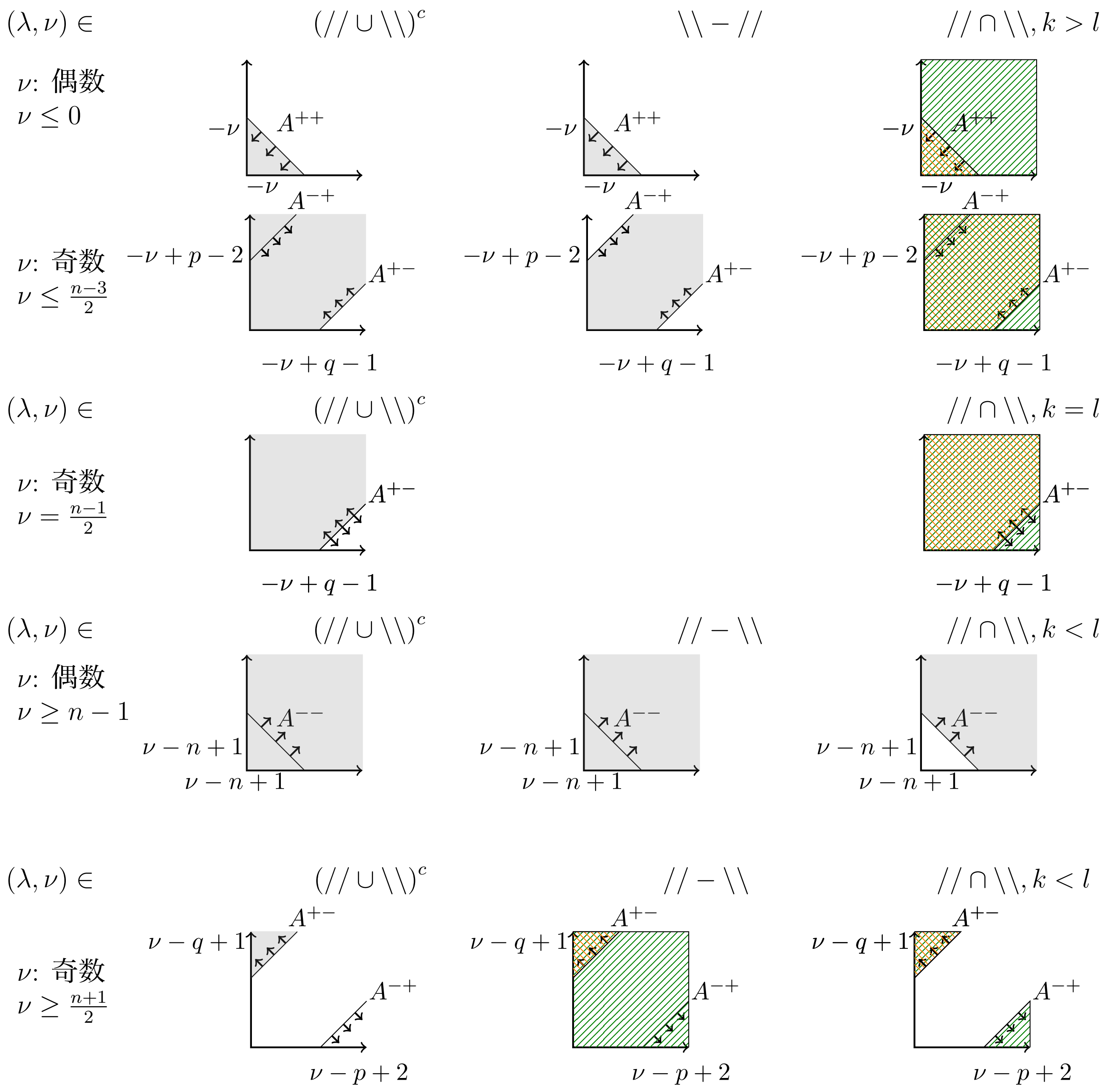
  緑色 *(*右上がり斜線*)*
  茶色網かけ = 緑色 *(*右上がり斜線*)*+ オレンジ色 *(*右下がり斜線*)*

  で描かれている図は

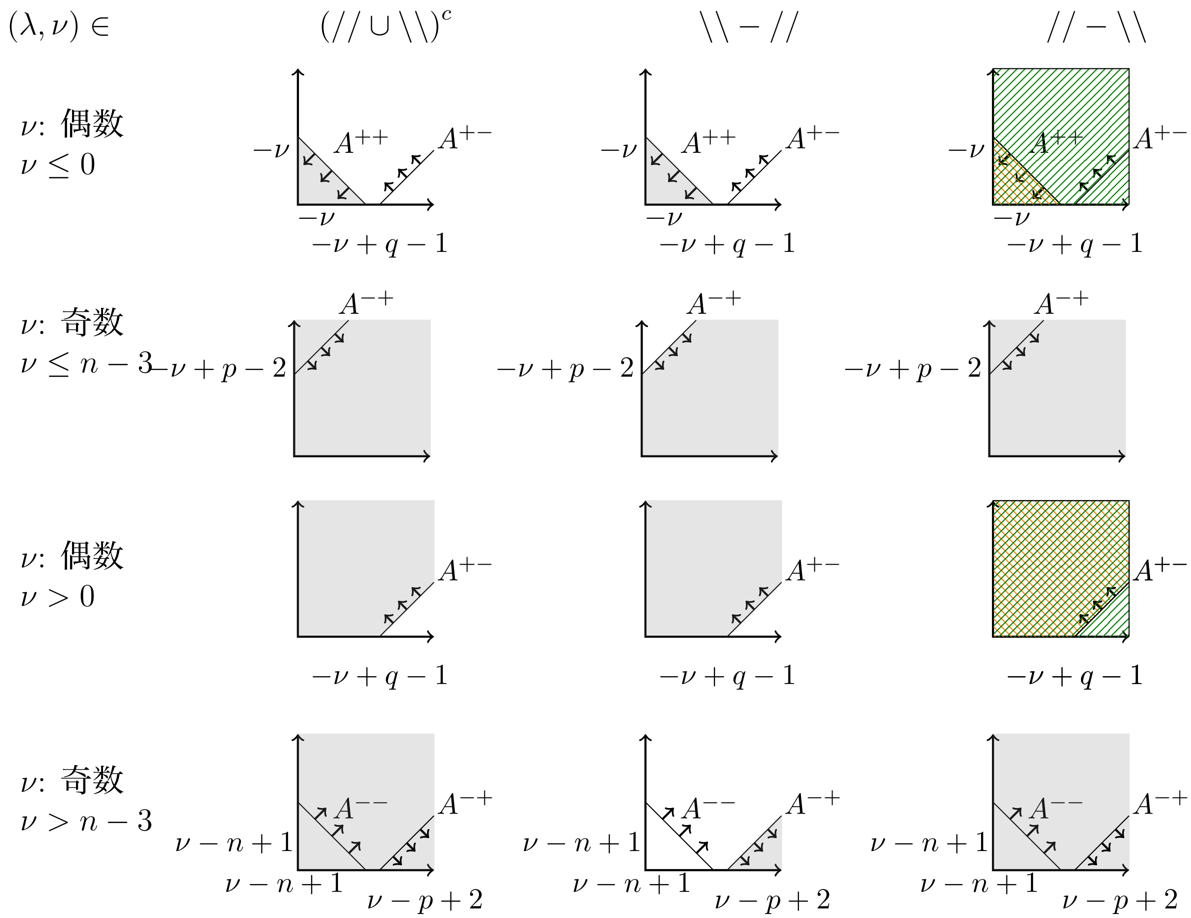
  $$R^X_{\lambda,\nu} = 0 \quad \text{かつ} \quad \mathrm{Hom}_{G'}(I(\lambda)|_{G'}, J(\nu)) = \mathbb{C}R^{\{o\}}_{\lambda,\nu} \oplus \mathbb{C}\tilde{R}^X_{\lambda,\nu}$$

  の場合に相当する *(*定理*9*を参照*)*。この場合は
- 微分対称性破れ作用素 $R^{\{o\}}_{\lambda,\nu}$ の像は緑色 *(*右上がり斜線*)* と茶色網かけの合併。
- 再正規化した対称性破れ作用素 $\tilde{R}^X_{\lambda,\nu}$ の像は茶色網かけ。

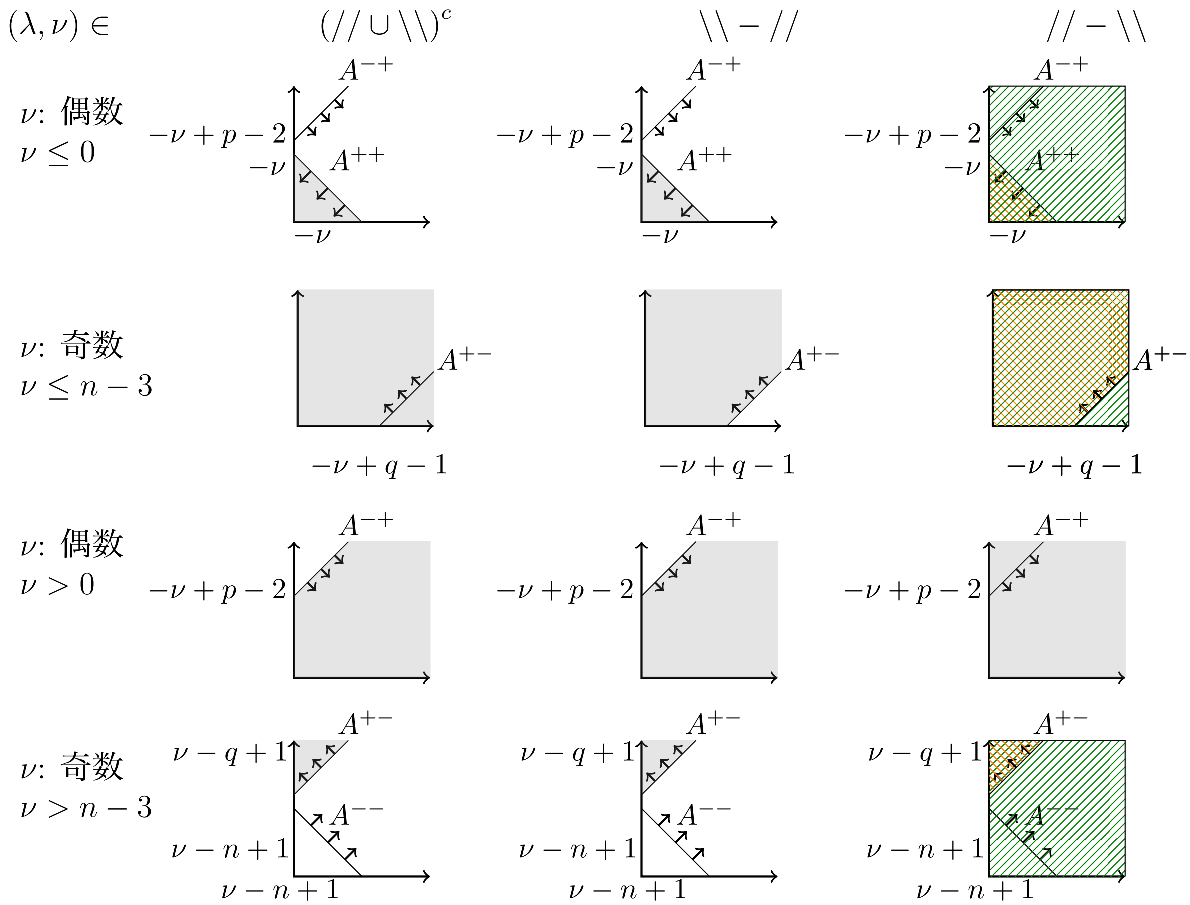
(a) pは奇数,qは偶数 とする。このとき、$\nu \in 2\mathbb{Z}, 0 < \nu < n-1$ ならば、$R^X_{\lambda,\nu}$ は全射である。それ以外の場合の対称性破れ作用素 $R^X_{\lambda,\nu}, \tilde{R}^X_{\lambda,\nu}, R^{\{o\}}_{\lambda,\nu}$ の像は下図のようになる。



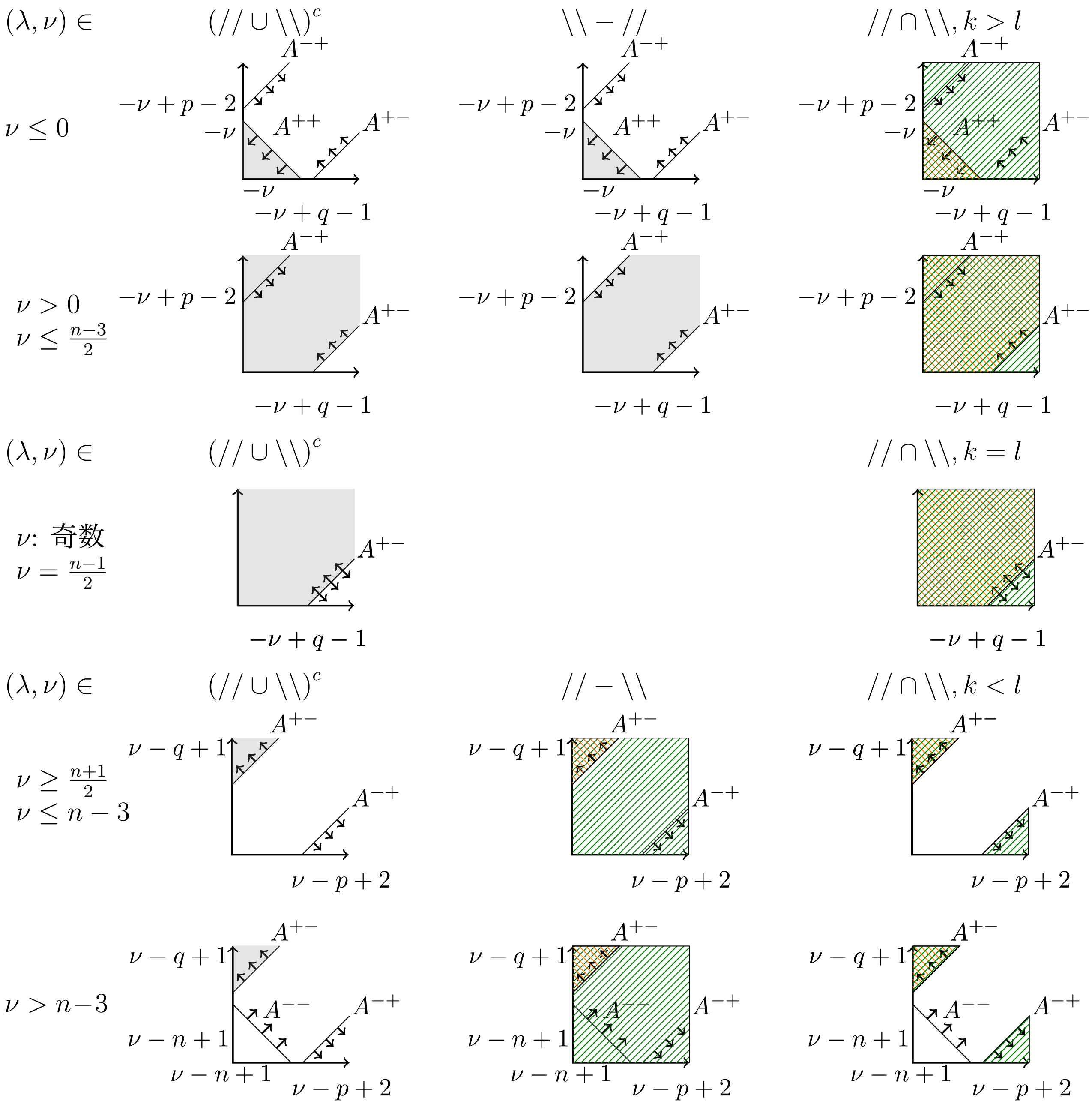
(b) p, q は共に奇数とし、さらに $p > 1$ の場合。このとき、対称性破れ作用素 $R^X_{\lambda,\nu}, \tilde{R}^X_{\lambda,\nu}, R^{\{o\}}_{\lambda,\nu}$ の像は下図で現わされる。



(c) p, q は共に偶数の場合。このとき、対称性破れ作用素 $R^X_{\lambda,\nu}, \tilde{R}^X_{\lambda,\nu}, R^{\{o\}}_{\lambda,\nu}$ の像は下図で現わされる。



(d) pは偶数, qは奇数 の場合。パラメータ ν が奇数ならば、すべての $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $R^X_{\lambda,\nu}$ は全射である。それ以外の場合、すなわち、$\nu \in 2\mathbb{Z}$ ならば、対称性破れ作用素 $R^X_{\lambda,\nu}, \tilde{R}^X_{\lambda,\nu}, R^{\{o\}}_{\lambda,\nu}$ の像は以下のように図示される。

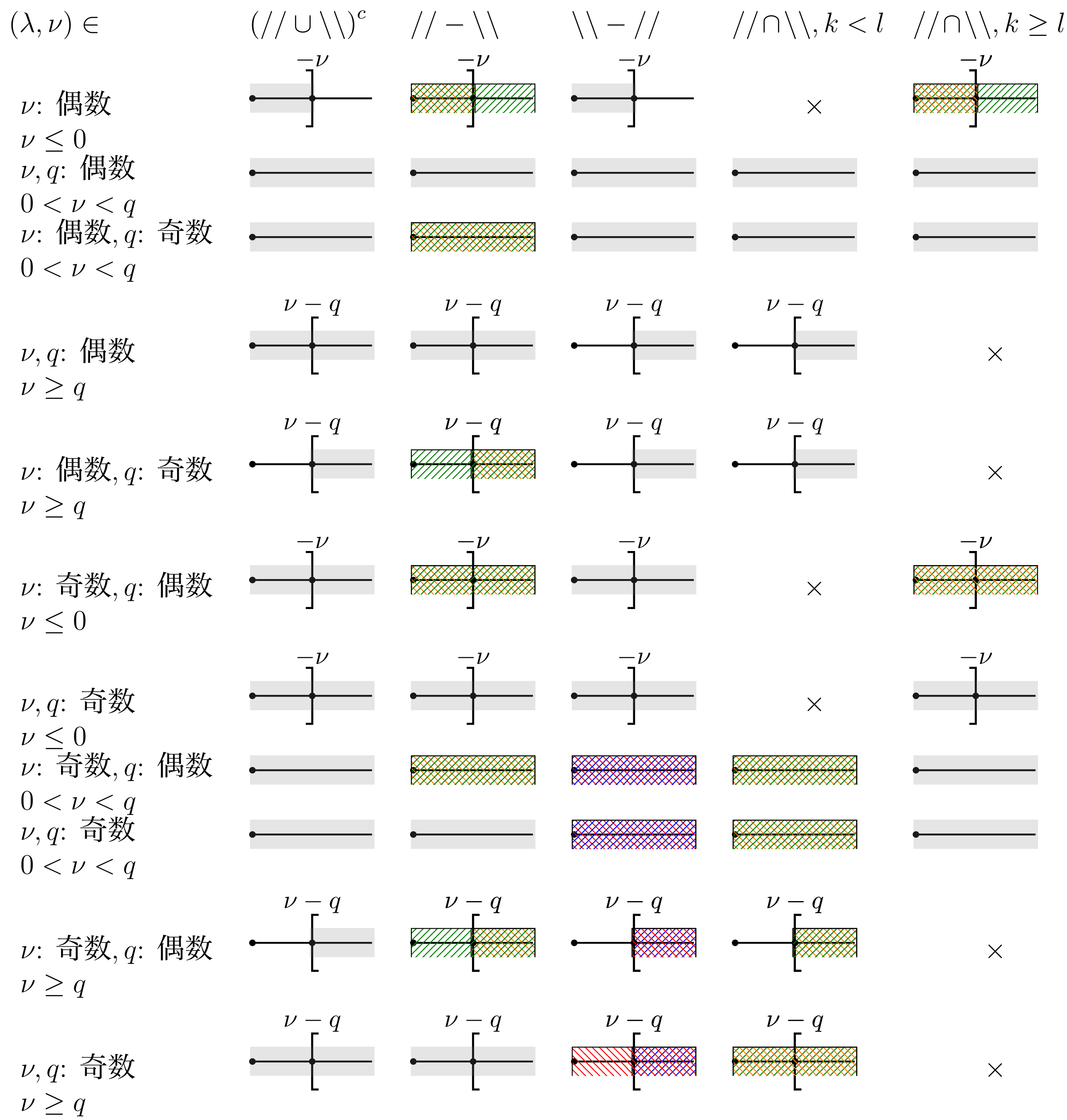


(2) $p = 1$ の場合。
この場合は $J(\nu)$ の K タイプは無重複かつ 1 次元のパラメータ $b \in \mathbb{N}$ で記述できるので、以下の図では $\mathbb{N}$ の部分集合を用いて $J(\nu)$ の既約部分商を記述する。その他、下記で用いる記法を説明する。

- 灰色と白色のみで描かれている図は $\mathrm{Hom}_{G'}(I(\lambda)|_{G'}, J(\nu)) = \mathbb{C}R^X_{\lambda,\nu}$ の場合に相当し、灰色部分は G 加群 $I(\lambda)$ の $R^X_{\lambda,\nu}$ による像が G' 加群 $J(\nu)$ のどのような部分加群になっているかを記述している。
- それ以外の図では

  緑色 *(*右下がり斜線*)*
  茶色網かけオレンジ色 *(*右下がり斜線*)*+ 緑色 *(*右上がり斜線*)*
  赤色 *(*右下がり斜線*)*
  紫色網かけ = 赤色 *(*右下がり斜線*)*+ 青色 *(*右上がり斜線*)*

  の色のいくつかが現れる。これらのいずれの場合も $R^X_{\lambda,\nu} = 0$ である。
- 微分作用素 $R^{\{o\}}_{\lambda,\nu}$ の像は緑色 *(*右上がり斜線*)* と茶色網かけの合併。
- 再正規化した対称性破れ作用素 $\tilde{R}^X_{\lambda,\nu}$ の像は茶色網かけ。
- $R^C_{\lambda,\nu}$ の像は赤色 *(*右下がり斜線*)* と紫色網かけの合併。
- $R^Y_{\lambda,\nu}$ の像は紫色網かけ。



系 19. 上記で論じたそれぞれのパラメータ (λ,ν) に対して (特に $R^X_{\lambda,\nu}=0$)、以下の関係が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Image}\,\tilde{R}^X_{\lambda,\nu} \subset \mathrm{Image}\,R^{\{o\}}_{\lambda,\nu} \quad (p \geq 1)\\
&\mathrm{Image}\,R^Y_{\lambda,\nu} \subset \mathrm{Image}\,R^C_{\lambda,\nu} \quad (p = 1)
\end{aligned}
$$

最後に、上記の結果の応用として Zuckerman 導来函手加群の間の対称性破れ作用素の問題を論じる。[KØ03, (5.1.1)] に倣って $p > 1$ かつ$q \geq 1$ のときに

$$A_0(p,q) := \left\{ \lambda \in \mathbb{Z} + \frac{p+q}{2} \ : \ \lambda > -1 \right\}$$

とおくと、[KØ03] で示したように、$\lambda \in A_0(p,q)$ に対して $O(p,q)$ の既約ユニタリ表現 $\pi^{p,q}_{\pm,\lambda}$ が定まる。([KØ03] では $\pi^{p,q}_{\pm,\lambda}$ を定義するにあたって 5 種類の特徴づけが与えられ、それらは互いに同値であることが示されている。その特徴づけの 1 つは Zuckerman 導来函手加群で記載される。) 以下では、この加群の間に対称性破れ作用素があるかについて論じる。簡単のため、$A_0^{\mathrm{even}}(p,q) := \left\{ \lambda \in A_0(p,q) \mid \lambda - \frac{p-q}{2} + 1 \in 2\mathbb{Z} \right\}$ とおく。以下では

$$g(t) := \begin{cases} 1 & \left(t \in 2\mathbb{N} + \frac{1}{2}\right) \\ 0 & t \notin \left(2\mathbb{N} + \frac{1}{2}\right) \end{cases}, \quad h(t) := \begin{cases} 1 & \left(t < \frac{q}{2}\right) \\ 0 & \left(t \geq \frac{q}{2}\right) \end{cases}$$

とおく。

定理 20 (Zuckerman 導来加群函手 $\pi^{p,q}_{\pm,\lambda}$ 間の対称性破れ作用素の存在問題)**.** $n = p + q$ $(p, q \geq 1)$, $n' := n - 1$ とする。以下では

$$x \in \begin{cases} A_0^{\mathrm{even}}(p+1, q+1), & \delta = + \text{ のとき} \\ A_0^{\mathrm{even}}(q+1, p+1), & \delta = - \text{ のとき} \end{cases}$$
$$y \in \begin{cases} A_0^{\mathrm{even}}(p, q+1), & \varepsilon = + \text{ のとき} \\ A_0^{\mathrm{even}}(q+1, p), & \varepsilon = - \text{ のとき} \end{cases}$$

と仮定する。このとき、 $\mathrm{Hom}_{G'}\left(\pi^{p+1,q+1}_{\delta,x}|_{G'}, \pi^{p,q+1}_{\varepsilon,y}\right)$ の次元は以下のようになる。

(1) $p = 1, q$は偶数の場合

	$\pi^{p,q+1}_{-,y}$
$\pi^{p+1,q+1}_{+,x}$	$h(y)(1 - g(x-y))$
$\pi^{p+1,q+1}_{-,x}$	$g(y-x)$

(2) $p = 1, q$は奇数の場合

	$\pi^{p,q+1}_{-,y}$
$\pi^{p+1,q+1}_{+,x}$	$h(y)$
$\pi^{p+1,q+1}_{-,x}$	$\max\{g(-y-x), g(y-x)\}$

(3) p, qは偶数の場合

	$\pi^{p,q+1}_{+,y}$	$\pi^{p,q+1}_{-,y}$
$\pi^{p+1,q+1}_{+,x}$	$g(x-y)$	0
$\pi^{p+1,q+1}_{+,x}$	0	$g(y-x)$

(4) pは偶数, qは奇数の場合

	$\pi^{p,q+1}_{+,y}$	$\pi^{p,q+1}_{-,y}$
$\pi^{p+1,q+1}_{+,x}$	0	$g(-x-y)$
$\pi^{p+1,q+1}_{-,x}$	0	$g(y-x)$

(5) pは奇数, $p > 1, q$は偶数の場合

	$\pi^{p,q+1}_{+,y}$	$\pi^{p,q+1}_{-,y}$
$\pi^{p+1,q+1}_{+,x}$	0	$g(-x-y)$
$\pi^{p+1,q+1}_{-,x}$	0	$g(y-x)$

(6) p, qは共に奇数, $p > 1$ の場合

	$\pi^{p,q+1}_{+,y}$	$\pi^{p,q+1}_{-,y}$
$\pi^{p+1,q+1}_{+,x}$	$g(x-y)$	0
$\pi^{p+1,q+1}_{-,x}$	0	$g(y-x)$

注 21. *(1)* 定理*20*では分岐則が離散分解する場合 *(*一般論は *[K98])* とそうでない場合の両方が含まれている。分岐則が離散分解する場合、上記の分岐則は *[K93, Thm. 3.3]* によって得られた公式と一致する。

(2) $q = 0$ の場合の類似の結果は *[KS15, Thms. 12.1 and 1.3]* で得られている。

References

[BR04] J. Bernstein and A. Reznikov. Estimates of automorphic functions. *Mosc. Math. J*, **4**(1), (2004), pp. 19–37.

[CKØP11] J.-L. Clerc, T. Kobayashi, B. Ørsted and M. Pevzner. Generalized Bernstein–Reznikov integrals. *Math. Ann.*, **349**(2), (2011), pp. 395–431.

[HT93] R. E. Howe and E.-C. Tan. Homogeneous functions on light cones: the infinitesimal structure of some degenerate principal series representations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **28**(1), (1993), pp. 1–74.

[J09] A. Juhl. *Families of Conformally Covariant Differential Operators, Q-curvature and Holography*, *Progr. Math,* **275**. Springer Science & Business Media (2009).

[K15] T. Kobayashi. A program for branching problems in the representation theory of real reductive groups. *Progr. Math.*, **312**, (2015), pp. 277–322. In: Special issue in honor of Vogan's 60th years birthday.

[KØ03] T. Kobayashi and B. Ørsted. Analysis on the minimal representation of $O(p, q)$. II. Branching laws. *Adv. Math.*, **180**(2), (2003), pp. 513–550.

[KO13] T. Kobayashi and T. Oshima. Finite multiplicity theorems for induction and restriction. *Adv. Math.*, **248**, (2013), pp. 921–944.

[K93] T. Kobayashi. The restriction of $A_q(\lambda)$ to reductive subgroups. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **69**(7), (1993), pp. 262–267. doi:10.3792/pjaa.69.262.

[K98] T. Kobayashi. Discrete decomposability of the restriction of $A_q(\lambda)$ with respect to reductive subgroups II: Micro-local analysis and asymptotic K-support. *Annals of Mathematics*, **147**(3), (1998), pp. 709–729.

[K14] T. Kobayashi. F-method for symmetry breaking operators. *Differential Geometry and its Applications*, **33**, (2014), pp. 272 – 289.

[K16] T. Kobayashi. *Birth of new branching problems.* 日本数学会 70 年記念　総合講演・企業特別講演アブストラクト, pp. 65–92, 日本数学会, 2016.

[KØSS15] T. Kobayashi, B. Ørsted, P. Somberg and V. Souček. Branching laws for verma modules and applications in parabolic geometry. I. *Adv. Math.*, **285**, (2015), pp. 1796–1852.

[KP16a] T. Kobayashi and M. Pevzner. Differential symmetry breaking operators: I. General theory and F-method. *Selecta Mathematica*, **22**(2), (2016), pp. 801–845.

[KP16b] T. Kobayashi and M. Pevzner. Differential symmetry breaking operators: II. Rankin–Cohen operators for symmetric pairs. *Selecta Mathematica*, **22**(2), (2016), pp. 847–911.

[KS15] T. Kobayashi and B. Speh. *Symmetry Breaking for Representations of Rank One Orthogonal Groups*, *Memoirs of the Amer. Math. Soc,* **238**. American Mathematical Society (2015).

Fundamental theory of the Möbius gyrovector space

渡邉　恵一（新潟大学自然科学系）
Keiichi Watanabe (Niigata Univ.)

概要. A.A.Ungar の Möbius gyrovector space を紹介するとともに, その関数解析的側面の基礎理論として, 有限生成のジャイロベクトル部分空間と通常の線形部分空間との関係, ジャイロベクトル閉部分空間に関する直交ジャイロ分解, 直交基底に関する直交ジャイロ展開などについて述べる.

1　導入

この節の内容はおもに [U2] による. 複素平面の単位開円板 $\mathbb{D} = \{a \in \mathbb{C};\ |a| < 1\}$ において Möbius の和は

$$a \oplus b = \frac{a+b}{1+\overline{a}b} \qquad (a, b \in \mathbb{D})$$

によって定義される. $a, b \in \mathbb{D}$ に対して $a \oplus b \in \mathbb{D}$ である. 実際,

$$|1+\overline{a}b|^2 - |a+b|^2 = (1-|a|^2)(1-|b|^2) > 0 \qquad \text{より} \quad \left|\frac{a+b}{1+\overline{a}b}\right| < 1.$$

次に

$$0 \oplus a = a \oplus 0 = a \qquad \text{および} \qquad (-a) \oplus a = a \oplus (-a) = 0,$$

つまり 0 は演算 $\oplus$ の単位元でもあり, $-a$ は $\oplus$ に関する a の逆元.

$$a = \frac{i}{2}, \qquad b = -\frac{2}{5} - \frac{2}{5}i, \qquad c = \frac{1}{2},$$

とすると, このとき

$$a \oplus (b \oplus c) = 0, \qquad (a \oplus b) \oplus c = \frac{4+16i}{53-8i}.$$

このように結合法則は成り立たないが,

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus \frac{1+a\overline{b}}{1+\overline{a}b}c.$$

実際,

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus \frac{b+c}{1+\bar{b}c} = \frac{a + \dfrac{b+c}{1+\bar{b}c}}{1 + \bar{a}\,\dfrac{b+c}{1+\bar{b}c}} = \frac{a(1+\bar{b}c)+(b+c)}{(1+\bar{b}c)+\bar{a}(b+c)} = \frac{a+b+c+a\bar{b}c}{1+\bar{a}b+\bar{a}c+\bar{b}c}$$

一方,

$$(a \oplus b) \oplus \frac{1+a\bar{b}}{1+\bar{a}b}c = \frac{a+b}{1+\bar{a}b} \oplus \frac{1+a\bar{b}}{1+\bar{a}b}c = \frac{\dfrac{a+b}{1+\bar{a}b} + \dfrac{1+a\bar{b}}{1+\bar{a}b}c}{1 + \overline{\left(\dfrac{a+b}{1+\bar{a}b}\right)}\dfrac{1+a\bar{b}}{1+\bar{a}b}c}$$

$$= \frac{(a+b)+(1+a\bar{b})c}{(1+\bar{a}b)+(\bar{a}+\bar{b})c} = \frac{a+b+c+a\bar{b}c}{1+\bar{a}b+\bar{a}c+\bar{b}c}.$$

また, 交換法則も成り立たないが,

$$a \oplus b = \frac{1+a\bar{b}}{1+\bar{a}b}(b \oplus a).$$

実際,

$$\frac{1+a\bar{b}}{1+\bar{a}b}(b \oplus a) = \frac{1+a\bar{b}}{1+\bar{a}b}\,\frac{b+a}{1+\bar{b}a} = \frac{a+b}{1+\bar{a}b} = a \oplus b.$$

このように, $\dfrac{1+a\bar{b}}{1+\bar{a}b}$ が現れることによって, 結合法則・交換法則の弱められたものが成立している.

さて, $\mathbb{C} \ni a = a_1 + ia_2 \;\; (a_1, a_2 \in \mathbb{R})$ と $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ を同一視すると

$$\bar{a}b = (a_1 - ia_2)(b_1 + ib_2) = (a_1b_1 + a_2b_2) + i(a_1b_2 - a_2b_1)$$

ゆえ

$$\bar{a}b + a\bar{b} = 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$|a| = ||\boldsymbol{a}||$$

Möbius の和を書き換えてみると,

$$a \oplus b = \frac{a+b}{1+\bar{a}b} = \frac{(a+b)(1+a\bar{b})}{(1+\bar{a}b)(1+a\bar{b})} = \frac{(1+a\bar{b}+|b|^2)a+b}{1+a\bar{b}+\bar{a}b+|a|^2|b|^2}$$

$$= \frac{(1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+||\boldsymbol{b}||^2)\boldsymbol{a}+(1-||\boldsymbol{a}||^2)\boldsymbol{b}}{1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2}$$

これにより, Möbius の和は任意の実内積空間へと拡張される.

2 定義

A.A.Ungar によって導入された (gyrocommutative) gyrogroup, gyrovector space の定義を述べる. 詳細については [U1] を参照していただきたい.

定義. 空でない集合 G と写像 $\oplus : G \times G \to G$ の組 $(G, \oplus)$ を考え, $a, b \in G$ に対して $\oplus(a, b)$ を $a \oplus b$ によって表す. $\phi : G \to G$ が $(G, \oplus)$ の自己同型であるとは, G から G への全単射で $\phi(a \oplus b) = \phi(a) \oplus \phi(b)$ $(a, b \in G)$ であることをいう. $(G, \oplus)$ の自己同型全体の集合を $\mathrm{Aut}(G, \oplus)$ と表す.

定義 (gyrogroup).[U1] $(G, \oplus)$ が gyrogroup であるとは,

(G1) $\exists 0 \in G$ s.t. $0 \oplus a = a$ $(\forall a \in G)$

(G2) $\forall a \in G \, \exists x \in G$ s.t. $x \oplus a = 0$

(G3) $\exists 1 \mathrm{gyr}[a, b]c \in G$ s.t. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus \mathrm{gyr}[a, b]c$

(G4) $\mathrm{gyr}[a, b] \in \mathrm{Aut}(G, \oplus)$

(G5) $\mathrm{gyr}[a, b] = \mathrm{gyr}[a \oplus b, b]$

を $a, b, c \in G$ に対して満たすことである.

• (G4) をより丁寧に書くと, $a, b \in G$ に対して

(1) $G \ni c \mapsto \mathrm{gyr}[a, b]c \in G$ は 1 対 1, onto

(2) $\mathrm{gyr}[a, b](c \oplus d) = \mathrm{gyr}[a, b]c \oplus \mathrm{gyr}[a, b]d \quad (c, d \in G)$.

• $\mathrm{gyr}[a, b]$ は gyration と呼ばれることがある.

• $(G, \oplus)$ が群 $\Leftrightarrow$ すべての $a, b \in G$ に対して $\mathrm{gyr}[a, b]$ が恒等写像.

• $(G, \oplus)$ が定義全体を満たせば, 0 は右単位元でもあり一意と分かる. また a の左逆元 x は右逆元でもあり一意で, $\ominus a$ と表される.

定義 (gyrocommutativity).[U1] gyrogroup $(G, \oplus)$ が gyrocommutative であるとは,

(G6) $a \oplus b = \mathrm{gyr}[a, b](b \oplus a)$

を $a, b \in G$ に対して満たすことである.

定義 (gyrovector space).[U1] $(G, \oplus, \otimes)$ が real inner product gyrovector space（単に gyrovector space という）であるとは, $(G, \oplus)$ が gyrocommutative gyrogroup で, 実内積空間 $\mathbb{V}$ が存在して $G \subset \mathbb{V}$,

(V0) $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$

また, 演算 $\otimes : \mathbb{R} \times G \to G$ が定義されて

(V1) $1 \otimes \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

(V2) $(r_1 + r_2) \otimes \boldsymbol{a} = r_1 \otimes \boldsymbol{a} \oplus r_2 \otimes \boldsymbol{a}$

(V3) $(r_1 r_2) \otimes \boldsymbol{a} = r_1 \otimes (r_2 \otimes \boldsymbol{a})$

(V4) $\dfrac{|r| \otimes \boldsymbol{a}}{||r \otimes \boldsymbol{a}||} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||}$

(V5) $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\,(r \otimes \boldsymbol{a}) = r \otimes \mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{a}$

(V6) $\mathrm{gyr}[r_1 \otimes \boldsymbol{v}, r_2 \otimes \boldsymbol{v}] = I$

(VV) さらに集合 $||G|| = \{\pm||\boldsymbol{a}||;\, \boldsymbol{a} \in G\} \subset \mathbb{R}$ 上に（別の）演算 $\oplus, \otimes$ が定義されて $(||G||, \oplus, \otimes)$ は 1 次元のベクトル空間をなし,

(V7) $||r \otimes \boldsymbol{a}|| = |r| \otimes ||\boldsymbol{a}||$

(V8) $||\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}|| \leq ||\boldsymbol{a}|| \oplus ||\boldsymbol{b}||$

を $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G,\ r_1, r_2, r \in \mathbb{R}$ に対して満たすことである.

以下に gyrocommutative gyrogroup, gyrovector space の典型的な例を述べる.

例 (Einstein gyrovector space).[U1] c を真空中の光の速さ, 相対論的に許容される質点の速度の全体を $\mathbb{R}^3_c = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3;\, ||\boldsymbol{a}|| < c\}$ とする. Einstein の速度和は

$$\boldsymbol{a} \oplus_{\mathrm{E}} \boldsymbol{b} = \frac{1}{1 + \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{c^2}} \left\{ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_{\boldsymbol{a}}}{1 + \gamma_{\boldsymbol{a}}} \big(\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \big) \right\} \qquad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3_c)$$

によって定義される. ここで $\gamma_{\boldsymbol{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{||\boldsymbol{a}||^2}{c^2}}}$. このとき, $(\mathbb{R}^3_c, \oplus_{\mathrm{E}})$ は gyrocommutative gyrogroup をなす.

$\mathbb{V}$ を任意の実内積空間, 固定された正の数 s に対して $\mathbb{V}_s = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{V};\, ||\boldsymbol{a}|| < s\}$ とする. Einstein の速度和は, $\mathbb{R}^3$ の外積の部分を内積で表すことにより $\mathbb{V}_s$ へ拡張され, それと演算 $\otimes_{\mathrm{E}}$ が

$$\boldsymbol{a} \oplus_{\mathrm{E}} \boldsymbol{b} = \frac{1}{1 + \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{s^2}} \left\{ \boldsymbol{a} + \frac{1}{\gamma_{\boldsymbol{a}}} \boldsymbol{b} + \frac{1}{s^2} \frac{\gamma_{\boldsymbol{a}}}{1 + \gamma_{\boldsymbol{a}}} (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \boldsymbol{a} \right\}$$

$$r \otimes_{\mathrm{E}} \boldsymbol{a} = s \tanh\left(r \tanh^{-1} \frac{||\boldsymbol{a}||}{s} \right) \frac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||} \quad (\text{if } \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}), \quad r \otimes_{\mathrm{E}} \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

for all $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}_s$, $r \in \mathbb{R}$ によって定義される. ここで $\gamma_{\boldsymbol{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{||\boldsymbol{a}||^2}{s^2}}}$.

公理 (VV) の, 集合 $||\mathbb{V}_s|| = (-s, s)$ における演算 $\oplus_{\mathrm{E}}, \otimes_{\mathrm{E}}$ は

$$a \underset{\mathrm{E}}{\oplus} b = \frac{a+b}{1+\frac{1}{s^2}ab}$$

$$r \underset{\mathrm{E}}{\otimes} a = s \tanh\left(r \tanh^{-1} \frac{a}{s}\right)$$

for all $a, b \in (-s, s)$, $r \in \mathbb{R}$ によって定義される. このとき, $(\mathbb{V}_s, \oplus_{\mathrm{E}}, \otimes_{\mathrm{E}})$ は gyrovector space となる.

例 (Möbius gyrovector space).[U1] $\mathbb{V}$ を任意の実内積空間, 固定された正の数 s に対して $\mathbb{V}_s = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}; ||\boldsymbol{a}|| < s\}$ とする. Möbius の和および Möbius のスカラー倍は

$$\boldsymbol{a} \underset{\mathrm{M}}{\oplus} \boldsymbol{b} = \frac{\left(1+\frac{2}{s^2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{s^2}||\boldsymbol{b}||^2\right)\boldsymbol{a}+\left(1-\frac{1}{s^2}||\boldsymbol{a}||^2\right)\boldsymbol{b}}{1+\frac{2}{s^2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{s^4}||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2}$$

$$r \underset{\mathrm{M}}{\otimes} \boldsymbol{a} = s\ \tanh\left(r \tanh^{-1}\frac{||\boldsymbol{a}||}{s}\right)\frac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||} \quad (\text{if } \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}), \qquad r \underset{\mathrm{M}}{\otimes} \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

for all $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}_s$, $r \in \mathbb{R}$ によって定義される. Möbius のスカラー倍と集合 $||\mathbb{V}_s||$ 上の演算は Einstein gyrovector space と同一である. このとき, $(\mathbb{V}_s, \oplus_{\mathrm{M}}, \otimes_{\mathrm{M}})$ は gyrovector space となる. $\underset{\mathrm{M}}{\oplus}, \underset{\mathrm{M}}{\otimes}$ をそれぞれ単に $\oplus, \otimes$ と書く.

例 (単位的 C*-環の正凸錐).[BM], [AH] $\mathcal{A}$ を単位的 C^*-環, $\mathcal{A}_+^{-1}$ を $\mathcal{A}$ の正の可逆元全体とする. t を正の実数とする.

$$a \oplus_t b = \left(a^{\frac{t}{2}} b^t a^{\frac{t}{2}}\right)^{\frac{1}{t}} \qquad (a, b \in \mathcal{A}_+^{-1})$$

と定めると, $(\mathcal{A}_+^{-1}, \oplus_t)$ は gyrocommutative gyrogroup をなす.

Einstein gyrovector space と **Möbius gyrovector space** は本質的に同じものであり, この講演で扱うおもな対象である. **単位的 C*-環の正凸錐**は, Abe and Hatori [AH] によって導入された generalized gyrovector space (GGV) の構造をもち, この講演の観点からはより難しい対象であり, ここでは扱わない.

異なる種類の演算が同一の数式に現れたならば, (1) 通常のスカラー倍 (2) 演算 $\otimes$ (3) 演算 $\oplus$ で優先順を与える, すなわち,

$$r_1 \otimes w_1 \boldsymbol{a}_1 \oplus r_2 \otimes w_2 \boldsymbol{a}_2 = \{r_1 \otimes (w_1 \boldsymbol{a}_1)\} \oplus \{r_2 \otimes (w_2 \boldsymbol{a}_2)\}.$$

このような場合の括弧は省略する.

一般には, 演算は可換でも, 結合的でも, 分配的でもないことに注意する:

$$\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{a}$$
$$\boldsymbol{a} \oplus (\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \oplus \boldsymbol{c}$$
$$r \otimes (\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \neq r \otimes \boldsymbol{a} \oplus r \otimes \boldsymbol{b}$$
$$t(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \neq t\boldsymbol{a} \oplus t\boldsymbol{b}.$$

しかし, 左（および右）ジャイロ結合法則 (G3), ジャイロ交換法則 (G6), スカラー分配法則 (V2), スカラー結合法則 (V3) などがあるように, gyrovector space の有する対称性は低いわけではない.

また, $s \to \infty$ とすると $\mathbb{V}_s$ は全空間 $\mathbb{V}$ に拡大して行き, 演算 $\oplus, \otimes$ は通常のベクトル和, スカラー倍に近づく. これは, 実内積空間における諸結果が Möbius gyrovector spaces における諸結果から復元されうるということを示唆している.

命題.[U1]

$$\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} \to \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad (s \to \infty)$$
$$r \otimes \boldsymbol{a} \to r\boldsymbol{a} \quad (s \to \infty).$$

阿部氏は昨年のある講演で次の問題を提起した.

問.[A] $(G, \oplus, \otimes)$ を gyrovector space またはその一般化されたものとし, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in G$ とする. 次は成り立つか：

$$\{r_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 \oplus r_2 \otimes \boldsymbol{a}_2 \,;\, r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} = \{\lambda_2 \otimes \boldsymbol{a}_2 \oplus \lambda_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 \,;\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}\,?$$
$$r \otimes (r_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 \oplus r_2 \otimes \boldsymbol{a}_2) \in \{\lambda_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 \oplus \lambda_2 \otimes \boldsymbol{a}_2 \,;\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}\,?$$

次節では, Möbius gyrovector space に限ると上の問題は肯定的に解かれ, 自然な一般化が得られること, 応用として直交ジャイロ分解が得られることを説明する.

3 有限生成ジャイロベクトル部分空間と直交ジャイロ分解

簡単のため $s = 1$ の場合を述べる.
Möbius gyrovector space では次が成り立つ：

$$\{r_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 \oplus r_2 \otimes \boldsymbol{a}_2 \,;\, r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} = \{\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 ;\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \cap \mathbb{V}_1$$

for $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{V}_1$.

($\subset$) 演算 $\oplus, \otimes$ の定義から $r_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 \oplus r_2 \otimes \boldsymbol{a}_2$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の線形結合であり, $\mathbb{V}_1$ が gyrovector space であるということに $\oplus, \otimes$ について閉じていることが含まれているので $r_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 \oplus r_2 \otimes \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{V}_1$.
($\supset$) 次の定理による.

定理 3.1.[AW] Let $(\mathbb{V}_1, \oplus, \otimes)$ be the Möbius gyrovector space and $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{V}_1$. Put $\alpha = \dfrac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||} \cdot \dfrac{\boldsymbol{a}_2}{||\boldsymbol{a}_2||}$. Suppose that $0 \neq t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ satisfy the condition

$$\left|\left| t_1 \frac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||} + t_2 \frac{\boldsymbol{a}_2}{||\boldsymbol{a}_2||} \right|\right| < 1.$$

(I) If $2\alpha t_2 + t_1 \neq 0$, then we put

$$c_1 = \frac{{t_1}^2 + 2\alpha t_1 t_2 + {t_2}^2 + 1 - \sqrt{({t_1}^2 + 2\alpha t_1 t_2 + {t_2}^2 + 1)^2 - 8\alpha t_1 t_2 - 4{t_1}^2}}{2(2\alpha t_2 + t_1)}$$

$$c_2 = \frac{{t_1}^2 + 2\alpha t_1 t_2 + {t_2}^2 - 1 + \sqrt{({t_1}^2 + 2\alpha t_1 t_2 + {t_2}^2 + 1)^2 - 8\alpha t_1 t_2 - 4{t_1}^2}}{2t_2}.$$

(II) If $2\alpha t_2 + t_1 = 0$, then we put

$$c_1 = \frac{t_1}{{t_2}^2 + 1}$$

$$c_2 = t_1.$$

Then, we have $0 < |c_1|, |c_2| < 1$ and

$$t_1 \frac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||} + t_2 \frac{\boldsymbol{a}_2}{||\boldsymbol{a}_2||} = r_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 \oplus r_2 \otimes \boldsymbol{a}_2,$$

where

$$r_1 = \frac{\tanh^{-1} c_1}{\tanh^{-1} ||\boldsymbol{a}_1||} \quad \text{and} \quad r_2 = \frac{\tanh^{-1} c_2}{\tanh^{-1} ||\boldsymbol{a}_2||}.$$

これは次の**定理 3.2** から導かれる. **定理 3.2** の証明で x, y の右辺を導くのは難しくないが, 絶対値を 1 と比較することが重要であり, それなりの議論を要する.

定理 3.2.[AW] Consider the following system of equations for real numbers:

$$\begin{cases} x^2y^2 + (\gamma x^2 + 2\alpha x - \gamma)y + 1 = 0 & (1) \\ xy^2 + ((2\alpha + \beta)x^2 - \beta)y + x = 0 & (2) \end{cases}$$

Suppose that $-1 \leq \alpha \leq 1$, $\beta \neq 0$ and $1+\beta(2\alpha+\beta) < \gamma^2$.

(I) If $2\alpha+\beta \neq 0$, then

$$x = \frac{1+\beta(2\alpha+\beta)+\gamma^2-\sqrt{(1+\beta(2\alpha+\beta)+\gamma^2)^2-4(2\alpha+\beta)\beta\gamma^2}}{2(2\alpha+\beta)\gamma}$$
$$y = \frac{1+\beta(2\alpha+\beta)-\gamma^2+\sqrt{(1+\beta(2\alpha+\beta)+\gamma^2)^2-4(2\alpha+\beta)\beta\gamma^2}}{2\gamma}$$

is a unique pair as the solution to the system of equations (1), (2), which satisfies $0 < |x|, |y| < 1$. Moreover,

$$x = \frac{1+\beta(2\alpha+\beta)+\gamma^2+\sqrt{(1+\beta(2\alpha+\beta)+\gamma^2)^2-4(2\alpha+\beta)\beta\gamma^2}}{2(2\alpha+\beta)\gamma}$$
$$y = \frac{1+\beta(2\alpha+\beta)-\gamma^2-\sqrt{(1+\beta(2\alpha+\beta)+\gamma^2)^2-4(2\alpha+\beta)\beta\gamma^2}}{2\gamma}$$

is a unique pair as the solution to the system of equations (1), (2), which satisfies $|x|, |y| > 1$.

(II) If $2\alpha+\beta = 0$, then

$$x = \frac{\beta\gamma}{1+\gamma^2}$$
$$y = \frac{1}{\gamma}$$

is a unique pair as the solution to the system of equations (1), (2), which satisfies $0 < |x|, |y| < 1$.

定義. $\mathbb{V}_1$ の空でない部分集合 M が gyrovector subspace であるとは, M が演算 $\oplus, \otimes$ について閉じていることをいう, すなわち,

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in M,\ r \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} \in M,\ r \otimes \boldsymbol{a} \in M.$$

$\mathbb{V}_1$ の部分集合 A を含むような, $\mathbb{V}_1$ のすべての gyrovector subspace の共通部分を A によって生成された gyrovector subspace といい, $\bigvee^g A$ と表す, すなわち,

$$\bigvee{}^g A = \bigcap \{M;\ A \subset M,\ M \text{ is a gyrovector subspace of } \mathbb{V}_1\}.$$

例えば $n=4$, $(i_1, i_2, i_3, i_4) = (1, 4, 2, 3)$ とする. 数式 $\boldsymbol{c}_1 \oplus \boldsymbol{c}_4 \oplus \boldsymbol{c}_2 \oplus \boldsymbol{c}_3$ に, ジャイロ和の順序を特定するため括弧を書き加えるならば, 以下のように 5 つの可能性が

ある：

$$\boldsymbol{c}_1 \oplus \{\boldsymbol{c}_4 \oplus (\boldsymbol{c}_2 \oplus \boldsymbol{c}_3)\}$$

$$(\boldsymbol{c}_1 \oplus \boldsymbol{c}_4) \oplus (\boldsymbol{c}_2 \oplus \boldsymbol{c}_3)$$

$$\boldsymbol{c}_1 \oplus \{(\boldsymbol{c}_4 \oplus \boldsymbol{c}_2) \oplus \boldsymbol{c}_3\}$$

$$\{\boldsymbol{c}_1 \oplus (\boldsymbol{c}_4 \oplus \boldsymbol{c}_2)\} \oplus \boldsymbol{c}_3$$

$$\{(\boldsymbol{c}_1 \oplus \boldsymbol{c}_4) \oplus \boldsymbol{c}_2\} \oplus \boldsymbol{c}_3$$

定理 3.3.[AW] Let $(\mathbb{V}_1, \oplus, \otimes)$ be the Möbius gyrovector space, $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{V}_1$ and let $(i_1, \cdots, i_n)$ be a permutation of $(1, \cdots, n)$. For an arbitrary given order of gyroaddition for $r_{i_1} \otimes \boldsymbol{a}_{i_1} \oplus \cdots \oplus r_{i_n} \otimes \boldsymbol{a}_{i_n}$, we have the following:

$$\bigvee^g \{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$$

$$= \{r_{i_1} \otimes \boldsymbol{a}_{i_1} \oplus \cdots \oplus r_{i_n} \otimes \boldsymbol{a}_{i_n};\, r_{i_1}, \cdots, r_{i_n} \in \mathbb{R}\}$$

$$= \left\{ t_1 \frac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||} + \cdots + t_n \frac{\boldsymbol{a}_n}{||\boldsymbol{a}_n||};\, t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R} \right\} \cap \mathbb{V}_1.$$

注意. Einstein gyrovector space の有限生成な gyrovector subspace についても同様である.

次に, 直交ジャイロ分解について述べる. 通常の直交分解から具体的かつ容易に求めることができる. また, $s = 1$ の場合から一般の $s > 0$ での結果を導くことも容易である.

定理 3.4.[AW] Let $\mathbb{V}$ be a real Hilbert space and let $(\mathbb{V}_1, \oplus, \otimes)$ be the Möbius gyrovector space, and let M be a gyrovector subspace of $\mathbb{V}_1$ that is topologically relatively closed. Suppose that

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \quad \boldsymbol{x}_1 \in \mathrm{clin} M,\ \ \boldsymbol{x}_2 \in M^{\perp}$$

is the (ordinary) orthogonal decomposition of an arbitrary element $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_1$ with respect to $\mathrm{clin} M$, which is the closed linear subspace generated by M. Then, a unique pair $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ exists that satisfies

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{y} \in M,\ \ \boldsymbol{z} \in M^{\perp} \cap \mathbb{V}_1.$$

Moreover, if $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \neq \mathbf{0}$, then these elements $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ are determined by

$$\boldsymbol{y} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1,\ \ \boldsymbol{z} = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2,$$

where

$$\lambda_1 = \frac{||\boldsymbol{x}_1||^2 + ||\boldsymbol{x}_2||^2 + 1 - \sqrt{(||\boldsymbol{x}_1||^2 + ||\boldsymbol{x}_2||^2 + 1)^2 - 4||\boldsymbol{x}_1||^2}}{2||\boldsymbol{x}_1||^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{||\boldsymbol{x}_1||^2 + ||\boldsymbol{x}_2||^2 - 1 + \sqrt{(||\boldsymbol{x}_1||^2 + ||\boldsymbol{x}_2||^2 + 1)^2 - 4||\boldsymbol{x}_1||^2}}{2||\boldsymbol{x}_2||^2}.$$

In addition, the inequalities $0 < \lambda_1 < 1$ and $\lambda_2 > 1$ hold.

注意. 上記の M が Ungar によって導入された Poincaré の距離 h に関して閉ならば, ノルムに関して相対閉であることが分かるので, 定理が適用可能である.

注意. Einstein gyrovector space でも対応する結果が得られる.

4　ジャイロ線形独立性

定義. 有限集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\} \subset \mathbb{V}_s$ がジャイロ線形独立であるとは, $\{1, \cdots, n\}$ のいかなる置換 $(i_1, \cdots, i_n)$ といかなるジャイロ和の順序に対しても

$$r_{i_1} \otimes \boldsymbol{a}_{i_1} \oplus \cdots \oplus r_{i_n} \otimes \boldsymbol{a}_{i_n} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \cdots = r_n = 0$$

が成り立つことと定義する. 導入で述べた複素数の組 $\{a, b, c\}$ はジャイロ線形独立ではない.

定理 4.1(W). $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\} \subset \mathbb{V}_s$ を線形独立とする. 2 つのジャイロ線形結合 $r_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus r_n \otimes \boldsymbol{a}_n$, $\lambda_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes \boldsymbol{a}_n$ が同じジャイロ和の順序をもち,

$$r_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus r_n \otimes \boldsymbol{a}_n = \lambda_1 \otimes \boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes \boldsymbol{a}_n$$

であるとする. このとき $r_j = \lambda_j \ (j = 1, \cdots, n)$ が成り立つ.

定理 4.2(W). $\mathbb{V}_s$ の有限部分集合に対して, 線形独立とジャイロ線形独立の概念は一致する.

5　Hadamard 空間, 特に Hilbert ball との関係

ここでは, Hadamard 空間の一例の Hilbert ball と gyrovector space の関係について, ごく簡単に触れる. 筆者は文献 [B], [BH], [GR] について, 高阪史明さん（東海大）から聞かれた瀬戸道生さん（防衛大）によって情報をもたらされました. この場を借りてお二人に感謝致します. なお, [GR] は [U1] の文献表に載っています.

定義 (Hilbert ball).[GR] $\mathcal{H}$ を複素 Hilbert 空間とする. 任意の $x, y \in \mathbb{B} = \{x \in \mathcal{H}; ||x|| < 1\}$ に対して

$$\rho(x, y) = \tanh^{-1}(1 - \sigma(x, y))^{\frac{1}{2}}$$

と定める, ここで

$$\sigma(x, y) = \frac{(1 - ||x||^2)(1 - ||y||^2)}{|1 - \langle x, y\rangle|^2}.$$

定理.[GR] $(\mathbb{B}, \rho)$: Hadamard space (= complete CAT(0) space).

一方, gyrovector space の脈絡で以下が知られる.

定義と定理.[U1] 一般の gyrovector space $(G, \oplus, \otimes)$ 上で d が

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ||\ominus \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}||$$

for $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}_s$ によって定義される.

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \leq d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \oplus d(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \qquad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in G)$$

が成り立つ. Einstein gyrovector space 上のものを d_{E} と表し, Möbius gyrovector space 上のものをまた単に d と表す.

定義.[U1] Einstein gyrovector space $(\mathbb{V}_s, \oplus_{\mathrm{E}}, \otimes_{\mathrm{E}})$ 上で h_{E} が, Möbius gyrovector space $(\mathbb{V}_s, \oplus, \otimes)$ 上で h が

$$h_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \tanh^{-1} \frac{d_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{s} \qquad h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \tanh^{-1} \frac{d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{s}$$

for $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}_s$ によって定義される.

定理.[U1] 以下が成り立つ.

$$h_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \leq h_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + h_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \qquad h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \leq h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + h(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{V}_s)$$

したがって $(\mathbb{V}_s, h_{\mathrm{E}})$, $(\mathbb{V}_s, h)$ は距離空間となる. さらに $\mathbb{V}$ が Hilbert 空間ならばそれらも完備であることが分かる.

定理 5.1(W). 以下が成り立つ.

(i) $\dfrac{d_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{s} = (1 - \sigma(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))^{\frac{1}{2}}$

(ii) $h_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(iii) $2h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \rho(2 \otimes \boldsymbol{a}, 2 \otimes \boldsymbol{b})$.

ただし, Goebel and Reich の記号 ρ, σ を実内積空間の開球 $\mathbb{V}_s$ に自然に流用する.

6　直交基底に関する直交ジャイロ展開

定理 6.1(W). M を h-closed gyrovector subspace of $\mathbb{V}_s$ で, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_s$ とする.

(1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{y} \in M$, $\boldsymbol{z} \in M^{\perp} \cap \mathbb{V}_s$ を M に関する直交ジャイロ分解とする. このとき, $\boldsymbol{y}$ は M の元として h に関する $\boldsymbol{x}$ の最近点である. すなわち $\boldsymbol{y}$ は次の等式を満たす：

$$h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \inf_{\boldsymbol{m} \in M} h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{m}). \tag{3}$$

(2) 逆に, $\boldsymbol{y}$ が M の元として h に関する $\boldsymbol{x}$ の最近点であるとする, すなわち $\boldsymbol{y} \in M$ で等式 (3) を満たすとする. このとき,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \oplus (\ominus \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{x})$$

は M に関する直交ジャイロ分解である. すなわち $\ominus \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{x} \in M^{\perp} \cap \mathbb{V}_s$.

定義. (i) $\{\boldsymbol{a}_n\}_n$ を $\mathbb{V}_s$ 内の列とする. 級数

$$\Big(\big((\boldsymbol{a}_1 \oplus \boldsymbol{a}_2) \oplus \boldsymbol{a}_3\big) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{a}_n\Big) \oplus \cdots$$

が収束するとは, ある $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_s$ が存在して $h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_n) \to 0 \ (n \to \infty)$ であることをいう. ここで列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_n$ は $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{a}_1$ および $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_{n-1} \oplus \boldsymbol{a}_n$ によって帰納的に定義されるものである. このとき

$$\boldsymbol{x} = \Big(\big((\boldsymbol{a}_1 \oplus \boldsymbol{a}_2) \oplus \boldsymbol{a}_3\big) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{a}_n\Big) \oplus \cdots$$

と表す.
(ii) $\{a_n\}_n$ を $|a_n| < s$ なる実数列とする. 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}^{\oplus} a_n = a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n \oplus \cdots$$

が収束するとは, ある $|x| < s$ なる実数 x が存在して $x_n \to x$ であることをいう. ここで列 $\{x_n\}_n$ は $x_1 = a_1$ および $x_n = x_{n-1} \oplus a_n$ によって帰納的に定義されるものである. このとき

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}{}^{\oplus} a_n$$

と表す.

補題. $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\} \subset \mathbb{V}_s$ が直交系ならば $\oplus$ は結合的である, すなわち

$$\boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{w}.$$

Proof. By [U1, (3.147), (3.148)], the gyration in the Möbius gyrovector spaces $\mathbb{V}_s$ can be expressed by the equation

$$\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + 2\frac{A\boldsymbol{u}+B\boldsymbol{v}}{D},$$

where

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{s^4}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}||\boldsymbol{v}||^2 + \frac{1}{s^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} + \frac{2}{s^4}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}) \\ B &= -\frac{1}{s^4}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}||\boldsymbol{u}||^2 - \frac{1}{s^2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} \\ D &= 1 + \frac{2}{s^2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{1}{s^4}||\boldsymbol{u}||^2||\boldsymbol{v}||^2 \end{aligned}$$

for all $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \mathbb{V}_s$. See also [W1, Proposition 2.14] for a proof by hand calculation. If $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$ is orthogonal, then we have $A = B = 0$, so that $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}$. □

定理 6.2(W). $\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実 Hilbert 空間 $\mathbb{V}$ の正規直交系とする．$\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $0 < w_n < s$ なる実数列とする．任意の実数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して以下は同値：

(i) 級数 $r_1\otimes w_1\boldsymbol{e}_1 \oplus r_2\otimes w_2\boldsymbol{e}_2 \oplus \cdots \oplus r_n\otimes w_n\boldsymbol{e}_n \oplus \cdots$ はある $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_s$ に収束する．

(ii) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}{}^{\oplus}\frac{(r_n\otimes w_n)^2}{s}$ はある $|x| < s$ なる実数 x に収束する．

定理 6.3(W). $\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実 Hilbert 空間 $\mathbb{V}$ の正規直交基底とする．$\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $0 < w_n < s$ なる実数列とする．このとき，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_s$ は次のように直交ジャイロ展開される：

$$\boldsymbol{x} = r_1\otimes w_1\boldsymbol{e}_1 \oplus r_2\otimes w_2\boldsymbol{e}_2 \oplus \cdots \oplus r_n\otimes w_n\boldsymbol{e}_n \oplus \cdots .$$

直交ジャイロ展開係数 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ は具体的な手続きで計算できる．

References

[A] Toshikazu Abe, On gyrolinear spaces (Oral presentation), the 90th Yonezawa Mathematics Seminar, July 2nd, 2016.

[AH] Toshikazu Abe and Osamu Hatori, Generalized gyrovector spaces and a Mazur-Ulam theorem, Publ. Math. Debrecen **87** (2015), no. 3-4, 393–413.

[AW] Toshikazu Abe and Keiichi Watanabe, Finitely generated gyrovector subspaces and orthogonal gyrodecomposition in the Möbius gyrovector space, J. Math. Anal. Appl. **449** (2017), no. 1, 77–90. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.11.039

[B] Miroslav Bačák, *Convex analysis and optimization in Hadamard spaces*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 22, De Gruyter GmbH, Berlin/Boston (2014)

[BH] Martin R. Bridson and André Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 319. Springer-Verlag, Berlin, 1999. xxii+643 pp.

[BM] Roberto Beneduci and Lajos Molnár, On the standard K-loop structure of positive invertible elements in a C^*-algebra, J. Math. Anal. Appl. **420** (2014), no. 1, 551–562.

[GR] Kazimierz Goebel and Simeon Reich, *Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 83, Marcel Dekker, Inc., New York, 1984.

[U1] Abraham Albert Ungar, *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2008.

[U2] Abraham Albert Ungar, From Möbius to gyrogroups, Amer. Math. Monthly **115** (2008), no. 2, 138–144.

[W1] Keiichi Watanabe, A confirmation by hand calculation that the Möbius ball is a gyrovector space, Nihonkai Math. J. **27** (2016), 99–115.

[W2] Keiichi Watanabe, Orthogonal gyroexpansion in Möbius gyrovector spaces, preprint.

非線形積分の収束定理の統一的定式化

河邊　淳　(信州大学工学部)

1　はじめに

非加法的測度は数学的には空集合で零となる単調増加な集合関数である．非加法的測度とその積算概念としての非線形積分は古くから断片的には研究されていたが，1961 年の Ellsberg [5] の壺の実験により，その重要性が再認識された．この心理実験によれば，不完全な情報下での人間行動を説明するには，非加法的測度とその非線形な積算概念である Choquet 積分や Sugeno 積分を土台とする期待効用理論の構築が必要となる．このように，非加法的測度論と非線形積分論は，工学や社会科学分野の研究者からの切実な要請に基づき，従来の測度論から “加法性” を，積分論から “線形性” の呪縛を取り払い，現実社会の問題に適切に対応可能な理論構成を目的として登場した新理論で，数学的には『測度論の非加法化，積分論の非線形化，さらには両理論の精密化』を目指す理論と考えられている．

測度論の研究者の多くは，測度に加法性を仮定しなければ実りある理論は得られないと考えていた．しかし，1974 年の Sugeno [28] による工学的視点，Dobrakov [4] による数学的視点からの基礎研究が出発点となり，その後の多くの数学者，工学者，数理経済学者らによる理論と応用の両面にわたる多岐の研究の結果，測度論の様々な重要定理が実用的なより弱い加法性や連続性のもとで成立することがわかってきた．それらの研究は早くも 1990 年代前半には Wang & Klir [33, 34]，Denneberg [3]，Pap [21] らの専門書にまとめられた．

一方，非加法的測度の積算概念である非線形積分は，期待効用理論や主観的評価問題，測度論・積分論の精密化の観点から重要であるが，測度の非加法性に起因して，Lebesgue 流の積分の定義をそのまま適用しただけでは合理的な積分とはならない．また，数学理論では 2 項演算は加法と乗法が基本であるが，工学や社会科学分野ではこれに加えて，束演算である上限と下限がよく用いられる．そこで非加法的測度論の応用分野では，加法と乗法で定義される Choquet 積分，上限と下限で定義される Sugeno 積分，上限と乗法で定義される Shilkret 積分などから，具体的な問題ごとに適切な積分を取捨選択して積算概念として利用している．

これら非線形積分を実用化し，様々な分野への応用を目指すには，単調収束定理や有界収束定理などの積分収束定理の確立が必須である．実際，工学分野では，積分収束定理は

本研究は JSPS 科研費 17K05293 の助成を受けたものです．

積分による集約過程 (aggregation process) の頑健性 (robustness)，安定性 (stability)，非カオス性 (non-chaos) を表すと考えられている．しかし，非線形積分に対する積分収束定理は，従来は各積分ごとに個別に議論されきた．それゆえ，定理の定式化や証明方法も各積分固有の定義や性質に深く依存していて，見通しのよい理論構成ではなかった．

この小論では，一連の論文 [8–11, 13–16] に基づき，これら非線形積分の収束定理を函数解析的な観点から統一的に議論する一つの方法論を紹介する．まず第 2 章で基本的な用語や記法を準備したのち，第 3 章で代表的な非線形積分である Choquet 積分，Šipoš 積分，Sugeno 積分，Shilkret 積分を紹介する．第 4 章では非線形積分を非加法的測度の空間と非負可測関数の空間の直積空間上で定義された非線形の積分汎関数とみなすことにより，これら非線形積分が共通してもつ性質を積分汎関数の言葉で定式化する．この共通的性質の中でもとりわけ重要なのが積分汎関数の摂動性で，被積分関数 f と，非加法的測度 μ が定める f の減少分布関数 $G_\mu(f) := \mu(\{f > t\})$ をそれぞれ微少に変化させたときの積分値の微少な変化を線形的にとらえるために利用される．第 5 章では，第 4 章で定式化した積分汎関数に対する諸性質，特に積分汎関数の摂動性を用いて，個別の非線形積分に対してはすでに一部確立されている単調収束定理，有界収束定理，Vitali の収束定理などの積分収束定理を，積分汎関数を用いて個別の積分形に依らない形で統一的に定式化する．

2　準備

X は空でない集合，$\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる集合体とする．$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ は実数全体，$\mathbb{N}$ は自然数全体，$\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ は通常の全順序構造と代数構造をもつ拡大実数体とし，積分論を議論する際に用いられる規約

$$(\pm\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (\pm\infty) = 0$$

も仮定する．また，任意の空でない集合 $A \subset \mathbb{R}$ が $\overline{\mathbb{R}}$ で常に上限と下限をもつように，A が $\mathbb{R}$ で上に (下に) 有界でないとき，$\sup A := \infty$ ($\inf A := -\infty$) と定める．さらに，$\inf \emptyset = \infty$ と規約する．

拡大実数 $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ に対して，$\max\{a, b\}$ を $a \vee b$ で，$\min\{a, b\}$ を $a \wedge b$ で表す．また，関数 $f_\alpha \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ の族 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \varGamma}$ に対して，その上限関数 $\sup_{\alpha \in \varGamma} f_\alpha$，下限関数 $\inf_{\alpha \in \varGamma} f_\alpha$ を，各点 $x \in X$ における関数値の集合 $\{f_\alpha(x) \colon \alpha \in \varGamma\}$ の上限，下限として，それぞれ

$$(\sup_{\alpha \in \varGamma} f_\alpha)(x) := \sup_{\alpha \in \varGamma} f_\alpha(x), \quad (\inf_{\alpha \in \varGamma} f_\alpha)(x) := \inf_{\alpha \in \varGamma} f_\alpha(x)$$

で定める．特に，関数 $f, g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して，その上限関数を $f \vee g$，下限関数を $f \wedge g$

で表す．すなわち，任意の $x \in X$ に対して，

$$(f \vee g)(x) := f(x) \vee g(x), \quad (f \wedge g)(x) := f(x) \wedge g(x)$$

とする．

関数 $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ は，任意の $t \in \overline{\mathbb{R}}$ に対して，$\{f \geq t\}, \{f > t\} \in \mathcal{A}$ のとき **$\mathcal{A}$-可測**といい，その全体を $\mathcal{F}(X)$ で表す．特に，$\mathcal{A}$-可測な実数値関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ の全体を $\mathcal{F}_0(X)$ で表す．また，$\mathcal{F}^+(X) := \{f \in \mathcal{F}\colon f \geq 0\}$，$\mathcal{F}_0^+(X) := \{f \in \mathcal{F}_0(X)\colon f \geq 0\}$ とおく．f, g が $\mathcal{A}$-可測で，$c \in \mathbb{R}$ ならば，$f^+ := f \vee 0$，$f^- := (-f) \vee 0$，$|f| := f \vee (-f)$，cf，$f + c$，$(f - c)^+$，$f \vee g$，$f \wedge g$ は $\mathcal{A}$-可測で，

$$f = f \wedge c + (f - c)^+$$

が成り立つ．有限個の実数を値にもつ関数を**単関数**といい，$\mathcal{A}$-可測な単関数全体を $\mathcal{S}(X)$ で表す．また，$\mathcal{S}^+(X) := \{f \in \mathcal{S}(X)\colon f \geq 0\}$ とおく．関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(X)$ と関数 $f \in \mathcal{F}(X)$ に対して，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調に増加して f に各点収束するとき $f_n \uparrow f$ とかき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調に減少して f に各点収束するとき $f_n \downarrow f$ とかく．関数の有向列 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathit{\Gamma}}$ に対しても，$f_\alpha \uparrow f$ や $f_\alpha \downarrow f$ を同様に定める．$\mathcal{A}$ が集合体の場合でも，任意の $f \in \mathcal{F}^+(X)$ に対して，単調増加な単関数列 $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}^+(X)$ が存在して $h_n \uparrow f$ となる．また，f が有界ならばこの収束は一様である．

この小論では実数の他に拡大実数も取り扱う．そこで，記述の曖昧さを避けるため，正の数 c が正の無限大 ∞ も取り得る場合は明確に $c \in (0, \infty]$ と表す．言い換えれば，$c > 0$ は常に $c \in (0, \infty)$ を意味する．他の場合も同様な記法を用いる．

われわれがこれから議論する非加法的測度の定義は数学的にはいたく単純であり，通常の有限加法的測度や σ-加法的測度をその非常に特別な場合として含んでいる．

定義 1 (非加法的測度)． 集合関数 $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ は

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ (下方有界性)

(ii) $A, B \in \mathcal{A}$ で $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ (単調増加性)

を満たすとき，X 上の**非加法的測度** (nonadditive measure) または**単調測度** (monotone measure) という．さらに**ファジィ測度** (fuzzy measure)，**容量** (capacity)，**一般化測度** (generalized measure) ということもある．

定義 1 の単調増加性 (ii) を次の条件

(iii) $A, B \in \mathcal{A}$ で $A \cap B = \emptyset$ ならば $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (有限加法性)

に替えたものが**有限加法的測度** (finitely additive measure) で，次の条件

(iv) $A_n \in \mathcal{A}\ (n=1,2,\dots)$，$A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j)$，$\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$ ならば

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \quad (\sigma\text{-加法性})$$

に替えたものが **σ-加法的測度** (σ-additive measure) である．有限加法的な非負の集合関数は単調増加なので，σ-加法的測度や有限加法的測度は非加法的測度の非常に特別な場合となる．以下では，X 上の非加法的測度全体を $\mathcal{M}(X)$ で表す．$\mu(X) < \infty$ のとき μ は**有限**といい，有限な $\mu \in \mathcal{M}(X)$ の全体を $\mathcal{M}_b(X)$ で表す．$\mu \in \mathcal{M}_b(X)$ に対して，その**双対** $\bar{\mu}\colon \mathcal{A} \to [0,\infty)$ を

$$\bar{\mu}(A) := \mu(X) - \mu(X \setminus A), \quad A \in \mathcal{A}$$

で定義する．明らかに $\bar{\bar{\mu}} = \mu$ である．また，μ が有限加法的ならば $\bar{\mu} = \mu$ となる．

集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ と集合 $A \in \mathcal{A}$ に対して，$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加で $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ のとき $A_n \uparrow A$ とかき，$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調減少で $A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$ のとき $A_n \downarrow A$ とかく．また，集合 A の定義関数を χ_A で表す.

非加法的測度の連続性は通常の測度と同様に定めることができる．$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ と任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して，$A_n \downarrow A$ ならば $\mu(A_n) \to \mu(A)$ のとき，μ は**上から連続** (continuous from above)，$A_n \downarrow A$ かつ $\mu(A_1) < \infty$ ならば $\mu(A_n) \to \mu(A)$ のとき，**上から条件連続** (conditionally continuous from above)，$A_n \uparrow A$ ならば $\mu(A_n) \to \mu(A)$ のとき，μ は**下から連続** (continuous from below) という．また，μ は上から連続かつ下から連続のとき**連続** (conitnuous)，上から条件連続かつ下から連続のとき**条件連続** (conditionally continuous) という．

集合関数の σ-加法性からは一般には条件連続性しか導けないことや, $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度が上から連続でないこともあって，通常の測度論では上からの連続性は取り扱わない．しかし，加法性を仮定しない非加法的測度論では，$\mathbb{R}$ 上の確率測度 p を

$$\theta(t) := \begin{cases} \tan\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) & \text{if } t \in [0,1) \\ \infty & \text{if } t = 1 \end{cases}$$

で定まる関数 $\theta\colon [0,1] \to [0,\infty]$ で歪めるだけで，簡単に連続な $\mathbb{R}$ 上の無限非加法的測度 $\mu = \theta \circ p$ が作れてしまうので，条件連続性だけでなく，連続性も考察の対象とすることが多い.

非加法的測度論では零集合の定義は数種類あるが，この小論では零集合やほとんど至るところでの命題の成立性などの概念，さらには関数列の概収束性や測度収束性は通常の測度論と全く同様に定義する．非加法的測度に関するその他の基本的用語や性質は，必要に応じて [12] を参照いただきたい.

3 非線形積分

この章では，関数 f の **μ-減少分布関数** (μ-decreasing distribution function)

$$G_{\mu,f}(t) := \mu(\{f \geq t\}), \quad t \in \mathbb{R}$$

を用いて定義される**分布型積分** (distribution-based integral) の特殊形のなかで，非加法的測度論及びその応用領域で広く用いられている次の 4 つの積分を紹介する．

定義 2. $(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ とする．

(1) **Choquet 積分** [2,23]:

$$\mathrm{Ch}(\mu, f) := \int_0^\infty \mu(\{f \geq t\})dt$$

ただし，右辺は通常の Lebesgue 積分あるいは広義 Riemann 積分である．

(2) **Šipoš 積分** [25]:

$$\mathrm{Si}(\mu, f) := \lim_{P \in \Delta^+} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\mu(\{f \geq a_i\})$$

ただし，Δ^+ は $[0, \infty]$ の分割 $P = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $(0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n < \infty)$ 全体からなる集合族に，集合の包含関係で定まる順序を導入した有向集合である．

(3) **Sugeno 積分** [22,28]:

$$\mathrm{Su}(\mu, f) := \sup_{t \in [0,\infty]} \bigl[t \wedge \mu(\{f \geq t\})\bigr]$$

(4) **Shilkret 積分** [24,36]:

$$\mathrm{Sh}(\mu, f) := \sup_{t \in [0,\infty]} \bigl[t \cdot \mu(\{f \geq t\})\bigr]$$

注意 3. 任意の非加法的測度 μ に対して Choquet 積分と Šipoš 積分は一致し，μ が σ-加法的ならば抽象 Lebesgue 積分とも一致する [25,26]．それゆえ，Choquet 積分と Šipoš 積分の定義には数学上の違いはない．実際，Šipoš 積分の定義は，単調減少な非負関数 $\mu(\{f \geq t\})$ の広義 Riemann 積分のより初等的な定義に他ならない．それにもかかわらず，Choquet 積分に加えて Šipoš 積分も考察することには意義がある．なぜなら，Šipoš 積分は Lebesgue 積分を用いずに定義できるので，その理論を探求すれば，抽象 Lebesgue 積分も含めた線形・非線形積分の一般論を，Lebesgue 積分の知識を何ら仮定せずに展開可能となるからである．

非線形積分には上記の 4 つの分布型積分の他に，Lehrer と Teper による凹積分

(concave integral) [17]，Yang [35] による pan 積分 (pan integral)，Wang による上方積分 (upper integral) や下方積分 (lower integral) [34]，さらには本田と岡崎が最近導入した包除積分 (inclusion-exclusion integral) [6,7] の連続化など，有限可測分割を用いて定義される**分割型積分** (decomposition-based integral) も重要であるが，紙面の都合上，それらの議論は別の機会に譲ることにする．

4 非線形積分汎関数

この章では，Choquet 積分，Šipoš 積分，Sugeno 積分，Shilkret 積分などの分布型積分が共通にもつ重要な性質の中で，この小論で必要なものを関連する諸概念と併せて解説する．この章以降の主な内容は筆者の論文 [8–11, 13–16] の一部をまとめたものなので，煩雑を避けるため，今後は文献を個別に引用しない．必要があれば，上記 8 つの論文及びその引用文献を参照いただきたい．

以下では，$I\colon \mathcal{M}(X)\times\mathcal{F}^+(X)\to[0,\infty]$ は**積分汎関数** (integral functional)，すなわち，

(i) 任意の $\mu\in\mathcal{M}(X)$ に対して $I(\mu,0)=0$

(ii) 任意の $\mu\in\mathcal{M}(X)$ と任意の $f,g\in\mathcal{F}^+(X)$ に対して，$f\le g$ ならば $I(\mu,f)\le I(\mu,g)$

を満たすとする．

定義 4. $I\colon \mathcal{M}(X)\times\mathcal{F}^+(X)\to[0,\infty]$ は積分汎関数とする．

(1) 任意の $(\mu,f)\in\mathcal{M}(X)\times\mathcal{F}^+(X)$ に対して，

$$I(\mu,f)=\sup\left\{I(\mu,h)\colon h\in\mathcal{S}^+(X),\, h\le f\right\}$$

のとき，I は**内正則** (inner regular) という．

(2) 任意の $(\mu,f)\in\mathcal{M}(X)\times\mathcal{F}^+(X)$ に対して，

$$I(\mu,f)=\sup_{r>0} I(\mu,f\wedge r)$$

のとき，I は**上縁連続** (upper marginal continuous) という．

(3) 任意の $(\mu,f)\in\mathcal{M}(X)\times\mathcal{F}^+(X)$ に対して，

$$I(\mu,f)=\sup_{r>0} I(\mu,(f-r)^+)$$

のとき，I は**下縁連続** (lower marginal continuous) という．

(4) 任意の $(\mu,f)\in\mathcal{M}(X)\times\mathcal{F}^+(X)$ に対して，

$$I(\mu,f)=\sup_{s>0} I(\mu\wedge s,f)$$

のとき，I は**測度切断的** (measure-truncated) という．

(5) 任意の $(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ と任意の $c > 0$ に対して，

$$I(\mu, f) \leq I(\mu, f \wedge c) + I(\mu, (f-c)^+)$$

のとき，I は**水平劣加法的** (horizontally subadditive)，等号が成り立つとき，**水平加法的** (horizontally additive) という．

上記の各特性を Choquet 積分が定める積分汎関数

$$\mathrm{Ch}(\mu, f) := \int_0^\infty \mu(\{f \geq t\})dt, \quad (\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$$

に対して記述してみると，その意味するところが理解しやすい．例えば，

- 上縁連続性: $\displaystyle\int_0^\infty \mu(\{f \geq t\})dt = \sup_{r>0} \int_0^r \mu(\{f \geq t\})dt$
- 下縁連続性: $\displaystyle\int_0^\infty \mu(\{f \geq t\})dt = \sup_{r>0} \int_r^\infty \mu(\{f \geq t\})dt$
- 水平加法性: $\displaystyle\int_0^\infty \mu(\{f \geq t\})dt = \int_0^c \mu(\{f \geq t\})dt + \int_c^\infty \mu(\{f \geq t\})dt$

となる．

命題 5. 積分汎関数 Ch，Si，Su，Sh は内正則，上縁連続，下縁連続，測度切断的である．また，Ch と Si は水平加法的である．一方，Su と Sh は水平劣加法的である．

次に単関数に対する積分汎関数の値を統一的に表すのに役立つ擬加法と擬減法について，その定義と具体例を述べる [1, 29].

定義 6. 2 項演算 $\oplus$: $[0,\infty]^2 \to [0,\infty]$ は，任意の $a, b, a', b', a_0, b_0 \in [0,\infty]$ に対して，次の 5 つの条件

(A1) $a \oplus b = b \oplus a$ (交換法則)

(A2) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (結合法則)

(A3) $a \leq a', b \leq b'$ ならば $a \oplus b \leq a' \oplus b'$ (単調性)

(A4) $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$ (零元の存在)

(A5) $\oplus$ は $[0,\infty]^2$ 上で連続，すなわち，$\lim_{(a,b)\to(a_0,b_0)} a \oplus b = a_0 \oplus b_0$ (連続性)

を満たすとき**擬加法** (pseudo-addition) という．また，各 $a, b \in [0,\infty]$ に対して

$$a \ominus b := \inf\{x \in [0,\infty] \colon b \oplus x \geq a\}$$

で定義される 2 項演算 $\ominus$: $[0,\infty]^2 \to [0,\infty]$ を (擬加法 $\oplus$ が定める) **擬減法** (pseudo-difference) という．

例 7. (1) $g\colon [0,\infty]\to[0,\infty]$ は単調増加な全単射とする．各 $a,b\in[0,\infty]$ に対して

$$a\oplus b := g^{-1}(g(a)+g(b))$$

で定義される 2 項演算 $\oplus\colon [0,\infty]^2\to[0,\infty]$ は擬加法で，その擬減法は

$$a\ominus b := \begin{cases} g^{-1}(g(a)-g(b)) & \text{if } a>b,\\ 0 & \text{if } a\le b.\end{cases}$$

特に，$a\oplus b := a+b$ は擬加法で，$a>b$ のとき，$a\ominus b = a-b$ となる．
(2) 各 $a,b\in[0,\infty]$ に対して

$$a\oplus b := a\vee b$$

で定義される 2 項演算 $\oplus\colon [0,\infty]^2\to[0,\infty]$ は擬加法で，その擬減法は

$$a\ominus b := \begin{cases} a & \text{if } a>b,\\ 0 & \text{if } a\le b.\end{cases}$$

単関数 $h\colon X\to[0,\infty)$ の値域から 0 を除いた集合が $h(X)\setminus\{0\}=\{r_1,r_2,\ldots,r_n\}$ (ただし，$n\in\mathbb{N}$，$0=r_0<r_1<\cdots<r_n<\infty$) のとき，どんな擬加法 $\oplus$ に対しても，

$$h=\bigoplus_{i=1}^{n}(r_i\ominus r_{i-1})\chi_{\{h\ge r_i\}}$$

と表される．特に，$\oplus=+,\vee$ のときは,

$$h=\sum_{i=1}^{n}(r_i-r_{i-1})\chi_{\{h\ge r_i\}}=\bigvee_{i=1}^{n}r_i\chi_{\{h\ge r_i\}}$$

となる．単関数に対する積分汎関数の値の計算には，次の生成性と初等性が必要となる．

定義 8. $I\colon \mathcal{M}(X)\times\mathcal{F}^+(X)\to[0,\infty]$ は積分汎関数とする．

(1) 関数 $\theta\colon [0,\infty]^2\to[0,\infty]$ が存在して，任意の $\mu\in\mathcal{M}(X)$，$r\in[0,\infty]$，$A\in\mathcal{A}$ に対して

$$I(\mu,r\chi_A)=\theta(r,\mu(A))$$

のとき，I は**生成的** (generative)，θ を I の**生成器** (generator) という．

(2) I は生成的で，その生成器を θ とする．擬加法 $\oplus\colon [0,\infty]^2\to[0,\infty]$ が存在して，任意の $\mu\in\mathcal{M}(X)$，$n\in\mathbb{N}$，$r_1,\ldots,r_n\in(0,\infty)$，$A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{A}$ に対して，$0=r_0<r_1<\cdots<r_n$ かつ $A_1\supset\cdots\supset A_n$ ならば

$$I\left(\mu,\bigoplus_{i=1}^{n}(r_i\ominus r_{i-1})\,\chi_{A_i}\right)=\bigoplus_{i=1}^{n}\theta\big(r_i\ominus r_{i-1},\mu(A_i)\big)$$

のとき，I は**初等的** (elementary) という．

命題 9. 積分汎関数 Ch，Si，Su，Sh は次の性質をもつ．

(1) 積分汎関数 Ch，Si は生成的かつ初等的で，その生成器は $\theta(a,b) = a \cdot b$，擬加法は $a \oplus b = a + b$ である．

(2) 積分汎関数 Su は生成的かつ初等的で，その生成器は $\theta(a,b) = a \wedge b$，擬加法は $a \oplus b = a \vee b$ である．

(3) 積分汎関数 Sh は生成的かつ初等的で，その生成器は $\theta(a,b) = a \cdot b$，擬加法は $a \oplus b = a \vee b$ である．

生成性や初等性をもつ積分汎関数の生成器は，実際には次の諸性質を満たしていることが多い．

定義 10. $\theta\colon [0,\infty]^2 \to [0,\infty]$ は 2 変数関数とする．

(1) 任意の $a, b \in [0,\infty]$ に対して，a，b がともに有限ならば $\theta(a,b) < \infty$ のとき，θ は**有限型** (of finite type) という．

(2) $[0,\infty]^2$ から 2 点 $(0,\infty)$ と $(\infty,0)$ を取り除いた集合 $D := [0,\infty]^2 \setminus \{(0,\infty),(\infty,0)\}$ 上で連続のとき，θ は**連続型** (of continuous type) という．

(3) 任意の $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty]$ と $b \in [0,\infty]$ に対して，すべての $r \in (0,\infty)$ で $\theta(r,b_n) \to \theta(r,b)$ が成り立てば $b_n \to b$ のとき，θ は**極限保存的** (limit preserving) という．

命題 11. 2 変数関数 $\theta(a,b) := a \cdot b$, $a \wedge b$ は有限型，連続型，極限保存的である．

集合関数と関数の組 (μ, f) に対して次の順序関係を導入する．

定義 12. $\mu, \nu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ は集合関数，$f, g \in \mathcal{F}(X)$ とする．任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mu(\{f \geq t\}) \leq \nu(\{g \geq t\})$$

のとき，(μ, f) は (ν, g) により**支配される** (dominated) といい，$(\mu, f) \prec (\nu, g)$ とかく．

以下では,

$$\varphi(0) = \lim_{t\to+0} \varphi(t) = 0$$

を満たす関数 $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 全体を Φ で表し，Φ に属する関数を**制御関数** (control function) とよぶ．また，$f \in \mathcal{F}(X)$ に対して,

$$\mu(\{f \geq r\}) = 0 \text{ かつ } \mu(\{f \geq -r\}) = \mu(X)$$

を満たす $r \in (0,\infty)$ の下限を $\|f\|_\mu$ で表し，f の $\boldsymbol{\mu}$**-本質的有界定数**という．$\|f\|_\mu < \infty$ のとき，f は $\boldsymbol{\mu}$**-本質的有界** (μ-essentially bounded) という．任意の有界関数 $f \in \mathcal{F}(X)$

は μ-本質的有界で,

$$\|f\|_\mu \leq \|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

が成り立つ．また，非負関数 $f \in \mathcal{F}^+(X)$ に対しては，f の μ-本質的有界定数と μ-本質的上限は一致する．

次に紹介する積分汎関数 I の摂動性は，非加法的測度 μ による関数 f の非線形積分 $I(\mu, f)$ において，f を微小量 ε だけ，f の μ-減少分布関数 $\mu(\{f \geq t\})$ を微小量 δ だけ変化させたときの積分値の変化を上手に制御するための条件で，非線形積分の収束定理の統一的定式化に際して本質的な役割を果たす．

定義 13. $I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ は積分汎関数とする．

(1) 任意の $\mu \in \mathcal{M}(X)$ と任意の $f, g \in \mathcal{F}^+(X)$ に対して，$(\mu, f) \prec (\mu, g)$ ならば $I(\mu, f) \leq I(\mu, g)$ のとき，I は**強単調** (s-monotone) という．

(2) 制御関数族 $\{\varphi_p\}_{p>0} \subset \Phi$ と $\{\psi_q\}_{q>0} \subset \Phi$ が存在して，摂動条件 (P): 任意の $\mu \in \mathcal{M}(X)$，$f, g \in \mathcal{F}^+(X)$，$\varepsilon \geq 0$，$\delta \geq 0$，$p > 0$，$q > 0$ に対して，$\|f\|_\mu < p$，$\mu(X) < q$，$(\mu, f) \prec (\mu + \delta, g + \varepsilon)$ ならば

$$I(\mu, f) \leq I(\mu, g) + \varphi_p(\delta) + \psi_q(\varepsilon)$$

を満たすとき，I は**摂動的** (perturbative) という．

命題 14. 積分汎関数 $\mathrm{Ch}, \mathrm{Si}, \mathrm{Su}, \mathrm{Sh}\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ は強単調かつ摂動的である．また，その制御関数族はそれぞれ

$$\varphi_p(t) = pt,\, pt,\, p \wedge t,\, pt, \quad \psi_q(t) = qt,\, qt,\, q \wedge t,\, qt$$

と選べる．

$I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ は積分汎関数とする．各 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ に対して，

$$I_\mu(f) := I(\mu, f), \quad f \in \mathcal{F}^+(X)$$

で定まる汎関数 $I_\mu\colon \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ は

(i) $I_\mu(0) = 0$

(ii) 任意の $f, g \in \mathcal{F}^+(X)$ に対して，$f \leq g$ ならば $I_\mu(f) \leq I_\mu(g)$

を満たす．この I_μ を I が定める **μ-積分汎関数** (μ-integral functional) という．与えられた $\mu \in \mathcal{M}(X)$ に対して，定義 4 の内正則性，上縁連続性，下縁連続性，測度切断性，水平劣加法性，水平加法性の各条件が，その固定した μ に対して満たされるならば，I_μ は**内正則**，**上縁連続**，**下縁連続**，**測度切断的**，**水平劣加法的**，**水平加法的**という．例え

ば，任意の $f \in \mathcal{F}^+(X)$ に対して

$$I_\mu(f) = \sup_{r>0} I_\mu(f \wedge r)$$

が成り立つとき I_μ は上縁連続といい，

$$I_\mu(f) = \sup_{s>0} I(\mu \wedge s, f)$$

が成り立つとき I_μ は測度切断的という．同様に，与えられた $\mu \in \mathcal{M}(X)$ に対して，定義 8 の生成性や初等性，定義 13 の強単調性や摂動性の各条件が，その固定した μ に対して満たされるならば，I_μ は**生成的**，**初等的**，**強単調**，**摂動的**という．定義の解釈に誤解が生じないように，もう一度，積分汎関数 I_μ の摂動性の定義を述べておく．

定義 15. $I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0,\infty]$ は積分汎関数，$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．I が定める μ-積分汎関数を $I_\mu\colon \mathcal{F}^+(X) \to [0,\infty]$ とする．制御関数族 $\{\varphi_p\}_{p>0} \subset \Phi$ と $\{\psi_q\}_{q>0} \subset \Phi$ が存在して，摂動条件 $(\mathrm{P})_\mu$: 任意の $f, g \in \mathcal{F}^+(X)$，$\varepsilon \geq 0$，$\delta \geq 0$，$p > 0$，$q > 0$ に対して，$\|f\|_\mu < p$，$\mu(X) < q$，$(\mu, f) \prec (\mu + \delta, g + \varepsilon)$ ならば

$$I_\mu(f) \leq I_\mu(g) + \varphi_p(\delta) + \psi_q(\varepsilon)$$

を満たすとき，I_μ は**摂動的**という．

命題 16. $I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0,\infty]$ は積分汎関数，$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．I が内正則，上縁連続，下縁連続，測度切断的，水平劣加法的，水平加法的，強単調ならば I_μ も同じ性質をもつ．また，I が生成的，初等的，摂動的ならば，I の生成器，擬加法，制御関数族に関して I_μ も同じ性質をもつ．

5 積分収束定理

この章では，非線形積分の積分収束定理を紹介する．Choquet 積分，Šipoš 積分，Sugeno 積分，Shilkret 積分の単調収束定理や Vitali の収束定理などの積分収束定理は，従来は個別の積分ごとに議論されてきた．それゆえ，定理の定式化や証明方法も各積分固有の定義や性質に深く依存しており，お世辞にも見通しのよい理論構成ではなかった．この小論では第 4 章で導入した諸性質を満たす積分汎関数に対して非線形積分の収束定理を定式化することにより，函数解析的な観点からその統一化を試みた．詳細な解説に入る前に，すでに知られている非線形積分に対する積分収束定理の中で，単調増加収束定理，単調減少収束定理，Vitali の収束定理を表の形でまとめておく．

以下では，$(X, \mathcal{A})$ は可測空間，$I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0,\infty]$ は積分汎関数，$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．また，線形積分である抽象 Lebesgue 積分の収束定理と比較するため，抽象

Lebesgue 積分が定める積分汎関数を Le で表す．すなわち，

$$\mathrm{Le}(\mu, f) := \int_X f d\mu, \quad (\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$$

とする．

(I) 単調増加収束定理: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+(X)$，$f \in \mathcal{F}^+(X)$ で，$f_n \uparrow f$ とする．f_n と μ に下表の条件を課せば $I_\mu(f_n) \to I_\mu(f)$ が成り立つ．

I の種類	f_n の条件	μ の条件	文献
Le	無条件	σ-加法的	Levi [18]
Ch	無条件	下から連続	Song & Li [27], Wang [32]
Si	無条件	下から連続	Šipoš [25]
Su	無条件	下から連続	Ralescu & Adams [22], Wang [31]
Sh	無条件	下から連続	Zhao [36]

(II) 単調減少収束定理: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+(X)$，$f \in \mathcal{F}^+(X)$ で，$f_n \downarrow f$ とする．f_n と μ に下表の条件を課せば $I_\mu(f_n) \to I_\mu(f)$ が成り立つ．

I の種類	f_n の条件	μ の条件	文献
Le	$\mathrm{Le}(\mu, f_1) < \infty$	σ-加法的	Levi [18]
Ch	$\mathrm{Ch}(\mu, f_1) < \infty$	上から条件連続	Wang [32]
Si	$\mathrm{Si}(\mu, f_1) < \infty$	上から条件連続	Šipoš [25]
Su	$\mu(\{f_1 > \mathrm{Su}(\mu, f)\}) < \infty$	上から条件連続	Wang [31]
Sh	$\mu(\{f_1 > 0\}) < \infty$ かつ f_1 は μ-本質的有界	上から条件連続	Zhao [37] K [13]

$I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ は積分汎関数，$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ は

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} I_\mu\big(\chi_{\{|f_n|>c\}}|f_n|\big) = 0$$

のとき，I_μ に関して一様可積分という．また，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{|f_n - f| > \varepsilon\}\right) = 0$$

のとき，f_n は f に μ-測度収束するといい，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ とかく．

(III) Vitali の収束定理: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0^+(X)$，$f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ で，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ とする．f_n と μ に下表の条件を課せば $I_\mu(f_n) \to I_\mu(f)$ が成り立つ．

I の種類	f_n の条件	μ の条件	文献
Le	Le_μ に関して一様可積分	有限かつ σ-加法的	Vitali [30]
Ch	Ch_μ に関して一様可積分	有限かつ自己連続	K [15]
Si	Si_μ に関して一様可積分	有限かつ自己連続	K [16]
Su	無条件	自己連続	Wang [31]
Sh	Sh_μ に関して一様可積分	有限かつ自己連続	K [16]

注意 17. 上記 (I)–(Ⅲ) は f_n や μ に課すべき条件を取り除くと反例が見つかるという意味で最良である.

上でまとめた具体的な非線形積分に対する結果を見れば予測できるように，積分収束定理の統一化を果たすには，関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が関数 f に各点収束する場合と測度収束する場合をそれぞれ別個に考える必要がある．また，積分は非線形なので，Lebesgue 積分の場合とは異なり，単調減少収束定理を単調増加収束定理の系として導くことはできない．まずは各点収束の場合の統一化を紹介する.

定理 18 (単調増加収束定理). $I\colon \mathcal{M}(X)\times\mathcal{F}^+(X)\to[0,\infty]$ は積分汎関数，$\mu\in\mathcal{M}(X)$ とする．次の 2 つの条件を考える.

(i) μ は下から連続.

(ii) I_μ に対して単調増加収束定理が成り立つ．すなわち，任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}^+(X)$ と任意の $f\in\mathcal{F}^+(X)$ に対して，$f_n\uparrow f$ ならば $I_\mu(f_n)\to I_\mu(f)$.

(1) I_μ は上縁連続，測度切断的，初等的，摂動的で，その生成器は連続型とする．このとき (i)⇒(ii) が成立する.

(2) I_μ は生成的で，その生成器 θ は極限保存的とする．このとき (ii)⇒(i) が成立する.

単調減少収束定理の統一的な定式化には，関数族の一様切断性が必要となる.

定義 19. $I\colon \mathcal{M}(X)\times\mathcal{F}^+(X)\to[0,\infty]$ は積分汎関数，$\mu\in\mathcal{M}(X)$ で，I_μ は I が定める μ-積分汎関数とする．$\mathcal{F}\subset\mathcal{F}^+(X)$ は空でない関数族とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して，定数 $c>0$ が存在して，任意の $f\in\mathcal{F}$ に対して

$$I_\mu(f)\le I_\mu(f\wedge c)+\varepsilon$$

が成り立つとき，$\mathcal{F}$ は I_μ に関して**一様切断的** (uniformly truncated) という．特に，関数 $f\in\mathcal{F}^+(X)$ は，f だけからなる関数族 $\mathcal{F}=\{f\}$ が I_μ に関して一様切断的なとき，**切断的** (truncated) という.

定理 20 (単調減少収束定理). $I\colon \mathcal{M}(X)\times\mathcal{F}^+(X)\to[0,\infty]$ は積分汎関数，$\mu\in\mathcal{M}(X)$ とする．次の 2 条件を考える．

(i) μ は上から条件連続.

(ii) I_μ に対して単調減少収束定理が成り立つ．すなわち，任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}^+(X)$ と任意の $f\in\mathcal{F}^+(X)$ に対して，$I_\mu(f_1)<\infty$ かつ $f_n\downarrow f$ で，さらに $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}^+(X)$ が I_μ に関して一様切断的ならば $I_\mu(f_n)\to I_\mu(f)$.

(1) I_μ は初等的，摂動的で，その生成器は連続型とする．このとき，μ が有限ならば (i)⇒(ii) が成立する．

(2) I_μ は上縁連続，生成的で，その生成器 θ が極限保存的かつ有限型とする．このとき (ii)⇒(i) が成立する．

注意 21. μ-積分汎関数 I_μ に対して単調減少収束定理が成立するには，定理 20 の (ii) における $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の I_μ に関する一様切断性は取り除けない．実際，I_μ が上縁連続のとき，単調減少な $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}^+(X)$ と $f\in\mathcal{F}^+(X)$ に対して，$I_\mu(f_1)<\infty$ かつ $I_\mu(f_n)\to I_\mu(f)$ ならば，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は I_μ に関して一様切断的となる．

注意 22. 一般に，$\mu\in\mathcal{M}(X)$ が零加法的，すなわち，任意の $A,B\in\mathcal{A}$ に対して，$\mu(B)=0$ ならば $\mu(A\cup B)=\mu(A)$ で，I_μ が強単調のとき，任意の $f,g\in\mathcal{F}^+(X)$ に対して，$f=g$ μ-a.e. ならば $I_\mu(f)=I_\mu(g)$ が成り立つ．よって，定理 18 と定理 20 において，μ の零加法性と I_μ の強単調性を追加で仮定すれば，f_n の f への各点収束性を μ-概収束性に置き換えてもよい．

積分汎関数 $I=\mathrm{Ch},\mathrm{Si},\mathrm{Su},\mathrm{Sh}$ は上縁連続，測度切断的，生成的，初等的，摂動的で，その生成器 $\theta(a,b)=a\cdot b, a\wedge b$ は有限型，連続型，極限保存的である．よって，定理 18 と定理 20 より次の系が得られる．実際，以下の系 23 と系 24 における可測関数 f_n や f，非加法的測度 μ に課された仮定は，定理 18 と定理 20 における (i) と (ii) の条件が成り立つことを保証したり，μ が有限の場合に証明を帰着させるために使われる．

系 23 (単調増加収束定理). $I=\mathrm{Ch},\mathrm{Si},\mathrm{Su},\mathrm{Sh}$ とする．$\mu\in\mathcal{M}(X)$ は下から連続，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}^+(X)$，$f\in\mathcal{F}^+(X)$ とする．このとき，$f_n\uparrow f$ ならば $I_\mu(f_n)\to I_\mu(f)$.

系 24 (単調減少収束定理). $\mu\in\mathcal{M}(X)$ は上から条件連続，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}^+(X)$，$f\in\mathcal{F}^+(X)$，$f_n\downarrow f$ とする．

(1) $I=\mathrm{Ch},\mathrm{Si}$ とする．$I_\mu(f_1)<\infty$ ならば $I_\mu(f_n)\to I_\mu(f)$.

(2) $\mu(\{f_1>\mathrm{Su}(\mu,f)\})<\infty$ (特に μ が有限) ならば $\mathrm{Su}_\mu(f_n)\to\mathrm{Su}_\mu(f)$.

(3) $\mu(\{f_1>0\})<\infty$ (特に μ が有限) かつ f_1 が μ-本質的有界ならば $\mathrm{Sh}_\mu(f_n)\to$

$\mathrm{Sh}_\mu(f)$.

通常の測度論の場合と同様に，単調増加収束定理と単調減少収束定理より，Fatou の補題や優収束定理を得る．

系 25 (Fatou の補題). $I = \mathrm{Ch}, \mathrm{Si}, \mathrm{Su}, \mathrm{Sh}$ とする．$\mu \in \mathcal{M}(X)$ は下から連続，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+(X)$，$f \in \mathcal{F}^+(X)$ とする．このとき，$f_n \to f$ ならば $I_\mu(f) \le \liminf_{n\to\infty} I_\mu(f_n)$.

系 26 (優収束定理). $\mu \in \mathcal{M}(X)$ は条件連続，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+(X)$，$f \in \mathcal{F}^+(X)$ で，$f_n \to f$ とする．

(1) $I = \mathrm{Ch}, \mathrm{Si}$ とする．関数 $g \in \mathcal{F}^+(X)$ が存在して，$I_\mu(g) < \infty$ かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \le g$ ならば $I_\mu(f_n) \to I_\mu(f)$.

(2) $\mu(\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > \mathrm{Su}(\mu, f)\}) < \infty$ (特に μ が有限) ならば $\mathrm{Su}_\mu(f_n) \to \mathrm{Su}_\mu(f)$.

(3) $\mu(\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n > 0\}) < \infty$ かつ $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ が μ-本質的有界 (特に，μ-本質的有界な $g \in \mathcal{F}^+(X)$ が存在して，$\mu(\{g > 0\}) < \infty$ かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \le g$) ならば $\mathrm{Sh}_\mu(f_n) \to \mathrm{Sh}_\mu(f)$.

注意 27. $I = \mathrm{Ch}, \mathrm{Si}, \mathrm{Su}, \mathrm{Sh}$ は強単調なので，系 23 から系 26 は，μ の零加法性を追加で仮定すれば，f_n の f への各点収束性を μ-概収束性で，$f_n \le g$ を $f_n \le g$ μ-a.e. で置き換えても成立する (注意 22 を参照せよ).

被積分関数列が測度収束する場合の収束定理は次の結果が基本となる．定式化には非加法的測度の自己連続性が必要となる．

定義 28. $\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．

(1) 任意の $A \in \mathcal{A}$ と任意の $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して，$\mu(B_n) \to 0$ ならば $\mu(A \cup B_n) \to \mu(A)$ のとき，μ は**上から自己連続** (autocontinuous from above) という．

(2) 任意の $A \in \mathcal{A}$ と任意の $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して，$\mu(B_n) \to 0$ ならば $\mu(A \setminus B_n) \to \mu(A)$ のとき，μ は**下から自己連続** (autocontinuous from below) という．

(3) 上から自己連続かつ下から自己連続のとき，μ は**自己連続** (autocontinuous) という．

任意の劣加法的測度や，条件 $\inf\{\mu(A)\colon A \in \mathcal{A}, A \ne \emptyset\} > 0$ を満たす任意の非加法的測度 μ は自己連続であるが，一般に条件連続でない．また，有限加法的測度 $m\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ と $\theta(0) = 0$ を満たす単調増加関数 $\theta\colon [0, m(X)] \to [0,\infty]$ が定める歪測度 (distorted measure)

$$\mu(A) := \theta(m(A)), \quad A \in \mathcal{A}$$

は，θ が $[0, m(X)]$ 上で連続で，原点の近傍で狭義単調増加ならば自己連続となる．例えば，歪測度 $\mu(A) := m(A)^2 + \sqrt{m(A)}$ は自己連続かつ条件連続 (m が有限ならば連続) であるが，劣加法的でも優加法的でもない．

定理 29 (Vitali の収束定理の原型). $I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ は積分汎関数，$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．次の 2 つの条件を考える．

(i) μ は自己連続.

(ii) 任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0^+(X)$ と任意の $f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ に対して，$\{f_n, f\}_{n\in\mathbb{N}}$ は I_μ に関して一様切断的かつ $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ならば $I_\mu(f_n) \to I_\mu(f)$.

(1) μ は有限とする．このとき，I_μ が摂動的ならば (i)⇒(ii) が成り立つ.

(2) I_μ は生成的で，その生成器は極限保存的とする．このとき (ii)⇒(i) が成り立つ.

定理 29 は，実際には次の 2 つのタイプの Fatou の補題の系として得られる.

定理 30 (Fatou の補題 I). $I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ は積分汎関数，$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．次の 2 つの条件を考える．

(i) μ は下から自己連続.

(ii) I_μ に対して Fatou の補題が成り立つ．すなわち，任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0^+(X)$ と任意の $f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ に対して，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ かつ f が I_μ に関して切断的ならば $I_\mu(f) \le \liminf_{n\to\infty} I_\mu(f_n)$.

(1) μ は有限とする．このとき，I_μ が摂動的ならば (i)⇒(ii) が成り立つ.

(2) I_μ は生成的で，その生成器は極限保存的とする．このとき (ii)⇒(i) が成り立つ.

定理 31 (Fatou の補題 II). $I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ は積分汎関数，$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．次の 2 つの条件を考える．

(i) μ は上から自己連続.

(ii) I_μ に対して Fatou の補題が成り立つ．すなわち，任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0^+(X)$ と任意の $f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ に対して，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ かつ $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が I_μ に関して一様切断的ならば $\limsup_{n\to\infty} I_\mu(f_n) \le I_\mu(f)$.

(1) μ は有限とする．このとき，I_μ が摂動的ならば (i)⇒(ii) が成り立つ.

(2) I_μ は生成的で，その生成器は極限保存的とする．このとき (ii)⇒(i) が成り立つ.

Fatou の補題 I (定理 30) の μ の有限性と f の切断性の仮定は，I 自身に摂動性を課すとともに，さらに上縁連続性と測度切断性を付加すれば取り除ける.

系 32 (Fatou の補題). $I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ は積分汎関数，$\mu \in \mathcal{M}(X)$ は下

から自己連続とする．I が上縁連続，測度切断的，摂動的ならば，I_μ に対して Fatou の補題が成立する．すなわち，任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0^+(X)$ と任意の $f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ に対して，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ ならば $I_\mu(f) \leq \liminf_{n\to\infty} I_\mu(f_n)$.

Vitali の収束定理，有界収束定理の統一的定式化には，それぞれ可測関数列の一様可積分性，一様本質的有界性が必要となる．

定義 33. $I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0,\infty]$ は積分汎関数，$\mu \in \mathcal{M}(X)$ で，$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(X)$ は空でないとする．

(1) 関数族 $\mathcal{F}$ は

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} I_\mu\bigl(\chi_{\{|f|>c\}}|f|\bigr) = 0$$

のとき，I_μ に関して**一様可積分** (uniformly integrable) という．

(2) 関数族 $\mathcal{F}$ は，定数 $c > 0$ が存在して，任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\mu(\{f \geq c\}) = 0 \ \text{かつ}\ \mu(\{f \geq -c\}) = \mu(X)$$

のとき**一様 $\boldsymbol{\mu}$-本質的有界** (uniformly μ-essential bounded) という．

次の Vitali の収束定理と有界収束定理は，Vitali の収束定理の原型 (定理 29) の系として得られる．

系 34 (Vitali の収束定理). $I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0,\infty]$ は積分汎関数，$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．次の 2 つの条件を考える．

(i) μ は自己連続.

(ii) I_μ に対して Vitali の収束定理が成り立つ．すなわち，任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0^+(X)$ と任意の $f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ に対して，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が I_μ に関して一様可積分かつ $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ならば，$I_\mu(f) < \infty$ で，$I_\mu(f_n) \to I_\mu(f)$.

(1) μ は有限とする．このとき，I_μ が上縁連続，水平劣加法的，摂動的で，任意の $r > 0$ に対して $I_\mu(r) < \infty$ ならば (i)$\Rightarrow$(ii) が成り立つ.

(2) I_μ は生成的で，その生成器は極限保存的とする．このとき (ii)$\Rightarrow$(i) が成り立つ.

系 35 (有界収束定理). $I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0,\infty]$ は積分汎関数，$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．次の 2 つの条件を考える．

(i) μ は自己連続.

(ii) I_μ に対して有界収束定理が成り立つ．すなわち，任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0^+(X)$ と任意の $f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ に対して，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は一様 μ-本質的有界で $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ならば，f は μ-本質的有界で，$I_\mu(f_n) \to I_\mu(f)$.

(1) μ は有限とする．このとき，I_μ が摂動的ならば (i)⇒(ii) が成り立つ．

(2) I_μ は生成的で，その生成器は極限保存的とする．このとき (ii)⇒(i) が成り立つ．

積分汎関数 $I = \mathrm{Ch}, \mathrm{Si}, \mathrm{Su}, \mathrm{Sh}$ は生成的，摂動的，上縁連続，水平劣加法的で，その生成器は極限保存的である．さらに，任意の $r > 0$ に対して，$\mathrm{Su}_\mu(r) < \infty$．また，$\mu$ が有限ならば $I = \mathrm{Ch}, \mathrm{Si}, \mathrm{Sh}$ に対しても $I_\mu(r) < \infty$ が成り立つ．よって，次の系を得る．今回も，系 36, 系 37, 系 39 における可測関数 f_n や f，非加法的測度 μ に課された仮定は，上記の定理 29 や，系 34，系 35 における (i) と (ii) の条件が成り立つことを保証したり，μ が有限の場合に証明を帰着させるために使われる．

系 36 (Vitali の収束定理 I). $I = \mathrm{Ch}, \mathrm{Si}, \mathrm{Sh}$ とする．$\mu \in \mathcal{M}_b(X)$ は自己連続，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0^+(X)$ は I_μ に関して一様可積分，$f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ とする．このとき，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ ならば，$I_\mu(f) < \infty$ で，$I_\mu(f_n) \to I_\mu(f)$.

系 37 (Vitali の収束定理 II). $\mu \in \mathcal{M}(X)$ は自己連続，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0^+(X)$，$f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ とする．このとき，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ ならば $\mathrm{Su}_\mu(f_n) \to \mathrm{Su}_\mu(f)$.

注意 38. 系 37 では μ の有限性も $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の一様可積分性も不要である．この事実は，μ が有限な σ-加法的測度の場合に可測関数列の測度収束を特徴づける Ky Fan 距離

$$K(f, g) := \inf\{\varepsilon \in [0, \infty] \colon \mu(\{|f - g| > \varepsilon\}) \le \varepsilon\}, \quad f, g \in \mathcal{F}_0(X)$$

と Sugeno 積分との密接な関係に起因しており，Sugeno 積分の収束は可測関数列の測度収束と非常に相性が良い．実際，任意の非加法的測度 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ と任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$，$f \in \mathcal{F}_0(X)$ に対して，

$$K(f_n, f) \to 0 \iff f_n \xrightarrow{\mu} f \iff \mathrm{Su}_\mu(|f_n - f|) \to 0$$

が成り立つ．しかし，μ が自己連続でなければ，$\mathrm{Su}_\mu(|f_n - f|) \to 0$ から $\mathrm{Su}_\mu(f_n) \to \mathrm{Su}_\mu(f)$ は導けない．これは Sugeno 積分の非線形性より，次の不等式

$$|\mathrm{Su}_\mu(f_n) - \mathrm{Su}_\mu(f)| \le \mathrm{Su}_\mu(|f_n - f|)$$

が成立しないことが原因である．

次の有界収束定理は，Choquet 積分の場合にはすでに [20] で議論されている．

系 39 (有界収束定理). $I = \mathrm{Ch}, \mathrm{Si}, \mathrm{Sh}$ とする．$\mu \in \mathcal{M}_b(X)$，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0^+(X)$ は一様 μ-本質的有界，$f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ とする．このとき，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ ならば，f も μ-本質的有界で，$I_\mu(f_n) \to I_\mu(f)$.

注意 40. 非加法的測度 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ は，任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ と任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して，$A_n \downarrow A$ かつ $\mu(A) = 0$ ならば $\mu(A_n) \to 0$ のとき，**強順序連続** (strongly order continuous) という．この条件は，μ に関して Lebesgue の定理が成立する，すなわち，任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ と任意の $f \in \mathcal{F}_0(X)$ に対して，$f_n \to f$ μ-a.e. ならば $f_n \xrightarrow{\mu} f$ が成り立つための必要十分条件として発見された [19]．そこで，$I = \mathrm{Ch}, \mathrm{Si}, \mathrm{Su}, \mathrm{Sh}$ の強単調性に注意すれば，系 36, 37, 39 は，μ の強順序連続性を追加で仮定すれば，Lebesgue の定理と注意 22 より，f_n の f への μ-測度収束性を μ-概収束性で置き換えても成立する．

積分汎関数 $I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0, \infty]$ は次の 2 通りの方法で，必ずしも非負とは限らない関数の積分が取り扱えるように拡張できる．すなわち，

$$
\begin{aligned}
I^s(\mu, f) &:= I(\mu, f^+) - I(\mu, f^-), \quad (\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}(X) \\
I^a(\mu, f) &:= I(\mu, f^+) - I(\bar{\mu}, f^-), \quad (\mu, f) \in \mathcal{M}_b(X) \times \mathcal{F}(X)
\end{aligned}
$$

と定め，I^s を I の**対称拡大**または I が定める**対称積分** (symmetric integral)，I^a を I の**反対称拡大**または I が定める**反対称積分** (asymmetric integral) という．ただし，右辺が $\infty - \infty$ となる場合は定義しない．実際，I^s は対称性

$$I^s(\mu, -f) = -I^s(\mu, f)$$

を，I^a は反対称性

$$I^a(\mu, -f) = -I^a(\bar{\mu}, f)$$

をもつ．詳細は割愛するが，この章のすべての結果は適当な修正により，対称積分 I^s や反対称積分 I^a に対しても成り立つことを最後に注意してこの小論を終える．

6　おわりに

この小論では，まず非加法的測度論の応用領域でよく用いられる Choquet 積分や Sugeno 積分などの分布型の積分を紹介し，非線形積分を非線形な積分汎関数ととらえる函数解析的な見方から，それら非線形積分が共通してもつ性質をまとめた (第 3 章，第 4 章)．特に，被積分関数とその減少分布関数を微少に変化させたときの積分汎関数の値の変化を線形的に制御するための条件である摂動性が，非線形積分の収束定理の統一的定式化で重要な役割を果たすことを述べた．実際，第 5 章では，この摂動性を縦横無尽に活用すれば，非線形積分の収束定理として知られている従前のしかも最良な結果を統一的に議論可能であることを報告した．

非線形積分の一つである Šipoš 積分は，Choquet 積分とは異なり，広義 Riemann 積分や Lebesgue 積分と全く無関係に定義可能である．しかも，非加法的測度が σ-加法

的ならば抽象 Lebesgue 積分と一致するので，第 5 章で紹介した積分収束定理は抽象 Lebesgue 積分に対しても成り立つ．この二つの事実は，現代 Lebesgue 積分論を Šipoš 積分を用いて再構築すれば，今ある Lebesgue 積分の一般論，少なくとも積分収束定理に至るまでの理論を，線形・非線形の積分に対して同時に展開できることを意味している．

非加法的測度による積算概念としての非線形積分には，この小論で紹介した分布型積分の他に，凹積分，pan 積分，上方積分・下方積分，さらには本田と岡崎が最近導入した包除積分の連続化などの重要な分割型積分もある．それら分割型積分の積分収束定理の確立やその統一的定式化が今後の課題である．

この小論を読んで少しでも非加法的測度と非線形積分の理論に興味を持っていただけた場合には，拙著 [12] もご一読いいただけると幸いである．

参考文献

[1] P. Benvenuti, R. Mesiar, and D. Vivona, Monotone set functions-based integrals, in: Handbook of Measure Theory (E. Pap, Ed.), Elsevier, 2002, pp. 1329–1379.

[2] G. Choquet, Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 5 (1953–54), 131–295.

[3] D. Denneberg, Non-Additive Measure and Integral, second edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[4] I. Dobrakov, On submeasures I, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 112 (1974), 1–35.

[5] D. Ellsberg, Risk, ambiguity, and the Savage axioms, Quart. J. Economics, 75 (1961), 643–669.

[6] A. Honda and Y. Okazaki, Theory of inclusion-exclusion integral, Information Sciences, 376 (2017), 136–147.

[7] A. Honda and Y. Okazaki, Generalization of inclusion-exclusion integral for nondiscrete monotone measure space, preprint.

[8] J. Kawabe, Metrizability of the Lévy topology on the space of nonadditive measures on metric spaces, Fuzzy Sets Syst., 204 (2012), 93–105.

[9] J. Kawabe, Weak convergence of nonadditive measures defined by Choquet and Sugeno integrals, in: Banach and function spaces IV (M. Kato and L. Maligranda, eds.), Yokohama Publishers, 2014, 63–79.

[10] J. Kawabe, The bounded convergence in measure theorem for nonlinear integral functionals, Fuzzy Sets Syst., 271 (2015), 31–42.

[11] J. Kawabe, Weak convergence of nonadditive measures based on nonlinear integral functionals, Fuzzy Sets and Syst., 289 (2016), 1–15.

[12] 河邊　淳, 非加法的測度と非線形積分, 数学, 68 (2016), 266–292. English translation will be appeared in Sugaku Expositions published by American Mathematical Society.

[13] J. Kawabe, A unified approach to the monotone convergence theorem for nonlinear integrals, Fuzzy Sets Syst., 304 (2016), 1–19.

[14] J. Kawabe, The monotone convergence theorems for nonlinear integrals on a topological space, Linear Nonlinear Anal., 2 (2016), 281–300.

[15] J. Kawabe, The Vitali type theorem for the Choquet integral, Linear Nonlinear Anal., 3 (2017), 349–365.

[16] J. Kawabe, The Vitali type theorem for nonlinear integral functionals, in preparation.

[17] E. Lehrer and R. Teper, The concave integral over large spaces, Fuzzy Sets Syst., 159 (2008), 2130–2144.

[18] B. Levi, Sopra l'integrazione delle serie, Rend. Istituto Lombardo di Sci. e Lett. (Ser. 2), 39 (1906), 775-780.
[19] J. Li, Order continuous of monotone set function and convergence of measurable functions sequence, Appl. Math. Comput., 135 (2003), 211–218.
[20] T. Murofushi, M. Sugeno, and M. Suzaki, Autocontinuity, convergence in measure, and convergence in distribution, Fuzzy Sets Syst., 92 (1997), 197–203.
[21] E. Pap, Null-Additive Set Functions, Kluwer Academic Publishers, Bratislava, 1995.
[22] D. Ralescu and G. Adams, The fuzzy integral, J. Math. Anal. Appl., 75 (1980), 562–570.
[23] D. Schmeidler, Integral representation without additivity, Proc. Amer. Math. Soc., 97 (1986), 255-261.
[24] N. Shilkret, Maxitive measure and integration, Indag. Math., 33 (1971), 109–116.
[25] J. Šipoš, Integral with respect to a pre-measure, Math. Slovaca, 29 (1979), 141–155.
[26] J. Šipoš, Non linear integrals, Math. Slovaca, 29 (1979), 257–270.
[27] Jinjie Song and J. Li, Lebesgue theorems in non-additive measure theory, Fuzzy Sets Syst., 149 (2005), 543–548.
[28] M. Sugeno, Theory of fuzzy integrals and its applications, Ph.D. Dissertation, Tokyo Inst. of Tech., Tokyo, 1974.
[29] M. Sugeno and T. Murofushi, Pseudo-additive measures and integrals, J. Math. Anal. Appl., 122 (1987), 197–222.
[30] G. Vitali, Sull'integrazione per serie, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 23 (1907), 137–155.
[31] Z. Wang, The autocontinuity of set function and the fuzzy integral, J. Math. Anal. Appl., 99 (1984), 195–218.
[32] Z. Wang, Convergence theorems for sequences of Choquet integrals, Int. J. Gen. Syst., 26 (1997), 133–143.
[33] Z. Wang and G. J. Klir, Fuzzy Measure Theory, Plenum Press, New York, 1992.
[34] Z. Wang and G. J. Klir, Generalized Measure Theory, Springer, New York, 2009.
[35] Qing Si Yang, The pan-integral on the fuzzy measure space, Fuzzy Math. 5 (1985) 107–114 (in Chinese).
[36] Ru Huai Zhao, (N) fuzzy integral, J. Math. Res. Exposition, 1 (1981), 55–72 (in Chinese).
[37] Ru Huai Zhao, Continuity and the Fubini theorem for (N) fuzzy integrals, J. Xinjiang Univ. Nat. Sci., no.2 (1985), 95–106 (in Chinese).

河邊　淳 (Jun Kawabe)

〒380-8553 長野市若里 4-17-1

信州大学工学部 工学基礎部門

E-mail: `jkawabe@shinshu-u.ac.jp`

空間に依存する摩擦を伴う波動方程式に対するエネルギー評価について*

側島　基宏†　（東京理科大学・理工学部）

1. Introduction

本講演では，空間変数に依存する摩擦項を伴う以下の波動方程式の初期値境界値問題を考える．

$$
\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + a(x)\partial_t u = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ \partial_t u(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}
$$

ここで，$\Omega = \mathbb{R}^N$ または滑らかな境界をもつ外部領域であるとする．また，$u = u(x,t)$ は未知関数であり，摩擦項の係数 $a(x)$ には次の条件を課す．

$$
a \in C^2(\mathbb{R}^N), \quad a(x) > 0 \text{ on } \overline{\Omega}, \quad \lim_{|x|\to\infty} \Big(|x|^\alpha a(x)\Big) = a_0 > 0. \tag{2}
$$

摩擦項 $a(x)u_t$ は減衰効果を表す．$a(x) = 1$ のときは，(1) は通常の消散型波動方程式であり，摩擦を伴う波の伝播を記述する（抵抗を有する電気回路上の電圧および電流など）．また，この方程式は，いわゆる energy banance law $v_t = -\operatorname{div} q$ と時間遅れをもつ Fourier の法則 $\tau q_t + q = -\nabla v$（Cattaneo–Vernotte の法則, [**1, 12, 29**] 参照）によって導出され，有限伝播性をもつ熱伝導を記述する方程式として知られている．

モデル方程式としての消散型波動方程式は媒質として空間一様なものを扱っている．従って，本講演では，空間非一様な媒質を扱った場合に波動の伝播にどのような影響が出るかを考察する．

問題 (1) の可解性については非常に良く知られている．$\alpha \geq 0$ であれば，初期値 $(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ に対して解

$$
u \in C^2([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))
$$

が存在する（たとえば，Ikawa [**5**] 参照）．$\alpha < 0$ のときは，コンパクトな台をもつ初期値に対して同様の解が得られる．（コンパクト台をもたない初期値に対する (1) の可解性は，最近 Ikehata–Takeda [**9**] が示している）また，問題 (1) の解 u に対して，全エネルギーは

$$
E(u;t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(|\nabla u(x,t)|^2 + |\partial_t u(x,t)|^2\Big)\,dx
$$

で与えられ，直ちに得られるエネルギー等式

$$
E(u;t) + \int_0^t \int_\Omega a(x)|\partial_t u(x,s)|^2\,dx\,ds = E(u;0)
$$

により全エネルギーは非増加であることがわかる．本講演の目的は，初期値がコンパクト台をもち，$\alpha < 1$ のときには全エネルギーが対応する放物型方程式と同様の減衰オーダーをもつことを示すことである．

---

*本研究は，愛媛大学の若杉勇太氏との一連の共同研究に基づく．

*e-mail: `msobajima1984@gmail.com`

1.1. 先行研究

まず，Matsumura [**14**] によって $\Omega=\mathbb{R}^N$, $a(x)=1$ の場合の次の全エネルギー減衰評価が示された．

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u(x,t)|^2+|\partial_t u(x,t)|^2\right)dx\le C(1+t)^{-\frac{N}{2}-1}\|(u_0,u_1)\|^2_{(H^1\cap L^1)\times(L^2\cap L^1)}.$$

その後，多くの研究者によって，(1) の解 u の時間無限大での漸近形が熱方程式

$$\begin{cases}\partial_t v-\Delta v=0, & x\in\mathbb{R}^N, t>0\\ v(x,0)=u_0(x)+u_1(x), & x\in\mathbb{R}^N\end{cases}$$

の解で与えられることが示されている（[**14, 3, 17, 18, 31, 11, 19, 13, 4, 16, 23**] など）．より正確には，

$$\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^2}=o(t^{-\frac{N}{4}})\quad \text{as } t\to\infty$$

で記述され，これを拡散現象と呼んでいる．この結果は，外部領域の問題についても多く研究されている ([**6, 8, 2, 22**] など)．$a(x)\ge\langle x\rangle^{-\alpha}=(1+|x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$ $(\alpha\in[0,1))$ の場合についても考察されてきた．その一方で，$\Omega=\mathbb{R}^N$, $0\le a(x)\le\langle x\rangle^{-\alpha}$ $(\alpha>1)$ の場合は Mochizuki [**15**] によって，解 u の全エネルギーが時間無限大で 0 にならず，自由波動方程式の解に漸近するような初期値が存在することが得られている．従って，解の全エネルギーが 0 になるかどうかが摩擦項の係数 $a(x)$ の空間遠方の振る舞いによって決定され，その閾値は $\alpha=1$ で与えられると考えることができる．

詳細なエネルギー減衰評価については，Todorova–Yordanov [**28**] によって $\Omega=\mathbb{R}^N$, 球対称な摩擦項 $a(x)\sim|x|^{-\alpha}$, $\alpha\in[0,1)$ $(|x|\to\infty)$ のときにコンパクト台をもつ初期値 $(\mathrm{supp}(u_0,u_1)\subset\overline{B(0,R_0)})$ に対して重み付きエネルギー評価

$$\int_{\mathbb{R}^N}\exp\left(\frac{c_\delta|x|^{2-\alpha}}{1+t}\right)\left(|\nabla u|^2+|\partial_t u|^2\right)dx=O(t^{-\frac{N-\alpha}{2-\alpha}-1+\delta})\quad\text{as } t\to\infty$$

が示され，高階の時間微分に対するエネルギー評価が Radu–Todorova–Yordanov [**20, 21**], $\alpha=1$ の場合は Ikehata–Todorova–Yordanov [**10**] によってそれぞれ研究されている．$\Omega=\mathbb{R}^N$, $\alpha\in[0,1)$ の場合の解の漸近挙動も近年研究されるようになり，Wakasugi [**30**] によって $\Omega=\mathbb{R}^N$, $a(x)=\langle x\rangle^{-\alpha}$ の場合の (1) の解は対応する放物型方程式

$$\begin{cases}a(x)\partial_t v-\Delta v=0, & x\in\mathbb{R}^N, t>0,\\ v(x,0)=u_0(x)+a(x)^{-1}u_1(x), & x\in\Omega.\end{cases}\tag{3}$$

の解に漸近することが示された．しかしながら，[**30**] では (3) の解の性質を擬微分作用素を用いて解析しており，より一般の摩擦項や外部問題を扱う上で数多くの困難が残る．

本講演では，非有界な係数をもつ楕円型作用素の理論の考え方を踏まえた作用素論的な方法を用いることで上述の難点を回避し，(2) を満たす一般の摩擦項をもつ波動方程式の外部問題に対して [**28**] の重み付きエネルギー評価と，[**30**] の漸近挙動の解析と同様の結論が得られることを紹介する．また，限定された場合ではあるが，多項式の重み関数を用いたエネルギー評価が導出できることが最近の研究で得られたのでそちらの結果についても紹介したい．

2. Result

本節では，滑らかな境界 Ω をもつ N 次元外部領域 Ω $(N \geq 2)$ に対する重み付きエネルギー評価及び解の漸近挙動の研究成果を紹介する．主張を正確に述べるために，消散型波動方程式 (1) に対応する以下の放物型方程式を導入する．

$$
\begin{cases} a(x)\partial_t v - \Delta v = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ v(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ v(x,0) = u_0(x) + a(x)^{-1}u_1(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{4}
$$

Theorem 1 ([**24, 25, 26**]). $(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ は

$$
\mathrm{supp}(u_0, u_1) \subset \overline{B(0, R_0)}
$$

を満たすとし，a は (2) を $\alpha < 1$ で満たしているとする．u を (1) の解とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ 対して，ある正定数 $t_0 = t_0(N, R_0, \varepsilon) > 0$, $C_1 = C_1(N, R_0, \varepsilon) > 0$, $C_2 = C_2(N, R_0, \varepsilon) > 0$ が存在して次が成り立つ．

(5)
$$
\int_\Omega e^{\frac{C_1|x|^{2-\alpha}}{t_0+t}} \left(|\nabla_x u(x,t)|^2 + |\partial_t u(x,t)|^2\right) dx \leq C_2(t_0+t)^{-\frac{N-\alpha}{2-\alpha}-1+\varepsilon} \|(u_0, u_1)\|_{H^1 \times L^2}^2, \quad t \geq 0.
$$

Theorem 2 ([**24, 25, 26**]). $(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ は

$$
\mathrm{supp}(u_0, u_1) \subset \overline{B(0, R_0)}
$$

を満たすとし，a は (2) を満たしているとする．u を (1) の解とし，v を (4) の解とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ 対して，ある正定数 $C_3 = C_3(N, R_0, \varepsilon) > 0$ が存在して次が成り立つ．

$$
\|\sqrt{a(\cdot)}(u(\cdot,t) - v(\cdot,t))\|_{L^2(\Omega)} \leq Ct^{-\frac{N-\alpha}{2(2-\alpha)} - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} + \varepsilon} \|(u_0, u_1)\|_{H^2 \times H^1(\Omega)}, \quad t \geq 1.
$$

Remark 1. 結果的には，摩擦項 a が空間遠方で減衰する場合と増大する場合に同様の主張が得られているが，証明の方針は大きく異なる．

3. The essences of the proofs

本節では，2 節で紹介した主張の証明において重要になるポイントについて解説する．

3.1. $0 \leq \alpha < 1$ の場合（Theorem 1 と Theorem 2）

3.1.1. Theorem 1 について

重み付きエネルギー評価 (5) の証明は，大きく次の 2 工程に分けることができる．

(i) 適切な重み関数 Φ の構成

(ii) Φ を重みにもつエネルギーの評価

工程 **(i)** について，次の考察が有効である．v を (4) の解，$0 < \Psi \in C(\mathbb{R}^{N+1})$ とし，$w = \Psi^{-1}v$ とすることにより以下の形式計算が行える．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega a(x)|v|^2\Psi^{-1}\,dx &= 2\int_\Omega a(x)(\partial_t v)v\Psi^{-1}\,dx - \frac{d}{dt}\int_\Omega a(x)|v|^2(\partial_t\Psi)\Psi^{-2}\,dx\\ &= 2\int_\Omega(\Delta v)w\,dx - \frac{d}{dt}\int_\Omega a(x)|w|^2(\partial_t\Psi)\,dx\\ &= -2\int_\Omega|\nabla w|^2\Psi^{-1}\,dx - \int_\Omega|w|^2\Big(a(x)\partial_t\Psi - \Delta\Psi\Big)\,dx.\end{aligned}$$

このことから，((1) の解 u と (4) の解 v の挙動が近いと思えば) Φ は $a(x)\partial_t\Psi = \Delta\Psi$ の正値解の逆数を用いるのが良いと推測できる．また $a(x) = |x|^{-\alpha}$ の場合には自己相似解

$$\Psi(x,t) = t^{-\frac{N-\alpha}{2-\alpha}}e^{-\frac{|x|^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2 t}}$$

の形状を踏まえると，$\Delta A = a$ となるような正値関数 $A \in C^2(\mathbb{R}^N)$ で $A \sim |x|^{2-\alpha}$ $(|x| \to \infty)$ となる関数を用いて重み関数を

$$\Phi(x,t) = e^{\frac{\beta A(x)}{1+t}}$$

と定める，というのが Todorova–Yordanov [**28**] や Ikehata [**7**] のアイディアである．しかし，Poisson 方程式 $\Delta A = a$ は一見単純に見えるが遠方で増大している関数 A を構成しなければならない．球対称な摩擦 a であれば常微分方程式に帰着されるため問題ないが，a が球対称でない場合は $\Delta A = a$ の解がエネルギー評価に必要な性質を満たしていない場合がある．そこで我々は，

$$(1-\varepsilon)a(x) \le \Delta A_\varepsilon(x) \le (1-\varepsilon)a(x), \quad \exists\lim_{|x|\to\infty}\Big(A_\varepsilon(x)|x|^{\alpha-2}\Big) > 0$$

をみたす A_ε を用いて重み関数を

$$\Phi_{A_\varepsilon,\beta}(x,t) = e^{\frac{\beta A_\varepsilon(x)}{1+t}}$$

と定めた．この考察により，一般の（球対称ではない）摩擦係数 $a(x)$ に対して重み付きエネルギーが定義できた．

(ii) については，

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_\Omega\Phi_{A_\varepsilon,\beta}(x,t)\Big(|\nabla u(x,t)|^2 + |\partial_t u(x,t)|^2\Big)\,dx,\\ &\frac{d}{dt}\int_\Omega\Phi_{A_\varepsilon,\beta}(x,t)\Big(2u\partial_t u + a(x)|u(x,t)|^2\Big)\,dx\end{aligned}$$

を有限伝播性を用いて調べることで (5) を得ることができる．その中でも重要な役割を果たすのが次の評価である．

$$\frac{\beta}{1+t}\int_\Omega\Phi_{A_\varepsilon,\beta}(x,t)a(x)|u(x,t)|^2\,dx \le \int_\Omega\Phi_{A_\varepsilon,\beta}(x,t)|\nabla u(x,t)|^2\,dx.$$

この不等式を $\beta = \frac{N-\alpha}{2-\alpha} - \varepsilon$ として用いることで (5) においてほぼ最適な重み付きエネルギーの減衰評価が得られる．

3.1.2. Theorem 2 について

拡散現象の証明には，対応する放物型方程式 (4) の解析が不可欠である．そこでまず，重み付きの L^2 空間 $L^2_{d\mu}$ 上で解析的半群を構成する．ここで，$d\mu = a(x)\,dx$，

$$L^p_{d\mu} = \left\{ f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)\ ;\ \|f\|_{L^p_{d\mu}} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \quad 1 \le p < \infty.$$

作用素 L を $L = a(x)\Delta$，その定義域を $D(L) = \{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\ ;\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ とおくと，$-L$ は $L^2_{d\mu}$ 上の本質的（非負）自己共役作用素になる．また，$\alpha \in [0,1)$ の場合には，Caffarelli–Kohn–Nirenberg の不等式から以下の不等式が得られる．

$$\begin{cases} \|u\|_{L^q_{d\mu}} \le C_{N,\alpha}(-Lu,u)_{L^2_{d\mu}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \|u\|_{L^2_{d\mu}}^{\frac{2}{q}} & \text{if } N=2, \quad 2<q<\infty, \\ \|u\|_{L^{q_*}_{d\mu}} \le C_{N,\alpha}(-Lu,u)_{L^2_{d\mu}}^{\frac{1}{2}} & \text{if } N \ge 3, \quad q_* = \frac{2(N-\alpha)}{N-2}. \end{cases}$$

この評価と，L（の閉包）が生成する解析的半群 $T(t)$ の性質 $\|LT(t)f\|_{L^2_{d\mu}} \le t^{-1}\|f\|_{L^2_{d\mu}}$ を用いると

$$\begin{cases} \|T(t)f\|_{L^q_{d\mu}} \le C_{N,\alpha} t^{-(\frac{1}{4}-\frac{1}{2q})} \|f\|_{L^2_{d\mu}} & \text{if } N=2, \quad 2<q<\infty, \\ \|T(t)f\|_{L^{q_*}_{d\mu}} \le C_{N,\alpha} t^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2_{d\mu}} & \text{if } N \ge 3, \quad q_* = \frac{2(N-\alpha)}{N-2}. \end{cases}$$

が得られる．この式と $T(t)$ の L^∞ 縮小性を併せると

$$\|T(t)f\|_{L^\infty} \le C t^{-\frac{N-\alpha}{2(2-\alpha)}} \|f\|_{L^2_{d\mu}}, \quad \|T(t)f\|_{L^2_{d\mu}} \le C t^{-\frac{N-\alpha}{2(2-\alpha)}} \|f\|_{L^1_{d\mu}}.$$

これらを踏まえて (1) を非斉次項付きの放物型方程式 $\partial_t u - a(x)^{-1}\Delta u = -a(x)^{-1}\partial_t^2 u$ とみなすと，Duhamel の原理から

$$u(t) = T(t)u_0 - \int_0^t T(t-s)[a(x)^{-1}\partial_t^2 u(s)]\,ds$$

と表せる．右辺の積分項に部分積分を用いると

$$\begin{aligned} u(t) = T(t)[u_0 + a(x)^{-1}u_1] - \int_{t/2}^t T(t-s)[a(x)^{-1}\partial_t^2 u(s)]\,ds \\ + T(t/2)[a(x)^{-1}\partial_t u(t/2)] + \int_0^{t/2} LT(t-s)[a(x)^{-1}\partial_t u(s)]\,ds \end{aligned}$$

が得られる．あとは，$v(\cdot,t) = T(t)[u_0 + a(x)^{-1}u_1]$ であることと Theorem 1 で得られている重み付きエネルギー評価を併せると Theorem 2 の主張が得られる．

3.2. $\alpha < 0$ の場合

Theorem 1 に関しては，$\alpha \in [0,1)$ のときとほぼ同様の手法で証明することができる．

$\alpha < 0$ の場合の難点は Theorem 2 における放物型方程式 (4) の減衰評価の導出の部分にある．この場合は，$\alpha \in [0,1)$ のときに用いた Caffarelli–Kohn–Nirenberg の不等式を利用することができない．そのために，作用素 $L = a(x)\Delta$ を変換 $J : L^2(\Omega_\alpha) \to L^2_{d\mu}$ を

$$Jv(y) = \sqrt{\frac{2-\alpha}{2}}|x|^{-\frac{(N-2)\alpha}{4}} v\left(|x|^{-\frac{\alpha}{2}}x\right)$$

と定め（$\Omega_\alpha = \{y \in \mathbb{R}^N\ ;\ |y|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}y \in \Omega\}$），$L^2(\Omega_\alpha)$ 上の作用素

$$J^{-1}LJv(y) = m(y)\left(\operatorname{div}\left(b(y)\nabla v(y)\right) - \frac{(N-2)^2\alpha(4+\alpha)}{16|y|^2}v(y)\right)$$

の形に変換する．ここで，$m \in C(\Omega_\alpha)$, $c^{-1} \le m \le c$, $(b(y))_{jk} = \delta_{jk} - \alpha(1-\frac{\alpha}{4})\frac{y_j y_k}{|y|^2}$．これは一様楕円型作用素なので以下のような L^p-L^q 評価が得られる．

$$\begin{cases} \|J^{-1}T(t)Jg\|_{L^\infty(\Omega_\alpha)} \le Ct^{-\frac{1}{2}}\|g\|_{L^2(\Omega_\alpha)} & \text{if } N = 2, \\ \|J^{-1}T(t)Jg\|_{L^p(\Omega_\alpha)} \le Ct^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|g\|_{L^2(\Omega_\alpha)}, & \text{if } N \ge 3, \quad 2 < p < p_\alpha = \frac{2N(2+\alpha)}{-\alpha(N-2)}. \end{cases}$$

($J^{-1}LJ$ がもつ負のポテンシャルの影響で p_α が出現する）これを用いて $L^2_{d\mu}$ ノルム評価に書き直すと最終的に

$$\|T(t)g\|_{L^2_{d\mu}} \le Ct^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}\left(\int_\Omega |g(x)|^q|x|^{-\frac{(N-2)\alpha(2-q)}{4}}\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}, \quad p'_\alpha < q < 2.$$

が得られる．この評価を用いれば，$\alpha \in [0,1)$ の場合と同様に拡散現象を証明できる．

4. $a(x) = |x|^{-\alpha}$ かつ $0 \le \alpha < 1$ で外部領域の場合

前節までは，摩擦項の係数の空間遠方での振る舞いを仮定して，コンパクト台をもつ初期値に対する重み付きエネルギー評価・拡散現象を紹介した．

本節では，摩擦項を $|x|^{-\alpha}$ に限定して，空間遠方で多項式的な振る舞いをするような初期値に対して重み付きエネルギー評価・拡散現象を導出する．

Theorem 3 ([**27**]). $(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \times H^1_0(\Omega)$ とし，$a(x) = |x|^{-\alpha}$, $\alpha \in [0,1)$ であるとする．u を (1) の解とする．ある定数 $\gamma \in [\alpha, N+2-2\alpha)$ が存在して次を満たすとする．

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_0(x)|^2 + (u_1(x))^2\right)|x|^\gamma\,dx < \infty. \tag{6}$$

このとき，ある正定数 C が存在して次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big(|\nabla u(x,t)|^2 + (\partial_t u(x,t))^2\Big)(t+|x|^{2-\alpha})^{\frac{\gamma}{2-\alpha}}\,dx \\
&\le \begin{cases} C\displaystyle\int_\Omega \Big(|\nabla u_0(x)|^2 + (u_1(x))^2\Big)|x|^\gamma\,dx + \int_\Omega |u_0(x)|^2|x|^{-\alpha}\,dx & \text{if } \gamma < 2-\alpha, \\ C\displaystyle\int_\Omega \Big(|\nabla u_0(x)|^2 + (u_1(x))^2\Big)|x|^\gamma\,dx & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Theorem 4 ([**27**]). $(u_0,u_1) \in (H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ とし，$a(x) = |x|^{-\alpha}$, $\alpha \in [0,1)$ であるとする．u を (1) の解とする．ある定数 $\gamma \in [\alpha, N+2-2\alpha)$ が存在して次を満たすとする．

$$
\mathcal{E}_0 := \int_\Omega \Big(|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2\Big)|x|^\gamma\,dx < \infty, \quad \mathcal{E}_1 := \int_\Omega \Big(|\nabla u_1|^2 + |u_2|^2\Big)|x|^{\gamma+2}\,dx < \infty.
$$

ここで $u_2 = -\Delta u_0 + a(x)u_1$ である．このとき，$u_0 + |x|^\alpha u_1 \in L^2_{d\mu}$ かつある正定数 C が存在して次が成り立つ．

$$
\Big\| u(t) - e^{tL_*}[u_0 + |x|^\alpha u_1] \Big\|_{L^2_{d\mu}} \le C(1+t)^{-\frac{\gamma-\alpha}{2(2-\alpha)}}(\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}
$$

Theorem 3, Theorem 4 は，初期値が空間遠方で多項式的な振る舞いをしているときも対応している．重み関数が多項式的で選べているという部分において，(摩擦項は限定されてしまっているが）Theorem 1, Theorem 2 よりも優れている．

Theorem 3, Theorem 4 の系として，Theorem 1, Theorem 2 と同様の主張が得られるための初期値の仮定を大幅に緩めることができる．

Corollary 5 ([**27**]). $(u_0,u_1) \in (H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ とし，$a(x) = |x|^{-\alpha}$, $\alpha \in [0,1)$ であるとする．u を (1) の解とし，

$$
\int_\Omega \Big(|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2\Big)|x|^{N+2-2\alpha}\,dx < \infty.
$$

が満たされているとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$
\int_\Omega \Big(|\nabla u(x,t)|^2 + (\partial_t u(x,t))^2\Big)(t+|x|^{2-\alpha})^{\frac{N-\alpha}{2-\alpha}+1-\frac{\varepsilon}{2-\alpha}}\,dx = O(1), \quad t \to \infty
$$

が成り立つ．さらに，

$$
\int_\Omega \Big(|\nabla u_1|^2 + \big|\Delta u_0 - a(x)u_1\big|^2\Big)|x|^{N-2\alpha}\,dx < \infty.
$$

が成り立つとすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\Big\| u(t) - e^{tL_*}[u_0 + |x|^\alpha u_1] \Big\|_{L^2_{d\mu}} &= O(t^{-\frac{N-\alpha}{2(2-\alpha)} - \frac{1-\alpha}{2-\alpha} + \varepsilon}), \quad t \to \infty, \\
\Big\| e^{tL_*}[u_0 + |x|^\alpha u_1] \Big\|_{L^2_{d\mu}} &= O(t^{-\frac{N-\alpha}{2(2-\alpha)} + \varepsilon}), \quad t \to \infty
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

特に，Theorem 3の証明にはKummerの合流型超幾何関数を用いた熱方程式の自己相似解

$$\Psi_\beta(x,t) = (t_0+t)^{-\beta}\psi_\beta\left(\frac{|x|^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2(t_0+t)}\right)$$
$$\psi_\beta(z) = e^{-z}M\left(\frac{N-\alpha}{2-\alpha}-\beta, \frac{N-\alpha}{2-\alpha}; z\right)$$

が用いられている．ここで，Kummerの合流型超幾何関数は次で定義される．

$$M(a,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!},$$

($(b)_0 = 1$, $(b)_n = \prod_{k=1}^{n}(b+k-1)$). 3.1.1節で扱ったように，重み付きエネルギー評価に適切な重み関数は対応する放物型方程式の正値解の逆数であることから，Theorem 3の証明では

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(t_0+t+\frac{|x|^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2}\right)^\beta\left(|\nabla u|^2+|\partial_t u|^2\right)dx,$$
$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \Psi_{\beta/(1-2\varepsilon)}^{-1+2\varepsilon}\left(|\nabla u|^2+|\partial_t u|^2\right)dx$$

の2つを基にエネルギー評価を導出している．もし時間が許せば，Theorem 3, Theorem 4 の証明についてより詳しく説明したい．

References

[1] C. Cattaneo, *Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée*, C. R. Acad. Sci. 247 (1958), 431–433.

[2] R. Chill, A. Haraux, *An optimal estimate for the difference of solutions of two abstract evolution equations*, J. Differential Equations **193** (2003), 385–395.

[3] L. Hsiao, T. -P. Liu, *Convergence to nonlinear diffusion waves for solutions of a system of hyperbolic conservation laws with damping*, Comm. Math. Phys. **43** (1992), 599–605.

[4] T. Hosono, T. Ogawa, *Large time behavior and L^p-L^q estimate of solutions of 2-dimensional nonlinear damped wave equations*, J. Differential Equations **203** (2004), 82–118.

[5] M. Ikawa, *Mixed problems for hyperbolic equations of second order*, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 580-608.

[6] R. Ikehata, *Diffusion phenomenon for linear dissipative wave equations in an exterior domain*, J. Differential Equations **186** (2002), 633–651.

[7] R. Ikehata, *Some remarks on the wave equation with potential type damping coefficients*, Int. J. Pure Appl. Math. **21** (2005), 19–24.

[8] R. Ikehata, K. Nishihara, *Diffusion phenomenon for second order linear evolution equations*, Studia Math. **158** (2003), 153–161.

[9] R. Ikehata, K. Takeda, *Uniform energy decay for wave equations with unbounded damping coefficients*, arXiv:1706.03942v1 (13 Jun 2017).

[10] R. Ikehata, G. Todorova, B. Yordanov, *Optimal decay rate of the energy for wave equations with critical potential*, J. Math. Soc. Japan **65** (2013), 183–236.

[11] G. Karch, *Selfsimilar profiles in large time asymptotics of solutions to damped wave equations*, Studia Math. **143** (2000), 175–197.

[12] T.-T. Li, *Nonlinear heat conduction with finite speed of propagation*, In: China–Japan Symposium on Reaction-Diffusion Equations and their Applications and Computational Aspects (Shanghai, 1994), pp. 81–91, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge (1997).

[13] P. Marcati, K. Nishihara, *The L^p-L^q estimates of solutions to one-dimensional damped wave equations and their application to the compressible flow through porous media*, J. Differential Equations **191** (2003), 445–469.

[14] A. Matsumura, *On the asymptotic behavior of solutions of semi-linear wave equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **12** (1976), 169–189.

[15] K. Mochizuki, *Scattering theory for wave equations with dissipative terms*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **12** (1976), 383–390.

[16] T. Narazaki, *L^p-L^q estimates for damped wave equations and their applications to semi-linear problem*, J. Math. Soc. Japan **56** (2004), 585–626.

[17] K. Nishihara, *Convergence rates to nonlinear diffusion waves for solutions of system of hyperbolic conservation laws with damping*, J. Differential Equations **131** (1996), 171–188.

[18] K. Nishihara, *Asymptotic behavior of solutions of quasilinear hyperbolic equations with linear damping*, J. Differential Equations **137** (1997), 384–395.

[19] K. Nishihara, *$L^p - L^q$ estimates of solutions to the damped wave equation in 3-dimensional space and their application*, Math. Z. **244** (2003), 631–649.

[20] P. Radu, G. Todorova, B. Yordanov, *Higher order energy decay rates for damped wave equations with variable coefficients*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. **2** (2009), 609–629.

[21] P. Radu, G. Todorova, B. Yordanov, *Decay estimates for wave equations with variable coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), 2279–2299.

[22] P. Radu, G. Todorova, B. Yordanov, *Diffusion phenomenon in Hilbert spaces and applications*, J. Differential Equations **250** (2011), 4200–4218.

[23] S. Sakata, Y. Wakasugi *Movement of time-delayed hot spots in Euclidean space*, to appear in Math. Z, arXiv:1602.06376v1.

[24] M. Sobajima, Y. Wakasugi, *Diffusion phenomena for the wave equation with space-dependent damping in an exterior domain*, J. Differential Equations **261** (2016), 5690–5718.

[25] M. Sobajima, Y. Wakasugi, *Remarks on an elliptic problem arising in weighted energy estimates for wave equations with space-dependent damping term in an exterior domain*, AIMS Mathematics **2** (2017), 1–15.

[26] M. Sobajima, Y. Wakasugi, *Diffusion phenomena for the wave equation with space-dependent damping term growing at infinity*, arXiv:1704.07650.

[27] M. Sobajima, Y. Wakasugi, *Weighted energy estimates for wave equation with space-dependent damping term for slowly decaying initial data*, arXiv:1706.08311.

[28] G. Todorova, B. Yordanov, *Weighted L^2-estimates for dissipative wave equations with variable coefficients*, J. Differential Equations **246** (2009), 4497–4518.

[29] P. Vernotte, *Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur*, Comptes Rendus **246** (1958), 3154–3155.

[30] Y. Wakasugi, *On diffusion phenomena for the linear wave equation with space-dependent damping*, J. Hyp. Diff. Eq. **11** (2014), 795–819.

[31] H. Yang, A. Milani, *On the diffusion phenomenon of quasilinear hyperbolic waves*, Bull. Sci. Math. **124** (2000), 415–433.

Wirtinger 積分とテータ因子の配置の幾何

渡辺文彦（防衛大学校）

§1　縁起（1 次元複素トーラス上の積分）

ガウスの超幾何函数（級数の解析接続）$F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ は $\boldsymbol{P}^1-\{0,1,\infty\}$ 上正則かつ (generic には）無限多価函数である．これを上半平面 H 上に一価正則でもち上げることを考える．このためまず積分表示を考える（パラメータの満たすべき細かい条件の記載は省略する．ジェネリックに考えればよい.）.

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt. \tag{1}$$

上半平面へのもち上げは $\lambda: H\to\boldsymbol{P}^1-\{0,1,\infty\}$ で与えられる．ここで $\lambda(\tau)=\theta_1^4/\theta_3^4$ はラムダ函数 [1] である．$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma(2)$ （レベル 2 の主合同部分群）に対し $\lambda\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\lambda(\tau)$ であり，自然に同型 $\mathbf{P}^1-\{0,1,\infty\}\cong H/\Gamma(2)$ が得られる．$x=\lambda(\tau)$ を (1) に代入すればもち上げは得られるが，それと同時に $t=\mathrm{sn}^2(v,\tau)$ という変数変換を施すと (1) は以下のようになる．

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\tau))=\frac{2\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^{\frac{\omega_1}{2}}(\mathrm{sn}\,v)^{2\alpha-1}(\mathrm{cn}\,v)^{2\gamma-2\alpha-1}(\mathrm{dn}\,v)^{-2\beta+1}dv. \tag{2}$$

ただし $\omega_1=\pi\theta_3^2$, $\omega_2=\omega_1\tau$ である．これは楕円函数論における Legendre の公式を一般化する目的で Elliott(1904) に現れた積分である．(2) において $v/\omega_1=u$ とおき，ヤコビの楕円函数をテータ函数で書き直すと次を得る．

$$\begin{aligned}&F(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\tau))\\ &=\frac{2\pi\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\theta_1^{2-2\gamma}\theta_2^{2\gamma-2\alpha-2\beta}\theta_3^{2\alpha+2\beta}\int_0^{\frac{1}{2}}\theta(u)^{2\alpha-1}\theta_1(u)^{2\gamma-2\alpha-1}\theta_2(u)^{2\beta-2\gamma+1}\theta_3(u)^{-2\beta+1}du.\end{aligned} \tag{3}$$

これは Wirtinger(1902)[16] に最初に現れた [2]．それゆえこのタイプの積分（テータ函数の冪積の積分）を **Wirtinger 積分**と呼ぶことを提案している（小生の造語）.

§2　SL 行列型超幾何微分方程式と行列型局所解

函数 $F=F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ は超幾何微分方程式

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{dF}{dx}-\alpha\beta F=0$$

[1] $\theta(u,\tau)$, $\theta_1(u,\tau)$, $\theta_2(u,\tau)$, $\theta_3(u,\tau)$ は Chandrasekharan[3] で定義されたテータ函数とする．零点は次の通り：$\theta(0,\tau)=\theta_1\left(\frac{1}{2},\tau\right)=\theta_2\left(\frac{\tau}{2},\tau\right)=\theta_3\left(\frac{1+\tau}{2},\tau\right)=0$. テータ定数を $\theta_i=\theta_i(0,\tau)\quad(i=1,2,3)$ で表す．この記法は以下でも使われ，$\theta(u)=\theta(u,\tau)$ などと略記することもある．Mumford [8] の記法 $\theta_{00},\theta_{01},\theta_{10},\theta_{11}$ との関係は以下の通り: $\theta(u,\tau)=-\theta_{11}(u,\tau)$, $\theta_1(u,\tau)=\theta_{10}(u,\tau)$, $\theta_2(u,\tau)=\theta_{01}(u,\tau)$, $\theta_3(u,\tau)=\theta_{00}(u,\tau)$.

[2] 1902 年出版の Riemann 全集増補版 (ed. M. Noether, Wirtinger) 中に Riemann の遺稿に関する Wirtinger の報告があり,「Riemann はすでに積分（記法は原文のまま）

$$\int e^{-av}\theta(v-a)^{\alpha}\theta(v-b)^{\beta}\theta(v-c)^{\gamma}\theta(v-d)^{\delta}dv\quad(\alpha+\beta+\gamma+\delta=0)$$

に関しいくつかの計算を実行していたがそこには確定した結果は見出されない」との記述がある．この編集作業に inspire されて Wirtinger は上のような積分表示を論文として出版したのではないか.

をみたす．これを $E(\alpha,\beta,\gamma)$ と名付ける．これに対して，$Y=\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22}\end{bmatrix}$ とおき

$$A(x)=\frac{1}{(\alpha-\beta)x}\begin{bmatrix}\alpha(\beta-\gamma+1) & \alpha(\gamma-\beta-1)\\ \beta(\alpha-\gamma+1) & \beta(\gamma-\alpha-1)\end{bmatrix}+\frac{1}{(\alpha-\beta)(x-1)}\begin{bmatrix}\alpha(\gamma-\alpha-1) & \alpha(\beta-\gamma+1)\\ \beta(\gamma-\alpha-1) & \beta(\beta-\gamma+1)\end{bmatrix}$$

とおくとき，行列型微分方程式 $\dfrac{dY}{dx}=A(x)Y$ において y_{11}，y_{12} は $E(\alpha,\beta+1,\gamma)$ をみたし，y_{21}，y_{22} は $E(\alpha+1,\beta,\gamma)$ をみたす．次にこの行列型微分方程式を適当なゲージ変換により SL 型に直す．このためには新しい行列函数 $\tilde{Y}$ を $\tilde{Y}=x^{\frac{\gamma-1}{2}}(1-x)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}}Y$ で導入すると $\tilde{Y}$ は次の形の微分方程式を満たす．

$$\frac{d}{dx}\tilde{Y}=\left[\frac{1}{(\alpha-\beta)x}\tilde{A}_0+\frac{1}{(\alpha-\beta)(x-1)}\tilde{A}_1\right]\tilde{Y}.$$

ここで

$$\begin{aligned}\tilde{A}_0 &= \begin{bmatrix}\alpha\beta-\dfrac{\alpha(\gamma-1)}{2}-\dfrac{\beta(\gamma-1)}{2} & \alpha(\gamma-\beta-1)\\ \beta(\alpha-\gamma+1) & -\alpha\beta+\dfrac{\alpha(\gamma-1)}{2}+\dfrac{\beta(\gamma-1)}{2}\end{bmatrix},\\ \tilde{A}_1 &= \begin{bmatrix}\alpha\beta-\dfrac{\alpha(\alpha+\beta-\gamma+1)}{2}-\dfrac{\beta(\alpha+\beta-\gamma+1)}{2} & \alpha(\beta-\gamma+1)\\ \beta(\gamma-\alpha-1) & -\alpha\beta+\dfrac{\alpha(\alpha+\beta-\gamma+1)}{2}+\dfrac{\beta(\alpha+\beta-\gamma+1)}{2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

である．$\mathrm{tr}\,\tilde{A}_0=\mathrm{tr}\,\tilde{A}_1=0$ が SL の名前の由来である． 実際モノドロミー行列は $SL(2,\boldsymbol{C})$ に属する．よく知られているように，$x=0$ における行列型局所解 $\tilde{Y}_0(x)$ として次の形のものが取れる．

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_0(x) &= \left[\begin{matrix} x^{\frac{\gamma-1}{2}}(1-x)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}}F(\alpha,\beta+1,\gamma,x)\\ x^{\frac{\gamma-1}{2}}(1-x)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}}F(\alpha+1,\beta,\gamma,x)\end{matrix}\right.\\ &\qquad \left.\begin{matrix}\alpha(\beta-\gamma+1)x^{\frac{1-\gamma}{2}}(1-x)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}}F(1+\alpha-\gamma,2+\beta-\gamma,2-\gamma,x)\\ \beta(\alpha-\gamma+1)x^{\frac{1-\gamma}{2}}(1-x)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}}F(2+\alpha-\gamma,1+\beta-\gamma,2-\gamma,x)\end{matrix}\right].\end{aligned}$$

$x=1,\infty$ に対しても類似の表示で局所解 $\tilde{Y}_1(x),\tilde{Y}_\infty(x)$ がとれる ([10])．さてゲージ変換と積分 (3) の乗法因子とは次の関係がある．

$$\theta_1^{2-2\gamma}\theta_2^{2\gamma-2\alpha-2\beta}\theta_3^{2\alpha+2\beta}=\theta_3^2\lambda(\tau)^{\frac{1-\gamma}{2}}(1-\lambda(\tau))^{\frac{\gamma-\alpha-\beta}{2}}.$$

これにより Wirtinger 積分は SL 型方程式と相性が良いことがわかる．ちなみに

$$\begin{aligned}&\lambda(\tau)^{\frac{\gamma-1}{2}}(1-\lambda(\tau))^{\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}F(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\tau))\\ &\quad=\frac{2\pi\Gamma(\gamma)\theta_3^2}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^{\frac{1}{2}}\theta(u)^{2\alpha-1}\theta_1(u)^{2\gamma-2\alpha-1}\theta_2(u)^{2\beta-2\gamma+1}\theta_3(u)^{-2\beta+1}du\end{aligned}\tag{4}$$

となり，$\tilde{Y}_i(\lambda(\tau))=Z_i(\tau)\quad(i=0,1,\infty)$ とおくとき，$Z_i(\tau)$ の各成分はすべて (4) の右辺の型の積分となる ([10])．$Z_i(\tau)$ は H 上 1 価正則．なお (4) の右辺の積分も Wirtinger 積分と呼ぶことにする．例えば

$$\begin{aligned}Z_0(\tau) &= \left[\begin{matrix}\dfrac{2\pi\Gamma(\gamma)\theta_3^2}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\theta(u)^{2\alpha-1}\theta_1(u)^{2\gamma-2\alpha-1}\theta_2(u)^{2\beta-2\gamma+3}\theta_3(u)^{-2\beta-1}du\\ \dfrac{2\pi\Gamma(\gamma)\theta_3^2}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\theta(u)^{2\beta-1}\theta_1(u)^{2\gamma-2\beta-1}\theta_2(u)^{2\alpha-2\gamma+3}\theta_3(u)^{-2\alpha-1}du\end{matrix}\right.\\ &\qquad\left.\begin{matrix}\dfrac{2\pi\alpha\Gamma(2-\gamma)\theta_3^2}{\Gamma(-\beta)\Gamma(1+\beta-\gamma)}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\theta(u)^{2\beta-2\gamma+3}\theta_1(u)^{-2\beta-1}\theta_2(u)^{2\alpha-1}\theta_3(u)^{2\gamma-2\alpha-1}du\\ \dfrac{2\pi\beta\Gamma(2-\gamma)\theta_3^2}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+\alpha-\gamma)}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\theta(u)^{2\alpha-2\gamma+3}\theta_1(u)^{-2\alpha-1}\theta_2(u)^{2\beta-1}\theta_3(u)^{2\gamma-2\beta-1}du\end{matrix}\right]\end{aligned}$$

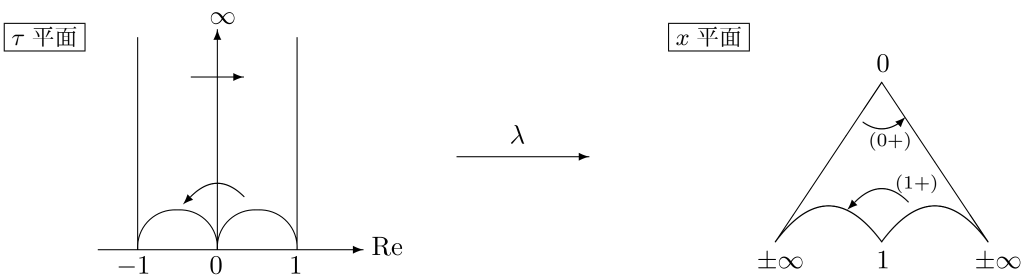
である．

§3 接続行列とモノドロミー行列

行列函数 $\tilde{Y}_0(x),\ \tilde{Y}_1(x),\ \tilde{Y}_\infty(x)$ 間の接続問題やモノドロミー問題は $Z_0(\tau),\ Z_1(\tau),\ Z_\infty(\tau)$ 間のモジュラー変換の問題に翻訳される．これを見るためまず $\lambda(\tau)$ の挙動を調べる．これは $\Gamma(2)$ 不変である．$\Gamma(2)$ のカスプ $\tau=\infty,0,\pm1$ は $x=\lambda(\tau)$ によりリーマン球面上では $x=0,1,\pm\infty$ にそれぞれ対応する．2 つの行列

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

はレベル 2 の主合同部分群 $\Gamma(2)$ の生成元であり，$\Gamma(2)\cong\pi_1(\boldsymbol{P}^1-\{0,1,\infty\},*)$ ($*$ は固定された 1 点）の同一視が可能である．したがって基本群 $\pi_1(\boldsymbol{P}^1-\{0,1,\infty\},*)$ を考えるとき，$x=0$ の周りを正の向きに 1 回転する閉曲線 $(0+)$ および $x=1$ の周りの同様な閉曲線 $(1+)$ には，モジュラー変換 $\tau\to\tau+2$ および $\tau\to\dfrac{\tau}{-2\tau+1}$ がそれぞれ対応する．これらは $\Gamma(2)/\{\pm1\}$ の生成元.



$\tau'=-1/\tau,\ \tau''=1/(1-\tau)$ とおくとき，既出の Z_i は正確には $Z_0(\tau),\ Z_1(\tau'),\ Z_\infty(\tau'')$ と見た時に各成分が (4) の右辺の型の積分で表されると言ったほうが正しい．すると局所解 $\tilde{Y}_0(x)$ の閉曲線 $(0+)$ および $(1+)$ に関するモノドロミー行列は，$Z_0(\tau+2)=Z_0(\tau)M_0,\ Z_0\left(\dfrac{\tau}{-2\tau+1}\right)=Z_0(\tau)M_1$ をみたす行列 M_0 および M_1 にそれぞれ一致する．また $\tilde{Y}_0(x)$ と $\tilde{Y}_1(x)$ の間の接続行列は，$Z_0(\tau)=Z_1(\tau')C$ または $Z_1(\tau')=Z_0(\tau)C'$ をみたす行列 C,C' に一致する．ただし $CC'=E$ である．M_0 は容易に求まり

$$M_0=\begin{bmatrix}e^{\pi i(\gamma-1)} & 0\\ 0 & e^{\pi i(1-\gamma)}\end{bmatrix}$$

である．また

$$C=\begin{bmatrix}-\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} & -\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}\\ \dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} & \dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}\end{bmatrix}$$

であるが，これは $\tilde{Y}_0(x)$ と $\tilde{Y}_1(x)$ の接続行列の知識がなくても複素トーラス上の (4) の積分路の変形とヤコビの虚数変換により別証明が可能である ([10]).

このようにモノドロミー行列をモジュラー変換の行列とみなせることから，一般元 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma(2)$ に対し，$Z_0\left(\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=Z_0(\tau)M$ を満たす行列 $M=M(a,b,c,d)$ を考えることが可能となる．このような M は “一般モノドロミー行列” と呼べるようなものである．実際 M の具体的表示は [12] で

得たが，各成分には得体の知れない数論的な有限和が現れ表示が大変長い．この有限和の evaluation がわかれば行列の各成分の表示ももうすこしシンプルになるのではないかと期待される．

§4 Wirtinger 積分の一般化

(4) の右辺の型の積分は次のような de Rham 理論的解釈が可能である．$\Gamma = \boldsymbol{Z} + \boldsymbol{Z}\tau$, $M = \boldsymbol{C}/\Gamma - \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2}\right\}$ とおき，$T(u) = \theta(u)^p \theta_1(u)^q \theta_2(u)^r \theta_3(u)^s$ とおく．ただし p, q, r, s は複素数で $p+q+r+s=0$ をみたすものとしジェネリックに考える．$\mathcal{L} = \boldsymbol{C}T(u)^{-1}$ および $\check{\mathcal{L}} = \boldsymbol{C}T(u)$ は微分方程式 $d\varphi \pm \varphi d\log T(u) = 0$ の局所解が定める M 上の局所定数層とする．互いに双対の関係にあることに注意．普遍係数定理により次の双一次形式は非退化である．

$$H_1(M, \check{\mathcal{L}}) \times H^1(M, \mathcal{L}) \ni ([\sigma], [\varphi]) \to \langle [\sigma], [\varphi] \rangle \in \boldsymbol{C}.$$

ここで $H^1(M, \mathcal{L})$ は微分形式で生成されるベクトル空間と同一視している．カレントの理論により $\langle [\sigma], [\varphi] \rangle = \displaystyle\int_\sigma T(u)\varphi$ と表現され，これが実質的に (4) の右辺と一致する．またホモロジー基底とコホモロジー基底のペアリングを考えることにより 1 次独立な積分をすべて生産できる．微分方程式については，コホモロジー群の基底の τ 微分による影響を計算すればよいのであるが，テータ函数が熱方程式を満たすということおよびテータ定数が Halphen の微分関係式をみたすということから導かれる ([11]).

以上の枠組みを用いて積分の一般化をおこなう ([14])．X は種数 $g(\geq 1)$ のコンパクトリーマン面とする．$p_1, \ldots, p_n$ は X 上の相異なる $n(\geq 2)$ 点とし，$m_1, \ldots, m_n$ は $\boldsymbol{C} - \boldsymbol{Z}$ に属する元であって $\sum_{k=1}^n m_k = 0$ を満たすものとする．$X^* = X - \{p_1, \ldots, p_n\}$ と置く．X^* の固定点を一つ選び p_0 とする．$\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g$ は，点 p_0 を基点とする X における $2g$ 個の単純閉曲線であって，基本群 $\pi_1(X, p_0)$ を生成しホモロジー群 $H_1(X, \boldsymbol{Z})$ の標準基底となるものとする．このとき $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \ldots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1$ が群 $\pi_1(X, p_0)$ における関係として成り立つ．n 点 $p_1, \ldots, p_n$ は $4g$ 個の辺 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1}, \ldots, \alpha_g, \beta_g, \alpha_g^{-1}, \beta_g^{-1}$ で区切られる $4g$ 角形の内部にあると仮定して一般性を失わない．γ_k $(k = 1, \ldots, n)$ は点 p_k を中心とし反時計周りに 1 周する $4g$ 角形の内部における小円周であって，n 個の円周 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ は互いに交わることがないとする．$2g+n$ 個の閉曲線 $\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g, \gamma_1 \ldots, \gamma_n$ は基本群 $\pi_1(X^*, p_0)$ を生成し関係 $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \ldots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}$ $= \gamma_1 \ldots \gamma_n$ をみたす．ρ は $\pi_1(X^*, p_0)$ から乗法群 $\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C} - \{0\}$ への表現であって $\rho(\gamma_k) = e^{2\pi i m_k}$ を満たすものとする．よく知られているように，X^* 上多価有理形乗法的函数 $T(u)$ が存在して，$\gamma \in \pi_1(X^*, p_0)$ に対し $T(u)$ の γ に沿った解析接続を $T^\gamma(u)$ と書くとき $T^\gamma(u) = \rho(\gamma)T(u)$ という関係がなりたつ．多価函数 $T(u)^{-1}$ の分枝で生成される X^* 上の局所定数層を $\mathcal{L}$ とする．このときホモロジー群 $H^1(X^*, \mathcal{L})$ の構造がどのようになっているかを問題としたい [3]．$\omega_{k,l}$ $(k \neq l)$ は $X - \{p_k, p_l\}$ 上の正則 1 形式であって，点 p_k と p_l では留数がそれぞれ $+1$ と -1 であるような位数 1 の極をもつようなものとする．このとき X^* 上の多価正則乗法的函数 $T_1(u)$ で，関係 $T_1^{\gamma_k}(u) = \rho(\gamma_k)T_1(u)\,(k = 1, \ldots, n)$ および $d\log T_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(m_1 + \cdots + m_k)\omega_{k,k+1}$ がなりたつようなものが定数倍を除いて一意的に存在する．このとき $T_2(u) = T(u)/T_1(u)$ は X 上多価有理形乗法的函数であって，$T_2^{\gamma_k}(u) = T_2(u)\,(k = 1, \ldots, n)$ が成り立つ．P を，$T_2(u)^{-1}$ を有理的大域切断にもつ X 上の正則直線束とすると $c_1(P) = 0$ がなりたつ．このとき次の結果が証明できる ([14]).

定理　同型 $H^1(X^*, \mathcal{L}) \cong E_\infty^{01} \oplus E_\infty^{10}$ がなりたつ．ただし，

---

[3] $\check{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{L}$ の双対とする．$H_1(X^*, \check{\mathcal{L}})$ の構造は容易にわかる．

(i) P が複素解析的に自明でない直線束ならば

$$E_\infty^{10} = H^0(X, \Omega_X^1(D)(P)),$$
$$E_\infty^{01} = \frac{H^0(X, \Omega_X^1(2D)(P))}{\nabla H^0(X, \mathcal{O}_X(D)(P)) + H^0(X, \Omega_X^1(D)(P))}$$

であり，
(ii) P が複素解析的にも自明な直線束ならば

$$E_\infty^{10} = H^0(X, \Omega_X^1(D))/\boldsymbol{C}\cdot\nabla(1),$$
$$E_\infty^{01} = \frac{H^0(X, \Omega_X^1(2D))}{\nabla H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) + H^0(X, \Omega_X^1(D))}$$

である．ここで $D = \sum_{k=1}^n p_k$ であり $\nabla = d + d\log T_1(u)\wedge$ である．

この定理により $H^1(X^*, \mathcal{L})$ の基底を以下のようにして選ぶことができる．

例1　P は複素解析的に自明でないとする．$H^0(X, \Omega_X^1(P)) \subset H^0(X, \Omega_X^1(D)(P))$ である．Riemann-Roch の定理および Serre 双対性により $\dim H^0(X, \Omega_X^1(P)) = g-1$ を得る．$\omega_1, \dots, \omega_{g-1}$ は P に値をとる X 上の正則 1 形式であって $H^0(X, \Omega_X^1(P))$ の基底をなすものがとれる．σ_k $(1 \le k \le n)$ は P に値をとる $X - \{p_k\}$ 上正則な 1 形式であって点 p_k において位数 1 の唯一の極をもつものとする．このとき $n+g-1$ 個の 1 形式 $\omega_1, \dots, \omega_{g-1}, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ は E_∞^{10} の基底となる．τ_k $(1 \le k \le n)$ は P に値をとる $X - \{p_k\}$ 上正則な 1 形式であって点 p_k において位数 2 の唯一の極をもつものとする．$\dim E_\infty^{01} = g-1 < n$ であるので，$\nabla H^0(X, \mathcal{O}_X(D)(P)) + H^0(X, \Omega_X^1(D)(P))$ に属さない $g-1$ 個の 1 形式 $\tau_1, \dots, \tau_{g-1}$ は E_∞^{01} の基底をなす．それゆえ $n+2g-2$ 個の 1 形式 $\omega_1, \dots, \omega_{g-1}, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_1, \dots, \tau_{g-1}$ は $H^1(X^*, \mathcal{L})$ の基底となる．

例2　P は複素解析的にも自明とする．$H^0(X, \Omega_X^1) \subset H^0(X, \Omega_X^1(D))$ であり，$\dim H^0(X, \Omega_X^1) = g$ である．$\omega_1, \dots, \omega_g$ は X 上の正則 1 形式であって $H^0(X, \Omega_X^1)$ の基底をなすものとする．$\omega_{k,l}$ は $X - \{p_k, p_l\}$ $(k \neq l)$ 上正則な 1 形式であって点 p_k と p_l では留数がそれぞれ $+1$ と -1 であるような 1 位の極をもつものであるとする．このとき $n+g-1$ 個の 1 形式 $\omega_1, \dots, \omega_g, \omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{34}, \dots, \omega_{n-1,n}$ は $H^0(X, \Omega_X^1(D))$ の基底をなす．$\nabla(1) = \sum_{k=1}^{n-1}(m_1 + \cdots + m_k)\omega_{k,k+1}$ であることから，$n+g-2$ 個の 1 形式 $\omega_1, \dots, \omega_g, \omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{34}, \dots, \omega_{n-2,n-1}$ は E_∞^{10} の基底となる．τ_k $(1 \le k \le n)$ は $X - \{p_k\}$ 上の正則 1 形式であって点 p_k において位数 2 の唯一の極をもつものとする．$\dim E_\infty^{01} = g \le n$ であることから，$\nabla H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) + H^0(X, \Omega_X^1(D))$ に属さない g 個の 1 形式 $\tau_1, \dots, \tau_g$ は E_∞^{01} の基底をなす．ゆえに $n+2g-2$ 個の 1 形式 $\omega_1, \dots, \omega_g, \omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{34}, \dots, \omega_{n-2,n-1}, \tau_1, \dots, \tau_g$ は $H^1(X^*, \mathcal{L})$ の基底となる．

さて複素トーラス $X = \boldsymbol{C}/(\boldsymbol{Z} + \tau\boldsymbol{Z})$ に話を戻す．n, n' は $2 \le n \le n'$ をみたす自然数とする．a_k, b_k $(1 \le k \le n')$ は実数とし，c_k $(1 \le k \le n)$ は整数とは異なる複素数，c_k $(n+1 \le k \le n')$ は 0 でない整数とする．$\sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=n+1}^{n'} c_k = 0$ が成立するとし，(a_k, b_k) $(1 \le k \le n)$ は $\boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}^2$ の元とみなして互いに異なっていると仮定する．t_k $(1 \le k \le n)$ は $-a_k\tau - b_k$ で定義される X 上の点とすると $t_k \neq t_l$ $(k \neq l)$ である．$D = \{t_1, \dots, t_n\}$ および $X^* = X - D$ とおく．X 上の点 t_k は指標付きテータ函数 $\theta_{a_k,b_k}(u,\tau)$ [4] の唯一の零点であることに注意．今，$T_1(u) = \prod_{k=1}^n \theta_{a_k,b_k}(u,\tau)^{c_k}$，$T_2(u) = \prod_{k=n+1}^{n'} \theta_{a_k,b_k}(u,\tau)^{c_k}$，$T(u) = T_1(u)T_2(u)$ と置けば，前述のコンパクトリーマン面一般に対する設定にかなう．このとき $H^1(X^*, \mathcal{L})$ の基底は，例 1，例 2 にあるように 2 通りに場合分

[4] 指標付きテータ函数 $\theta_{a_k,b_k}(u,\tau)$ は Mumford[8] で定義されている．

けされ，テータ函数を用いて具体的に書ける ([7])．特に $t_1,\ldots,t_n$ として $\boldsymbol{C}/\Gamma$ の N 等分点（全部で $n=N^2$ 個）をとった場合の積分の満たす微分方程式については眞野 [6] の結果がある．

§5　アーベル曲面のテータ因子配置

リーマン面上の積分から移行して高次元空間上の積分を追求しようとすると因子配置のコホモロジーを調べる必要がある．このうち非常によく研究されてきたのは，射影空間内の超平面配置のコホモロジーであり，超幾何積分の幾何学的基礎を与えるものである ([1])．これに比べ，非有理的多様体上の因子配置についてはこれまであまり研究されて来なかったのではないかと思われる．Wirtinger 積分が楕円曲線上の点配置に関する積分表示なので，この高次元化を追求するためにアーベル多様体上のテータ因子配置の幾何の研究に進むのは自然なことと思われる．最近 2 次元の場合に結果が得られたのでそれを紹介したい ([13])．

τ は複素対称 2 次正方行列で虚部が正定値であるもの，$X=\boldsymbol{C}^2/(\boldsymbol{Z}^2+\tau\boldsymbol{Z}^2)$ を主偏極アーベル曲面で楕円曲線の直積でないもの，N,N' は自然数で $2\le N\le N'$ を満たすものとする．N' 個の（指標付き）テータ函数 $\theta_k(z_1,z_2)=\theta_k(z_1,z_2,\tau)$ [5] $(k=1,\ldots,N')$ は相異なるとする．$1\le k\le N$ に対し，D_k はテータ函数 $\theta_k(z)$（ここで $z=(z_1,z_2)$ とおいた）の零点集合し，$D=\sum_k D_k$ は正規交叉因子であると仮定する．$M=X-D$ とおく．$\iota: M\hookrightarrow X$ は包含写像とする．$1\le k\le N$ に対しては $c_k\in\boldsymbol{C}-\boldsymbol{Z}$, $\sum_k c_k=0$ とし，$N+1\le k\le N'$ に対しては $c_k\in\boldsymbol{Z}-\{0\}$, $\sum_k c_k=0$ とする．$T_1(z)=\prod_{k=1}^N\theta_k(z)^{c_k}$, $T_2(z)=\prod_{k=N+1}^{N'}\theta_k(z)^{c_k}$, $T(z)=T_1(z)T_2(z)$ とおく．$T(z)$ は M 上の乗法的函数を定義している．$\mathcal{L}$ を $T(z)^{-1}$ で定義される M 上の局所定数層とする．このとき問題にしたいのは $H^p(M,\mathcal{L})$ の構造である．このための出発点となるのはコホモロジーとハイパーコホモロジーとの間の同型 $H^p(M,\mathcal{L})\cong\mathbf{H}^p(X,\Omega_X^\bullet\langle D\rangle(P),\nabla)$ である．ここで $\nabla=d+d\log T_1\wedge$ であり，P は $T_2(z)^{-1}$ を X 上の有理型大域切断にもつ X 上のチャーンクラス 0 の直線束 $(P\in\mathrm{Pic}^0(X))$ であり，$\Omega_X^\bullet\langle D\rangle(P)=\Omega_X^\bullet\langle D\rangle\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X(P)$ は ∇ とともに P に値をとる因子 D に沿った対数的微分形式の層のなす複体である（$\mathcal{O}_X(P)$ は P の切断で生成される X 上の層）．この同型は 2 つの複体 $(\Omega_X^\bullet\langle D\rangle(P),\nabla)\to(\iota_*\mathcal{E}_M^\bullet(P|M),\nabla)$ が quasi-isomorphic であることから導かれる．ここで $\iota: M\to X$ は埋め込みであり，$\mathcal{E}_M^\bullet(P|M)$ は P の M への制限 $P|M$ に値をとる M 上の C^∞ 級微分形式の層の複体 (d および ∇ で考える）である．この同型は Deligne の定理の系として導かれるほか初等的な解析的計算によっても証明できる．$p\neq 2$ のとき $H^p(M,\mathcal{L})=0$ であることは，青本 (1975)，Esnault-Vieweg (1995)，趙 (1997) で論じられている．青本の方法はモース理論的，Esnault-Vieweg および趙は代数的である．一方対数的 Dolbealt 複体を用いて解析的に証明することも可能である．結局 $\dim H^2(M,\mathcal{L})=N(N+1)=$（$M$ のオイラー数）となることがわかる．$\mathcal{U}$ を X の開被覆とし 2 重複体 $(C^p(\mathcal{U},\Omega_X^q\langle D\rangle(P)),\delta,\nabla)$ にホッジ・フィルトレーションを導入することによりスペクトル系列 $E_1^{pq}(\mathcal{U})$ の開被覆 $\mathcal{U}$ の細分に関する帰納的極限 $E_1^{pq}=H^q(X,\Omega_X^p\langle D\rangle(P))=\varinjlim_{\mathcal{U}}E_1^{pq}(\mathcal{U})$ はハイパーコホモロジー $\mathbf{H}^{p+q}$ に隣接 (abut) する：$E_1^{pq}=H^q(X,\Omega_X^p\langle D\rangle(P))\Longrightarrow\mathbf{H}^{p+q}(X,\Omega_X^\bullet\langle D\rangle(P),\nabla)$.

補題　P が自明 $(P=1)$ ならば $p+q>2$ のとき $E_1^{pq}=0$. 非自明 $(P\neq 1)$ ならば $p+q\neq 2$ のとき $E_1^{pq}=0$.

同型 $H^k(M,\mathcal{P}|M)\cong\oplus_{p+q=k}H^q(X,\Omega_X^p\langle D\rangle(P))$ および左辺の構造がホモロジーの計算から分かることから証明できる．ここで $\mathcal{P}$ は直線束 P に付随する X 上の局所定数層．$\mathcal{P}|M$ は M への制限．

[5] 2 変数の指標付きテータ函数とは Mumford[8] によれば $\theta\begin{bmatrix}a_1\,a_2\\b_1\,b_2\end{bmatrix}(z_1,z_2;\tau)$ という記号で与えられるものである．ここでは略記した．

命題 1 　P が非自明ならば E_1 退化．$E_\infty^{20} = H^0(X, \Omega_X^2(D)(P))$, $E_\infty^{11} = H^1(X, \Omega_X^1\langle D\rangle(P))$ でありその他の E_∞^{pq} は 0. $H^2(M, \mathcal{L}) \cong E_\infty^{20} \oplus E_\infty^{11}$.

命題 2 　P が自明ならば E_2 退化．$E_\infty^{20} = H^0(X, \Omega_X^2(D))/\nabla H^0(X, \Omega_X^1\langle D\rangle)$,
$E_\infty^{11} = H^1(X, \Omega_X^1\langle D\rangle)/\nabla H^1(X, \mathcal{O}_X)$, $E_\infty^{02} = H^2(X, \mathcal{O}_X)$ でありその他の E_∞^{pq} は 0. $H^2(M, \mathcal{L}) \cong E_\infty^{20} \oplus E_\infty^{11} \oplus E_\infty^{02}$.

スペクトル系列の各項を微分形式の加群として具体的に実現するとともに，コホモロジー群 $H^2(M, \mathcal{L})$ を生成する X 上有理型 2 形式の極の位数の評価を行なう．このために次の分解を考える (Deligne)．

$$0 \longrightarrow \Omega_X^1\langle D\rangle(P) \longrightarrow \Omega_X^1(D)(P) \xrightarrow{\nabla'} \frac{\sum_{\sum k_\nu = 1} \Omega_X^2\left(\sum_{\nu=1}^N (k_\nu + 1)D_\nu\right)(P)}{\Omega_X^2(D)(P)} \longrightarrow 0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{O}_X(P) \to \mathcal{O}_X(D)(P) &\xrightarrow{\nabla'} \frac{\sum_{\sum k_\nu = 1} \Omega_X^1\left(\sum_{\nu=1}^N (k_\nu + 1)D_\nu\right)(P)}{\Omega_X^1(D)(P)} \\ &\xrightarrow{\nabla'} \frac{\sum_{\sum k_\nu = 2} \Omega_X^2\left(\sum_{\nu=1}^N (k_\nu + 1)D_\nu\right)(P)}{\sum_{\sum k_\nu = 1} \Omega_X^2\left(\sum_{\nu=1}^N (k_\nu + 1)D_\nu\right)(P)} \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{6}$$

ただし $k_1, \cdots, k_N$ は 0 以上の整数であり，$\sum_{\sum k_\nu = l}$ とは $\sum_{k_1 \geq 0, \ldots, k_N \geq 0, k_1 + \cdots k_N = l}$ の略記である．以下 $H^\bullet(X, *)$ を $H^\bullet(*)$ と書く．(5),(6) を短完全列に分解しコホモロジーの長完全列をつくる．その際複素トーラスの直線束のコホモロジーに関する Mumford の消滅定理など [6] を用いれば次が得られる．

定理 1 　P は非自明とする．このとき $E_\infty^{20} \cong H^0(\Omega_X^2(D)(P))$,

$$E_\infty^{11} \cong \frac{H^0\left(\sum_{\sum k_\nu = 1} \Omega_X^2\left(\sum_{\nu=1}^N (k_\nu + 1)D_\nu\right)(P)\right)}{\nabla H^0(\Omega_X^1(D)(P)) + H^0(\Omega_X^2(D)(P))}$$

であり，$\dim E_\infty^{20} = N^2$, $\dim E_\infty^{11} = N$ である．

定理 2 　P は自明とする．このとき $E_\infty^{20} \cong \dfrac{H^0(\Omega_X^2(D))}{\nabla H^0(\Omega_X^1\langle D\rangle)}$;

$$E_\infty^{11} \cong \frac{H^0\left(\sum_{\sum k_\nu = 1} \Omega_X^2\left(\sum_{\nu=1}^N (k_\nu + 1)D_\nu\right)\right)}{\nabla H^0\left(\sum_{\sum k_\nu = 1} \Omega_X^1\left(\sum_{\nu=1}^N (k_\nu + 1)D_\nu\right)\right) \cap H^0\left(\sum_{\sum k_\nu = 1} \Omega_X^2\left(\sum_{\nu=1}^N (k_\nu + 1)D_\nu\right)\right) + H^0(\Omega_X^2(D))};$$

$$E_\infty^{02} \cong \frac{H^0\left(\sum_{\sum k_\nu = 2} \Omega_X^2\left(\sum_{\nu=1}^N (k_\nu + 1)D_\nu\right)\right)}{\nabla H^0\left(\sum_{\sum k_\nu = 1} \Omega_X^1\left(\sum_{\nu=1}^N (k_\nu + 1)D_\nu\right)\right) + H^0\left(\sum_{\sum k_\nu = 1} \Omega_X^2\left(\sum_{\nu=1}^N (k_\nu + 1)D_\nu\right)\right)}$$

であり，$\dim E_\infty^{20} = N^2 - N$, $\dim E_\infty^{11} = 2N - 1$, $\dim E_\infty^{02} = 1$ である．

注意．定理 1，2 における E_∞^{11} はある D_ν に沿って位数 2 の極をもつ微分形式の必要性を意味し，E_∞^{02} はある D_ν に沿って位数 3 の極をもつ微分形式の必要性を意味する．

[6]「など」と述べたのは，証明の過程で 1 箇所摩天楼層係数のコホモロジーの消滅を手で計算しなければならない場面が出現し，これには Mumford の一般論は使えない．

§6　基本群

M 上の積分表示を得るには，コホモロジーのみならず M の空間構造自体も詳しく見る必要がある．以下，M の基本群について論じる．まずは初めに議論で必要となる道具の説明を一般的な設定の下でおこなう．$X = V/\Lambda$ は必ずしも主偏極ではない g 次元偏極アーベル多様体とする．$\sigma : \Delta_p \to X$, $\tau : \Delta_q \to X$ をそれぞれ特異 p, q 単体とする．特異 $(p+q)$ 鎖 $\sigma * \tau : \Delta_p \times \Delta_q \to X$ を $(\sigma * \tau)(s,t) = \sigma(s) + \tau(t)$ $(s \in \Delta_p,\ t \in \Delta_q)$ で定義する．ここで右辺の加法は加法群 X の群演算に由来するものである．$*$ を**ポントリャーギン積**と呼ぶ．これは $\boldsymbol{Z}$ 双線形で，結合律，分配律が成り立つ．さらに σ, τ をそれぞれ特異 p, q 鎖とするとき，$\partial(\sigma * \tau) = (\partial\sigma) * \tau + (-1)^p \sigma * (\partial\tau)$ が成り立つ．X が可換群であることから，$\sigma * \tau = (-1)^{pq} \tau * \sigma$ が成り立つ．また 0 を X の単位元とすると $0 * \sigma = \sigma * 0 = \sigma$ が成り立つ．

注意．σ を p 単体，$\bullet$ を 0 単体とするとき，$\sigma * \bullet = \bullet * \sigma$ は成り立つが，一般にこれらと σ とは異なる．なお，σ がサイクルならば両者はホモローグ．

以上よりホモロジーに対してもポントリャーギン積が定義される．すなわち $[\sigma] \in H_p(X, \boldsymbol{Z})$, $[\tau] \in H_q(X, \boldsymbol{Z})$ に対し $[\sigma] * [\tau] = [\sigma * \tau] \in H_{p+q}(X, \boldsymbol{Z})$ が定義される．積 $*$ は以下の写像の合成と理解される．

$$* : H_p(X, \boldsymbol{Z}) \times H_q(X, \boldsymbol{Z}) \to H_{p+q}(X \times X, \boldsymbol{Z}) \to H_{p+q}(X, \boldsymbol{Z}).$$

ここで第一の写像はクロス積，第二の写像はアーベル群 X の加法から誘導された写像．

引き続き $X = V/\Lambda$ は必ずしも主偏極ではない g 次元偏極アーベル多様体，L は X 上の正定値直線束とする．$\lambda_1, \ldots, \lambda_{2g}$ を L に対する Λ のシンプレクティック基底とすると，これらは $H_1(X, \boldsymbol{Z})$ の基底とみなせる．この基底に関する V 上の実座標を $x_1, \ldots, x_{2g}$ とする．このとき $dx_1, \ldots, dx_{2g}$ は $H^1(X, \boldsymbol{Z})$ の基底とみなせ，$\int_{\lambda_i} dx_j = \delta_{ij}$ を満たす．有限集合 $\{1, 2, \ldots, 2g\}$ の順序つき部分集合 $I = (i_1 < \cdots < i_p)$ に対し，$\lambda_I = \lambda_{i_1} * \cdots * \lambda_{i_p}$,　$dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ とおく．

事実　$\{dx_I \mid \#I = p\}$ は $H^p(X, \boldsymbol{Z})$ の基底をなし，$\{\lambda_I \mid \#I = p\}$ は $H_p(X, \boldsymbol{Z})$ の基底をなす．互いに双対基底の関係にある．

$I = (i_1 < \cdots < i_p)$ に対し $I^\circ = (i_1^\circ < \cdots < i_{2g-p}^\circ)$ を $I \cup I^\circ = \{1, \ldots, 2g\}$ であるような集合とする．I の**符号** $\varepsilon(I)$ を $\varepsilon(I) dx_I \wedge dx_{I^\circ} = dx_1 \wedge dx_{g+1} \wedge \cdots \wedge dx_g \wedge dx_{2g}$ で定義する．

事実　$P : H_p(X, \boldsymbol{Z}) \to H^{2g-p}(X, \boldsymbol{Z})$ をポアンカレ双対性による同型対応とする．このとき $P(\lambda_I) = (-1)^{g+p} \varepsilon(I) dx_{I^\circ}$　$(\#I = p)$　が成り立つ．

$\sigma \in H_p(X, \boldsymbol{Z})$, $\tau \in H_q(X, \boldsymbol{Z})$ に対し，**交叉** $\sigma \cdot \tau \in H_{p+q-2g}(X, \boldsymbol{Z})$ を $\sigma \cdot \tau = P^{-1}(P\sigma \wedge P\tau)$ で定義する．$p + q = 2g$ のとき $\sigma \cdot \tau$ は交叉数 $(\in \boldsymbol{Z})$ をあらわす．これを $(\sigma \cdot \tau)$ ともあらわす．

直線束 L の型を $(d_1, \ldots, d_g)$ とする．線形系 $|L|$ に属する有効因子 $D \in |L|$ をひとつとる．D から決まるホモロジー類も混同して $D \in H_{2g-2}(X, \boldsymbol{Z})$ と書く．このとき

事実　$D = (-1)^{g-1} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{g} d_\nu \, \lambda_1 * \lambda_{g+1} * \cdots * \check{\lambda_\nu} * \check{\lambda}_{g+\nu} * \cdots * \lambda_g * \lambda_{2g}$.（$\check{}$ は「除外する」の意.）

以下 $X = \boldsymbol{C}^2/(\boldsymbol{Z}^2 + \tau\boldsymbol{Z}^2)$ は主偏極アーベル曲面，D はテータ函数 $\theta \begin{bmatrix} a_1 \, a_2 \\ b_1 \, b_2 \end{bmatrix} (z_1, z_2; \tau)$ の零点集合（テータ因子）とする．以下の事実が知られる ([2]).

事実　X が 2 次元ヤコビ多様体ならば D は非特異曲線である．

ところが

事実　主偏極アーベル曲面 X は，2 次元ヤコビ多様体であるか，2 つの（偏極つき）楕円曲線の直積であるかのどちらか一方.

本稿では以下 X は 2 次元ヤコビ多様体とする. したがって D は非特異代数曲線. 楕円曲線の直積空間上の積分の研究については Felder-Varchenko: IMRN (1995), No.5, 221 を参照. 簡単な計算により次が得られる.

補題 1 ([13])　自己交叉 $D^2 = 2$. 種数 $g(D) = 2$.

さて $\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix}$ とおく. $\lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = \begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{21} \end{pmatrix}$, $\lambda_4 = \begin{pmatrix} \tau_{12} \\ \tau_{22} \end{pmatrix}$ が $\Lambda = \boldsymbol{Z}^2 + \tau \boldsymbol{Z}^2$ のシンプレクティック基底として取れる.

系　$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ を $H_1(X, \boldsymbol{Z})$ の基底とみなすとき，$\lambda_i * \lambda_j\ (i < j)$ の形のもの計 6 個が $H_2(X, \boldsymbol{Z})$ の基底，$\lambda_i * \lambda_j * \lambda_k\ (i < j < k)$ の形のもの計 4 個が $H_3(X, \boldsymbol{Z})$ の基底.

補題 2　$D \in H_2(X, \boldsymbol{Z})$ とみなすとき，以下の公式が成り立つ. (i) $D \cdot (\lambda_1 * \lambda_2 * \lambda_3) = \lambda_2$, (ii) $D \cdot (\lambda_1 * \lambda_2 * \lambda_4) = -\lambda_1$, (iii) $D \cdot (\lambda_1 * \lambda_3 * \lambda_4) = -\lambda_4$, (iv) $D \cdot (\lambda_2 * \lambda_3 * \lambda_4) = \lambda_3$, (v)$D \cdot (\lambda_1 * \lambda_2) = D \cdot (\lambda_2 * \lambda_3) = D \cdot (\lambda_3 * \lambda_4) = D \cdot (\lambda_4 * \lambda_1) = 0$, (vi) $D \cdot (\lambda_1 * \lambda_3) = D \cdot (\lambda_2 * \lambda_4) = 1$.
（証）$D = -\lambda_1 * \lambda_3 - \lambda_2 * \lambda_4$ に注意すればよい.

注意　$D = \lambda_3 * \lambda_1 + \lambda_4 * \lambda_2$ であることから D は 2 つのトーラス $\lambda_3 * \lambda_1$ と $\lambda_4 * \lambda_2$ の連結和とみなせる.

§7　2 つのテータ因子の補集合

X の向きづけを固定し $X = \lambda_1 * \lambda_3 * \lambda_2 * \lambda_4$ とする. D_1, D_2 は X のテータ因子であって部分多様体としては相異なるものとする（因子としては線形同値）. 目的は $X - (D_1 \cup D_2)$ の基本群を知ることである. $\tilde{D}$ は $D_1 \cup D_2$ の X における管状近傍（各ファイバーは微小半径 ε の 2 次元閉円板），U は $X - \tilde{D}$ の閉包とする. モース理論によれば ε が十分小さければ $X - (D_1 \cup D_2)$ と U とはホモトピー同値. したがって U の基本群を求めれば良い. U の境界 V は $\tilde{D}$ のそれと一致する. $V = \partial U = \partial \tilde{D}$. このとき $V = U \cap \tilde{D}$ が成り立つ. $X = U \cup \tilde{D}$ であるので，4 つ組 $(V, U, \tilde{D}, X)$ に対し van Kampen の定理を利用して U の基本群を求める. D_1, D_2 は線形同値であるから §6 の結果により交叉数は $D_1 \cdot D_2 = 2$ である. $D_1 \cap D_2 = \{p_{12}, p_{21}\}$ と置く. 基点 $* \in V$ を点 p_{12} のごく近くにとる. 明らかに $\pi_1(\tilde{D}, *) \cong \pi_1(D_1 \cup D_2, *)$ である. ここで右辺は，$D_1 \cup D_2$ 上の点 p_{12} と基点 $*$ とを $\tilde{D}$ 内の（巻きつきのない）曲線で結ぶことにより $D_1 \cup D_2$ と $*$ とを連結した複体の基本群の意味. §6 補題 1 により $\kappa = 1, 2$ に対し

$$\pi_1(D_\kappa, *) = \langle \lambda_1^\kappa, \lambda_2^\kappa, \lambda_3^\kappa, \lambda_4^\kappa \mid [\lambda_3^\kappa, \lambda_1^\kappa][\lambda_4^\kappa, \lambda_2^\kappa] = 1 \rangle$$

が成り立つ. ここで λ_ν^κ は X 上の 1-cycle λ_ν の D_κ 上への平行移動であって始点および終点を基点 $*$ まで引き込んだもの. $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ である. なお曲線の積は左から右に読む. l_1 は点 p_{12} を点 p_{21} に結ぶ D_1 上の曲線，l_2 は点 p_{21} を点 p_{12} に結ぶ D_2 上の曲線とし，$c_{12} = l_1 l_2$ と置く. 始点および終点を p_{12} から基点 $*$ まで引き込んだ閉曲線も c_{12} と書く.

補題 1　$*$ を起点とする c_{12} と同様な閉曲線 c'_{12} を別にとったとする. このとき $a \in \pi_1(D_1, *)$, $b \in \pi_1(D_2, *)$ が存在して $c'_{12} = a c_{12} b$ が成り立つ.

証明は容易. これより次の命題が直ちに得られる.

命題 2　$\pi_1(\tilde{D}, *) \cong \pi_1(D_1 \cup D_2, *) = \langle \lambda_1^\kappa, \lambda_2^\kappa, \lambda_3^\kappa, \lambda_4^\kappa\ (\kappa = 1, 2), c_{12} \mid [\lambda_3^\kappa, \lambda_1^\kappa][\lambda_4^\kappa, \lambda_2^\kappa] = 1 \rangle$.

補題３　$\pi_1(\tilde{D},*)$ の生成元 c_{12} は $\pi_1(X,*)$ の元と見なしたとき一点にホモトピックに選べる．

証明　X の部分トーラス $\lambda_3*\lambda_1$, $\lambda_4*\lambda_2$ を固定し，それらの branch cuts もそれぞれ一つ固定する．点 p_{12}, p_{21} の $\lambda_3*\lambda_1$ への射影を u_{12}, u_{21} とし，$\lambda_4*\lambda_2$ への射影を v_{12}, v_{21} とする．点 p_{12} から p_{21} へ結ぶ D_1 上の曲線 l_1 の $\lambda_3*\lambda_1$ への射影を h_1, $\lambda_4*\lambda_2$ への射影を k_1 とし，点 p_{21} から p_{12} へ結ぶ D_2 上の曲線 l_2 の $\lambda_3*\lambda_1$ への射影を h_2, $\lambda_4*\lambda_2$ への射影を k_2 とする．各 l_κ は，h_κ, k_κ が branch cuts を越えないように選ぶことができる．もし仮に例えば，h_1 が branch cut λ_1 を正方向に 1 回越えたとすると h_1 は $\lambda_3*\lambda_1$ 内で λ_3 に沿って 1 回巻き付いている．曲線 l_1 を $l_1(\lambda_3^1)^{-1}$ で置き換えればこの曲線の $\lambda_3*\lambda_1$ への射影 h_1' は branch cut λ_1 を越えない．以下，各 l_κ に対する h_κ, k_κ はそのようなものとする．場合分け．

（イ）$h_1=h_2^{-1}$ のとき．任意の $p\in h_1=h_2^{-1}$ に対し，$\lambda_4*\lambda_2$ を適当に平行移動させることで点 p を通過するものを $(\lambda_4*\lambda_2)_p$ と書くことにする．このとき

$$D_\kappa\cap\bigcup_{p\in h_1}(\lambda_4*\lambda_2)_p=k_\kappa \qquad (\kappa=1,2)$$

となる．このとき $\lambda_4*\lambda_2$ における実 2 次元円板に同相な閉集合 Δ_{42} がとれて $\partial\Delta_{42}=k_1k_2$ を満たす．これより直ちに，X における円板に同相な閉集合 Δ がとれて $\partial\Delta=l_1l_2$ が成り立つ．ゆえに X 内で一点にホモトピックな c_{12} が構成された．

（ロ）$k_1=k_2^{-1}$ のときも（イ）と全く同様である．

（ハ）いずれでもない場合．曲線の積 h_1h_2 で縁取られた $\lambda_3*\lambda_1$ の部分集合を Δ_1, 積 k_1k_2 で縁取られた $\lambda_4*\lambda_2$ の部分集合を Δ_2 とする．これらは円板に同相．直積 $\Delta_1\times\Delta_2$ が X の部分集合として考えられ，多重円板 $\{(z,w)\in\boldsymbol{C}\mid |z|\le 1,\ |w|\le 1\}$ に位相的に同一視される．また $c_{12}=l_1l_2\subset\partial\Delta_1\times\partial\Delta_2$ であり，これは多重円板における部分集合 $\{(e^{i\theta},e^{i\theta})\mid 0\le\theta\le 2\pi\}$ と同一視される．交わり $\{(z,w)\in\boldsymbol{C}\mid |z|\le 1,\ |w|\le 1\}\cap\{(z,w)\in\boldsymbol{C}\mid z=w\}$ に対応する $\Delta_1\times\Delta_2$ の部分集合 Δ は円板に同相であり c_{12} に縁取られている.（終）

定義　$\pi_1(\tilde{D},*)$ の生成元 c_{12} のうち補題 3 の性質を満たすものを standard loop と呼ぶことにする．

$\pi_1(\tilde{D},*)$ の生成元 c_{12} が standard loop であるとすると，次の完全系列が成り立つ．

$$1\longrightarrow K\longrightarrow\pi_1(\tilde{D},*)\longrightarrow\pi_1(X,*)\longrightarrow 1$$

ここで K は，交換子群 $[\pi_1(\tilde{D},*),\pi_1(\tilde{D},*)]$ および $\lambda_1^1(\lambda_1^2)^{-1}$, $\lambda_2^1(\lambda_2^2)^{-1}$, $\lambda_3^1(\lambda_3^2)^{-1}$, $\lambda_4^1(\lambda_4^2)^{-1}$, c_{12} から生成される $\pi_1(\tilde{D},*)$ 内の最小の正規部分群である．次の補題は明らか.

補題４　c_{12}' を別の standard loop とする．補題 1 に従って $c_{12}'=ac_{12}b$ と書くとき $ab\in K$ である．

以下の議論では l_1, l_2 に付随する standard loop c_{12} をひとつ固定する．

Δ_{12}^κ は D_κ 上点 p_{12} を中心とする微小閉円板，Δ_{21}^κ は D_κ 上点 p_{21} を中心とする微小閉円板とする．$\Sigma_{12}^\kappa=\partial\Delta_{12}^\kappa$, $\Sigma_{21}^\kappa=\partial\Delta_{21}^\kappa$ と置く．これらは 1 次元円周と同相である．基点 $*$ は $\Sigma_{12}^1\times\Sigma_{12}^2$ 上にあるとする．また補助点 $*'$ を $\Sigma_{21}^1\times\Sigma_{21}^2$ 上に取る．D_κ 上の曲線 l_κ $(\kappa=1,2)$ から Δ_{12}^κ, Δ_{21}^κ と交わる部分を除去し新たな両端点を各々$*$, $*'$ に引き込んだ曲線も記号を混同し l_κ と書く．$D_\kappa-\Delta_{12}^\kappa-\Delta_{21}^\kappa$ の D_κ における閉包を D_κ' と書く．基点 $*$ から $\Sigma_{12}^\kappa(\subset D_\kappa')$ 上の 1 点に移動し Σ_{12}^κ に沿って正の向きに 1 回転し $*$ に戻る D_κ' 内の道を γ_{12}^κ と書く．$*$ を起点とし曲線 l_1（または l_2^{-1}）を経由して点 $*'$ に達し Σ_{21}^1（または Σ_{21}^2）に沿って正の向きに 1 回転し再び曲線 l_1^{-1}（または l_2）を経由して $*$

に戻る D_1'（または D_2'）内の道を γ_{21}^1（または γ_{21}^2）と書く．このとき

$$\pi_1(D_\kappa', *) = \langle \lambda_1^\kappa, \lambda_2^\kappa, \lambda_3^\kappa, \lambda_4^\kappa, \gamma_{12}^\kappa, \gamma_{21}^\kappa \mid [\lambda_3^\kappa, \lambda_1^\kappa][\lambda_4^\kappa, \lambda_2^\kappa] = \gamma_{12}^\kappa \gamma_{21}^\kappa \rangle$$

を得る．ここで $\pi_1(D_\kappa', *)$ とは D_κ' と $*$ とを連結した複体の基本群．D の管状近傍 $\tilde{D}$ の D_κ' への制限を $\tilde{D_\kappa'}$ と書くと $\tilde{D_\kappa'} \cong D_\kappa' \times \Delta$ とみなせる．ここで Δ は（抽象的な）円板．写像 $D_1' \times \Delta \longrightarrow \tilde{D_1'}$（または $D_2' \times \Delta \longrightarrow \tilde{D_2'}$）により $* \times \Delta$ は Δ_{12}^2（または Δ_{12}^1）に，$*' \times \Delta$ は Δ_{21}^2（または Δ_{21}^1）にうつる．管状近傍 $\tilde{D}$ をうまく選ぶことで $\tilde{D} = \tilde{D_1'} \cup \tilde{D_2'} \cup (\Delta_{12}^1 \times \Delta_{12}^2) \cup (\Delta_{21}^1 \times \Delta_{21}^2)$ とすることができる．このとき

$$V = \partial \tilde{D} = (D_1' \times \Sigma) \cup (\Sigma_{12}^1 \times \Sigma_{12}^2) \cup (D_2' \times \Sigma) \cup (\Sigma_{21}^1 \times \Sigma_{21}^2)$$

を得る．ここで $\Sigma = \partial\Delta$ は（抽象的な）円周．ところが $D_1' \times \Sigma \supset \Sigma_{12}^1 \times \Sigma_{12}^2$ および $D_2' \times \Sigma \supset \Sigma_{21}^1 \times \Sigma_{21}^2$ であるので結局 $V = \partial\tilde{D} = (D_1' \times \Sigma) \cup (D_2' \times \Sigma)$ が得られる．よく知られているように $\pi_2(D_\kappa', *) = \pi_0(\Sigma, *) = 1$ であることから，ファイバー束に対するホモトピー完全系列により（詳しくは [4] 参照），短完全列

$$1 \longrightarrow \pi_1(\Sigma, *) \longrightarrow \pi_1(D_\kappa' \times \Sigma, *) \longrightarrow \pi_1(D_\kappa', *) \longrightarrow 1 \qquad (\kappa = 1, 2)$$

が得られる．ここで $\pi_1(\Sigma, *) \cong \boldsymbol{Z}$ であり，$\pi_1(\Sigma, *)$ の生成元 1 は写像 $\pi_1(\Sigma, *) \to \pi_1(D_1' \times \Sigma, *)$ により γ_{12}^2 に，写像 $\pi_1(\Sigma, *) \to \pi_1(D_2' \times \Sigma, *)$ により γ_{12}^1 に写されているとする．この完全系列は明らかに分裂することから結局次が得られた．

補題5 $\pi_1(D_\kappa' \times \Sigma, *) \cong \pi_1(D_\kappa', *) \times \pi_1(\Sigma, *)$ $(\kappa = 1, 2)$．従って $\pi_1(D_1' \times \Sigma, *)$ 内において γ_{12}^2 はすべての元と可換であり，$\pi_1(D_2' \times \Sigma, *)$ 内において γ_{12}^1 はすべての元と可換．

注意1 p は D_1' 上の任意の点，Σ_p は直積 $D_1' \times \Sigma$ の点 p 上のファイバーとする．基点 $*$ から Σ_{12}^1 上の 1 点に移動し点 p に結ぶ道 l を固定し，γ は基点 $*$ から l を通り Σ_p を正の向きに 1 回転した後 l^{-1} を通り $*$ に戻る $\pi_1(D_1' \times \Sigma, *)$ の元とする．このとき明らかに $\gamma = \gamma_{12}^2$ である．ゆえに写像 $\pi_1(\Sigma, *) \longrightarrow \pi_1(D_1' \times \Sigma, *)$ は生成元 1 をどの γ に対応させて定義してもすべて一致する．

結局以下を得る．

$$\pi_1(D_1' \times \Sigma, *) = \langle \lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_3^1, \lambda_4^1, \gamma_{12}^1, \gamma_{21}^1, \gamma_{12}^2 \mid [\lambda_3^1, \lambda_1^1][\lambda_4^1, \lambda_2^1] = \gamma_{12}^1\gamma_{21}^1,\ \gamma_{12}^2 \text{ はその他の元と可換} \rangle,$$
$$\pi_1(D_2' \times \Sigma, *) = \langle \lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_4^2, \gamma_{12}^2, \gamma_{21}^2, \gamma_{12}^1 \mid [\lambda_3^2, \lambda_1^2][\lambda_4^2, \lambda_2^2] = \gamma_{12}^2\gamma_{21}^2,\ \gamma_{12}^1 \text{ はその他の元と可換} \rangle.$$

次に $\pi_1(V, *)$ の構造を調べる．先に構成した standard loop $c_{12} \in \pi_1(\tilde{D}, *)$ は道を適当に連続変形することで $c_{12} \in \pi_1(V, *)$ であるとしてよい．$\pi_1(V, *)$ の生成元は，この c_{12} および $\lambda_1^\kappa, \lambda_2^\kappa, \lambda_3^\kappa, \lambda_4^\kappa, \gamma_{12}^\kappa, \gamma_{21}^\kappa$ $(\kappa = 1, 2)$ からなる．このとき次が成立．

補題6 $\pi_1(V, *)$ において $\gamma_{21}^1 = c_{12}(\gamma_{12}^1)^{-1}c_{12}^{-1}$ および $\gamma_{21}^2 = c_{12}^{-1}(\gamma_{12}^2)^{-1}c_{12}$ が成り立つ．

証明 γ_{12}^2 と γ_{21}^2 を $\pi_1(D_2', *)$ の元と見たとき，それぞれは Σ_{12}^2 と Σ_{21}^2 を正の向きに 1 回転する．一方，射影 $D_1' \times \Sigma \to D_1'$ による $l_1 \subset D_1'$（もともとの l_1 から Δ_{12}^1, Δ_{21}^1 との交わりを除去した残りを同じく l_1 で表す）の逆像を H_1 とすると，H_1 は $I \times S^1$（I は閉区間）と同相であり，l_1 の両端点に対応するファイバーは Σ_{12}^2 と Σ_{21}^2 である．H_1 は D_2' に Σ_{12}^2 と Σ_{21}^2 においてハンドルとして接合している．γ_{12}^2 が Σ_{12}^2 を 1 回転する向きで以って H_1 の各ファイバーの正の向きと定義すると，容易にわかるように，γ_{21}^2 はファイバー Σ_{21}^2 を負の向きに回っている．基点 $*$ を出発し曲線 l_1 を経由し $*'$ まで達し Σ_{21}^2 を正の向きに 1 回転し曲線 l_1^{-1} を経由し基点 $*$ に戻る道を $\gamma \in \pi_1(D_1', *)$ と

する．このとき明らかに $\gamma = c_{12}(\gamma_{21}^2)^{-1}c_{12}^{-1}$ が成り立つ．ところが注意 1 によれば $\pi_1(D_1'\dot{\times}\Sigma^2, *)$ の元として $\gamma = \gamma_{12}^2$ と見なせるから $\gamma_{12}^2 = c_{12}(\gamma_{21}^2)^{-1}c_{12}^{-1}$ より $\gamma_{21}^2 = c_{12}^{-1}(\gamma_{12}^2)^{-1}c_{12}$ を得る．同様の考察により $\gamma_{21}^1 = c_{12}(\gamma_{12}^1)^{-1}c_{12}^{-1}$ も証明される．(終)

注意 2　上の証明より，D_2' に H_1 を接合した空間の基本群は $\pi_1(D_2', *)$ と c_{12} から生成され，D_2' 上の関係式の他に $\gamma_{21}^2 = c_{12}^{-1}(\gamma_{12}^2)^{-1}c_{12}$ を追加の関係式にもつものであることがわかる．この基本群を $\pi_1(D_2', *)$ の HNN 拡大と呼ぶ ([5])．

$\pi_1(V, *)$ の生成元の満たす関係式 $[\lambda_3^1, \lambda_1^1][\lambda_4^1, \lambda_2^1] = \gamma_{12}^1\gamma_{21}^1$ および $[\lambda_3^2, \lambda_1^2][\lambda_4^2, \lambda_2^2] = \gamma_{12}^2\gamma_{21}^2$ に補題 6 の関係を代入し γ_{21}^κ $(\kappa = 1, 2)$ を消去すると

$$[\lambda_3^1, \lambda_1^1][\lambda_4^1, \lambda_2^1] = [\gamma_{12}^1, c_{12}], \quad [\lambda_3^2, \lambda_1^2][\lambda_4^2, \lambda_2^2] = [\gamma_{12}^2, c_{12}^{-1}]$$

を得る．また $\Sigma_{21}^1 \times \Sigma_{21}^2 \subset V$ であることから，補題 6 の証明の記号を使えば $[\gamma_{21}^1, \gamma] = 1$ である．$\gamma = \gamma_{12}^2$ とみなせるので，補題 6 の公式を代入することにより $[c_{12}(\gamma_{12}^1)^{-1}c_{12}^{-1}, \gamma_{12}^2] = 1$ を得る．結局次の命題が得られた．

命題 7　$\pi_1(V, *)$ は $\lambda_1^\kappa, \lambda_2^\kappa, \lambda_3^\kappa, \lambda_4^\kappa, \gamma_{12}^\kappa$ $(\kappa = 1, 2)$ および standard loop c_{12} で生成される．ただし基本関係は $[\lambda_3^1, \lambda_1^1][\lambda_4^1, \lambda_2^1] = [\gamma_{12}^1, c_{12}]$, $[\lambda_3^2, \lambda_1^2][\lambda_4^2, \lambda_2^2] = [\gamma_{12}^2, c_{12}^{-1}]$, $[c_{12}(\gamma_{12}^1)^{-1}c_{12}^{-1}, \gamma_{12}^2] = 1$ であって，γ_{12}^1 は $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_4^2, \gamma_{12}^2$ と可換，γ_{12}^2 は $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_3^1, \lambda_4^1, \gamma_{12}^1$ と可換である．

さて，包含関係

$$\begin{array}{ccc} V & \subset & \tilde{D} \\ \cap & & \cap \\ U & \subset & X \end{array}$$

より，可換図式

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(V, *) & \xrightarrow{\psi} & \pi_1(\tilde{D}, *) \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U, *) & \xrightarrow[\tilde{\psi}]{} & \pi_1(X, *) \end{array}$$

が得られる．ここで $\varphi, \psi, \tilde{\psi}$ 等は包含関係から決まる自然な準同型であり，$\pi_1(X, *) = \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \rangle \cong \boldsymbol{Z}^4$ である．van Kampen の定理より $\pi_1(X, *) \cong \pi_1(\tilde{D}, *) *_{\pi_1(V,*)} \pi_1(U, *)$ である．右辺の $*_{\pi_1(V,*)}$ は融合積を表す ([9])．ψ は明らかに全射であり，$\mathrm{Ker}\,\psi = \langle \gamma_{12}^1, \gamma_{12}^2 \rangle \cong \boldsymbol{Z}^2$ であるから短完全列

$$1 \longrightarrow \langle \gamma_{12}^1, \gamma_{12}^2 \rangle \longrightarrow \pi_1(V, *) \xrightarrow{\psi} \pi_1(\tilde{D}, *) \longrightarrow 1$$

を得る．このとき [9]202 頁補題 13.14 より写像 $\tilde{\psi}$ も全射であり，$\mathrm{Ker}\,\tilde{\psi} = |\varphi(\langle \gamma_{12}^1, \gamma_{12}^2 \rangle)|$ が成り立つ．ここで部分群 $H \subset G$ に対し $|H|$ とは H で生成される G の正規部分群のこと．$\varphi(\langle \gamma_{12}^1, \gamma_{12}^2 \rangle) = \langle \gamma_{12}^1, \gamma_{12}^2 \rangle \subset \pi_1(U, *)$ と同一視すれば $\mathrm{Ker}\,\tilde{\psi} = |\langle \gamma_{12}^1, \gamma_{12}^2 \rangle|$ と書いて良い．故に次の短完全列

$$1 \longrightarrow |\langle \gamma_{12}^1, \gamma_{12}^2 \rangle| \longrightarrow \pi_1(U, *) \xrightarrow{\tilde{\psi}} \pi_1(X, *) \longrightarrow 1$$

が得られた．続いて，次の補題を証明する．

補題 8　$\mathrm{Ker}\,\varphi\,(\subset \pi_1(V, *))$ は次に列挙する元で生成される．c_{12}, $\lambda_\iota^1(\lambda_\iota^2)^{-1}$, $[\lambda_3^\kappa, \lambda_1^\kappa](\gamma_{12}^1)^{-1}\gamma_{12}^2$, $[\lambda_4^\kappa, \lambda_2^\kappa](\gamma_{12}^2)^{-1}\gamma_{12}^1$（または $[\lambda_3^\kappa, \lambda_1^\kappa](\gamma_{12}^2)^{-1}\gamma_{12}^1$, $[\lambda_4^\kappa, \lambda_2^\kappa](\gamma_{12}^1)^{-1}\gamma_{12}^2$）, $[\lambda_\mu^\kappa, \lambda_\nu^{\kappa'}]$. ただし $\iota = 1, 2, 3, 4$, $\kappa, \kappa' = 1, 2$, $(\mu, \nu) \neq (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)$ である．

証明 $\varphi(\lambda_\iota^1)=\varphi(\lambda_\iota^2)$ の証明は，簡単のため $\iota=2$ のときのみ示す．§4 補題 2 より $D_\kappa\cdot(\lambda_1*\lambda_2*\lambda_3)=\lambda_2^\kappa$ である．$\lambda_1*\lambda_2*\lambda_3$ における $\lambda_1*\lambda_3$ と λ_2^κ との交点を q_κ とすると，q_1,q_2 を両端点とする $\lambda_1*\lambda_3$ 内の曲線が存在して，この曲線にそって λ_2^1 を λ_2^2 に平行移動させることができる．ゆえに U 内では $\lambda_2^1=\lambda_2^2$.

再び §6 補題 2 より $D\cdot(\lambda_\mu*\lambda_\nu)=0$ であるので，トーラスを適当に平行移動させれば $\lambda_\mu*\lambda_\nu\subset U$ である．ゆえに $[\lambda_\mu^\kappa,\lambda_\nu^{\kappa'}]\in\operatorname{Ker}\varphi$ である．

$X=\lambda_3*\lambda_1*\lambda_4*\lambda_2=\lambda_4*\lambda_2*\lambda_3*\lambda_1$ に注意する．そして X の向き付けは D_1 と D_2 の向き付けを並べたものと一致することに注意（並べる順序は問わない）．$\lambda_3*\lambda_1$ を適当に取り V を切る．$V=(D_1'\times\Sigma)\cup(D_2'\times\Sigma)$ とみなして良いので $(\lambda_3*\lambda_1)\cap V=\Sigma_{31}^1\cup\Sigma_{31}^2$ (disjoint union) である．ここで $\Sigma_{31}^2=(D_1'\times\Sigma)\cap(\lambda_3*\lambda_1)$, $\Sigma_{31}^1=(D_2'\times\Sigma)\cap(\lambda_3*\lambda_1)$ は円周に同相な閉曲線であって $\lambda_3*\lambda_1$ 上を正の向きに 1 回転するとする．同様に $\lambda_4*\lambda_2$ で V を切れば $(\lambda_4*\lambda_2)\cap V=\Sigma_{42}^1\cup\Sigma_{42}^2$ (disjoint union) となる．ここで $\Sigma_{42}^2=(D_1'\times\Sigma)\cap(\lambda_4*\lambda_2)$, $\Sigma_{42}^1=(D_2'\times\Sigma)\cap(\lambda_4*\lambda_2)$ は円周に同相な閉曲線であって $\lambda_4*\lambda_2$ 上を正の向きに 1 回転するとする．$[\lambda_3,\lambda_1]=\Sigma_{31}^1\Sigma_{31}^2$, $[\lambda_4,\lambda_2]=\Sigma_{42}^1\Sigma_{42}^2$ が成り立つ．このとき $\pi_1(U,*)$ において $\gamma_{12}^1,\gamma_{12}^2$ を平行移動させると，向き付けの関係から $\gamma_{12}^1=\Sigma_{31}^1$, $\gamma_{12}^2=\Sigma_{42}^2$ となるか $\gamma_{12}^2=\Sigma_{31}^2$, $\gamma_{12}^1=\Sigma_{42}^1$ となるかのどちらか一方である．以下 $\gamma_{12}^1=\Sigma_{31}^1$, $\gamma_{12}^2=\Sigma_{42}^2$ とする．このとき $\Sigma_{31}^2=(\gamma_{12}^2)^{\pm1}$, $\Sigma_{42}^1=(\gamma_{12}^1)^{\pm1}$ であって ±1 が確定しない．しかし $\pi_1(U,*)$ では $c_{12}=1$, $\lambda_\iota^1=\lambda_\iota^2$ であることから命題 7 より $[\lambda_3,\lambda_1][\lambda_4,\lambda_2]=1$ である．この等式を満たすように ±1 を定めると $\Sigma_{31}^2=(\gamma_{12}^2)^{-1}$, $\Sigma_{42}^1=(\gamma_{12}^1)^{-1}$ となる．ゆえに $\pi_1(U,*)$ において $[\lambda_3,\lambda_1]=\gamma_{12}^1(\gamma_{12}^2)^{-1}$, $[\lambda_4,\lambda_2]=\gamma_{12}^2(\gamma_{12}^1)^{-1}$ が得られた．$\gamma_{12}^2=\Sigma_{31}^2$, $\gamma_{12}^1=\Sigma_{42}^1$ とする場合も同様.（終）

φ は明らかに全射であるから，補題 8 を勘案し次が証明された.

定理 9 $\pi_1(U,*)=\operatorname{Im}\varphi\cong\pi_1(V,*)/\operatorname{Ker}\varphi$ は $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\gamma_{12}^1,\gamma_{12}^2$ で生成され，基本関係は

$$[\lambda_3,\lambda_1]=\gamma_{12}^1(\gamma_{12}^2)^{-1},\quad [\lambda_4,\lambda_2]=\gamma_{12}^2(\gamma_{12}^1)^{-1}$$
$$（\text{または}\ [\lambda_3,\lambda_1]=\gamma_{12}^2(\gamma_{12}^1)^{-1},\quad [\lambda_4,\lambda_2]=\gamma_{12}^1(\gamma_{12}^2)^{-1}),$$
$$[\lambda_\mu,\lambda_\nu]=1\quad ((\mu,\nu)\neq(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)),$$
$$[\gamma_{12}^1,\gamma_{12}^2]=[\gamma_{12}^\kappa,\lambda_\mu]=1\quad (\kappa=1,2,\ \mu=1,2,3,4)$$

である．次の完全系列が成り立つ.

$$1\longrightarrow\langle\gamma_{12}^1,\gamma_{12}^2\rangle\longrightarrow\pi_1(U,*)\xrightarrow{\tilde{\psi}}\pi_1(X,*)\longrightarrow 1.$$

注意 3 γ_{21}^1, γ_{21}^2 を $\pi_1(U,*)$ の元とみなすと，補題 6 より $\gamma_{21}^1=(\gamma_{12}^1)^{-1}$, $\gamma_{21}^2=(\gamma_{12}^2)^{-1}$ が成り立つ（c_{12} が standard loop であることに注意）.

注意 4 $\pi_1(U,*)$ の可換化は $H_1(U,\boldsymbol{Z})=\langle\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\gamma_{12}^1\rangle$ となり，以前得た結果 [13] と確かに一致する.

§8 n 個のテータ因子の補集合

3 以上の整数 n を固定する．$D_1,\cdots,D_n$ は X の相異なるテータ因子であって正規交叉であるとする．整数 κ $(1\leq\kappa\leq n)$ に対し $D^{(\kappa)}=D_1\cup\cdots\cup D_\kappa$ と置く．この節では $X-D^{(n)}$ の基本群を求める．D_κ, $D^{(\kappa)}$ の X における管状近傍（各ファイバーは閉円板）をそれぞれ $\tilde{D_\kappa}$, $\tilde{D^{(\kappa)}}$ とする．U_κ は

$X-\widetilde{D^{(\kappa)}}$ の閉包とする．このとき U_κ は $X-D^{(\kappa)}$ にホモトピー同値である．$V_n=U_n\cap(\tilde{D_n}\cap U_{n-1})$ $(=U_n\cap\tilde{D_n})$ とおく．$U_{n-1}=U_n\cup(\tilde{D_n}\cap U_{n-1})$ なので，4 つ組 $(V_n,U_n,\tilde{D_n}\cap U_{n-1},U_{n-1})$ に対し van Kampen の定理を用いることで，U_n の（したがって $X-D^{(n)}$ の）基本群を求める．

$\kappa\neq\kappa'$ に対し D_κ と $D_{\kappa'}$ の交点（計 2 つ）を $p_{\kappa\kappa'}$，$p_{\kappa'\kappa}$ とする．$\mathring{D}_1=D_1$ とおく．整数 κ $(2\le\kappa\le n)$ に対し $\mathring{D}_\kappa$ は D_κ から $2\kappa-2$ 個の交点 $D_\kappa\cap D^{(\kappa-1)}$ を抜いたものとする．$\mathring{D}_\kappa$ は D_κ から $2\kappa-2$ 点 $p_{1\kappa},p_{\kappa1},p_{2\kappa},p_{\kappa2},\cdots,p_{\kappa-1,\kappa},p_{\kappa,\kappa-1}$ を除外している．$D=\cup_{\kappa=1}^n\mathring{D}_\kappa$ が成り立つ．$\Delta^\kappa_{\kappa\kappa'}$，$\Delta^\kappa_{\kappa'\kappa}$ $(\kappa'\neq\kappa)$ は点 $p_{\kappa\kappa'}$ または $p_{\kappa'\kappa}$ を中心とする D_κ 上の微小閉円板とする．$\Sigma^\kappa_{\kappa\kappa'}=\partial\Delta^\kappa_{\kappa\kappa'}$ などと置く．これは円周に同相．D'_κ を $D_\kappa-\Delta^\kappa_{1\kappa}-\Delta^\kappa_{\kappa1}-\Delta^\kappa_{2\kappa}-\Delta^\kappa_{\kappa2}-\cdots-\Delta^\kappa_{\kappa-1,\kappa}-\Delta^\kappa_{\kappa,\kappa-1}$ の D_κ における閉包とする．D'_κ は $\mathring{D}_\kappa$ にホモトピー同値．$\tilde{D'_\kappa}$ を D'_κ の X における管状近傍とする．このとき $\tilde{D'_\kappa}=\tilde{D_\kappa}\cap U_{\kappa-1}$ である．$\kappa\neq\kappa'$ のとき補助点 $*_{\kappa\kappa'}\in\Sigma^\kappa_{\kappa\kappa'}\times\Sigma^{\kappa'}_{\kappa\kappa'}\subset\partial\widetilde{D^{(n)}}$ を $p_{\kappa\kappa'}$ の近くにとる．点 $*_{1\kappa}$ から $\Sigma^\kappa_{1\kappa}(\subset D'_\kappa)$ 上の 1 点に移動しさらに D'_κ 上を移動して $\Sigma^\kappa_{\kappa\kappa'}$ または $\Sigma^\kappa_{\kappa'\kappa}$ $(\kappa'<\kappa)$ 上の 1 点に達し $\Sigma^\kappa_{\kappa\kappa'}$ または $\Sigma^\kappa_{\kappa'\kappa}$ を正の向きに 1 回転した後，いま来た道を逆にたどり点 $*_{1\kappa}$ に戻る道を $\gamma^\kappa_{\kappa\kappa'}$ または $\gamma^\kappa_{\kappa'\kappa}$ と書く．次が直ちにわかる．

命題 1　$*_{1n}$ を起点とする基本群について，$\pi_1(\tilde{D'_n},*_{1n})=\pi_1(D'_n,*_{1n})=\pi_1(\mathring{D}_n,*_{1n})$ は $2n-2$ 個の道 $\gamma^n_{1n},\gamma^n_{n1},\gamma^n_{2n},\gamma^n_{n2},\cdots,\gamma^n_{n-1,n},\gamma^n_{n,n-1}$ と $\lambda^n_1,\lambda^n_2,\lambda^n_3,\lambda^n_4$ とで生成され，基本関係は $[\lambda^n_3,\lambda^n_1][\lambda^n_4,\lambda^n_2]=\gamma^n_{1n}\gamma^n_{n1}\gamma^n_{2n}\gamma^n_{n2}\cdots\gamma^n_{n-1,n}\gamma^n_{n,n-1}$ である．

§7 と同様の議論により $V_n=U_n\cap\tilde{D_n}=D'_n\times\Sigma$ と書くことができる．ここで Σ は（抽象的な）円周であって $\Sigma^n_{\kappa n}$ 上では $\Sigma=\Sigma^\kappa_{\kappa n}$，$\Sigma^n_{n\kappa}$ 上では $\Sigma=\Sigma^\kappa_{n\kappa}$ という値をとる．§7 と同様の議論により短完全列

$$1\longrightarrow\pi_1(\Sigma,*_{1n})\longrightarrow\pi_1(D'_n\times\Sigma,*_{1n})\longrightarrow\pi_1(D'_n,*_{1n})\longrightarrow1$$

が得られる．ここで $\pi_1(\Sigma,*_{1n})$ は Σ と点 $*_{1n}$ とを線分で結んだ複体の基本群で $\boldsymbol{Z}$ に同型である．生成元 1 の写像 $\pi_1(\Sigma,*_{1n})\longrightarrow\pi_1(D'_n\times\Sigma,*_{1n})$ による像を γ^n とする．γ^n は点 $*_{1n}$ から $\Sigma^n_{1n}(\subset D'_n)$ 上の 1 点に移動しさらに D'_n 上を移動して D'_n 上のある 1 点に達しその点におけるファイバー（円周）を正の向きに 1 回転した後，いま来た道を逆にたどり点 $*_{1n}$ に戻る道である．この完全系列は明らかに分裂するので次が直ちに得られる．

命題 2　$\pi_1(V_n,*_{1n})\cong\pi_1(D'_n,*_{1n})\times\pi_1(\Sigma,*_{1n})$ である．従って $\pi_1(V_n,*_{1n})$ において γ^n はすべての元と可換である．

§7 注意 1 がここでも有効で，γ^n を選ぶ際どのファイバーを回る道を選んでも $\pi_1(V_n,*_{1n})$ の元としては全て一致する．

さて，包含関係

$$\begin{array}{ccc} V_n & \subset & \tilde{D_n}\cap U_{n-1} \\ \cap & & \cap \\ U_n & \subset & U_{n-1} \end{array}$$

より，可換図式

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(V_n,*_{1n}) & \xrightarrow{\psi} & \pi_1(\tilde{D_n}\cap U_{n-1},*_{1n}) \\ \varphi\big\downarrow & & \big\downarrow \\ \pi_1(U_n,*_{1n}) & \xrightarrow[\tilde{\psi}]{} & \pi_1(U_{n-1},*_{1n}) \end{array}$$

が得られる．ここで $\varphi, \psi, \tilde{\psi}$ 等は包含関係から決まる自然な準同型である．van Kampen の定理より $\pi_1(U_{n-1}, *_{1n}) \cong \pi_1(\tilde{D_n} \cap U_{n-1}, *_{1n}) *_{\pi_1(V_n, *_{1n})} \pi_1(U_n, *_{1n})$ である．ψ は明らかに全射であり，$\mathrm{Ker}\,\psi = \langle \gamma^n \rangle \cong \boldsymbol{Z}$ であるから短完全列

$$1 \longrightarrow \langle \gamma^n \rangle \longrightarrow \pi_1(V_n, *_{1n}) \xrightarrow{\psi} \pi_1(\tilde{D_n} \cap U_{n-1}, *_{1n}) \longrightarrow 1$$

を得る．このとき [9]202 頁補題 13.14 より写像 $\tilde{\psi}$ も全射であり，$\mathrm{Ker}\,\tilde{\psi} = |\varphi(\langle \gamma^n \rangle)|$ が成り立つ．§5 と同様に $\mathrm{Ker}\,\tilde{\psi} = |\langle \gamma^n \rangle|$ と書いて良い．故に次の短完全列

$$1 \longrightarrow |\langle \gamma^n \rangle| \longrightarrow \pi_1(U_n, *_{1n}) \xrightarrow{\tilde{\psi}} \pi_1(U_{n-1}, *_{1n}) \longrightarrow 1 \tag{7}$$

が得られた．$\pi_1(U_{n-1}, *_{1n}) \cong \pi_1(U_{n-1}, *_{1,n-1})$ に注意する．これは $\pi_1(U_{n-1}, *_{1,n-1})$ に属する元の基点 $*_{1,n-1}$ を $*_{1n}$ にまで延長することで与えられる同型である．ここで

帰納法の仮定　$\pi_1(U_{n-1}, *_{1n}) = \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \gamma_{12}^2, \gamma_{12}^1, \cdots, \gamma_{1,n-1}^1 \rangle$ であり，$\gamma_{12}^2, \gamma_{12}^1, \cdots, \gamma_{1,n-1}^1$ は互いに可換であって，次の基本関係

$$[\lambda_3, \lambda_1] = (\gamma_{12}^2)^{-1} \gamma_{12}^1 \cdots \gamma_{1,n-1}^1, \quad [\lambda_4, \lambda_2] = (\gamma_{1,n-1}^1)^{-1} \cdots (\gamma_{12}^1)^{-1} \gamma_{12}^2 \tag{8}$$

$$\text{または} \quad [\lambda_3, \lambda_1] = (\gamma_{1,n-1}^1)^{-1} \cdots (\gamma_{12}^1)^{-1} \gamma_{12}^2, \quad [\lambda_4, \lambda_2] = (\gamma_{12}^2)^{-1} \gamma_{12}^1 \cdots \gamma_{1,n-1}^1, \tag{9}$$

$$[\lambda_\mu, \lambda_\nu] = 1 \quad ((\mu, \nu) \neq (1,3), (2,4), (3,1), (4,2)),$$

$$[\gamma_{12}^2, \lambda_\mu] = [\gamma_{1\kappa}^1, \lambda_\mu] = 1 \quad (\kappa = 2, \cdots, n-1,\ \mu = 1,2,3,4)$$

が成り立つとする．実際 $n = 3$ の時には §7 定理 9 に一致する．完全系列 (7) より $\pi_1(U_n, *_{1n})$ は λ_1,λ_2,λ_3,λ_4, γ_{12}^2,$\gamma_{12}^1, \cdots, \gamma_{1,n-1}^1$,$\gamma^n$ で生成される．§7 注意 1 と同じ議論で $\gamma^n = \gamma_{1n}^1$ として良い．4 つのトーラス $\lambda_1 * \lambda_2$, $\lambda_2 * \lambda_3$, $\lambda_3 * \lambda_4$, $\lambda_4 * \lambda_1$ は適当に平行移動すれば $D_1 \cup \cdots \cup D_n$ と交わらない．ゆえに U_n においても $[\lambda_\mu, \lambda_\nu] = 1 \quad ((\mu, \nu) \neq (1,3), (2,4), (3,1), (4,2))$ である．

D_n' 上では $[\lambda_3^n, \lambda_1^n][\lambda_4^n, \lambda_2^n] = \gamma_{1n}^n \gamma_{n1}^n \gamma_{2n}^n \gamma_{n2}^n \cdots \gamma_{n-1,n}^n \gamma_{n,n-1}^n$ が成り立つ．ところが §7 補題 6 の証明と同様の議論により $\gamma_{1n}^n = c_1 (\gamma_{n1}^n)^{-1} c_1^{-1}, \cdots, \gamma_{n-1,n}^n = c_{n-1} (\gamma_{n,n-1}^n)^{-1} c_{n-1}^{-1}$ となるような standard loops $c_1, \cdots, c_{n-1}$ があるので $[\lambda_3^n, \lambda_1^n][\lambda_4^n, \lambda_2^n] = [c_1, (\gamma_{n1}^n)^{-1}] \cdots [c_{n-1}, (\gamma_{n,n-1}^n)^{-1}]$ と書き換えられる．U_n においては $c_1 = \cdots = c_{n-1} = 1$ なので $[\lambda_3, \lambda_1][\lambda_4, \lambda_2] = 1$ が得られる．

帰納法の仮定ではトーラス $\lambda_3 * \lambda_1$ と $\lambda_4 * \lambda_2$ がそれぞれ固定され，基本関係はこれらのトーラスで $D^{(n-1)}$ を切ることで得られたものである．これらの固定されたトーラス $\lambda_3 * \lambda_1$, $\lambda_4 * \lambda_2$ で今度は $D^{(n)}$ を切ると，曲線 $\gamma_{1\kappa}^1$ の向き付けの仕方および関係式 $[\lambda_3, \lambda_1][\lambda_4, \lambda_2] = 1$ から明らかに，(8) が成り立つ場合には $[\lambda_3, \lambda_1] = (\gamma_{12}^2)^{-1} \gamma_{12}^1 \cdots \gamma_{1n}^1$ および $[\lambda_4, \lambda_2] = (\gamma_{1n}^1)^{-1} \cdots (\gamma_{12}^1)^{-1} \gamma_{12}^2$, (9) が成り立つ場合には $[\lambda_3, \lambda_1] = (\gamma_{1n}^1)^{-1} \cdots (\gamma_{12}^1)^{-1} \gamma_{12}^2$ および $[\lambda_4, \lambda_2] = (\gamma_{12}^2)^{-1} \gamma_{12}^1 \cdots \gamma_{1n}^1$ が成り立つ．その他の可換性も明らか．§7 定理 9 と総合し次が得られた．

定理３　n は 2 以上の整数とする．$*_{1n}$ を基点とする基本群 $\pi_1(U_n, *_{1n})$ は $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \gamma_{12}^2$, $\gamma_{12}^1, \cdots, \gamma_{1n}^1$ で生成され，$\gamma_{12}^2, \gamma_{12}^1, \cdots, \gamma_{1n}^1$ は互いに可換であり，次の基本関係

$$[\lambda_3, \lambda_1] = (\gamma_{12}^2)^{-1} \gamma_{12}^1 \cdots \gamma_{1n}^1, \quad [\lambda_4, \lambda_2] = (\gamma_{1n}^1)^{-1} \cdots (\gamma_{12}^1)^{-1} \gamma_{12}^2$$

$$\text{または} \quad [\lambda_3, \lambda_1] = (\gamma_{1n}^1)^{-1} \cdots (\gamma_{12}^1)^{-1} \gamma_{12}^2, \quad [\lambda_4, \lambda_2] = (\gamma_{12}^2)^{-1} \gamma_{12}^1 \cdots \gamma_{1n}^1,$$

$$[\lambda_\mu, \lambda_\nu] = 1 \quad ((\mu, \nu) \neq (1,3), (2,4), (3,1), (4,2)),$$

$$[\gamma_{12}^2, \lambda_\mu] = [\gamma_{1\kappa}^1, \lambda_\mu] = 1 \quad (\kappa = 2, \cdots, n,\ \mu = 1,2,3,4)$$

が成り立つ．

最後に，定理3に現れる生成元 $\gamma_{12}^2, \gamma_{12}^1, \cdots, \gamma_{1n}^1$ とその他の $\gamma_{\kappa\kappa'}^{\kappa}$, $\gamma_{\kappa'\kappa}^{\kappa}$ との関係を調べる．次の命題が基礎となる．

命題４　$\pi_1(U_n, *)$ において次が成り立つ．

(i) $\gamma_{\kappa\kappa'}^{\kappa}\gamma_{\kappa'\kappa}^{\kappa} = 1$ $(\kappa \neq \kappa')$.　　(ii) $\gamma_{\kappa\nu}^{\kappa} = \gamma_{\kappa'\nu}^{\kappa'}$ $(\nu \neq \kappa, \kappa')$.

証明　(i) は §7 補題6と同様の議論をした後 standard loop が U_n において 1 であることから成り立つ．(ii) は D_ν 上のファイバーについて §7 注意1の議論を適用すれば良い（平行移動が自由にできるということ）.（終）

さて，$\gamma_{\kappa\kappa'}^{\kappa} \in \pi_1(U_n, *)$ について $\kappa' \neq 1$ ならば命題4より $\gamma_{\kappa\kappa'}^{\kappa} = \gamma_{1\kappa'}^1$ である．また $\gamma_{\kappa 1}^{\kappa} = \gamma_{21}^2 = (\gamma_{12}^2)^{-1}$ である．$\gamma_{\kappa'\kappa}^{\kappa} \in \pi_1(U_n, *)$ については，命題4より $\gamma_{\kappa'\kappa}^{\kappa} = (\gamma_{\kappa\kappa'}^{\kappa})^{-1}$ であるから前半の議論に帰着する．以上で $\pi_1(U_n, *)$ におけるさまざまな道の間の関係が明らかとなった．

最後に単独のテータ因子 D の補集合 $X - D$ の基本群は以下のとおり．

命題５　$\pi_1(X - D, *)$ は $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \gamma$ で生成される．ただし γ は D の回りを1回めぐる道であり，基本関係は以下のとおり．

$$[\lambda_1, \lambda_3] = \gamma, \quad [\lambda_1, \lambda_3][\lambda_2, \lambda_4] = 1,$$
$$[\lambda_\mu, \lambda_\nu] = 1 \quad ((\mu, \nu) \neq (1,3), (2,4), (3,1), (4,2)),$$
$$[\gamma, \lambda_\mu] = 1.$$

参考文献

[1] 青本・喜多，超幾何関数論，シュプリンガー，1994.

[2] Birkenhake, Lange, Complex abelian varieties, 2nd ed., Springer, 2004.

[3] Chandrasekharan, Elliptic functions, Springer, 1985.

[4] Dubrovin, Fomenko, Novikov, Modern Geometry – Methods and Applications II, Springer, 1985.

[5] Lyndon, Schupp, Combinatorial group theory, Springer,1977.

[6] Mano, T., On a generalization of Wirtinger's integral, Kyushu J. Math., 66 (2012), 435-447.

[7] T.Mano, H.Watanabe, Twisted cohomology and homology groups associated to the Riemann-Wirtinger integral, Proc. Amer. Math. Soc., 140 (11) (2012), 3867-3881.

[8] D.Mumford, Tata lectures on theta I, Birkhäuser, 1983.

[9] 松本幸夫，トポロジー入門，岩波, 1985.

[10] Watanabe, H., Transformation relations of matrix functions associated to the hypergeometric function of Gauss under modular transformations, J. Math. Soc. Japan, 59 (2007), 1-14.

[11] Watanabe, H., Linear differential relations satisfied by Wirtinger integrals, Hokkaido Math. J., 38 (1) (2009), 83-95.

[12] Watanabe, H., On the general transformation of the Wirtinger integral, Osaka J. Math., 51 (2014), 425-438.

[13] Watanabe, H., Twisted cohomology of the complement of theta divisors in an abelian surface, Internat. J. Math., 27 (2016), no. 6, 1650049, 41 pp.

[14] Watanabe, H., Twisted cohomology of a punctured Riemann surface, Kumamoto J. Math., Vol. 29 (2016), 55-63.
[15] 渡辺文彦，テータ因子の補集合の基本群，2016 年 8 月 17 日版.
[16] Wirtinger, W., Zur Darstellung der hypergeometrischen Function durch bestimmte Integrale, Akad. Wiss. Wien. S.-B. IIa, III (1902), 894-900.

Homaloidal 多項式の極化に付随する空間と局所関数等式について

小木曽岳義 (城西大学)

Abstract

ここでは homaloidal 多項式の極化について, 乗法的 Legendre 変換, 付随する空間の特徴, とくに極化によって概均質性, 非概均質性が保たれるのかどうかを議論する. また, homaloidal 多項式の極化に付随するゼータ超関数の関数等式について述べる.

1 はじめに

§2 では, homaloidal 多項式の代表的な例で, 最も研究されている正則概均質ベクトル空間の相対不変式とその反傾表現の相対不変式の組が満たす多変数の局所関数等式 ([11]) について, 説明する. 最近, Clifford quartic forms の局所関数等式 [10] を始め, いくつかの非概均質的関数等式が出てきている ([4], [2].) 今回は §3 以降で, §2 で説明した概均質ベクトル空間の局所関数等式が非概均質的多項式でも成立するという新たな例になっており, そこにスポットを当てて説明する. §3 では homaloidal 多項式及びその極化について説明する. §4 では, あまり今まで研究されないタイプの, 群が reductive ではない概均質ベクトル空間であり, 等質錐の理論でもカバーできないような subHankel 行列式の乗法的 Legendre 変換の決定や, それに付随する b-関数の予想について述べる. また, この b-関数の形が homaloidal 多項式の極化に付随する b-関数の形によく似ていることを述べる. 次に §5 で概均質ベクトル空間の homaloidal な相対不変式の極化がやはり概均質ベクトル空間の相対不変式となることを説明する. また, 乗法的 Legendre 変換に関するある条件の下で, 非概均質的な homaloidal 多項式の極化は非概均質的であることを示す. §6 では, 非概均質的 homaloidal 多項式に極化を繰り返すと, 途中でその系列に概均質型が含まれないということは示されていないが, 非概均質的な homaloidal 多項式の例である Clifford quartic forms については, 極化を繰り返したときに, 途中で概均質型が現れることはないことを示す. §7 では, homaloidal 多項式の極化は局所関数等式を満たし, 例として Clifford quartic forms の極化に付随する局所関数等式について述べる.

この研究は研究課題番号 17K05209 の科研費の助成を受けたものである。
この研究は佐藤文広氏との共同研究に基づいている.

2 概均質ベクトル空間の局所関数等式

代数群 $\mathbf{G}$ とその表現 $(\rho, \mathbf{V})$ があり, $\mathbf{G}$-開軌道が存在するときに $(\mathbf{G}, \rho, \mathbf{V})$ を概均質ベクトル空間という. $P(\rho(g)v) = \chi(g)P(v)$, $g \in \mathbf{G}, v \in \mathbf{V}$ を満たす 1 次元表現（これを有理指標ともいう）$\chi(g)$ が存在するような斉次多項式 $P(v)$ を $(\mathbf{G}, \rho, \mathbf{V})$ の相対不変式といい, Hessian が恒等的に 0 ではない相対不変式をもつ概均質ベクトル空間を正則が均質ベクトル空間という. 正則概均質ベクトル空間 $(\mathbf{G}, \rho, \mathbf{V})$ の反傾表現 $(\mathbf{G}, \rho^*, \mathbf{V}^*)$ も正則概均質ベクトル空間になる.

$(\mathbf{G}, \rho, \mathbf{V})$ を $\mathbb{R}$ 上定義された $\mathbb{R}$-正則概均質ベクトル空間とし, その特異点集合 $\mathbf{S}$ は（既約とは限らない）超曲面だと仮定する. $\mathbb{R}$ 上の基本相対不変式を $P_1, P_2, \ldots, P_r$ とする. ($(\mathbf{G}, \rho, \mathbf{V})$ の任意の相対不変式はこれらの冪積で与えられる.) このとき, $(\mathbf{G}, \rho^*, \mathbf{V}^*)$ も $\mathbb{R}$ 上定義された正則概均質ベクトル空間であり, その特異集合 $\mathbf{S}^*$ は超曲面となる. $\mathbb{R}$ 上の基本相対不変式を $P_1^*, \ldots, P_r^*$ とする. $\chi_1, \ldots, \chi_r$ を $P_1, \ldots, P_r$ に対応する $\mathbf{G}$ の有理指標, $\chi_1^*, \ldots, \chi_r^*$ を $P_1^*, \ldots, P_r^*$ に対応する G の有理指標とする. $\mathbf{G}$ の $\mathbb{R}$ 上定義された有理指標のなす乗法群 $X_\rho(\mathbf{G})_\mathbb{R}(= X_{\rho^*}(\mathbf{G})_\mathbb{R})$ と記す. $X_\rho(\mathbf{G})_\mathbb{R}$ は階数 r の自由アーベル群であって, $\chi_1, \ldots, \chi_r$ と $\chi_1^*, \ldots, \chi_r^*$ はこの群の 2 つの生成系であるから,

$$\chi_i = \prod_{j=1}^{r} (\chi_j^*)^{u_{ij}}, \quad U = (u_{ij}) \in GL(n, \mathbb{Z})$$

と関係づけられる. 正則という仮定から $\det \rho(g)^2$ は相対不変式に対応する指標となるので,

$$\det \rho(g)^2 = \prod_{i=1}^{r} \chi_i^{2\lambda_i}, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^r$$

と表せる. $G = \mathbf{G}(\mathbb{R}), V = \mathbf{V}(\mathbb{R}), S = \mathbf{S}(\mathbb{R}), S^* = \mathbf{S}^*(\mathbb{R})$ と記す.G の単位元連結成分 G^0 についての G^0-軌道分解は連結成分への分解と一致し, それを以下のように記す：

$$V - S = V_1 \cup \cdots \cup V_\nu, \quad V^* - S^* = V_1^* \cup \cdots \cup V_\nu^*$$

局所ゼータ関数を各 G^0-軌道ごとに

$$Z_i(\Phi; s) := \int_{V_i} \prod_{j=1}^{r} |P_j(x)|^{s_j} \Phi(x) dx, \quad \Phi \in \mathcal{S}(V),$$
$$Z_i^*(\Phi^*; s) := \int_{V_i^*} \prod_{j=1}^{r} |P_j^*(x)|^{s_j} \Phi^*(x) dx, \quad \Phi^* \in \mathcal{S}(V^*),$$

と定義する. これらの積分は $s = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ が $\Re(s_1), \ldots, \Re(s_r) > 0$ を満たすとき絶対収束して s の正則関数を定め, $\mathbb{C}^r$ 全体に有理型関数として解析接続される. $\chi \in X_\rho(G)_\mathbb{R}$ は

$$\chi = \chi_1^{\delta(\chi)_1} \cdots \chi_r^{\delta(\chi)_r} = (\chi_1^*)^{\delta^*(\chi)_1} \cdots (\chi_r^*)^{\delta^*(\chi)_r},$$
$$\delta(\chi) = (\delta(\chi)_1, \ldots, \delta(\chi)_r), \quad \delta^*(\chi) = (\delta^*(\chi)_1, \ldots, \delta^*(\chi)_r) \in \mathbb{Z}^r$$

と表される．ここで, $\delta^*(\chi) = \delta(\chi)U$ という関係がある．$\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^r$ に対して,

$$\mathbf{P}^{\mathbf{m}} := P_1^{m_1} \cdots P_r^{m_r}, \quad (\mathbf{P}^*)^{\mathbf{m}} = P_1^{*m_1} \cdots P_r^{*m_r}$$

とするとき, $\chi \in X_\rho(G_{\mathbb{R}})$ に対して

$$\mathbf{P}^{\chi} = \mathbf{P}^{\delta(\chi)},\ \mathbf{P}^{*\chi} = \mathbf{P}^{*\delta^*(\chi)}$$

と定める．このとき, $\mathbf{P}^{\chi}, \mathbf{P}^{*\chi}$ はそれぞれ $(\mathbf{G}, \rho, \mathbf{V})$, $(\mathbf{G}, \rho^*, \mathbf{V}^*)$ の相対不変式で, どちらも有理関数指標 χ に対応する．また, これらの相対不変式の次数を考え,

$$d(\mathbf{m}) := m_1 \mathrm{deg} P_1 + \cdots + m_r \mathrm{deg} P_r, \quad d^*(\mathbf{m}) = m_1 \mathrm{deg} P_1^* + \cdots + m_r \mathrm{deg} P_r^*$$
$$d(\chi) = d(\delta(\chi)), \quad d^*(\chi) = d(\delta^*(\chi))$$

とおく．V^* 上の多項式 Q に対して, V 上の定数係数微分作用素 $Q(\partial_x)$ を

$$Q(\partial_x)\mathrm{exp}(\langle x, y\rangle) = Q(y)\mathrm{exp}(\langle x, y\rangle)$$

を満たすものとして定義できる．$\chi \in X_\rho(\mathbf{G})_{\mathbb{R}}$ に対し P^{χ} が多項式のとき, $\chi \geq 0$ と $P^{*\chi}$ が多項式のとき, $\chi \geq^* 0$ と表す．$\chi \geq^* 0$ のとき, $s = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$(P^*)^{\chi}(\partial_x) P^s(x) = b_\chi(s) P^{s+\delta(\chi)}(x)$$
$$P^s(x) = \textstyle\prod_{i=1}^r P_i(x)^{s_i}$$

を満たす s の多項式 $b_\chi(s)$ が存在する．$b_\chi(s)$ は **b-関数**と呼ばれる．$\chi, \psi \geq^* 0$ のとき,

$$b_{\chi\psi}(s) = b_\psi(s) b_\chi(s + \delta(\psi))$$

という cocycle 条件が成り立つが, この関係式によって, 任意の $\chi \in X_\rho(G)_{\mathbb{R}}$ に対して $b_\chi(s)$ を定義することが出来る．

Theorem 2.1 (M.Sato [15], F.Sato,[11]) 群の準同型写像 $C : X_\rho(G)_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}^\times$, 非負整数係数の線形形式 $e_i : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, ガンマ因子

$$\gamma(s) = \prod_{i=1}^m \frac{\prod_{j=1}^{\alpha_i} \Gamma(e_i(s) + c_{ij})}{\prod_{j=1}^{\beta_i} \Gamma(e_i(s) + d_{ij})} \quad (c_{i,j}, d_{i,j} \in \mathbb{C})$$

が存在し, b-関数 $b_\chi(s)$ は

$$b_\chi(s) = C(\chi)\frac{\gamma(s)}{\gamma(s + \delta(\chi))}$$

と表される．

Remark 2.2 $r = 1$ のときは, Kashiwara[8] によって $c_{ij}, d_{ij} \in \mathbb{Q}_{>0}$ が示されている．一般の場合は Gyoja[6] によって Sato-Bernstein 多項式の枠組みで示されている．

$s \in \mathbb{C}^r$ に対して

$$c(s) = C(\chi_1)^{s_1} \cdots C(\chi_r)^{s_r}, \quad d(s) = s_1 \mathrm{deg} P_1 + \cdots + s_r \mathrm{deg} P_r, \quad d^*(s) = d(sU)$$

とおく. このとき, 次の局所関数等式が成り立つ.

Theorem 2.3 (F.Sato, [11]) 任意の $\Phi^* \in \mathcal{S}(V^*)$ に対して, $\widehat{\Phi^*}$ でその *Fourier* 変換を表すと,

$$\begin{pmatrix} Z_1(\widehat{\Phi^*}; s) \\ \vdots \\ Z_\nu(\widehat{\Phi^*}; s) \end{pmatrix} = \tilde{\gamma}(s) \begin{pmatrix} Z_1^*(\Phi^*; (s+\lambda)U) \\ \vdots \\ Z_\nu^*(\Phi^*; (s+\lambda)U) \end{pmatrix}$$

が成り立つ. ここで, $\tilde{\gamma}(s)$ は Φ^* と無関係な s の有理型関数で,

$$\tilde{\gamma}(s) = c(-s)(-2\pi\sqrt{-1})^{d^*(s)} \gamma(s) A(s)$$

の形の表示をもつ. ただし, $A(s)$ は $e^{s_1 \pi \sqrt{-1}}, \ldots, e^{s_\nu \pi \sqrt{-1}}$ の *Laurent* 多項式を成分とする $\nu \times \nu$ 行列で, その他の部分は b-関数によって記述されていることに注意する. 関数等式の係数として表れる $\tilde{\gamma}(s)$ という因子を局所関数等式の**ガンマ因子**という.

上記は多項式を概均質的と限定した話であったが, 最近になり, Clifford quartic forms を始めとして, いくつかの非概均質的関数等式を満たす多項式のペアの無限系列が見つかってきている. 「局所関数等式を満たす多項式をどのように特徴づければよいか？」という問題にアプローチするために, 非概均質的関数等式の系列を増やすことは意義があり, そのような動機付けで, 以下で説明する homaloidal 多項式の極化に付随する局所関数等式の研究をおこなった.

3 Homaloidal 多項式とその極化

3.1 Homaloidal 多項式とその乗法的 Legendre 変換

斉次有理関数 $f \in \mathbb{C}(x_1, \cdots, x_n)$ が homaloidal とは, $\phi_f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $\nabla_x \log f(x) = \frac{1}{f(x)} \nabla_x f(x)$ が双有理写像となるようなものとする. このとき, 有理関数 $f^*(x^*) \in \mathbb{C}(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ で, $f^*(\phi_f(x)) = \frac{1}{f(x)}$ となるものを $f(x)$ の**乗法的 Legendre 変換**といい, ここでは $\mathcal{ML}(f) = f^*$ と記すことにする.

3.2 (加法的)Legendre 変換と乗法的 Legendre 変換の関係

ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^n$ 上の smooth function P が $\det H_x P(x_0) \neq 0$ なる点 $x_0 \in V$ の開近傍 Ω 上で定義されているものとする. このとき, $\Omega^* = \nabla_x P(\Omega) \subset V^*$ 上では $(\nabla_x P)^{-1}$ なる $\nabla_x P$ の逆写像が定義出来るので, $y \in \Omega^*$ について $\mathcal{L}(P)(y) := \langle y, (\nabla_x P)^{-1}(y) \rangle - P((\nabla_x P)^{-1}(y))$ と $\mathcal{L}$ を定義し, 関数 P の **Legendre 変換**という.

上記の式に $y=\nabla_x P$ を代入すると,

$$\mathcal{L}(P)(\nabla_x P)=\langle \nabla_x P, x\rangle - P(x) \qquad (*)$$

これは点 $(x,P(x))$ での $y=P(x)$ のグラフの接線の切片 $\times(-1)$ に対応する．特に homogeneous homaloidal 有理式 f について, $P=\mathrm{log}f$ は条件を満たす多項式であり, この P を $(*)$ に代入すると,
$L(\mathrm{log}f)(\nabla_x \mathrm{log}f(x))=\langle \frac{1}{f}\nabla_x f, x\rangle-\mathrm{log}f(x)=\frac{1}{f}\times r\times f-\mathrm{log}f(x)=r-\mathrm{log}f(x)$
まとめ直すと,
$(\mathcal{L}(\mathrm{log}f)-r)(\nabla_x\mathrm{log}f)(x)=-\mathrm{log}f=\mathrm{log}\frac{1}{f}$
となり, 両辺の exponential をとると

$$e^{\mathcal{L}(\mathrm{log}f)-r}(\nabla_x \mathrm{log}f)(x)=\frac{1}{f}$$

となる．つまり, $\mathcal{ML}(f)=e^{\mathcal{L}(\mathrm{log}f)-r}$ と思ってよい．

3.3 Homaloidal 多項式の乗法的 Legendre 変換の例

Example 3.1 (多項式の乗法的 Legendre 変換 (Reductive PV-type)) 正則概均質ベクトル空間の非退化な相対不変式は homaloidal 多項式である．正則概均質ベクトル空間の非退化な相対不変式 f は $\phi_f=\mathrm{gradlog}f$ が biregular な関数であり, 双有理関数であるので, homaloidal である．このとき, $\mathcal{ML}(f)=f^*$ は f に対応する双対概均質ベクトル空間の相対不変式である．$P:=-27x_1^2x_4^2+18x_1x_2x_3x_4-4x_1x_3^3-4x_2^3x_4+x_2^2x_3^2$ は２元３次形式の空間の相対不変式で, $\mathcal{ML}(P)=-x_2^{*2}x_4^{*2}+6x_1^*x_2\ *x_3^*x_4^*-4x_1^*x_3^{*3}-4x_2^{*3}x_4^*+3x_2^{*2}x_3^{*2}$

Example 3.2 (多項式の乗法的 Legendre 変換 (non reductive PV-type [5]))
$V:=\left\{X=\begin{pmatrix} x_1 & 0 & x_2 & 0\\ 0 & x_1 & 0 & x_4\\ x_2 & 0 & x_3 & 0\\ 0 & x_4 & 0 & x_5\end{pmatrix};x_1,\dots,x_5\in\mathbb{R}\right\}$
について, これにある Solvable 群が作用して, 正則実 PV になる (Vinberg 錐とも呼ばれる）が, この相対不変式は以下の３つである．
$\Delta_1(x)=x_1,\ \Delta_2(x)=x_1x_3-x_2^2,\ \Delta_3(x)=x_1x_5-x_4^2$
この空間の双対空間は以下のように実現される：
$V^*=\left\{Y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_4\\ y_2 & y_3 & 0\\ y_4 & 0 & y_5\end{pmatrix};y_1,\dots,y_5\in\mathbb{R}\right\}$
で, V と V^* の pairing $\langle X,Y\rangle$ は

$$\langle X,Y\rangle=x_1y_1+2x_2y_2+x_3y_3+2x_4y_4+x_5y_5$$

で与えられる．双対空間の方の基本相対不変式は
$\Delta_1^*(Y)=y_1y_3y_5-y_3y_4^2-y_5y_2^2,\ \Delta_2^*(Y)=y_3,\ \Delta_3^*(Y)=y_5$ で,
例えば,

$$\mathcal{ML}(\Delta_1^*(X))=\frac{\Delta_2(x)\Delta_3(X)}{\Delta_1(x)}\ \Delta_1^*(\partial_x)\left(\frac{\Delta_2(x)\Delta_3(X)}{\Delta_1(x)}\right)^{s+1}=(s+1)^2(s+2)\left(\frac{\Delta_2(x)\Delta_3(X)}{\Delta_1(x)}\right)^{s}$$

が知られている．

Example 3.3 (乗法的 Legendre 変換 (non reductive PV type)) この他の例として, subHankel 行列式の乗法的 Legendre 変換 ([7]) があるが, これについては, 後の極化の b-関数にも関係すると思われるので, 後にセクションを一つ設けて詳しく説明する．

Example 3.4 (乗法的 Legendre 変換 (non-PV type)) [10] の中で, 以下のような 4 次多項式 $\tilde{P}$ が正定値 Clifford 代数 C_p, C_q のテンソル積 $R_{p,q}=C_p\otimes C_q$ の m 次対称行列表現の基底行列 $S_1,S_2,\ldots,S_{p+q}$ に対して, $\tilde{P}:=\sum_{j=1}^{p}S_j[x]^2-\sum_{j=p+1}^{p+q}S_j[x]^2$ と定義され, 導入された．$R_{p,q}$ について, $p+q\geq 12$ のときは任意の表現が非概均質的な多項式になり, $5\leq p+q\leq 11$ のときは, 低次元表現のときは概均質型となるが, ある次元以上では全ての表現で非概均質型の多項式になる．$p+q\leq 4$ のときは任意の表現が概均質型多項式になる．Clifford quartic form $\tilde{P}$ は非概均質型多項式であるが, homaloidal 多項式であり, $\mathcal{ML}(\tilde{P})=\tilde{P}$ となる．

Remark 3.5 **(Clifford quartic forms は EKP 予想の反例になっている)** Etingof, Kazhdan and Polishchuk の 2002 年の論文 [3] で, 「homaloidal な多項式で, その乗法的 Legendre 変換が多項式となるものは, 全て正則概均質ベクトル空間の相対不変式ではないか？」と予想されていた (=EKP 予想）が, [10] によって, 上記の E K P 予想の CQF がその反例になっていることが示され, EKP 予想が否定的に解決された．

Remark 3.6 **(Clifford quartic forms は「局所関数等式の遺伝定理」(F.Sato,[14] 参照）から得られる)** [14] の中で, 局所関数等式を満たす多項式のペア (P,P^*) があり, $P(P^*)$ に付随する空間 $V(V^*)$ とおくとき, ある空間 W,W^* と W から V への 2 次写像 φ, W^* から V^* への 2 次写像 φ^* が存在し, 「非退化性」と「双対性」を満たすときに, これらの 2 次写像 φ,φ^* と P,P^* を合成して出来る多項式 $\tilde{P}:=P\circ\varphi,\ \tilde{P^*}=P^*\circ\varphi^*$ のペア $(\tilde{P},\tilde{P^*})$ も局所関数等式を満たし, そのガンマ因子 $\tilde{\gamma}(s)$ が (P,P^*) の局所関数等式のガンマ因子 $\gamma(s)$ から遺伝している. つまり, $\tilde{\gamma}(s)$ は $\gamma(s)$ を用いて書くことが出来る形をしている．

3.4 homaloidal 多項式の極化とその乗法的 Legendre 変換

Lemma 3.7 **(Etingof, Kazhdan and Polishchuk)***[3]*
f を homaloidal な斉次有理関数, f^* をその乗法的 Legendre 変換とする．このとき, f^* も homaloidal な斉次有理関数で,

(1)$\phi_{f^*} \circ \phi_f = \mathrm{id}$
(2)f が f^* の乗法的 *Legendre* 変換
が成り立つ.

3.5 斉次有理式の極化の定義と基本的性質

斉次有理式 $f(x),\ x \in \mathbb{R}^n$ について, $x, y \in \mathbb{R}^n$ について, 以下のような $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ 上の斉次有理式を考える：

$$F(x, y) = F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) := \nabla_x f(x) \cdot y$$

これを $f(x)$ の**極化 (polarization)** と呼ぶ. [3] では, 極化の定義は,

$$G(x, y) = F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) := \nabla_x f(x) \cdot y + f(x)$$

であるが, 上記の方が都合がいいことと, $G(x, y) = \nabla_x f(x) \cdot (y + \frac{1}{n} x)$ から, ここでは上記の定義にしている.

Theorem 3.8 (Etingof, Kazhdan and Polishchuk [3]) $f(x)$ が d 次斉次 *homaloidal* 多項式で, その乗法的 *Legendre* 変換を $f^*(x^*)$ とするとき,

$$F(x, y) = F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) := \nabla_x f(x) \cdot y = \sum_{j=1}^n f_j(x) y_j,$$
$$\left(\quad f_j(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \quad\right)$$

も d 次斉次 *homaloidal* 多項式であり, その乗法的 *Legendre* 変換は,

$$F^*(x^*, y^*) = (d-1)^{1-d} \cdot \frac{(\nabla_{x^*} f^*(y^*) \cdot x^*)^{d-1}}{f^f(y^*)^{d-2}} = (d-1)^{1-d} \cdot \frac{(\sum_{i=1}^n f_i^*(y^*) x_i^*)^{d-1}}{f^*(y^*)^{d-2}}$$

で与えらえる.

上記の定理により, 最初に一つ d 次の斉次 homaloidal 多項式が与えられれば, それを種として, 次々と以下のように d 次 homaloidal 多項式を増やせる. （変数は倍, 倍になっていく）
$f(x) = f(x^{(1)})$
$F^{(1)}(x^{(1)}, x^{(2)}) = \langle \nabla_{x^{(1)}} f, x^{(2)} \rangle$
$F^{(2)}(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = \langle \nabla_{x^{(1)}, x^{(2)}} F^{(1)},\ x^{(3)}, x^{(4)} \rangle$
$= \langle (\nabla_{(x^{(1)}, x^{(2)})} \langle \nabla_{x^{(1)}} f, x^{(2)} \rangle), (x^{(3)}, x^{(4)}) \rangle$
$= \langle ((H_{x^{(1)}} f) x^{(2)}, \nabla_{x^{(1)}} f), (x^{(3)}, x^{(4)}) \rangle$
$= {}^t x^{(2)} (H_{x^{(1)}} f) x^{(3)} + \langle \nabla_{x^{(1)}} f, x^{(4)} \rangle$
$F^{(3)}(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, x^{(5)}, x^{(6)}, x^{(7)}, x^{(8)})$
$= \langle \nabla_{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}} F^{(2)}(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}), (x^{(5)}, x^{(6)}, x^{(7)}, x^{(8)}) \rangle$
$= \langle \nabla_{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}} {}^t x^{(2)} (H_{x^{(1)}} f) x^{(3)} + \langle \nabla_{x^{(1)}} f, x^{(4)} \rangle, (x^{(5)}, x^{(6)}, x^{(7)}, x^{(8)}) \rangle$
$= \langle \nabla_{x^{(1)}} (H_{x^{(1)}} f) x^{(2)} x^{(3)} + (H_{x^{(1)}} f) x^{(4)}, (H_{x^{(1)}} f) x^{(3)},\ (H_{x^{(1)}} f) x^{(2)},\ \nabla_{x^{(1)}} f),\ (x^{(5)}, x^{(6)}, x^{(7)}, x^{(8)}) \rangle$

$= \nabla_{x^{(1)}}(H_{x^{(1)}}f)x^{(2)}x^{(3)}x^{(5)} + (H_{x^{(1)}}f)x^{(4)}x^{(5)} + (H_{x^{(1)}}f)x^{(2)}x^{(7)} + \langle \nabla_{x^{(1)}}f,\ x^{(8)}\rangle$
$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^{(1)3}}x^{(2)}x^{(3)}x^{(5)} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^{(1)2}}\left(x^{(4)}x^{(5)} + x^{(3)}x^{(6)} + x^{(2)}x^{(7)}\right) + \frac{\partial f}{\partial x^{(1)}}x^{(8)}$
も homaloidal である.
$F^{(4)}(x^{(1)},\ldots,x^{(16)}) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^{(1)4}}x^{(2)}x^{(3)}x^{(5)}x^{(9)}$
$+\frac{\partial^3 f}{\partial x^{(1)3}}(x^{(2)}x^{(3)}x^{(13)}+x^{(2)}x^{(5)}x^{(11)}+x^{(2)}x^{(7)}x^{(9)}+x^{(3)}x^{(5)}x^{(10)}+x^{(3)}x^{(6)}x^{(9)}+x^{(4)}x^{(5)}x^{(9)})$
$+\frac{\partial^3 f}{\partial x^{(1)2}}(x^{(2)}x^{(15)} + x^{(3)}x^{(14)} + x^{(4)}x^{(13)} + x^{(5)}x^{(10)} + x^{(6)}x^{(11)} + x^{(7)}x^{(10)} + x^{(8)}x^{(9)})$
$+\frac{\partial f}{\partial x^{(1)}}x^{(16)}$
$F^{(5)}(x^{(1)},\ldots,x^{(32)}) = \frac{\partial^5 f}{\partial x^{(1)5}}x^{(2)}x^{(3)}x^{(5)}x^{(9)}x^{(17)}$
$+\frac{\partial^4 f}{\partial x^{(1)4}}(x^{(2)}x^{(3)}x^{(13)}x^{(17)} + x^{(2)}x^{(5)}x^{(11)}x^{(17)} + x^{(2)}x^{(9)}x^{(16)}x^{(17)}$
$+x^{(3)}x^{(5)}x^{(10)}x^{(17)} + x^{(2)}x^{(3)}x^{(5)}x^{(25)} + x^{(2)}x^{(5)}x^{(9)}x^{(19)} + x^{(3)}x^{(5)}x^{(9)}x^{(18)})$
$+\frac{\partial^3 f}{\partial x^{(1)3}}(x^{(2)}x^{(15)}x^{(17)}+x^{(3)}x^{(14)}x^{(17)}+x^{(4)}x^{(13)}x^{(17)}+x^{(5)}x^{(12)}x^{(17)}+x^{(6)}x^{(11)}x^{(17)}+$
$x^{(7)}x^{(10)}x^{(17)}+x^{(2)}x^{(3)}x^{(29)}+x^{(2)}x^{(5)}x^{(27)}+x^{(2)}x^{(7)}x^{(25)}+x^{(2)}x^{(9)}x^{(23)}+x^{(2)}x^{(11)}x^{(21)}+$
$x^{(2)}x^{(13)}x^{(19)}+x^{(3)}x^{(5)}x^{(26)}+x^{(3)}x^{(6)}x^{(25)}+x^{(3)}x^{(9)}x^{(22)}+x^{(3)}x^{(13)}x^{(18)}+x^{(4)}x^{(5)}x^{(25)}+$
$x^{(5)}x^{(9)}x^{(20)}+x^{(5)}x^{(10)}x^{(19)}+x^{(5)}x^{(11)}x^{(18)}+x^{(4)}x^{(9)}x^{(21)}+x^{(6)}x^{(9)}x^{(19)}+x^{(7)}x^{(9)}x^{(18)})$
$+\frac{\partial^2 f}{\partial x^{(1)2}}(x^{(2)}x^{(31)} + x^{(3)}x^{(30)} + x^{(4)}x^{(29)} + x^{(5)}x^{(28)} + x^{(6)}x^{(27)} + x^{(7)}x^{(26)} + x^{(8)}x^{(25)} +$
$x^{(9)}x^{(24)} + x^{(10)}x^{(23)} + x^{(11)}x^{(22)} + x^{(12)}x^{(21)} + x^{(13)}x^{(20)} + x^{(14)}x^{(19)} + x^{(15)}x^{(18)} +$
$x^{(16)}x^{(17)})$
$+\frac{\partial f}{\partial x^{(1)}}x^{(32)}$
一般に,
$F^{(k)}(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(2^k-1)},x^{(2^k)})$: d 次 $2^k n$ 変数多項式は homaloidal であり, EKP の定理を繰り返せば, その乗法的 Legendre 変換も計算できる.

Example 3.9 (極化の例 1(Binary cubic form の空間の相対不変式))
$(GL(2), 3\Lambda_1, V(4))$ の相対不変式 $P := -27\,x_1^2x_4^2 + 18\,x_1x_2x_3x_4 - 4\,x_1x_3^3 - 4\,x_2{}^3x_4 + x_2^2x_3^2$ と, その極化 $F(x,y) := \nabla_x P(x)\cdot y$ は,
$F(x,y) = -54\,x_1{}^2x_4y_4 + 18\,x_1x_2x_3y_4 + 18\,x_1x_2x_4y_3 - 12\,x_1x_3{}^2y_3 + 18\,x_1x_3x_4y_2 - 54\,x_1x_4{}^2y_1 - 4\,x_2{}^3y_4 + 2\,x_2{}^2x_3y_3 - 12\,x_2{}^2x_4y_2 + 2\,x_2x_3{}^2y_2 + 18\,x_2x_3x_4y_1 - 4\,x_3{}^3y_1$
とこれらの双対空間の多項式
$Q(x^*) = -x_2^{*2}x_4^{*2} + 6\,x_1^*x_2^*x_3^*x_4^* - 4\,x_1^*x_3^{*3} - 4\,x_2^{*3}x_4^* + 3\,x_2^{*2}x_3^{*2}$
について
$F(x,y)$ の乗法的 Legendre 変換 $F^*(x^*,y^*)$ は
$$F^*(x^*,y^*) = (4-1)^{(1-4)}\frac{(\nabla_{x^*}Q(y^*)\cdot x^*)^{4-1}}{Q(y^*)^{(4-2)}}$$
$$= \frac{1}{27}\frac{(q_1(x)y_1 + q_2(x)y_2 + q_3(x)y_3 + q_4(x)y_4)^3}{(6\,y_1y_2y_3y_4 - 4\,y_1y_3{}^3 - 4\,y_2{}^3y_4 + 3\,y_2{}^2y_3{}^2 - y_2{}^2y_4{}^2)^2}\ ,$$
ここで, $q_1(x) = 6\,x_2x_3x_4 - 4\,x_3{}^3,\ q_2(x) = 6\,x_1x_3x_4 - 12\,x_2{}^2x_4 + 6\,x_2x_3{}^2 - 2\,x_2x_4{}^2,$
$q_3(x) = 6\,x_1x_2x_4 - 12\,x_1x_3{}^2 + 6\,x_2{}^2x_3,\ q_4(x) = 6\,x_1x_2x_3 - 4\,x_2{}^3 - 2\,x_2{}^2x_4$
という有理関数になる.

4 SubHankel determinant の乗法的 Legendre 変換と b-関数

4.1 SubHankel 行列式に付随する空間の構造

$$\text{SubHankel matrix } SH^{(r)} := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{r-1} & x_r \\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_r & x_{r+1} \\ x_3 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{r+1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{r-1} & x_r & x_{r+1} & \cdots & 0 & 0 \\ x_r & x_{r+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の行列式の Multiplicative Legendre 変換, b-関数について今までの考察について分かったことをまとめる.

Theorem 4.1 (C. Ciliberto, F. Russo and A. Simis [1])

$$\textit{Hankel matrix } H^{(r)} := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{r-1} & x_r \\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_r & x_{r+1} \\ x_3 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{r+1} & x_{r+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{r-1} & x_r & x_{r+1} & \cdots & x_{2r-3} & x_{2r-2} \\ x_r & x_{r+1} & x_{r+2} & \cdots & x_{2r-2} & x_{2r-1} \end{pmatrix}$$

について, $\det H^{(r)}$ が *homaloidal* 多項式になるのは $x_{r+2} = x_{r+3} = \cdots = x_{2r-1} = 0$ のときのみである.

Remark 4.2 この論文の中で, C. Ciliberto, F. Russo and A. Simis は subHankel 行列式は非概均質的多項式と言っているが, そんなことはなく, 作用する群が reductive でないような概均質的多項式である. つまり, $\det H^{(r)}$ は概均質ベクトル空間の相対不変式になる.

この様な多項式について、以下のような問題意識で研究を進めた.,

1. Cilberto, Russo ,Simis の定理 [1] に現れる subHankel determinant がどの様な概均質ベクトル空間の相対不変式か？,
2. その双対空間, 及び乗法的 Legendre 変換はなにか？
3. そして b-関数は？

§4 の内容は伊師英之氏との共同研究に基づいている.

この研究について得られた結果や予想を以下に記す.

Theorem 4.3 ([7]) *(1)*$\det SH^{(r)}$ の不変 *Lie* 環に $\mathfrak{gl}(1)$ を調整した *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ は以下の形をしている：

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} (r-1)b_1 & (2r-2)b_2 & (2r-4)b_3 & (2r-6)b_4 & \cdots & 4b_{r-1} & 2b_r & 0 \\ 0 & (r-2)b_1 & (2r-3)b_2 & (2r-5)b_3 & \cdots & 5b_{r-2} & 3b_{r-1} & b_r \\ 0 & 0 & (r-3)b_1 & (2r-4)b_2 & \cdots & 6b_{r-3} & 4b_{r-2} & 2b_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & (r-4)b_1 & \cdots & 7b_{r-4} & 5b_{r-3} & 3b_{r-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_1 & rb_2 & (r-2)b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (r-1)b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b_1 \end{pmatrix} \right\}$$

(2) この *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ はこの空間 $SH^{(r)}$ に以下のように作用する：

$A \in \mathfrak{g},,; SH^{(r)} =$ サイズ r の *subHankel* 行列, $SH^{(r)} \mapsto SH^{(r)} + SH^{(r)t}A$

この作用で, この空間は概均質ベクトル空間になる.

Lemma 4.4 ([7]) *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ の基底 $C, A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$ について,

(1)C, A_0 が中心元で, $\mathfrak{g} = \langle C, A_0 \rangle \ltimes \langle A_1, \ldots, A_{r-1} \rangle$ である.

(2) $A := cC + a_0A_0 + \sum_{i=1}^{r-1} a_iA_i \in \mathfrak{g}$, $Y = \sum_{k=1}^{r+1} y_iY_i$ について,

$$d\rho(A)Y = R(Y) \begin{pmatrix} c \\ a_0 \\ \vdots \\ a_{r-2} \\ a_{r-1} \end{pmatrix}$$ として $(r+1) \times (r+1)$ を考えるとき,

$$\det R(Y) = \begin{vmatrix} y_1 & 2ry_1 & (2r-2)y_2 & (2r-4)y_3 & (2r-6)y_4 & \cdots & 6y_{r-2} & 4y_{r-1} & 2y_r \\ y_2 & (2r-1)y_2 & (2r-3)y_3 & (2r-5)y_4 & (2r-7)y_5 & \cdots & 5y_{r-1} & 3y_r & y_{r+1} \\ y_3 & (2r-2)y_3 & (2r-4)y_4 & (2r-6)y_5 & (2r-8)y_6 & \cdots & 4y_r & 2y_{r+1} & 0 \\ y_4 & (2r-3)y_4 & (2r-5)y_5 & (2r-7)y_6 & (2r-9)y_7 & \cdots & 3y_{r+1} & 0 & 0 \\ y_5 & (2r-4)y_5 & (2r-6)y_6 & (2r-8)y_7 & (2r-10)y_8 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{r-1} & (r+2)y_{r-1} & ry_r & (r-2)y_{r+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ y_r & (r+1)y_r & (r-1)y_{r+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ y_{r+1} & ry_{r+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$= \textit{some constant} \times y_{r+1} \det SH^{(r)}$

となる.

(3) $d\rho^*(A) = {}^t d\rho(A)$, $Z := \sum_{k=1}^{r+1} z_iY_i$ について,

$$d\rho(A)Y = R^*(Z)\begin{pmatrix} a_{r-1} \\ a_{r-2} \\ \vdots \\ a_0 \\ c \end{pmatrix}$$ とおくとき, 以下が成立する：

$$\det R^*(Z) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2rz_1 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (2r-2)z_2 & (2r-1)z_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (2r-3)z_3 & (2r-2)z_3 & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (2r-4)z_4 & (2r-3)z_4 & z_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (2r-5)z_5 & (2r-4)z_5 & z_5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 4z_1 & 5z_2 & 6z_3 & 7z_4 & \cdots & (r+1)z_{r-2} & (r+2)rz_{r-1} & z_{r-1} \\ 2z_1 & 3z_2 & 4z_3 & 5z_4 & 6z_5 & \cdots & rz_{r-1} & (r+1)z_r & z_r \\ z_2 & 2z_3 & 3z_4 & 4z_5 & 5z_5 & \cdots & (r-1)z_r & rz_{r+1} & z_{r+1} \end{vmatrix}$$

$$= -z_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (2r-2)z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (2r-3)z_2 & 2z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (2r-3)z_3 & 3z_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (2r-4)z_4 & 4z_5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 4z_1 & 5z_2 & 6z_3 & 7z_4 & \cdots & (r+1)z_{r-2} & (r-2)rz_{r-1} \\ 2z_1 & 3z_2 & 4z_3 & 5z_4 & 6z_5 & \cdots & rz_{r-1} & (r-1)z_r \\ z_2 & 2z_3 & 3z_4 & 4z_5 & 5z_5 & \cdots & (r-1)z_r & rz_{r+1} \end{vmatrix}$$

$= -z_1Q_1,\quad Q_2 = z_1$ とおく.

Theorem 4.5 ([7]) サイズ r の *subHankel* 行列の空間を $\mathcal{SH}(r)$ とする. $SH^{(r)} \in \mathcal{SH}(r)$ について,

(1) 概均質ベクトル空間 $(\mathfrak{g}, d\rho, \mathcal{SH}(r))$ の基本相対不変式は,$P_1 = \det SH^{(r)}, P_2 = y_{r+1}$ である.

(2) 上記の概均質ベクトル空間は正則であり, その双対空間 $(\mathfrak{g}, d\rho^*, V^*)$ の基本相対不変式は, 上記の *Lemma* に現れる多項式 Q_1, Q_2 である.

(3) 基本相対不変式と有理指標の対応は以下のとおりである：

$$\begin{cases} P_1 & \leftrightarrow & \chi_{(r,r^2+r)} \\ P_2 & \leftrightarrow & \chi_{(1,r)} \\ Q_1 & \leftrightarrow & \chi_{(r,2r^2-r)} \\ Q_2 & \leftrightarrow & \chi_{(1,2r)} \end{cases}$$

(4) P_1, Q_1 の乗法的 *Legendre* 変換は

$$\mathcal{ML}(P_1) = \frac{1}{(2^{\ell_2(r)+r-1}\cdot(r-1))^{r-1}} \times Q_1^{r-1}Q_2^{-r^2+2r}$$

$$\mathcal{ML}(Q_1) = \tfrac{1}{(2^{\ell_2(r)+r-1}\cdot(r-1))^{r-1}} \times P_1^{r-1} P_2^{-r^2+2r}$$

ここで $2^{\ell_2(r)}$ は $r!$ の最大 2 べき因子で, $\ell_2(r)$ は以下で与えられる：
$\ell_2(r) = \sum_{k\geq 1} \left[\frac{r}{2^k}\right]$ *with Gauss symbol* $[\quad]$.

4.2 :subHankel 行列式の b-関数と極化の b-関数

前節までの結果と計算結果をもとに以下のような予想を導いた：
Conjecture A 前節の P_1, P_2, Q_1, Q_2 について, $\tilde{Q}_1 = \dfrac{(-1)^{r-1}}{2^{\ell_2(r)+r-1}(r-1)^{r-1}} Q_1$,
$K := P -_1^{r-1} P_2^{-r^2+2r}$ とおくと,

$$\tilde{Q}_1(\partial)(K^{s+1}) = \prod_{k=1}^{r-1}(s+\frac{k}{r-1})(s+\frac{r+1}{2})K^s. \tag{1}$$

即ち, K の b-関数は以下の形をしている：

$$b_{Q_1,K}(s) = \prod_{k=1}^{r-1}(s+\frac{k}{r-1})(s+\frac{r+1}{2}). \tag{2}$$

さらに、他の概均質、非概均質双方の相対不変式を考察して以下のことも予想した：

Conjecture B F を N-変数, 次数 r の *homaloidal* 多項式とし, $H := \mathcal{ML}(F)$ とおく, $F^{[k]}$ を F の k-回極化で, その乗法的 *Legendre* 変換を $H^{[k]} = \mathcal{ML}(F^{[[k]})$ とする. ペア $(F^{[k]}, H^{[k]})$ は b-関数 $b^{[k]}(s)$ a を持ちその形は以下で与えられる：

$$b^{[k]}_{(F^{[k]},H^{[k]})}(s) = \prod_{i=1}^{r-1}(s+\frac{i}{r-1})(s+N\cdot 2^{k-1})$$

Remark 4.6 上記の ConjectureB は 2015 年に F.Sato によって解かれた ([13]). またこのノートで紹介する最後の節の homaloidal 多項式の極化に付随する局所関数等式からも ConjecureB は導かれる.

<u>**問題 1**</u> *sub-Hankel* 行列式の b-関数の形が $b^{[k]}_{(F^{[k]},H^{[k]})}(s)$ に似ているのは何故だろう？ *sub-Hankel* 行列式の空間と一般の *homaloidal* 多項式の極化の空間の間に何らかの関係があるのだろうか？

5 極化による概均質性の保存

再び, 極化の話に戻ろう.
$V = \mathbb{C}^n$ を n 次元ベクトル空間, G を $GL(V) = GL(n)$ の代数的閉部分群で, (G, V) が正則概均質ベクトル空間となるものとする. $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ とおく. Ω を G-開軌とする. (G, V) は正則と仮定したから, homaloidal な相対不変式 $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ が存在する. χ を f の対応する G の有理指標とし, $d = \mathrm{deg} f$ とおく. また,

$$F(x,y) = F(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) = \langle \nabla_x f(x), y\rangle$$

は $f(x)$ の極化である．この節では x,y は n 次元の縦ベクトルとして扱う．このとき，以下の定理が成立する．

Theorem 5.1 (F.SATO , KOGISO [13])

$$\tilde{G} = \left\{ \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ X - \frac{\delta_\chi(X)}{d} I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} tI_n & 0 \\ 0 & t^{1-d} I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} | g \in G, t \in GL(1), X \in \mathfrak{g} \right\}$$

$$\tilde{V} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x, y \in V \right\}$$

とおくと，$(\tilde{G},\tilde{V})$ は，

$$\tilde{\Omega} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ | \ x \in \Omega, F(x,y) \neq 0 \right\}$$

を開軌道とする概均質ベクトル空間であり，極化 $F(x,y)$ は指標 χ に対応する $(\tilde{G},\tilde{V})$ の相対不変式である．このとき，$f(x)$ の $(\tilde{G},\tilde{V})$ の相対不変式としての，対応する指標は $\chi(g)t^d$ である．

6 非概均質型の極化は非概均質型か？

<u>問題</u> **2** Theorem5.1 の逆は成り立つか? すなわち，Homaloidal な斉次有理関数 $f(x)$ が概均質ベクトル空間の相対不変式ではないとき，その極化 $F(x;y)$ も決して概均質ベクトル空間の相対不変式とはならないか？

この問題 2 を考えるために，以下のように極化多項式の不変 Lie 環について調べる．

$f(x)$ を homaloidal 多項式，$F(x,y)$ をその極化とする．$X \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{R})$ とする．このとき，$F((x;y)e^{tX}) = F(x,y)$ を微分した

$$\langle \nabla_{x,y} F(x,y), X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle = 0$$

が X が $F(x,y)$ の対称性の群の不変 Lie 環 $\mathfrak{g}(F)$ に属す条件となる．

$$\nabla_{x,y} F(x,y) = \begin{pmatrix} H_f(x)y \\ \nabla_x f(x) \end{pmatrix}$$

であるから，$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ とおいて，この条件を具体的に書くと，

$$0 = \langle H_f(x)y, Ax + By\rangle + \langle \nabla_x f(x), Cx + Dy\rangle$$

$$= \langle H_f(x)y, Ax\rangle + \langle H_f(x)y, By\rangle + \langle \nabla_x f(x), Cx\rangle + \langle \nabla_x f(x), Dy\rangle$$

以上から,

Theorem 6.1 (F.Sato , Kogiso [13]) $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}(F)$ の必要条件は

$$C \in \mathfrak{g}(f),\ (d-1)A + D \in \mathfrak{g}(f),\ B \in \cap_x \mathfrak{so}(H_f(x)) \subset \mathfrak{g}(f)$$

Theorem 6.2 (F.Sato , Kogiso [13]) *Homaloidal* な斉次有理関数 $f(x)$ が概均質ベクトル空間の相対不変式ではないとする. $f(x)$ の乗法的 *Legendre* 変換 $f^*(x^*)$ を既約多項式の積に

$$f^*(x^*) = \prod_{j=1}^{r} g_j(x^*)^{e_j},\ e_j \neq 0$$

と分解する. このとき,
(1) 概均質ベクトル空間の相対不変式とはならないようなある *homaloidal* な既約因子 $g_j(x)$ が存在し, そのべき指数 e_j が $e_j \neq d-1$ を満たすならば, $f(x)$ の極化 $F(x,y)$ も決して概均質ベクトル空間の相対不変式とはならない.
(2) 概均質ベクトル空間の相対不変式とはならないようなある *homaloidal* な既約因子 $g_j(x)$ が存在し, そのべき指数 e_j が $d-1$ の整数倍でなければ, $f(x)$ の k 重極化 $F^{(k)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(2^k-1)}, x^{(2^k)})$ も決して概均質ベクトル空間の相対不変式とはならない.

Corollary 6.3 (F.Sato, Kogiso, [13]) *Homaloidal* な d 次斉次有理関数 $f(x)$ が概均質ベクトル空間の相対不変式とはならないとする. このとき, $f(x)$ の乗法的 *Legendre* 変換 $f^*(x^*)$ が既約多項式ならば, $f(x)$ の多重極化 $F^{(k)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(2^k-1)}, x^{(2^k)}))$ $(k \geq 1)$ も決して概均質ベクトル空間の相対不変式とはならない.

Corollary 6.4 (F.Sato, Kogiso [13]) *non-prehomogeneous* な *Clifford quartic form* の多重極化はみな *non-prehomogeneous* である.

7 極化の局所ゼータ関数の関数等式

7.1 Homaloidal 多項式の極化に付随する局所ゼータ関数の関数等式)

$n \geq 2$ とする. $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathbb{R}$-係数の homaloidal 多項式とする. このとき, $d := \deg f \geq 2$ である. $F(x,y) := \langle \nabla_x f(x), y \rangle$ で, $f(x)$ の極化を表す.

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\} = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_\nu$$

を Ω の連結成分への分解とする. また, $i = 1, \ldots, \nu, \varepsilon = \pm 1$ に対し,

$$\tilde{\Omega}_{i,\varepsilon} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n | x \in \Omega_i, \mathrm{sgn}(F(x,y)) = \varepsilon\}$$

とおく. このとき,

$$\tilde{\Omega} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \mid f(x)F(x,y) \neq 0\} = \cup_{i=1}^{\nu} \cup_{\varepsilon=\pm 1} \tilde{\Omega}_{i,\varepsilon}$$

である. 局所ゼータ関数 $Z_{i,\varepsilon}(\Phi, s, t)$ を

$$Z_{i,\varepsilon}(\Phi, s, t) = \int_{\tilde{\Omega}_{i,\varepsilon}} |f(x)|^s |F(x,y)|^t |H_f(x)| \Phi(x,y) dxdy \quad (\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n))$$

によって定義する. $H_f(x)$ は $f(x)$ の Hessian である. $f(x), F(x,y), H_f(x)$ は多項式だから, $Z_{i,\varepsilon}(\Phi, s, t)$ は少なくとも, $\Re(s), \Re(t) > 0$ で絶対収束し, (s,t) の有理型関数として $\mathbb{C}^2$ に解析接続される.
$f^*(x^*)$ を $f(x)$ の乗法的Legendre変換とし, $F^*(x^*, y^*) = \langle \nabla_x^*(y^*), x^* \rangle$ とおく. $\phi_f(x) = \frac{1}{f(x)} \nabla_x f(x)$ とし, $\Omega^* := \phi_f(\Omega)$, $\Omega_i^* := \phi_f(\Omega_i)$ $(1 \leq i \leq \nu)$ とおく. さらに,

$$\tilde{\Omega}_{i,\varepsilon}^* = \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \mid x^* \in \Omega_i^*, \mathrm{sgn} F^*(x \ \ :, y^*) = \varepsilon\},$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}^* &= \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \mid x^* \in \Omega^*, F^*(x \ \ :, y^*) \neq 0\} \\ &= \cup_{\substack{i=1,\ldots,\nu, \\ \varepsilon=\pm 1}} \tilde{\Omega}_{i,\varepsilon}^*\end{aligned}$$

とおく.
双対的な局所ゼータ関数 $Z_{i,\varepsilon}^*(\Phi; s, t)$ は

$$Z_{i,\varepsilon}^*(\Phi; s, t) = \int_{\tilde{\Omega}_{i,\varepsilon}^*} |f^*(y^*)|^s |F^*(x^*, y^*)|^t \Phi(x^*, y^*) dx^* dy^*$$

$$(\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n))$$

によって定義される. $\tilde{\Omega^*}$ 上では $f(^*(x^*), F^*(x^*, y^*)$ は極を持たず, かつ, 0 と異なる値をとる. 従って,

$$|f^*(y^*)|^s |F^*(x^*, y^*)|^t$$

は $\tilde{\Omega}^*$ 上の連続関数を定めることに注意しておく.

さて, 一般には, $f^*(x^*), F^*(x^*, y^*)$ は有理関数となるので, 局所ゼータ関数 $Z_{i,\varepsilon}^*(\Phi; s, t)$ の収束域は自明ではない. そこで, 次の仮定を置く.

仮定 (Conv) $\mathbb{C}^2$ のある開集合 $\mathcal{D}$ が存在し, $(s,t) \in \mathcal{D}$ のとき, $Z_{i,j}(\Phi; s, t)$ $(i, j = 0, 1)$ は任意の $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n)$ に対して絶対収束する.

Theorem 7.1 (F.Sato , Kogiso [13]) 仮定 *(Conv.)* の下で, 任意の $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n)$ に対し関数等式.

$$Z_{i,j}(\hat{\Phi};s,t) = (d-1)\sum_{k,\ell=0,1}\gamma_{i+j,k}(t)\gamma_{k,i+dk+\ell}(ds+(d-1)(t+n)-1)$$
$$\times Z^*_{i+dk,\ell}(\Phi;(d-1)s+(d-2)(t+n),-ds-(d-1)(t+n))$$

が成立する．ここで, $\hat{\Phi}$ は *Fourier* 変換

$$\hat{\Phi}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n\oplus\mathbb{R}^n}\Phi(x^*,y^*)\mathbf{e}[\langle x,x^*\rangle+\langle y,y^*\rangle]dxdy,$$
$$\mathbf{e}[u] = \exp(2\pi u\sqrt{-1}).$$
$$\gamma_{i,j}(s) = (2\pi)^{-(s+1)}\Gamma(s+1)\exp((-1)^{i+j}\pi\sqrt{-1}(s+1)/2).$$

また, 添字の $i+dk+\ell, i+dk$ は mod 2 で考える．

7.2 Clifford quartic form の極化の局所関数等式

$f(x) = \sum_{i=1}^{p+q}\varepsilon_i S_i[x]^2,\ F(x,y) = 2\sum_{i=1}^{p+q}\varepsilon_i S_i[x]^t y S_i x,\quad f^*(y^*) = 2^{-8}f(y^*),\quad F^*(y^*,x^*) = 2^{-8}F(y^*,x^*),\quad H_f(x) = 3\times 2^{2n}f(x)^{n/2}$

$\zeta_{ij}(\Phi;s,t) = \int_{\tilde{\Omega}_{ij}}|f(x)|^s|F(x,y)|^t\Phi(x,y)dxdy$ とおくと

$Z_{i,j}(\Phi;s,t) = 3\cdot 2^{2n}\zeta_{ij}(\Phi;s+n/2,t)$

$Z^*_{i,j}(\Phi^*;s,t) = 2^{-8(s+t)}\zeta_{ij}(\Phi^*;s,t)$

である．したがって, 仮定 *(Conv)* は $\mathcal{D} = \{(s,t)\in\mathbb{C}^2|\Re(t)>0\}$ とすれば成り立っている．

さて, $d=4$ であるから, Theorem の局所関数等式は,

$Z_{i,j}(\hat{\Phi};s,t) = 3\sum_{k,\ell=0,1}\gamma_{i+j,k}(t)\gamma_{k,i+4k+\ell}(4s+3(t+n)-1)\ Z^*_{i+4k,\ell}(\Phi;3s+2(t+n),-4s-3(t+n))$

$= 3\sum_{k,\ell=0,1}\gamma_{i+j,k}(t)\gamma_{k,i+\ell}(4s+3(t+n)-1)\ \times Z^*_{i,\ell}(\Phi;3s+2(t+n),-4s-3(t+n))$

$= 3\sum_{\ell=0,1}\left(\sum_{k=0,1}\gamma_{i+j,k}(t)\gamma_{k,i+\ell}(4s+3(t+n)-1)\right)Z^*_{i,\ell}(\Phi;3s+2(t+n),-4s-3(t+n))$

となる．ここで,

$$\begin{pmatrix}\gamma_{0,0}(t) & \gamma_{0,1}(t)\\ \gamma_{1,0}(t) & \gamma_{1,1}(t)\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\gamma_{0,0}(4s+3(t+n)-1) & \gamma_{0,1}(4s+3(t+n)-1)\\ \gamma_{1,0}(4s+3(t+n)-1) & \gamma_{1,1}(4s+3(t+n)-1)\end{pmatrix}$$
$$= (2\pi)^{-(4s+4t+3n)}\Gamma(t+1)\Gamma(4s+3(t+n))\times\begin{pmatrix}\exp(\frac{(t+1)\pi\sqrt{-1}}{2}) & \exp(-\frac{(t+1)\pi\sqrt{-1}}{2})\\ \exp(-\frac{(t+1)\pi\sqrt{-1}}{2}) & \exp(\frac{(t+1)\pi\sqrt{-1}}{2})\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix}\exp(\frac{(4s+3(t+n))\pi\sqrt{-1}}{2}) & \exp(-\frac{(4s+4(t+n))\pi\sqrt{-1}}{2})\\ \exp(-\frac{4s+3(t+n))\pi\sqrt{-1}}{2}) & \exp(\frac{4s+3(t+3))\pi\sqrt{-1}}{2})\end{pmatrix}$$
$$= (2\pi)^{-(4s+4t+3n)}\Gamma(t+1)\Gamma(4s+3(t+n))$$
$$\times\begin{pmatrix}-\sin((2s+2t+\frac{n}{2})\pi) & \sin((2s+t+\frac{3n-1}{2}))\pi)\\ \sin((2s+2t+\frac{3n-1}{2})\pi) & -\sin((2s+t+\frac{n}{2}))\pi)\end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{pmatrix} Z_{0,0}(\hat{\Phi}; s,t) \\ Z_{0,1}(\hat{\Phi}; s,t) \end{pmatrix} = 2(2\pi)^{-(4s+4t+3n)}\Gamma(t+1)\Gamma(4s+3(t+n))$$

$$\times \begin{pmatrix} -\sin((2s+2t+\frac{n}{2})\pi) & \sin((2s+t+\frac{3n-1}{2}))\pi) \\ \sin((2s+2t+\frac{3n-1}{2})\pi) & -\sin((2s+t+\frac{n}{2}))\pi) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Z^*_{0,0}(\Phi; 3s+2(t+n), -4s-3(t+n)) \\ Z^*_{0,1}(\Phi; 3s+2(t+n), -4s-3(t+n)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Z_{1,0}(\hat{\Phi}; s,t) \\ Z_{1,1}(\hat{\Phi}; s,t) \end{pmatrix} = 2(2\pi)^{-(4s+4t+3n)}\Gamma(t+1)\Gamma(4s+3(t+n))$$

$$\times \begin{pmatrix} \sin((2s+2t+\frac{3n-1}{2})\pi) & -\sin((2s+t+\frac{n}{2}))\pi) \\ -\sin((2s+2t+\frac{n}{2})\pi) & \sin((2s+t+\frac{3n-1}{2}))\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^*_{1,0}(\Phi; 3s+2(t+n), -4s-3(t+n)) \\ Z^*_{1,1}(\Phi; 3s+2(t+n), -4s-3(t+n)) \end{pmatrix}$$

References

[1] C. Ciliberto, F. Russo and A. Simis, Homaloidal hypersurfaces and hypersurfaces with vanishing Hessian, Adv. in Math. **218**(2008), 1759–1805.

[2] J.-L. Clerc, Zeta distributions associated to a representation of a Jordan algebra, Math. Z. **239**(2002), 263-276.

[3] P. Etingof, D. Kazhdan and A. Polishchuk, When is the Fourier transform of an elementary function elementary?, Selecta Math. **8**(2002), 27-66.

[4] J. Faraut and A. Koranyi, Analysis of symmetric cones, Oxford Uni- versity Press, 1994.

[5] P. Graczyk and H. Ishi, Riesz measures and Wishart laws associated to quadratic maps. J. Math. Soc. Japan **66**, 317348 (2014)

[6] A.Gyoja, Bernstein-Sato's polynomial for several analytic functions, J. Math. Kyoto Univ. **33**,no.2 (1993) 399-411

[7] H. Ishi and T. Kogiso, Some properties of spaces associated with sub-Hankel determinants, Seminar on Mathematical Sciences, Keio Univ. 2016. , **39**, .83–94.(SSN:1880-6511).

[8] M.Kashiwara, B-functions and holonomic systems. Rationality of roots of B-functions. Invent. Math. **38** (1976/77), no. 1, 3353.

[9] T. Kimura, *Introduction to prehomogeneous vector spaces*, Translations of mathematical monographs, Vol. 215, 2002, Amer. Mat. Soc.

[10] T. Kogiso and F. Sato, Clifford quartic forms and local functional equations of non-prehomogeneous type, J. Math. Sci. , Univ. Tokyo, **23** (2016), 791–866.

[11] F. Sato, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I: Functional equations, Tohoku Math. J. **3**4(1982), 437–483.

[12] F.Sato and T.Kogiso , Representations of Clifford algebras and local functional equations, RIMS Kokyuroku Bessatsu **36**(2012), 53–66.

[13] F.Sato and T.Kogiso, Local Functional Equations attached to the polarizations of homaloidal polynomials, preprint

[14] F.Sato, Quadratic maps and nonprehomogeneous local functional equations, Comment. Math. Univ. St. Pauli **56**(2007), 163–184.

[15] M. Sato, Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part)—the English translation of Sato's lecture from Shintani's note. Notes by Takuro Shintani. Translated from the Japanese by Masakazu Muro. Nagoya Math. J. **120** (1990), 134.

[16] T.Shintani, On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms,J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 132- 188.

冨田-竹崎理論の紹介とそれに関する話題

増田俊彦*
九州大学数理学研究院

1 序

作用素環論は 1930 年代の Murray-von Neumann による研究 (邦訳 [15] が出版されている) に端を発し, 現在までに創始者も想像しなかったであろう多分野との結びつきを経て今日まで発展してきている. その流れをざっと振り返ると, 日本人研究者の果たしてきた役割は大変大きいものである. (例えば [19] を見られたい.)

その中でも冨田による modular Hilbert 環の理論 [23], [24] は特筆すべき重要な仕事であり, 竹崎によって整備進化させられた理論 [16] は今日冨田-竹崎理論と呼ばれており, 作用素環論の流れを決定的に変えたものである.

本講演では非専門家向けに冨田-竹崎理論の概要, 及び作用素環論にどのように応用されているかという事を構造解析の観点から解説したいと思う. 本講演の内容の性質上, 最新の結果に触れることはほとんどないが, 最後の方で筆者の結果と関連させて言及したいと思う. また本稿では冨田-竹崎理論の作用素環の構造解析への応用の部分を主に説明するため, 数理物理への応用という面については (筆者の能力を超えるということもあるが) 説明しない. これについては [3], [4] にまとまっているので, こちらを参照されたい.

なお冨田-竹崎理論の歴史的な背景については, 上に引用した竹崎氏の文章 (ほぼ同内容の事が [20] にも英文で書かれている) の他, [18] の解説, [2] などを見られたい.

なお本講演を依頼された切っ掛けは, 講演時にも触れたが, 岡山大学のジャーナル, Mathematical Journal of Okayama University に冨田-竹崎理論の概要の紹介 [13] を執筆したことである. 講演者に MJOU への執筆の機会を与えてくださった岡山大学の梶原毅先生, 及び講演の機会を与えて下さった千葉大学の渚勝先生に感謝します.

2 von Neumann 環, 因子環

作用素環の包括的な教科書として [21] を挙げておく. 本稿で言及する冨田-竹崎理論に関連する定理には, 可能な限り該当する [21] の番号を引用する.

*本研究は JSPS 科研費 16K05180 の助成を受けたものである.

2.1 von Neumann 環の定義

まず作用素環の定義を説明する. 以下 $\mathfrak{H}$ をヒルベルト空間とする. 大抵は可分なものを考える. $\mathfrak{H}$ の元は大抵 ξ, η とギリシャ文字で表わし, 普通のアルファベットで a, b で $\mathfrak{H}$ 上の有界作用素を表す.

内積は $\langle \xi, \eta \rangle$, $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$, と表す. 作用素ノルムは $\|a\| = \sup_{\|\xi\|=1} \|a\xi\|$ で与えられる. $a \in B(\mathfrak{H})$ に対して共役作用素 a^* は $\langle a\xi, \eta \rangle = \langle \xi, a^*\eta \rangle$ で定まる. $\{a_i\} \subset B(\mathfrak{H})$ が a に作用素の強位相で収束するとは, $\lim_i \|(a_i - a)\xi\| = 0$ が任意の $\xi \in \mathfrak{H}$ で成立することである.

Definition 2.1 (1) $B(\mathfrak{H})$ の部分集合 S に対して S の可換子 S' を

$$S' = \{x \in B(\mathfrak{H}) \mid \text{任意の } y \in S \text{ に対して } xy = yx.\}$$

で定義する.
(2) $B(\mathfrak{H})$ の $*$-部分代数 $\mathcal{M}$ が 1($\mathfrak{H}$ 上の恒等作用素) を含み, 作用素の強位相で閉じているとき $\mathcal{M}$ を von Neumann 環という. この時 von Neumann 環の二重可換子定理から, $\mathcal{M}$ がフォンノイマン環であることと $(\mathcal{M}')' = \mathcal{M}$ であることが同値である.
(3) フォンノイマン環 $\mathcal{M}$ の中心 $Z(\mathcal{M})$ を $Z(\mathcal{M}) = \mathcal{M}' \cap \mathcal{M}$ と定める. $Z(\mathcal{M}) = \mathbb{C}1$ であるとき因子環 (factor) であるという.

$(\mathcal{M}')' = \mathcal{M}$ であることから $x \in \mathcal{M}$ のとき, x の極分解やスペクトル分解がすべて $\mathcal{M}$ 内でできることが示される.

可換な von Neumann 環は適当な測度空間 (X, μ) によって, $L^\infty(X, \mu)$ と表されることがわかっている. また $\mathcal{M}$ を von Neumann 環, $Z(\mathcal{M}) = L^\infty(X, \mu)$ と表したとき, $\mathcal{M}$ は次のような直和を一般化した直積分として,

$$\mathcal{M} = \int_X^{\oplus} \mathcal{M}(x) d\mu(x), \quad Z(\mathcal{M}(x)) = \mathbb{C}1$$

のように因子環の直積分で表されることが示され, 原理的には von Neumann 環の研究は因子環に帰着される.

2.2 von Neumann 環上の荷重と因子環の型の分類

上で可換 von Neumann 環が $L^\infty(X, \mu)$ と同型である, という事実を述べたが, 作用素環の研究方針の一つは, von Neumann 環を非可換な測度空間, その上の汎関数を測度, と見做すことである. 測度の類似は, 以下に述べる荷重の概念として定義される.

Definition 2.2 $\mathcal{M}$ を von Neumann 環とし, $\mathcal{M}_+ = \{a^*a \mid a \in \mathcal{M}\}$ をその正の部分とする. このとき, $\varphi : \mathcal{M}_+ \to [0, \infty]$ が $\mathcal{M}$ 上の荷重 (weight) であるとは,
(1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $x, y \in \mathcal{M}_+$,
(2) $\varphi(cx) = c\varphi(x)$, $c \geq 0$, $x \in \mathcal{M}_+$, (ただし $0 \times \infty = 0$ と解釈する)
を満たすことである. また
(3) φ が正則であるとは, 単調増大列 $\{x_i\} \subset \mathcal{M}_+$ が $\lim_i x_i = x$ となっているときに,

$\sup_i \varphi(x_i) = \varphi(x)$ となることである.
(4) φ が半有限であるとは, $n_\varphi := \{x \in \mathcal{M} \mid \varphi(x^*x) < \infty\}$, $m_\varphi := \{\sum_{i=1}^n x_i^* y_i \mid x_i, y_i \in n_\varphi\}$, としたとき, $m_\varphi \subset \mathcal{M}$ が稠密であることである.
(5) φ が忠実であるとは, $\varphi(x^*x) = 0$ なら $x = 0$ を満たすことである.
(6) φ がトレースであるとは, $\varphi(x^*x) = \varphi(xx^*)$ となることである.

なお m_φ 上では φ は線形汎関数を定める. n_φ は二乗可積分関数の類似であり, m_φ は可積分関数の類似となっている. また $\varphi(1) < \infty$ のときは, $m_\varphi = \mathcal{M}$ であって, $\mathcal{M}^*$ の元となる. $\varphi(1) = 1$ と正規化したものは状態 (state) と呼ばれる. この名称は量子力学における状態の概念から来ている.

以下 $\mathcal{W}(\mathcal{M})$ で, 半有限, 正則な荷重の全体, $\mathcal{W}_0(\mathcal{M})$ で, 忠実, 半有限, 正則な荷重の全体を表すこととする. 以下表れる荷重はほぼ全て $\mathcal{W}_0(\mathcal{M})$ の元である.

荷重の基本的な例として, $B(\mathfrak{H})$ 上のトレースを挙げておく. $\{\xi_i\}_{\in I}$ を $\mathfrak{H}$ の完全正規直交基底として, $\mathrm{Tr}(x^*x) = \sum_i \langle x\xi_i, x\xi_i \rangle$ とすると, これは正規直交基底 $\{\xi_i\}$ の取り方によらずに定まり, $B(\mathfrak{H})$ 上の正則, 半有限, 忠実なトレース荷重となる. $\dim \mathfrak{H} < \infty$ であれば, 通常の行列に対する対角成分の和で定まるトレースとなっている.

因子環は次のように三つのクラスに分類されることが Murray-von Neumann の研究によって示されている.

Definition 2.3 $\mathcal{M}$ を因子環とする.
(1) $\mathcal{M} = B(\mathfrak{H})$, $\dim \mathfrak{H} = n$, のときの時 I_n 型という.
(2) $\mathcal{M}$ が無限次元で, 正則な忠実トレース状態を持つとき II_1 型という.
(3) $\mathcal{M}$ が II_1 型因子環と I_∞ 型因子環のテンソル積で表されるとき II_∞ 型という. なおこの場合 $\tau(1) = \infty$ となるようなトレース荷重 $\tau \in \mathcal{W}_0(\mathcal{M})$ が存在する.
(4) $\mathcal{M}$ がトレース荷重を持たない時 III 型という.

§3 で説明するが, 冨田-竹崎竹崎理論は主にトレースを持たない III 型因子環の解析における基本理論である.

2.3 GNS 表現

通常の積分論では, 測度空間 (X, μ) について, L^2 ノルムを考えることによって, $L^2(X, \mu)$ がヒルベルト空間になる. そして $f \in L^\infty(X, \mu)$ を掛け算作用素と考えることにより, $f \in B(L^2(X, \mu))$ と見做す. よって $L^\infty(X, \mu) \subset B(L^2(X, \mu))$ と考えることが可能である. この類似の理論が作用素環の設定でもあり, それが以下に説明する GNS(Gelfand-Naimark-Segal) 表現の理論である.

$\varphi \in \mathcal{W}_0(\mathcal{M})$ とすると, $x \in n_\varphi$ に対して, $\|x\|_\varphi := \varphi(x^*x)^{\frac{1}{2}}$ とすることにより L^2 ノルムが定まり, その完備化として $\mathfrak{H}_\varphi$ が定まる. η_φ を自然な埋め込み $\eta_\varphi : a \in n_\varphi \mapsto x\eta_\varphi(a) \in \mathfrak{H}_\varphi$ とする. (φ が忠実でない場合は, 商空間 $n_\varphi / \{x \mid \varphi(x^*x) = 0\}$ の完備化を考えると同様に $\mathfrak{H}_\varphi$ が考えられる.)

そして $\mathfrak{H}_\varphi$ 上で, $*$-準同型 $\pi_l : \mathcal{M} \to B(\mathfrak{H}_\varphi)$ が $\pi_l(a)\eta_\varphi(x) = \eta_\varphi(ax)$ とすることによって定まる. 実際に $\pi_l(a)$ が有界であることは,

$$\|\eta_\varphi(ax)\|_\varphi^2 = \varphi(x^*a^*ax) \leq \|a\|^2 \varphi(x^*x) = \|a\|^2 \|\eta_\varphi(x)\|_\varphi^2$$

であることからわかる． ここでもし φ がトレースであれば，右側からの掛け算作用素 $\pi_r(a)\eta_\varphi(x)=\eta_\varphi(xa)$ も有界作用素を与えることが以下のようにわかる

$$\|\eta_\varphi(xa)\|^2=\varphi(a^*x^*xa)=\varphi(xaa^*x^*)\le\|a\|^2\varphi(xx^*)=\|a\|^2\|\eta_\varphi(x)\|_\varphi^2,$$

なお φ の忠実性により，π_l は $\mathcal{M}$ の単射な準同型であり，π_r は反準同型 (掛け算が逆になる) となる．φ がトレースのとき $J\eta_\varphi(x)=\eta_\varphi(x^*)$ とすると，φ のトレース条件により，$\|x\|_\varphi=\|x^*\|_\varphi$ であることから，J は反線形なユニタリ対合 ($J^2=1$ のこと) を与える．また $J\pi_l(a)J=\pi_r(a^*)$ であることは容易にわかる．よって $J\pi_l(\mathcal{M})J=\pi_r(\mathcal{M})$ である．

τ を $\mathcal{M}$ 上のトレースとすると，τ を測度の類似と見做すことによって，通常の積分論の類似の理論がいろいろ展開できる．(L^p 空間の理論，Radon-Nikodym 微分など.) また今の場合，$\pi_l(\mathcal{M})'=\pi_r(\mathcal{M})$ であることもわかり，$\pi_l(\mathcal{M})$ と $\pi_l(\mathcal{M})'$ は反同型な von Neumann 環となって，互いの可換子の関係がわかる．(なお最初の $L^\infty(X,\mu)$ の場合は，$L^\infty(X,\mu)=L^\infty(X,\mu)'$ であることは比較的簡単に証明できる.) これによって例えば，テンソル積の可換子定理 $(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})'=\mathcal{M}'\otimes\mathcal{N}'$ はトレースがある場合には比較的簡単に証明することができる．

II 型因子環の場合は上のようにして，トレースを元にしていろいろ議論ができるが，III 型の場合 φ を荷重として，上と同様のことをやろうとすると，左掛け算の作用 π_l を定義するところまでは問題ないが，右からの作用 π_r は有界有界作用素としてはうまく定義できない．よって可換子の関係がよくわからない．特にテンソル積の可換子の問題もわからないことになる．(実際一般のテンソル積の可換子定理は後述する冨田の理論によって初めて証明された.)

作用素環の研究の初期では，III 型因子環は病理的なものとしてむしろ例外的なもののように思われていたようであるが，荒木の研究などによって III 型因子環は数理物理ではごく自然に表れる，ということがはっきりしてきた．

そのような状況で発表されたのが冨田の理論であって，これが後の III 型因子環の構造理論を始め，作用素環論の発展に決定的な影響を与えたのである．

3 冨田の基本定理

冨田の基本定理は本来は左 Hilbert 環の概念を使って表されるが，ここでは最初から荷重を元にして説明をする．

$\mathcal{M}$ を von Neumann 環，荷重 $\varphi\in\mathcal{W}_0(\mathcal{M})$ をとる．このとき前節で説明したように GNS 表現 $(\mathfrak{H}_\varphi,\eta_\varphi,\pi_l)$ が定まる．

一般には $\varphi(x^*x)\neq\varphi(xx^*)$ であるから，$S_\varphi^0:\eta_\varphi(x)\mapsto\eta_\varphi(x^*)$ は稠密に定義された反線形な対合ではあるものの，$\mathfrak{H}_\varphi$ 全体には拡張できない．しかし S_φ^0 は可閉であることは示すことができる．よってその閉包 S_φ の極分解を考える，というのが冨田の理論の出発点である．

すなわち $S_\varphi:=\bar{S_\varphi^0}$ として，$S_\varphi=J_\varphi\Delta_\varphi^{\frac{1}{2}}$ と極分解をする．(なおこの極分解は冨田理論の発表の前に [22] においてすでに現れている.) S_φ は非特異，かつ稠密な値域をもつので，J_φ は反ユニタリ，Δ_φ は非特異な正値自己共役作用素である．

このとき次のことが成立する．

Theorem 3.1 ([21, Lemma VI.1.5]) 上の記号の下で, $J_\varphi^2=1$, $J_\varphi\Delta_\varphi J_\varphi=\Delta_\varphi^{-1}$ となる.

Definition 3.2 J_φ, Δ_φ をそれぞれ φ に付随するモジュラー共役作用素, モジュラー作用素という.

ここで冨田の基本定理は次のように述べられる.

Theorem 3.3 ([21, Theorem VI.1.19]) 上の状況で, 次のことが成立する.
(1) $\Delta_\varphi^{it}\pi_l(\mathcal{M})\Delta_\varphi^{-it}=\pi_l(\mathcal{M})$. よって φ から $\mathcal{M}$ 上の一径数自己同型群 σ_t^φ が $\Delta^{it}\pi_l(x)\Delta^{-it}=\pi_l(\sigma_t^\varphi(x))$ として定まる. σ_t^φ のことをモジュラー自己同型群と呼ぶ.
(2) $J_\varphi\pi_l(\mathcal{M})J_\varphi=\pi_l(\mathcal{M})'$.

2 番目の式から $\pi_l(\mathcal{M})$ とその可換子の関係がわかり, 特に $a\in\pi_l(\mathcal{M})\mapsto J_\varphi a^*J_\varphi\in\pi_l(\mathcal{M})'$ とするとこれは反同型写像となることがわかる.

定理 3.3 の証明についてであるが, 最初の冨田による証明 [24] では, modular Hilbert 環 (後に竹崎によって, 冨田環 [21, Definition VI.2.1] の名称が付けられる) の概念が利用されており, 竹崎の講義録 [16] も基本的には冨田の証明の忠実な解説となっている. その後 modular Hilbert 環を用いない証明が幾つか発表され, その中でも van Daele による証明 [9] は短いもので, 種々の教科書に採用されている. 本稿では証明については省略するが, 興味のある方は [21, Chapter VI] を見られたい.

冨田理論の最初の応用として, 定理 3.2 によって, テンソル積の可換子定理 $(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})'=\mathcal{M}'\otimes\mathcal{N}'$ が示される. (ただしこの定理は後に, 冨田の基本定理まで用いずに, 極分解 $S=J\Delta^{\frac{1}{2}}$ の存在のみで示されることがわかった. 例えば [17, Appendix] 参照のこと.)

しかしより重要なのは σ_t^φ の存在である. φ がトレースの場合は $\Delta_\varphi=1$ となって, $\sigma_t^\varphi=\mathrm{id}$ となり自明になってしまうが, III 型因子環の場合は σ_t^φ が非自明となり, これが §5 で後述するように, III 型因子環の解析に重要な役割を果たす.

冨田理論が発表されたのとほぼ同時期に Haag-Hugenholtz-Winnink の理論 [10] が発表された. これは C*-環を用いた量子統計物理の研究であって, 一径数自己同型群に対して, 久保-Martin-Schwinger(KMS) 条件によって, 系の平衡状態を特徴付ける, というものである. 研究対象自体は冨田のものと全く異なるものの, 両者に共通の記号などが表われ, 何人かの研究者の注意を引いた, とのことである [2]. これについては最終的に竹崎によって, KMS 条件によってモジュラー自己同型群が一意的に定まる, という定理にまとめられた.

これを説明するために記号を導入しておく. $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<\mathrm{Im}(z)<1\}$ とし, $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ を $\overline{\mathbb{D}}$ 上有界連続, $\mathbb{D}$ 上正則な関数全体の集合とする.

Theorem 3.4 ([21, Theorem VIII.1.2]) $\mathcal{M}$ を von Neumann 環, φ を荷重とし, σ^φ を φ に対するモジュラー自己同型群とする. このとき次が成立する.
(1) $\varphi\circ\sigma_t^\varphi=\varphi$.
(2) 任意の $x,y\in n_\varphi\cap n_\varphi^*$ に対して, 次の条件を満たす $F_{x,y}(z)\in\mathcal{A}(\mathbb{D})$ が存在する.

$$F_{x,y}(t)=\varphi(\sigma_t^\varphi(x)y),\ F_{x,y}(t+i)=\varphi(y\sigma_t^\varphi(x)),\ t\in\mathbb{R}.$$

もし一径数自己同型群 α_t が φ に対して上の 2 条件を満たすなら, $\alpha_t=\sigma_t^\varphi$ となる.

なお $\varphi(1)<\infty$ であれば, (1) の条件は (2) から自動的に従う.

ここで, もし a が解析的な元であれば (つまり $\sigma_t^\varphi(a)$ が $\mathbb{C}$ 上に解析的に拡張できれば), $\varphi(\sigma_\alpha^\varphi(a)x)\in\mathcal{A}(\mathbb{D})$ であるので, 定理 3.4 によって, $\varphi(\sigma_{t+i}^\varphi(a)x)=\varphi(x\sigma_t^\varphi(a))$ でなくてはならない. $t=0$ とすれば特に, $\varphi(\sigma_i(a)x)=\varphi(xa)$ となる. よってトレース条件とは異なるが, σ_i^φ で捻ることによって φ の中身をいれかえることができる.

この節の最後に異なるモジュラー自己同型群の間の関係を表す Connes の Radon-Nikodym コサイクル定理 [21, Theorem VIII.3.3] を紹介しておく.

Theorem 3.5 $\varphi,\psi\in\mathcal{W}_0(\mathcal{M})$ に対して以下の条件を満たすユニタリ $[D\varphi:D\psi]_t$, $t\in\mathbb{R}$, が存在する.
(1) $\mathrm{Ad}([D\varphi:D\psi]_t)\circ\sigma_t^\psi=\sigma_t^\varphi$,
(2) (コサイクル条件) $[D\varphi:D\psi]_t\sigma_t^\psi([D\varphi:D\psi]_s)=[D\varphi:D\psi]_{t+s}$,
(3) (連鎖律) $[D\varphi_1:D\varphi_2]_t[D\varphi_2:D\varphi_3]_t=[D\varphi_1:D\varphi_3]_t$.
なおここでユニタリ $u\in\mathcal{M}$ に対して, $\mathrm{Ad}(u)$ は $\mathrm{Ad}(u)(x)=uxu^*$ として定まる $\mathcal{M}$ の自己同型である.

これは丁度測度論の Radon-Nikodym 微分の一般化に相当するものである. 証明は [21] を参照してほしいが, いわゆる 2×2-matrix trick を用いるもので, 作用素環で用いられる典型的な手法である.

4 例

ここで典型的な例を幾つか説明する.

Example 4.1 まず行列環の場合 $\mathcal{M}=M_n(\mathbb{C})$ を見る. Tr を通常のトレースとする. $a\in\mathcal{M}$ に対して, $\varphi_a=\mathrm{Tr}(ax)$ と定める. a が正かつ可逆であれば, φ_a は $\mathcal{M}$ 上の正則正値汎関数を定める. 以下 $\mathrm{Tr}(a)=1$, よって $\varphi_a(1)=1$ と正規化しておく. なお $\mathcal{M}$ 上の汎関数は全て φ_a の形をしている.

$\mathfrak{H}_{\mathrm{Tr}}$ を Tr についての GNS Hilbert 空間とし, $\eta_{\mathrm{Tr}}(x)$ を簡単のため $\hat{x}$ と表す. $\varphi_a(x^*x)=\mathrm{Tr}(a^{\frac12}x^*xa^{\frac12})$ であるので, $(\mathfrak{H}_{\varphi_a},\eta_{\varphi_a})$ は, $\mathfrak{H}_{\mathrm{Tr}}$ を用いて $\mathfrak{H}_{\varphi_a}=\mathfrak{H}_{\mathrm{Tr}}$, $\eta_{\varphi_a}(x)=\widehat{xa^{\frac12}}$ とすることによって実現できる.

今は有限次元であるから S 作用素は有界で, $S(\widehat{xa^{\frac12}})=\widehat{x^*a^{\frac12}}$ である. $S^*=F$ は

$$\langle\widehat{ya^{\frac12}},S^*\widehat{a^{\frac12}x}\rangle=\langle\widehat{a^{\frac12}x},S\widehat{ya^{\frac12}}\rangle=\langle\widehat{a^{\frac12}x},\widehat{y^*a^{\frac12}}\rangle=\langle\widehat{ya^{\frac12}},\widehat{a^{\frac12}x^*}\rangle$$

により, $F(\widehat{a^{\frac12}x})=\widehat{a^{\frac12}x^*}$ で与えられる. モジュラー作用素 Δ_a とモジュラー共役作用素 J_a は今の場合次のように与えられる.

$$\Delta_a=FS(xa^{\frac12})=F(x^*a^{\frac12})=F(a^{\frac12}a^{-\frac12}x^*a^{\frac12})=axa^{-\frac12}=a(xa^{\frac12})a^{-1}.$$

よって

$$\Delta_a^{\frac12}\widehat{xa^{\frac12}}=a^{\frac12}(xa^{\frac12})a^{-\frac12}=a^{\frac12}x,$$

$$J_a(xa^{\frac{1}{2}}) = \Delta_a^{\frac{1}{2}} S\widehat{xa^{\frac{1}{2}}} = \Delta_a^{\frac{1}{2}}\widehat{x^*a^{\frac{1}{2}}} = \widehat{a^{\frac{1}{2}}x^*} = \widehat{(xa^{\frac{1}{2}})^*}$$

となる. $\Delta^{it}(xa^{\frac{1}{2}}) = a^{it}xa^{-it}a^{\frac{1}{2}}$ であることから, モジュラー自己同型群は

$$\sigma_t^{\varphi_a}(x) = a^{it}xa^{-it}$$

で与えられる. また $J_a x^* J_a \widehat{ya^{\frac{1}{2}}} = \widehat{ya^{\frac{1}{2}}x}$ となっていて, $J_a x^* J_a$ は通常の右掛け算となっている. また J_a は Tr における J_{Tr} と同じ作用素を定めている.

同様にして, $\mathcal{M}$ がトレース荷重 τ を持っていれば, 任意の荷重 $\varphi \in \mathcal{W}(\mathcal{M})$ は, $\varphi(x) = \tau(ax)$ の形で表せて, φ が忠実であれば $\sigma_t^\varphi = \mathrm{Ad}\, a^{it}$ となる.

また Connes コサイクルは今の場合 $[D\varphi_a : D\varphi_b]_t = a^{it}b^{-it}$ となっている.

Example 4.2 $\mathcal{M}_i := M_{n_i}(\mathbb{C})$ を I_{n_i} 型因子環とし, 忠実な状態 $\varphi_{a_i} = \mathrm{Tr}(a_i\cdot)$ をとる. ここで (代数的な) 無限テンソル積 $\mathcal{A} = \bigotimes_{i=1}^\infty \mathcal{M}_i$ を考える. このとき $\mathcal{A}$ 上の状態 φ を

$$\varphi(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1 \otimes \cdots) = \prod_{i=1}^n \varphi_{a_i}(x_i)$$

によって定めることができる. ($\varphi_{a_i}(1) = 1$ であるので積が問題なく定義できる.) $(\pi_\varphi, \mathfrak{H}_\varphi)$ を $\mathcal{A}$ の φ による GNS 表現として, $\mathcal{M} = \pi_\varphi(\mathcal{A})''$ と定める. 例 4.1 の結果を合わせると σ_t^φ は今の場合 $\mathrm{Ad}(a_1^{it} \otimes a_2^{it} \otimes a_3^{it} \otimes \cdots)$ となることがわかる. なお $a_1^{it} \otimes a_2^{it} \otimes a_3^{it} \otimes \cdots$ は一般には $\mathcal{M}$ の元とはならないことを注意しておく. よって σ_t^φ は内部的 (つまり $\sigma_t^\varphi(x) = uxu^*$, $u \in \mathcal{M}$, とはならない.) 実際に a_i をいろいろ取り替えることによって, $\mathcal{M}$ として非同型な因子環が沢山得られる. これについては, [1] で詳細に構造の解析がなされている.

Example 4.3 G を局所コンパクト群, μ を左不変 Haar 測度, $\Delta(s)$ を G のモジュラー関数とする. ($\mu_r(A) := \mu(A^{-1})$ と右不変測度を定めたとき, Radon-Nikodym 微分 $\Delta(s) = \dfrac{d\mu}{d\mu_r}(s)$ で定まる.)

$\mathfrak{A} := K(G)$ を G 上のコンパクト台をもつ連続関数の全体とし, $\mathfrak{A}$ 上に荷重 φ と $*$-代数の構造を以下のように入れる.

$$f * g(s) = \int_G f(t)g(t^{-1}s)d\mu(t),\ \varphi(f) = f(e),\ f^\#(s) = \Delta(s^{-1})\overline{f(s^{-1})}.$$

このとき φ から定まる内積は

$$\langle f, g\rangle = \varphi(g^\# * f) = \int_G f(s)\overline{g(s)}d\mu(s)$$

となっている. GNS 構成を行うと ($\mathfrak{A}$ は厳密にいえば von Neumann 環ではないが, GNS 構成は可能である), $\mathfrak{H}_\varphi = L^2(G, \mu)$ であって, $\pi_l(\mathfrak{A})''$ は G の左正則表現から生成される von Neumann 環 $L(G)$ となっている. ここで

$$f^\flat(s) = \overline{f(s^{-1})}.$$

と別の $*$-演算を定義すると, $\langle f^{\#}, g\rangle = \langle g^{\flat}, f\rangle$ であることがわかり, 実は S^* は $\flat$ の閉包となっていることも証明できる.

よってモジュラー作用素とモジュラー共役作用素は,

$$(\Delta f)(s) = \Delta(s)f(s), (Jf)(s) = \Delta(s^{-1})^{\frac{1}{2}}\overline{f(s^{-1})}.$$

となっている. 左掛け算作用素 $\pi_l(f)$ は $\pi_l(f)\eta_\varphi(g) = \eta_\varphi(f*g)$ で定まるが, 今の場合モジュラー自己同型群は, $\Delta^{it}\pi_l(f)\Delta^{-it} = \pi_l(\Delta^{it}f)$ となっている. $JL(G)J$ は右正則表現から生成される von Neumann 環 $R(G)$ となっていて, 実際に $L(G)' = R(G) = JL(G)J$ となっている.

なお今の場合は $\alpha \in \mathbb{C}$ に対しても $\Delta^\alpha f$, $f \in \mathfrak{A}$, を定めることができる. これは実は $\mathfrak{A}$ が冨田環 ([21, Definition VI.2.1]) と呼ばれる環になっている事実を示している.

5 III 型因子環の構造理論

本節では冨田-竹崎理論の最も重要な応用として, III 型因子環の構造理論を説明する. $\mathcal{M}$ を III 型因子環, $\varphi \in \mathcal{W}_0(\mathcal{M})$ を一つとってくる.

このとき接合積 $\tilde{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R}$ を考える. $\tilde{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R}$ は大雑把にいって, $\mathcal{M}$ と一径数ユニタリ群 $\lambda(t)$ で共変関係式 $\lambda(t)a\lambda(t)^* = \sigma_t^\varphi(a)$ を満たすものから生成される von Neumann 環のことである. (正確な定義をするためには Hilbert 空間を適切に定義することが必要であるが.) このとき双対作用 θ_t が

$$\theta_t(a) = a,\ a \in \mathcal{M},\ \ \theta_t(\lambda(s)) = e^{-its}\lambda(s)$$

によって定義できる. $\mathcal{M} \subset \tilde{\mathcal{M}}$ であるが, $\mathcal{M} = \{a \in \tilde{\mathcal{M}} \mid \theta_t(a) = a, t \in \mathbb{R}\}$ が成立する.

Definition 5.1 ([21, Definition XII.6.12]) $\tilde{\mathcal{M}}$ の事を $\mathcal{M}$ の core と呼ぶ.

なお上の $\tilde{\mathcal{M}}$ の構成では, φ を一つ固定しているのだが, 実は定理 3.5 を用いることによって, φ によらずに自然に (functorial に)$\tilde{\mathcal{M}}$ を定義することが可能である [21, Chapter XXII.6].

$\tilde{\mathcal{M}}$ について重要なことは, トレースの存在である. まず $\tilde{\mathcal{M}}$ には

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi\left(\int_{\mathbb{R}} \theta_t(x)dt\right)$$

で定まる双対荷重 $\tilde{\varphi}$ が定まる. (詳述しないがこの荷重は例 4.3 に現れたものの一般化のようなものである.) 接合積のモジュラー作用素の一般論 [21, Chapter X] を用いると, $\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(x) = \lambda(t)x\lambda(t)^*$ であることがわかる.

ここで h を $\lambda(t) = h^{it}$ となる自己共役作用素とする. (h は一般には非有界であるが, スペクトル射影は $\tilde{\mathcal{M}}$ の元となっている.)

Lemma 5.2 $\tau(x) := \tilde{\varphi}(h^{-1}x)$ とすると, τ は $\tilde{\mathcal{M}}$ 上のトレースである.

証明について．形式的には $\tilde{\varphi}$ の KMS 条件 $\tilde{\varphi}(\sigma_i^{\tilde{\varphi}}(a)b) = \tilde{\varphi}(ba)$ を用いることによって，$\sigma_i^{\tilde{\varphi}}(x) = h^{-1}xh$ であることより，

$$\tau(xy) = \tilde{\varphi}(h^{-1}xy) = \tilde{\varphi}(\sigma_i(x)h^{-1}y) = \tilde{\varphi}(h^{-1}yx) = \tau(yx)$$

とすることによってわかる．

またθ $\theta_t(h^{is}) = e^{-its}h^{is} = (e^{-t}h)^{is}$ であることも考慮すると次の定理が得られる．

Theorem 5.3 ([21, Theorem XII.1.1]) $\mathcal{M}$ を III 型因子環とする．
(1) 以上の記号で τ は忠実, 正則, 半有限なトレースで $\tau\theta_t = e^{-t}\tau$ を満たす．von Neumann 環 $\tilde{\mathcal{M}}$ は II_∞ 型である．(因子環になるとは限らない.)
(2) III 型因子環 $\mathcal{M}$ に対して, II_∞ 型 von Neumann 部分環 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ と, その上のトレース τ, 一径数自己同型群 θ_t が存在して, $\tau\theta_t = e^{-t}\tau$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} \rtimes_\theta \mathbb{R}$ を満たす．

(1) については大体上で述べたことである．竹崎の双対定理 [21, Theorem Theorem X.2.3] により, $\tilde{\mathcal{M}} \rtimes_\theta \mathbb{R} = \mathcal{M} \otimes B(L^2(\mathbb{R})) \cong \mathcal{M}$ が成立するので, (2) は (1) の系のようなものである．

Theorem 5.3 によって, III 型因子環の研究は原理的には, II 型因子環とその上の自己同型の研究に帰着される．この方針にそって実際に Connes は作用素環でも特別な位置を占めるクラスである単射的因子環の分類をほぼ完成させた [5], [6], [7]．また [6] で未解決となった部分も Connes[8] と Haagerup の理論 [11] で最終的に解決された．この理論は単射的因子環の分類理論のハイライトとも言うべき結果で, Connes の業績について, 竹崎は [18, IX 章, 章末解説] で「壮大な AF 因子環論構造論の金字塔」という賛辞を寄せている．以下簡単にこの話題を説明し, 関連して筆者の仕事にも言及したいと思う．

$(\tilde{\mathcal{M}}, \tau, \theta)$ を $\mathcal{M}$ の core とする．すると $Z(\tilde{\mathcal{M}})$ は可換 von Neumann 環で, θ_t を $Z(\tilde{\mathcal{M}})$ に制限すると, これはエルゴート的流れを定める．(つまり $\theta_t(x) = x$, $t \in \mathbb{R}$, となる x は定数のみとなる.)

Definition 5.4 上のようにして得られたエルゴート的流れ $(Z(\tilde{\mathcal{M}}), \theta)$ を荷重の流れ (flow of weights) という．

エルゴート的な流れは, (1) 周期的, (2) 自明, (3) 再帰的で非周期的, (4) $\mathbb{R}$ のずらし, の 4 つに大きく分類されるので, 以下のように III 型因子環が細分類できる

Definition 5.5 $\mathcal{M}$ を III 型因子環とする．
(1) $(Z(\tilde{\mathcal{M}}), \theta)$ が周期 $-\log\lambda$, $0 < \lambda < 1$, を持つとき III_λ 型という．
(2) $Z(\tilde{\mathcal{M}}) = \mathbb{C}$(つまり自明な流れ) のとき III_1 型という．
(3) $(Z(\tilde{\mathcal{M}}), \theta)$ が再帰的で非周期的の場合 III_0 型という．

なお III 型では荷重の流れが, $\mathbb{R}$ 上のずらし, となることは起こらない．

なお実際に例 4.2 において, $n_i = 2$, $a_i = \dfrac{1}{1+\lambda}\mathrm{diag}(1, \lambda)$ とすると $\lambda = 1$ のときは, II_1 型因子環, $0 < \lambda < 1$ のときは, III_λ 型因子環が生じる．また $\dfrac{\log\lambda}{\log\mu} \notin \mathbb{Q}$ として, $n_i = 3$, $a_i = \dfrac{1}{1+\lambda+\mu}\mathrm{diag}(1, \lambda, \mu)$ とすると III_1 型因子環が生じる．また適当に a_i を選ぶことによって III_0 型因子環も生じる．

Definition 5.6 (1) $\mathcal{M}$ が AFD(approximately finite dimensional) であるとは, 有限次元部分 von Neumann 環の増大列 $\{M_i\}$ によって, $\mathcal{M} = (\bigcup_i M_i)''$ となることである.
(2) $\mathcal{M} \subset B(\mathfrak{H})$ が単射的であるとは, 線型写像 $E : B(\mathfrak{H}) \to \mathcal{M}$ で, $\|E(x)\| \leq \|x\|$, $E(x) = x$, $x \in \mathcal{M}$, となるものが存在することである.

定義 5.6(2) の性質は離散群における左不変平均の概念に相当する. 例 4.2 で構成される因子環は全て AFD である.

単射的因子環の分類定理は以下のようにまとめられる

Theorem 5.7 (1) $\mathcal{M}$ が単射的である事と AFD である事は同値である.
(2) 単射的 II_1 型, II_∞ 型因子環の同型類はそれぞれ一つである.
(3) $\mathcal{M}$ が単射的 III 型因子環の場合は, 荷重の流れが同型類を定める. 特に III_1, III_λ 型については同型類はそれぞれ一つである.
(4) 任意の再帰的, 非周期的流れが単射的 III_0 因子環の荷重の流れとして実現される.

上の定理のうち (1) から (3) の III_1 型以外の部分は全て Connes によるものであり, III_1 型の部分は Connes と Haagerup の理論で解決された. (4) は Krieger によって示された.

証明については, [21, Chapter XVI, XVII, XVIII] に詳細に解説されているが, II 型, III_0, III_λ, III_1 のそれぞれにわけて証明される.

II 型については, AFD II_1 型因子環の一意性定理 [21, Theorem XIV.2.4] がすでに Murray-von Neumann によって示されている. これと, 単射的 ⇔AFD, の同値性を合わせることによって示される. この同値性は, 離散従順群の不変平均の存在と Følner 条件の同値性の証明の類似の議論によって示される.

III_λ 型については定理 5.3 の類似の構造定理で $\mathcal{M} = \mathcal{N} \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ と II_∞ 型因子環と整数群 $\mathbb{Z}$ の適当な作用 θ による接合積で書けること ([21, Theorem XII.2.1]) を利用して, 単射的 II_1 型因子環上の自己同型の分類に帰着して証明する.

III_0 型の分類定理の, Connes の最初の証明は, Krieger によるエルゴート変換の軌道同型の分類理論 [12] に帰着させるものであったが, その後 Krieger の cohomology 定理 [21, Theorem XIII.3.26] を用いて亜群の作用の分類に帰着させる別証明が Connes により与えられた.

III_1 型については, 一径数自己同型群の解析の難しさから, [6] においては未解決となり, その後 [8] で, Connes は単射的 III_1 因子環が一意的であるための十分条件を求めた. 最終的には Haagerup[11] によってその十分条件が実際に成立することが確かめられて定理 5.7 の証明が完成した.

最後の III_1 型因子環の分類の Connes-Haagerup 理論では, 巧妙に一径数自己同型 θ の直接的な解析は避けられている. しかし彼等の理論の一部分を使うと, σ_t^φ が漸近的に内部的である [21, Theorem XVIII.4.12], ということが従う. これに着目して, 筆者は戸松玲治氏との共同研究 [14] において, Rohlin 性を持つ一径数自己同型群の分類理論を進め, 構造定理 (定理 5.3) に基いた単射的 III_1 型の分類を与えた. これについては, 2013 年の筆者による実函数函数解析シンポジウムで講演をしているので, 興味のある方そちらの予稿も参照されたい.

参考文献

[1] Araki, H. and Woods, J., *A classification of factors*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **3** (1968), 51–130.

[2] 荒木不二洋, 作用素環と数理物理学, 数学 **49** (1997), 405–414.

[3] Bratteli, O. and Robinson, D. W., *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, second ed., vol. 1, Springer-verlag, (1987).

[4] Bratteli, O. and Robinson, D. W., *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, second ed., vol. 2, Springer-verlag, (1997).

[5] Connes, A., *Outer conjugacy classes of automorphisms of factors*, Ann. Sci. Eco. Norm. Sup. **8** (1975), 383–419.

[6] Connes, A., *Classification of injective factors*, Ann. Math. **104** (1976), 73–115.

[7] Connes, A., *Periodic automorphisms of the hyperfinite factor of type* II_1, Acta Sci. Math **39** (1977), 39–66.

[8] Connes, A., *Factors of type* III_1*, property* L'_λ *and closure of inner automorphisms*, J. Operator Theory **14** (1985), 189–211.

[9] van Daele, A., *A new approach to the Tomita-Takesaki theory of generalized Hilbert algebras*, J. Funct. Anal. **15** (1974), 378–393.

[10] Haag, R., Hugenholtz, N. M., and M., Winnink, *On the equilibium states in quantum statistical mechanics*, Commun. Math. Phys. **5** (1967), 215–236.

[11] Haagerup, U., *Connes' bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type* III_1, Acta Math. **158** (1987), 95–148.

[12] Krieger, W., *On ergodic flows and the isomorphism of factors*, Math. Annal. **223** (1976), 19–70.

[13] Masuda, T., *Tomita-Takesaki theory and its application to the structure of factors of type III*, Math. J. Okayama. Univ. **60** (2018), 37–58.

[14] Masuda, T. and Tomatsu, R., *Rohlin flows on von Neumann algebras*, Memoirs of Amer. Math. Soc. **244** (2016), no. 1153.

[15] J. フォン・ノイマン, 作用素環の数理, (ノイマン・コレクション), 長田まりゑ編訳, 岡安類, 片山良一, 長田尚訳, ちくま学芸文庫, (2015).

[16] Takesaki, M., *Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and its Applications*, vol. 128, Springer, Berlin, (1970).

[17] Takesaki, M., *Duality and von Neumann algebras*, Lectures on Operator Algebras (Berlin), Lecture Notes in Math., vol. 247, Springer, (1972), 665–786.

[18] 竹崎正道, 作用素環の構造, 岩波書店, (1983).

[19] 竹崎正道, 作用素環の歴史 (50 年の歩みと日本の伝統), 数学 **35** (1983), 158–165.

[20] Takesaki, M., *Twenty-five years in the theory of type III von Neumann algebras*, C*-algebras, Contemp. Math., vol. 167, Province, RI, Amer. Math. Soc., (1994), 232–239.

[21] Takesaki, M., *Theory of Operator Algebras, I, II, III*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (2002).

[22] Tomita, M., *Spectral theory of operator algebras I.*, Math. J. Okayama Univ. **9** (1959), 63–98.

[23] Tomita, M., *Quasi-standard von Neumann algebras*, mimeographed note, (1967).

[24] Tomita, M., *Standard form of von Neumann algebras*, the Vth functional analysis symposium of the Math. Soc Japan, Sendai, (1967).

MEAN CONVERGENCE THEOREMS AND NONLINEAR ANALYTIC METHODS

WATARU TAKAHASHI

ABSTRACT. In this talk, we first study nonlinear analytic methods for linear contractive mappings in Banach spaces. Using these results, we prove mean convergence theorems for linear contractive mappings based on nonlinear analytic methods in Banach spaces. In the theorems, the limit points are characterized by sunny generalized nonexpansive retractions.

1. INTRODUCTION

Let E be a real Banach space and let C be a nonempty closed convex subset of E. For a mapping $T : C \to C$, we denoted by $F(T)$ the set of fixed points of T. A mapping $T : C \to C$ is called *nonexpansive* if $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ for all $x, y \in C$. In particular, a nonexpansive mapping $T : E \to E$ is called *contractive* if it is linear, that is, a linear contactive mapping $T : E \to E$ is a linear operator satisfying $\|T\| \leq 1$. In 1932, von Neumann [30] proved the first mean convergence theorem for linear operators in a Hilbert space.

Theorem 1.1 ([30]). *Let T be a unitary operator in a Hilbert space H. Then, for any $x \in H$, the sequence*

$$S_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

converges strongly to a point in H.

This theorem, in 1938, was extended to the following mean ergodic theorem for linear bounded operators by Yosida [32].

Theorem 1.2 ([32]). *Let E be a real Banach space and let T be a linear operator of E into itself such that there exists a constant C with $\|T^n\| \leq C$ for $n \in \mathbb{N}$, and T is weakly completely continuous, i.e., T maps the closed unit ball of E into a weakly compact subset of E. Then, for each $x \in E$, the Cesàro means $S_n x$ converge strongly as $n \to \infty$ to a fixed point of T.*

See also Kido and Takahashi [17] for semigroups of linear operators in a Banach space.

On the other hand, we know the first mean convergence theorem for nonexpansive mappings in a Hilbert space by Baillon [2].

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47H09, Secondary 47H10, 60G05.

Key words and phrases. Banach space, linear contactive mapping, generalized nonexpansive mapping, generalized projection, sunny generalized nonexpansive retraction, fixed point, homogeneous mapping.

Theorem 1.3 ([2]). *Let C be a nonempty closed convex subset of H and let $T : C \to C$ be a nonexpansive mapping such that $F(T)$ is nonempty. Then for any $x \in C$,*

$$S_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

converges weakly to an element $z \in F(T)$.

Such a theorem was extended to a noncommutative semigroup (called amenable) of nonexpanive mappings in a Hilbert space by Takahashi [23]; see also [24]. Baillon's theorem for nonexpansive mappings has been extended to Banach spaces by many authors; see, for example, [4, 6, 7, 19].

From [26] we also know a weak convergence theorem by Mann's iteration for nonexpansive mappings in a Hilbert space: Let H be a Hilbert space, let C be a nonempty closed convex subset of H and let $T : C \to C$ be a nonexpansive mapping with $F(T) \neq \emptyset$. Define a sequence $\{x_n\}$ in C by $x_1 = x \in C$ and

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

where $\{\alpha_n\}$ is a real sequence in $[0, 1]$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) = \infty$. Then, $\{x_n\}$ converges weakly to an element z of $F(T)$, where $z = \lim_{n\to\infty} P x_n$ and P is the metric projection of H onto $F(T)$. By Reich [22], such a theorem was extended to a uniformly convex Banach space with a Fréchet differentiable norm. However, we have not known whether the limit point z is characterized under any projections in a Banach space. Using nonlinear analytic methods obtained by [14], [15] and [10], Takahashi and Yao [28] solved such a problem for positively homogeneous nonexpansive mappings in a Banach space.

In this talk, we study nonlinear analytic methods for linear contractive mappings in Banach spaces. Using these results, we prove mean convergence theorems for linear contractive mappings based on nonlinear analytic methods in Banach spaces. In the theorems, the limit points are characterized by sunny generalized nonexpansive retractions.

2. Preliminaries

Throughout this paper, we assume that a Banach space E with the dual space E^* is real. We denote by $\mathbb{N}$ and $\mathbb{R}$ the sets of all positive integers and all real numbers, respectively. We also denote by $\langle x, x^* \rangle$ the dual pair of $x \in E$ and $x^* \in E^*$. A Banach space E is said to be strictly convex if $\|x + y\| < 2$ for $x, y \in E$ with $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ and $x \neq y$. A Banach space E is said to be smooth provided

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

exists for each $x, y \in E$ with $\|x\| = \|y\| = 1$. Let E be a Banach space. With each $x \in E$, we associate the set

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

The multivalued operator $J : E \to E^*$ is called the normalized duality mapping of E. From the Hahn-Banach theorem, $Jx \neq \emptyset$ for each $x \in E$. We know that E is smooth if and only if J is single-valued. If E is strictly convex, then J is one-to-one, i.e., $x \neq y \Rightarrow J(x) \cap J(y) = \emptyset$. If E is reflexive, then J is a mapping of E onto E^*. So, if E is reflexive, strictly convex and smooth, then J is single-valued, one-to-one and onto. In this case, the normalized duality mapping J_* from E^* into E is the inverse of J, that is, $J_* = J^{-1}$; see [25] for more details. Let E be a smooth Banach space and let J be the normalized duality mapping of E. We define the function $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ by

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2$$

for all $x, y \in E$. It is easy to see that $(\|x\| - \|y\|)^2 \leq \phi(x, y) \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ for all $x, y \in E$. Thus, in particular, $\phi(x, y) \geq 0$ for all $x, y \in E$. We also know the following:

$$\phi(x, y) = \phi(x, z) + \phi(z, y) + 2\langle x - z, Jz - Jy\rangle \tag{2.1}$$

for all $x, y, z \in E$. Further, we have

$$2\langle x - y, Jz - Jw\rangle = \phi(x, w) + \phi(y, z) - \phi(x, z) - \phi(y, w) \tag{2.2}$$

for all $x, y, z, w \in E$. If E is additionally assumed to be strictly convex, then

$$\phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y. \tag{2.3}$$

If E is reflexive, strictly convex and smooth, we can define the function $\phi_* : E^* \times E^* \to \mathbb{R}$ by

$$\phi_*(x^*, y^*) = \|x^*\|^2 - 2\langle x^*, J^{-1}y^*\rangle + \|y^*\|^2$$

for all $x^*, y^* \in E^*$. It is easy to see that

$$\phi(x, y) = \phi_*(Jy, Jx) \tag{2.4}$$

for all $x, y \in E$.

The following lemma due to Kamimura and Takahashi [16] is well-known.

Lemma 2.1 ([16]). *Let E be a smooth and uniformly convex Banach space and let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be sequences in E such that either $\{x_n\}$ or $\{y_n\}$ is bounded. If $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n, y_n) = 0$, then $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.*

Let C be a nonempty closed convex subset of a smooth, strictly convex and reflexive Banach space E. For an arbitrary point x of E, the set

$$\{z \in C : \phi(z, x) = \min_{y\in C} \phi(y, x)\}$$

is always a singleton. Let us define the mapping Π_C of E onto C by $z = \Pi_C x$ for every $x \in E$, i.e.,

$$\phi(\Pi_C x, x) = \min_{y\in C} \phi(y, x)$$

for every $x \in E$. Such Π_C is called the generalized projection of E onto C; see Alber [1]. The following lemma is due to Alber [1] and Kamimura and Takahashi [16].

Lemma 2.2 ([1, 16]). *Let C be a nonempty closed convex subset of a smooth, strictly convex and reflexive Banach space E and let $(x, z) \in E \times C$. Then, the following hold:*

(a) *$z = \Pi_C x$ if and only if $\langle y - z, Jx - Jz\rangle \leq 0$ for all $y \in C$;*
(b) *$\phi(z, \Pi_C x) + \phi(\Pi_C x, x) \leq \phi(z, x)$.*

Let D be a nonempty closed subset of a smooth Banach space E, let T be a mapping from D into itself and let $F(T)$ be the set of fixed points of T. Then, T is said to be generalized nonexpansive [11] if $F(T)$ is nonempty and $\phi(Tx, u) \leq \phi(x, u)$ for all $x \in D$ and $u \in F(T)$. Let C be a nonempty subset of E and let R be a mapping from E onto C. Then R is said to be a retraction, or a projection if $Rx = x$ for all $x \in C$. It is known that if a mapping P of E into E satisfies $P^2 = P$, then P is a projection of E onto $\{Px : x \in E\}$. A mapping $T : E \to E$ with $F(T) \neq \emptyset$ is a retraction if and only if $F(T) = R(T)$, where $R(T)$ is the range of T. The mapping R is also said to be sunny if $R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$ whenever $x \in E$ and $t \geq 0$. A nonempty subset C of a smooth Banach space E is said to be a generalized nonexpansive retract (resp. sunny generalized nonexpansive retract) of E if there exists a generalized nonexpansive retraction (resp. sunny generalized nonexpansive retraction) R from E onto C. The following lemmas were proved by Ibaraki and Takahashi [11].

Lemma 2.3 ([11]). *Let C be a nonempty closed subset of a smooth, strictly convex and reflexisve Banach space E and let R be a retraction from E onto C. Then, the following are equivalent:*

(a) *R is sunny and generalized nonexpansive;*
(b) *$\langle x - Rx, Jy - JRx\rangle \leq 0$ for all $(x, y) \in E \times C$.*

Lemma 2.4 ([11]). *Let C be a nonempty closed sunny and generalized nonexpansive retract of a smooth and strictly convex Banach space E. Then, the sunny generalized nonexpansive retraction from E onto C is uniquely determined.*

Lemma 2.5 ([11]). *Let C be a nonempty closed subset of a smooth and strictly convex Banach space E such that there exists a sunny generalized nonexpansive retraction R from E onto C and let $(x, z) \in E \times C$. Then, the following hold:*

(a) *$z = Rx$ if and only if $\langle x - z, Jy - Jz\rangle \leq 0$ for all $y \in C$;*
(b) *$\phi(Rx, z) + \phi(x, Rx) \leq \phi(x, z)$.*

The following theorems were proved by Kohsaka and Takahashi [18].

Theorem 2.1 ([18]). *Let E be a smooth, strictly convex and reflexive Banach space, let C^* be a nonempty closed convex subset of E^* and let Π_{C^*} be the generalized projection of E^* onto C^*. Then the mapping R defined by $R = J^{-1}\Pi_{C^*}J$ is a sunny generalized nonexpansive retraction of E onto $J^{-1}C^*$.*

Theorem 2.2 ([18]). *Let E be a smooth, strictly convex and reflexive Banach space and let D be a nonempty subset of E. Then, the following are equivalent.*

(1) *D is a sunny generalized nonexpansive retract of E;*
(2) *D is a generalized nonexpansive retract of E;*
(3) *JD is closed and convex.*

In this case, D is closed.

Let E be a smooth, strictly convex and reflexive Banach space, let J be the normalized duality mapping from E onto E^* and let C be a closed subset of E such that JC is closed and convex. Then, we can define a unique sunny generalized nonexpansive retraction R_C of E onto C as follows:

$$R_C = J^{-1}\Pi_{JC}J,$$

where Π_{JC} is the generalized projection from E^* onto JC.

Let C be a nonempty closed convex subset of a smooth, strictly convex and reflexive Banach space E. For an arbitrary point x of E, the set

$$\{z \in C : \|z - x\| = \min_{y \in C} \|y - x\|\}$$

is always nonempty and a singleton. Let us define the mapping P_C of E onto C by $z = P_C x$ for every $x \in E$, i.e.,

$$\|P_C x - x\| = \min_{y \in C} \|y - x\|$$

for every $x \in E$. Such P_C is called the metric projection of E onto C; see [25]. The following lemma is in [25].

Lemma 2.6 ([25])**.** *Let C be a nonempty closed convex subset of a smooth, strictly convex and reflexive Banach space E and let $(x, z) \in E \times C$. Then, $z = P_C x$ if and only if $\langle y - z, J(x - z)\rangle \leq 0$ for all $y \in C$.*

An operator $A \subset E \times E^*$ with domain $D(A) = \{x \in E : Ax \neq \emptyset\}$ and range $R(A) = \cup\{Ax : x \in D(A)\}$ is said to be monotone if $\langle x - y, x^* - y^*\rangle \geq 0$ for any $(x, x^*), (y, y^*) \in A$. An operator A is said to be strictly monotone if $\langle x-y, x^*-y^*\rangle > 0$ for any $(x, x^*), (y, y^*) \in A$ $(x \neq y)$. Let J be the normalized duality mapping from E into E^*. Then, J is monotone. If E is strictly convex, then J is one to one and strictly monotone; for instance, see [25].

Let E be a Banach space and let

$$\delta(\epsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x + y}{2}\right\| : x, y \in E, \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| = \epsilon\right\}.$$

We call the function $\delta : [0, 2] \to [0, 1]$ the modulus of convexity. A Banach space E is said to be uniformly convex if $\delta(\epsilon) > 0$ for every $\epsilon > 0$. A uniformly convex Banach space is strictly convex and reflexive. In a uniformly convex Banach space, we know the following lemma.

Lemma 2.7 ([25])**.** *Let E be a uniformly convex Banach space and let δ be the modulus of convexity in E. Let ϵ and r be real numbers with $0 < \epsilon \leq 2r$. Then, $\delta\left(\frac{\epsilon}{r}\right) > 0$ and*

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq r\left\{1 - 2\lambda(1 - \lambda)\delta\left(\frac{\epsilon}{r}\right)\right\}$$

for all $x, y \in E$ with $\|x\| \leq r$, $\|y\| \leq r$ and $\|x - y\| \geq \epsilon > 0$ and $\lambda \in [0, 1]$.

3. Homogeneous Mappings in Banach Spaces

In this section, we get some properties for homogeneous generalized nonexpansive mappings in a Banach space. Let E be a Banach space and let K be a closed convex cone of E. Then, $T : K \to K$ is called positively homogeneous if $T(\alpha x) = \alpha Tx$ for all $\alpha \geq 0$ and $x \in K$. Let M be a closed linear subspace of E. Then, $S : M \to M$ is called a homogeneous mapping if $T(\beta x) = \beta Tx$ for all $\beta \in \mathbb{R}$ and $x \in M$.

Remark 3.1. *In L^p spaces, $1 \leq p \leq \infty$, we know examples of nonexpansive and positively homogeneous mappings; see, for instance, Wittmann* [31].

We start with the following theorem by Takahashi, Yao and Honda [29].

Theorem 3.1 ([29])**.** *Let E be a smooth Banach space and let K be a closed convex cone of E. Then, a positively homogeneous mapping $T : K \to K$ is generalized nonexpansive if and only if for any $x \in K$ and $u \in F(T)$,*

$$\|Tx\| \leq \|x\| \text{ and } \langle x - Tx, Ju\rangle \leq 0.$$

Furthermore, let M be a closed linear subspace of E. Then, a homogeneous mapping $S : M \to M$ is generalized nonexpansive if and only if for any $x \in M$ and $v \in F(T)$,

$$\|Sx\| \leq \|x\| \text{ and } \langle x - Sx, Jv\rangle = 0.$$

Proof. Since T is positively homogeneous, $F(T)$ must contain the origin. Further, we have that for any $x \in K$, $u \in F(T)$ and $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}\phi(T(\alpha x), u) \leq \phi(\alpha x, u)&\\ &\Leftrightarrow \phi(\alpha Tx, u) \leq \phi(\alpha x, u)\\ &\Leftrightarrow \|\alpha Tx\|^2 - 2\langle \alpha Tx, Ju\rangle \leq \|\alpha x\|^2 - 2\langle \alpha x, Ju\rangle\\ &\Leftrightarrow \big(\|x\|^2 - \|Tx\|^2\big)\alpha^2 - 2\alpha\langle x - Tx, Ju\rangle \geq 0\\ &\Leftrightarrow \big(\|x\|^2 - \|Tx\|^2\big)\alpha - 2\langle x - Tx, Ju\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Letting $\alpha \to 0$, we obtain $\langle x - Tx, Ju\rangle \leq 0$. ¿From $0 \in F(T)$, we have also $\|x\|^2 - \|Tx\|^2 \geq 0$ and hence $\|Tx\| \leq \|x\|$. Conversely, if a positively homogeneous mapping $T : K \to K$ satisfies that for any $x \in K$ and $u \in F(T)$,

$$\|Tx\| \leq \|x\| \text{ and } \langle x - Tx, Ju\rangle \leq 0,$$

then we have

$$\|Tx\| \leq \|x\| \text{ and } \langle x, Ju\rangle \leq \langle Tx, Ju\rangle.$$

So, we have

$$\begin{aligned}\phi(Tx, u) &= \|Tx\|^2 - 2\langle Tx, Ju\rangle + \|u\|^2\\ &\leq \|x\|^2 - 2\langle x, Ju\rangle + \|u\|^2\\ &= \phi(x, u).\end{aligned}$$

Then, T is generalized nonexpansive.

Similarly, since S is a homogeneous mapping of M into itself, $F(S)$ must contain the origin. Further, we have that for any $x \in M$, $v \in F(S)$ and $\beta < 0$, we have

$$\big(\|x\|^2 - \|Sx\|^2\big)\beta - 2\langle x - Sx, Jv\rangle \leq 0.$$

Letting $\beta \to 0$, we obtain $\langle x - Sx, Jv\rangle \geq 0$. We also have that

$$\big(\|x\|^2 - \|Tx\|^2\big)\beta - 2\langle x - Tx, Ju\rangle \geq 0$$

for $\beta > 0$. Letting $\beta \to 0$, we have $\langle x - Sx, Jv\rangle \leq 0$. So, we obtain $\langle x - Sx, Jv\rangle = 0$. $\|Sx\| \leq \|x\|$ is obvious. The reverse is obvious. □

We also know the follwing theorem from Takahashi and Yao [28]; see also Honda, Takahashi and Yao [29].

Theorem 3.2 ([28]). *Let E be a smooth Banach space and let K be a closed convex cone in E If $T : K \to K$ is a positively homogeneous nonexpansive mapping, then T is generalized nonexpansive. In particular, if $T : E \to E$ is a linear contractive mapping, then T is generalized nonexpansive.*

From Theorems 3.2 and 3.1, we have the following corollary.

Corollary 3.1. *Let E be a smooth Banach space and let K be a closed convex cone of E. If a mapping $T : K \to K$ is positively homogeneous nonexpansive, then for any $x \in K$ and $u \in F(T)$,*

$$\|Tx\| \leq \|x\| \textit{ and } \langle x - Tx, Ju\rangle \leq 0.$$

Furthermore, let M be a closed linear subspace of E. If a mapping $S : M \to M$ is homogeneous nonexpansive, then for any $x \in M$ and $v \in F(T)$,

$$\|Sx\| \leq \|x\| \textit{ and } \langle x - Sx, Jv\rangle = 0.$$

From Theorem 3.1, we introduce the following concept.

Definition 3.1 ([29]). *Let E be a smooth Banch space, let $x \in E$ and let F be a nonempty subset of E. The Sizihwan region between x and F is the set*

$$R(x; F) = \{z \in E : \langle x - z, Ju\rangle = 0 \text{ for all } u \in F \text{ and } \|z\| \le \|x\|\}.$$

Lemma 3.1 ([29]). *Let E be a strictly convex and smooth Banch space, let $x \in E$ and let F be a nonempty subset of E. Then $R(x; F)$ is nonempty, closed, convex and bounded, and $F \cap R(x; F)$ consists of at most one point.*

Proof. For any $x \in E$ and $F \subset E$, x is always an element of $R(x; F)$. Then $R(x; F)$ is nonempty. From the definition, it is obvious that $R(x; F)$ is convex and bounded. We show that $R(x; F)$ is closed. Let $\{z_n\}$ be a sequence in $R(x; F)$ and $z_n \to z_0$. Then, we have that for all $u \in F$,

$$0 = \langle x - z_n, Ju\rangle \to 0 = \langle x - z_0, Ju\rangle$$

and $\|z_0\| \le \|x\|$. So, $z_0 \in R(x; F)$.

Let $z_1, z_2 \in F \cap R(x; F)$. Then $\langle x - z_1, Jz_1\rangle = 0$ and $\langle x - z_2, Jz_1\rangle = 0$. So, we have $\langle z_1 - z_2, Jz_1\rangle = 0$. Similarly, we have $\langle z_1 - z_2, Jz_2\rangle = 0$. Then we obtain $\langle z_1 - z_2, Jz_1 - Jz_2\rangle = 0$. Since E is strictly convex, we obtain $z_1 = z_2$. $\square$

Let F be a nonempty subset of a Banach space E and $x \in E$. Then,

$$\operatorname{dist}(x, F) = \inf\{\|x - y\| : y \in F\}.$$

Lemma 3.2 ([29]). *Let E be a uniformly convex and smooth Banach space, let $x \in E$ and let F be a nonempty closed subset of E. Suppose $\{x_n\}$ is a sequence in $R(x; F)$ such that $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_n, F) = 0$. Then $F \cap R(x; F)$ is nonempty and $\{x_n\}$ converges strongly to a unique point in $F \cap R(x; F)$.*

Proof. Choose $\{y_n\}$ in F such that $\|x_n - y_n\| \to 0$. By Lemma 3.1, both $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ are bounded. Then, there exists a positive number M such that

$$\|y_n\| = \|Jy_n\| \le M$$

for any $n \in \mathbb{N}$. Since $\{y_n\} \subset F$, we have $\langle x - x_n, Jy_m\rangle = 0$ for any $n, m \in \mathbb{N}$. So, we have

$$\begin{aligned} |\langle x - y_n, Jy_m\rangle| &= |\langle x - x_n, Jy_m\rangle - \langle y_n - x_n, Jy_m\rangle| \\ &= |\langle y_n - x_n, Jy_m\rangle| \\ &\le M\|x_n - y_n\|. \end{aligned}$$

Similarly, we have that $|\langle x - y_n, Jy_n\rangle| \le M\|x_n - y_n\|$ for any $n \in \mathbb{N}$. Then, we have that for any $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\langle x - y_n, Jy_n - Jy_m\rangle| &\le |\langle x - y_n, Jy_n\rangle| + |\langle x - y_n, Jy_m\rangle| \\ &\le 2M\|x_n - y_n\|. \end{aligned}$$

Since $\|x_n - y_n\|$ converges to 0 as $n \to \infty$, there exists a positive sequence t_n with $t_n \searrow 0$ such that

$$\langle y_n - x, Jy_n - Jy_m\rangle \le t_n$$

for all $n, m \in \mathbb{N}$. Similarly, we have

$$\langle y_m - x, Jy_m - Jy_n\rangle \le t_m$$

for all $n, m \in \mathbb{N}$. Then, we have

$$\frac{\phi(y_n, y_m) + \phi(y_m, y_n)}{2} = \langle y_n - y_m, Jy_n - Jy_m \rangle \leq t_n + t_m.$$

Since E is uniformly convex and smooth, from Kamimura and Takahashi [16] there exists a continuous, strictly increasing and convex function $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ with $g(0) = 0$ such that

$$g(\|y_n - y_m\|) \leq \phi(y_n, y_m)$$

and

$$g(\|y_n - y_m\|) = g(\|y_m - y_n\|) \leq \phi(y_m, y_n)$$

for all $n, m \in \mathbb{N}$. Then, we have

$$g(\|y_n - y_m\|) \leq t_n + t_m$$

for all $n, m \in \mathbb{N}$. Therefore, from the properties of g, $\{y_n\}$ is a Cauchy sequence in F. So, $\{x_n\}$ is also a Cauchy sequence in $R(x; F)$. Then both $\{y_n\}$ and $\{x_n\}$ converge to a same element $z \in E$. Since both F and $R(x; F)$ are closed, the limit z belongs to $F \cap R(x; F)$. □

Using Corollary 3.1, we have the following result.

Lemma 3.3 ([29])**.** *Let E be a smooth Banach space, let M be a closed linear subspace of E and $x \in M$. For any homogeneous nonexpansive mapping $T : M \to M$, Tx is an element of $R(x; F(T)) \cap M$, where $F(T)$ is the set of all fixed points of T.*

The finite composition of homogeneous nonexpansive mappings is also a homogeneous nonexpansive mapping. Then, using Lemma 3.2, we have the following theorem.

Theorem 3.3 ([29])**.** *Let E be a uniformly convex and smooth Banach space, let M be a closed linear subspace of E and let $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of homogeneous nonexpansive mappings of M into itself such that $\cap_{n\in\mathbb{N}} F(T_n) \neq \emptyset$. Let $\{x_n\}$ be a sequence of M defined by $x \in M$ and*

$$x_n = T_n \circ T_{n-1} \circ \cdots T_1 x$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Then, $\{x_n\}$ converges strongly to an element of $\cap_{m\in\mathbb{N}} F(T_m)$ if and only if $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_n, \cap_{m\in\mathbb{N}} F(T_m)) = 0$.

Proof. Let $x \in M$ and put $S_n = T_n \circ T_{n-1} \circ \cdots T_1$ for all $n \in \mathbb{N}$. Since S_n is a homogenuous nonexpansive mapping of M into itself, we have that $\|x_n\| \leq \|x\|$ and $\langle x - x_n, Ju \rangle = 0$ for all $u \in F(S_n)$. So, we have $\|x_n\| \leq \|x\|$ and $\langle x - x_n, Ju \rangle = 0$ for all $u \in \cap_{m\in\mathbb{N}} F(S_m)$ and $n \in \mathbb{N}$. This implies $x_n \in R(x; \cap_{m\in\mathbb{N}} F(S_m))$ for all $n \in \mathbb{N}$. If $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_n, \cap_{m\in\mathbb{N}} F(S_m)) = 0$, then from Lemma 3.2 we have $\{x_n\}$ converges strongly to a unique point z of $\cap_{m\in\mathbb{N}} F(S_m) \cap R(x; \cap_{m\in\mathbb{N}} F(S_m))$.

Conversely, if $\{x_n\}$ converges strongly to an element of $\cap_{m\in\mathbb{N}} F(S_m)$, then it is obvious that $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_n, \cap_{m\in\mathbb{N}} F(S_m)) = 0$. □

4. Strong Convergence Theorems

Let Y be a nonempty subset of a Banach space E and let Y^* be a nonempty subset of the dual space E^*. Then, we can define the annihilator $Y^*_\perp$ of Y^* and the annihilator $Y^\perp$ of Y as follows:

$$Y^*_\perp = \{x \in E : f(x) = 0 \text{ for all } f \in Y^*\}$$

and

$$Y^\perp = \{f \in E^* : f(x) = 0 \text{ for all } x \in Y\}.$$

We know the following result from Megginson [21].

Lemma 4.1 ([21])**.** *Let A be a nonempty subset of E. Then*

$$(A^\perp)_\perp = \overline{\mathrm{span}} A,$$

where $\overline{\mathrm{span}} A$ is the smallest closed linear subspace of E containing A.

Let $T : E \to E$ be a bounded linear operator. Then, the adjoint mapping $T^* : E^* \to E^*$ is defined as follows:

$$\langle x, T^* x^* \rangle = \langle Tx, x^* \rangle$$

for any $x \in E$ and $x^* \in E^*$. We know that T^* is also a bounded linear operator and $\|T\| = \|T^*\|$. If S and T are bounded linear operators form E into itself and $\alpha \in \mathbb{R}$, then $(S+T)^* = S^* + T^*$ and $(\alpha S)^* = \alpha (S)^*$. Let I be the identity operator on E. Then, I^* is the identity operator on E^*. Let $T^{**} : E^{**} \to E^{**}$ be the adjoint of T^*. Then we have $T^{**}(\pi(E)) \subset \pi(E)$ and $\pi^{-1} T^{**} \pi = T$, where π is the natural embedding from E into its second dual space E^{**}; see [21]. We know the following lemma from Takahashi, Yao and Honda [29].

Lemma 4.2 ([29])**.** *Let E be a smooth, strictly convex and reflexive Banach space, let T be a linear contractive operator of E into itself, i.e., $T : E \to E$ is a linear operator such that $\|T\| \le 1$ and let $F(T)$ be the set of fixed points of T. Then $JF(T)$ is a closed linear subspace in E^* and $JF(T) = F(T^*) = \{z - Tz : z \in E\}^\perp$, where $J : E \to E^*$ is the normalized duality mapping and T^* is the adjoint operator of T.*

Using Lemma 4.2, we have the following result.

Lemma 4.3. *Let E be a smooth, strictly convex and reflexive Banach space and let S, T be linear contractive operators of E into itself. Then $JF(S) \cap F(T)$ is a closed linear subspace in E^* and $JF(S) \cap F(T) = F(S^*) \cap F(T^*) = \{z - Sz, z - Tz : z \in E\}^\perp$, where $J : E \to E^*$ is the normalized duality mapping and S^*, T^* are the adjoint operators of S, T, respectively.*

Proof. Since E is a smooth, strictly convex and reflexive Banach space, the mapping J is single-valued, one-to-one and onto. Thus, we have that

$$JF(S) \cap F(T) = JF(S) \cap JF(T).$$

Using this equality and Lemma 4.2, we have that $JF(S) \cap F(T)$ is a closed linear subspace in E^*. Furthermore, we have that

$$\begin{aligned} f \in JF(S) \cap F(T) &\Leftrightarrow f \in JF(S) \cap JF(T) \\ &\Leftrightarrow f \in F(S^*) \cap F(T^*) \\ &\Leftrightarrow f \in \{z - Sz : z \in E\}^{\perp} \cap \{z - Tz : z \in E\}^{\perp} \\ &\Leftrightarrow f \in \{z - Sz, z - Tz : z \in E\}^{\perp}. \end{aligned}$$

This completes the proof. □

Theorem 4.1 ([27]). *Let E be a smooth, strictly convex and reflexive Banach space, let S, T be linear contractive operators on E and let $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of contractive linear operators on E such that $F(S) \cap F(T) \subset F(S_n)$ for all $n \in \mathbb{N}$. Suppose $S \circ S_n = S_n \circ S$ and $T \circ S_n = S_n \circ T$ for all $n \in \mathbb{N}$. Then, the following are equivalent:*

(1) *$S_n x$ converges to an element of $F(S) \cap F(T)$ for each $x \in E$;*
(2) *$S_n x$ converges to 0 for each $x \in (JF(S) \cap F(T))_{\perp}$;*
(3) *$S_n x - S \circ S_n x$ and $S_n x - T \circ S_n x$ converge to 0 for each $x \in E$.*

Furthermore, if (1) holds, then $S_n x$ converges to $R_{F(S) \cap F(T)} x \in F(S) \cap F(T)$, where $R_{F(S) \cap F(T)} = J^{-1} \Pi_{JF(S) \cap F(T)} J$ and $\Pi_{JF(S) \cap F(T)}$ is the generalized projection of E^* onto $JF(S) \cap F(T)$.

Using Theorem 4.1, we have the following useful result.

Theorem 4.2 ([27]). *Let E be a smooth, strictly convex and reflexive Banach space, let S, T be linear contactive operators on E and let $\{T_i : i \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of linear contractive operators on E such that $F(S) \cap F(T) \subset F(T_i)$ for all $i \in \mathbb{N}$. Let $S_n = T_n \circ T_{n-1} \circ \cdots \circ T_1$ for all $n \in \mathbb{N}$ and suppose that $S \circ S_n = S_n \circ S$ and $T \circ S_n = S_n \circ T$ for all $n \in \mathbb{N}$. Then, the following are equivalent:*

(1) *$S_n x$ converges to an element of $F(S) \cap F(T)$ for each $x \in E$;*
(2) *$S_n x$ converges to 0 for each $x \in (JF(S) \cap F(T))_{\perp}$;*
(3) *$S_n x - S \circ S_n x \to 0$ and $S_n x - T \circ S_n x \to 0$ for each $x \in E$.*

Furthermore, if (1) holds, then $S_n x$ converges to $R_{F(S) \cap F(T)} x \in F(S) \cap F(T)$, where $R_{F(S) \cap F(T)} = J^{-1} \Pi_{JF(S) \cap F(T)} J$ and $\Pi_{JF(S) \cap F(T)}$ is the generalized projection of E^* onto $JF(S) \cap F(T)$.

Proof. For any $n \in \mathbb{N}$, $S_n = T_n \circ T_{n-1} \circ \cdots \circ T_1$ is a linear contractive operator on E and $F(S) \cap F(T) \subset F(S_n)$ for all $i \in \mathbb{N}$. Furthermore, from the assumption, $S \circ S_n = S_n \circ S$ and $T \circ S_n = S_n \circ T$ for all $n \in \mathbb{N}$. Therefore, we have the desired result from Theorem 4.1 □

5. Applications

In this section, using Theorems 4.1 and 4.2, we obtain strong convergence theorems for linear contractive mappings in a Banach space. Applying Theorem 4.2, we obtain a strong convergence theorem of Mann type for contractive linear mappings in a Banach space. The following lemma was proved by Eshita and Takahashi [5].

Lemma 5.1 ([5]). *Let $\{\alpha_n\}$ be a sequence in $[0, 1]$ such that $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \alpha_n) = \infty$ and let $\{b_n\}$ and $\{\varepsilon_n\}$ be sequences in $[0, \infty)$ such that*

$$b_{n+1} \leq \alpha_n b_n + (1 - \alpha_n)\varepsilon_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

and $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$. *Then* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Using Lemma 5.1, we obtain the following theorem.

Theorem 5.1 ([27]). *Let E be a smooth and uniformly convex Banach space and let S, T be commutative contractive linear operators on E. Let $\{\alpha_n\}$ be a sequence of real numbers such that $0 \leq \alpha_n \leq 1$ and $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n) = \infty$. Then a sequence $\{x_n\}$ generated by $x_1 = x \in E$ and*

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} S^k T^l x_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

converges strongly to $Rx \in F(S)\cap F(T)$, where $R = R_{F(S)\cap F(T)} = J^{-1}\Pi_{JF(S)\cap F(T)}J$ and $\Pi_{JF(S)\cap F(T)}$ is the generalized projection of E^* onto $JF(S)\cap F(T)$.

Using Theorem 4.1, we can also prove a mean strong convergence theorem for contractive linear operators in a Banach space.

Theorem 5.2 ([27]). *Let E be a smooth, strictly convex and reflexive Banach space and let S, T be commutative contractive linear operators on E. Then, for each $x \in E$,*

$$S_n x = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} S^k T^l x$$

converge strongly to $Rx \in F(S)\cap F(T)$, where $R = R_{F(S)\cap F(T)} = J^{-1}\Pi_{JF(S)\cap F(T)}J$ and $\Pi_{JF(S)\cap F(T)}$ is the generalized projection of E^* onto $JF(S)\cap F(T)$.

Remark 5.1. *In Theorem 5.2, note that $z = \lim_{n\to\infty} S_n x$ is characterlized by the sunny generalized nonexpansive retraction $R = R_{JF(S)\cap F(T)} = J^{-1}\Pi_{JF(S)\cap F(T)}J$ of E onto $F(S)\cap F(T)$. Such a result is still new even if the operator T is linear.*

Acknowledgements. The author was partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research No. 15K04906 from Japan Society for the Promotion of Science.

References

[1] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.

[2] J.-B. Baillon, *Un theoreme de type ergodique pour les contractions non lineaires dans un espace de Hilbert,* C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B **280** (1975), 1511-1514.

[3] H. H. Bauschke, F. Deutsch, H. Hundal and S. H. Park, *Accelerating the convergence of the method of alternating projections*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3433–3461.

[4] R. E. Bruck, Jr, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. **32** (1979), 107–116.

[5] K. Eshita and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for commutative semigroups of continuous linear operators on Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **9** (2005), 531–550.

[6] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *The existence of nonexpansive retractions in Banach spaces*, J. Math. Soc. Japan **38** (1986), 1–7.

[7] N. Hirano and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Banach space*, Pacific J. Math. **112** (1984), 333–346.

[8] T. Honda and W. Takahashi, *Norm One Projections and Generalized Conditional Expectations*, Sci. Math. Jpn. **69** (2009), 303–313.

[9] T. Honda and W. Takahashi, *Nonlinear projections and generalized conditional expectations in Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **15** (2011), 2169–2193.
[10] H. Honda, W. Takahashi and J. C. Yao, *Nonexpansive retractions onto closed convex cones in Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **14** (2010), 1023–1046.
[11] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.
[12] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak convergence theorem for new nonexpansive mappings in Banach spaces and its applications*, Taiwanese J. Math. **11** (2007), 929–944.
[13] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Strong convergence theorem by hybrid method for generalized resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **9** (2008), 71–81.
[14] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Fixed point theorems for nonlinear mappings of nonexpansive type in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 21–32.
[15] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive mappings and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, in Nonlinear Analysis and Optimization I: Nonlinear Analysis, Contemporary Mathematics, Vol. 513, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, pp. 169–180.
[16] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.
[17] K. Kido and W. Takahashi, *Mean ergodic theorems for semigroups of linear operators*, J. Math. Anal. Appl. **103** (1984), 387–394.
[18] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 197–209.
[19] A. T. Lau, N. Shioji and W. Takahashi, *Existence of nonexpansive retractions for amenable semigroups of nonexpansive mappings and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, J. Funct. Anal. **161** (1999), 62–75.
[20] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.
[21] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1998.
[22] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.
[23] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253–256.
[24] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986), 55–58.
[25] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis – Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.
[26] W. Takahashi, *Introduction to Nonlinear and Convex Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2009.
[27] W. Takahashi, *Strong convergence theorems for commutative linear contractive mappings in Banach spaces based on nonlinear analytic methods*, to appear.
[28] W. Takahashi and J.-C. Yao, *Weak and strong convergence theorems for positively homogeneous nonexpansive mappings in Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **15** (2011), 961–980.
[29] W. Takahashi, J.-C. Yao and T. Honda, *Strong convergence theorems and nonlinear analytic methods for linear contractive mappings in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 574–566.
[30] J. von Neumann, *Proof of the quasi-ergodic hypothesis*, Proc. Nat. Acad. U.S.A. **18** (1932), 70–82.
[31] R. Wittmann, *Hopfs ergodic theorem for nonlinear operators*, Math. Ann. **289** (1991), 239–253.
[32] K. Yosida, *Mean ergodic theorem in Banach spaces*, Proc. Imp. Acad. **14** (1938), 292–294.

(Wataru Takahashi) Center for Fundamental Science, Kaohsiung Medical University, Kaohsiung 80702, Taiwan; Keio Research and Education Center for Natural Sciences, Keio University, Kouhoku-ku, Yokohama 223-8521, Japan; and Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, Japan

E-mail address: wataru@is.titech.ac.jp; wataru@a00.itscom.net

放物型方程式の解からなる関数空間の解析

菱川　洋介（岐阜大学）

本講演では，放物型方程式 $(\partial_t + (-\Delta_x)^\alpha)u = 0$ の解からなる空間の解析について，これまで得られた結果を述べる．放物型方程式の解をベルグマン空間やブロッホ空間で扱うことにより，特定の核関数によって解の積分表現が得られることと，その積分表現から解の様々な性質が得られることについて述べる．

1. 導入

H を $(n+1)$ 次元実ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}(n \geq 1)$ の上半空間，すなわち，$H = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ とする．$0 < \alpha \leq 1$ に対し，α 次の放物型作用素 $L^{(\alpha)}$ を

$$L^{(\alpha)} = \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha$$

と定義する．ここで，$\partial_t = \partial/\partial t$ で Δ_x は x に関するラプラシアンである．H 上の連続関数 u が $L^{(\alpha)}$-調和であるとは，超関数の意味で $L^{(\alpha)}u = 0$ を満たすときとする．

本講演では，放物型方程式 $L^{(\alpha)}u = 0$ の解からなる関数空間の研究について報告する．本研究の背景には，主に２つの研究がある．１つ目は，W. Ramey，H. Yi [12] による $(n+1)$ 次元実ユークリッド空間の上半空間における調和ベルグマン空間の研究である．古典的なベルグマン空間の研究は，再生核の表現を求めることで発展してきた経緯がある．H 上の調和ベルグマン空間の研究 [12] においても，再生核がポアソン核の偏導関数によって表されることによって，様々な追究がなされてきた．ここで，調和ベルグマン空間の定義と，その空間における再生核について紹介する．$1 \leq p < \infty$ とする．調和ベルグマン空間 $\boldsymbol{b}^p$ は，H を定義域とする p 乗可積分な調和関数からなる空間，すなわち

$$\boldsymbol{b}^p = \{u : H \text{ 上調和}, \|u\|_{L^p} = \left(\int_H |u(x,t)|^p dV(x,t)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

である．ここで，dV は H 上のルベーグ体積測度である．調和ベルグマン空間はバナッハ空間である．特に $p = 2$ のとき，$\boldsymbol{b}^2$ はヒルベルト空間となり，その内積は $\langle u, v\rangle = \int_H u(x,t)v(x,t)dV(x,t)$ である．$\boldsymbol{b}^2$ における再生核について，次の定理はよく知られている．

定理 A ([1]). $u \in \boldsymbol{b}^2$ とする．このとき，

$$u(x,t) = \int_H u(y,s)(-2\partial_t P(x-y,t+s))dV(y,s), \quad {}^\forall(x,t) \in H$$

が成り立つ．すなわち，$(-2\partial_t P(x-t,t+s))$ が $\boldsymbol{b}^2$ 上の再生核である．

もう１つの研究背景は，西尾，下村，鈴木 [9] の研究である．彼らの研究は，放物型方程式 $L^{(\alpha)}u = 0$ の解をベルグマン空間や関連する空間で扱い，解の性質について調べている．この研究に関しては，２節で述べることとする．

これらの研究を踏まえ，我々は放物型方程式の解からなる空間の１つの拡張として，変数 t の冪乗による荷重付きルベーグ測度からなるベルグマン空間や関連する空間について研究してきた．特に，本研究において非整数次の微積分法が非常に有用であると考え，様々な性質を見出してきた．本講演では，その内容について述べていく．なお，本講演における４，５，６節の結果は，大阪市立大学の西尾昌治氏と岐阜大学の山田雅博氏との共同研究によるものであることを記しておく．

2. $L^{(\alpha)}$-調和関数と放物型ベルグマン空間

本節では，$L^{(\alpha)}$-調和関数と放物型ベルグマン空間について，西尾，下村，鈴木 [9] の研究について紹介する．非整数次のラプラス作用素 $(-\Delta)^\alpha$ について紹介する．$0 < \alpha < 1$ とする．$\psi \in C_c^\infty(H)$ に対し，$(-\Delta_x)^\alpha\psi$ は次のように定義される．

$$(2.1) \qquad (-\Delta_x)^\alpha\psi(x,t) = -c_{n,\alpha}\lim_{\delta\to 0^+}\int_{|x-y|>\delta}(\psi(y,t)-\psi(x,t))|x-y|^{-n-2\alpha}dy.$$

ここで，$c_{n,\alpha} = -4^\alpha\pi^{-n/2}\Gamma((n+2\alpha)/2)/\Gamma(-\alpha) > 0$ である．

$L^{(\alpha)}$-調和関数を定義する．H 上の連続関数 u が $L^{(\alpha)}$-調和であるとは，任意の $\psi \in C_c^\infty(H)$ に対し，

$$\int_H |u\cdot\tilde{L}^{(\alpha)}\psi|dV < \infty \quad \text{かつ} \quad \int_H u\cdot\tilde{L}^{(\alpha)}\psi dV = 0$$

を満たすときと定義する．ここで，$\tilde{L}^{(\alpha)} = -\partial_t + (-\Delta_x)^\alpha$ は $L^{(\alpha)}$ の共役作用素である. さらに，可積分条件 $\int_H |u\cdot\tilde{L}^{(\alpha)}\psi|dV < \infty$ は，次のように書き換えられる．任意の $0 < t_1 < t_2 < \infty$ に対し，

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,t)|(1+|x|)^{-n-2\alpha}dV(x,t) < \infty.$$

これは，(2.1) と $\mathrm{supp}(\psi)$ がコンパクトであることから示される．実際に，H 内の帯 S を $\mathrm{supp}(\tilde{L}^{(\alpha)}\psi) \subset S = \mathbb{R}^n \times [t_1, t_2]$ となるように取れ，任意の $(x,t) \in S$ について，$|\tilde{L}^{(\alpha)}\psi(x,t)| \le C(1+|x|)^{-n-2\alpha}$ となる定数 $C > 0$ が存在するからである．

$L^{(\alpha)}$ の基本解について述べる．$x \in \mathbb{R}^n$ に対し，$L^{(\alpha)}$ の基本解 $W^{(\alpha)}$ は

$$W^{(\alpha)}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^n}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-t|\xi|^{2\alpha}+\sqrt{-1}\,x\cdot\xi)\,d\xi & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

と定義される．ここで，$x\cdot\xi$ は $\mathbb{R}^n$ における内積を表す．我々は定義域を $(n+1)$ 次元実ユークリッド空間の上半空間とする関数を扱うので，特に $t > 0$ について言及する．$t > 0$ において，基本解 $W^{(\alpha)}$ は次のように表現することもできる．

$$W^{(\alpha)}(x,t) = \mathcal{F}_x^{-1}(e^{-t|\xi|^{2\alpha}}), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

ここで，$\mathcal{F}_x^{-1}$ は x における逆フーリエ変換である．このことから，$W^{(\alpha)}$ は α が次の具体的な値であるとき，よく知られた関数として表現されることがわかる．

$$W^{(1)}(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad W^{(\frac{1}{2})}(x,t) = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{t}{(|x|^2+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$W^{(1)}$ は熱核，$W^{(\frac{1}{2})}$ はポアソン核である．基本解 $W^{(\alpha)}$ は次の補題に挙げる性質を持っている．記号を定義する．$\mathbb{N}_0$ を 0 以上の整数全体とする．また，$\partial_j = \partial/\partial x_j$ とする．多重指数 $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$ とし，$\partial_x^\beta = \partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_n^{\beta_n}$ とする．

補題 2.1 ([9], [10]). $0 < \alpha \leq 1$ とする．このとき，次を満たす．

(1) $W^{(\alpha)}$ は H 上 $L^{(\alpha)}$-調和である．さらに，$W^{(\alpha)} \in C^\infty(H)$ である．

(2) $W^{(\alpha)}(x,t) \geq 0$ $({}^\forall(x,t) \in H)$ が成り立つ．

(3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} W^{(\alpha)}(x,t)dx = 1$ $({}^\forall t \in \mathbb{R}_+)$ が成り立つ．

(4) $\beta \in \mathbb{N}_0^n$，$k \in \mathbb{N}_0$ とする．このとき，

$$|\partial_x^\beta \partial_t^k W^{(\alpha)}(x,t)| \leq C(t+|x|^{2\alpha})^{-\frac{n+|\beta|}{2\alpha}-k} \qquad {}^\forall(x,t) \in H$$

を満たす定数 $C > 0$ が存在する．

次に，放物型ベルグマン空間について述べる．[9] では，$L^{(\alpha)}$-調和関数をベルグマン空間で扱い，関数の性質について追究している．まず，放物型ベルグマン空間の定義を述べる．$0 < \alpha \leq 1$，$1 \leq p < \infty$ とする．放物型ベルグマン空間とは，p 乗可積分な $L^{(\alpha)}$-調和関数からなる空間，すなわち，

$$\boldsymbol{b}_\alpha^p = \{u \in C(H), L^{(\alpha)}\text{-調和}, \|u\|_{L^p} = \left(\int_H |u(x,t)|^p dV(x,t)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

である．放物型ベルグマン空間 $\boldsymbol{b}_\alpha^p$ はバナッハ空間である．また，$p=2$ のときはヒルベルト空間となる．さらに，$\alpha = \frac{1}{2}$ のとき，$\boldsymbol{b}_\alpha^p$ は $\boldsymbol{b}^p$ と同一視できる．放物型ベルグマン空間の研究について，２つの結果を述べる．補題 2.2 は，放物型ベルグマン関数の基本的な性質である．

補題 2.2 ([9]). $0 < \alpha \leq 1$，$1 \leq p < \infty$ とする．$u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ に対し，次が成り立つ．

(1) $u \in C^\infty(H)$.

(2) $\beta \in \mathbb{N}_0^n$，$k \in \mathbb{N}_0$ とする．このとき，

$$|\partial_x^\beta \partial_t^k u(x,t)| \leq C t^{-\frac{|\beta|}{2\alpha}-k-(\frac{n}{2\alpha}+1)\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p}, \quad {}^\forall(x,t) \in H$$

を満たす定数 $C > 0$ が存在する．

次の定理では，放物型ベルグマン空間における再生核の表現を与えている．

定理 2.3 ([9]). $0 < \alpha \leq 1$，$1 \leq p < \infty$ とする．任意の $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ に対し，

$$u(x,t) = \int_H u(y,s)(-2\partial_t W^{(\alpha)}(x-y, t+s))dV(y,s), \quad {}^\forall(x,t) \in H$$

が成り立つ．特に，$p = 2$ のとき，$(-2\partial_t W^{(\alpha)}(x-y, t+s))$ は $\boldsymbol{b}_\alpha^2$ 上の再生核である．

3. 放物型ベルグマン空間における非整数次微積分法を用いた解析

本節では，放物型ベルグマン空間を荷重付きルベーグ測度によって再定義し，その空間における再生核の表現について述べる．まず，荷重付き放物型ベルグマン空間を定義する．$0 < \alpha \leq 1$，$1 \leq p < \infty$，$\lambda > -1$ とする．このとき，$\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda) = \{u \in C(H), L^{(\alpha)}\text{-調和}, \|u\|_{L^p(\lambda)} = \left(\int_H |u(x,t)|^p t^\lambda dV(x,t)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

以降，$\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ を放物型ベルグマン空間と呼ぶこととする．放物型ベルグマン空間はノルム $\|\cdot\|_{L^p(\lambda)}$ のもとでバナッハ空間となる．特に，$p = 2$ のとき，ヒルベルト空間となる．$\lambda = 0$ のときは 2 節で述べた $\boldsymbol{b}_\alpha^p$ である．また，$\lambda \leq -1$ のとき，$\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda) = \{0\}$ となる．

放物型ベルグマン関数の性質について，山田 [13] が次の補題を与えている．

補題 3.1 ([13]). $0 < \alpha \leq 1$，$1 \leq p < \infty$，$\lambda > -1$，$u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $u \in C^\infty(H)$ を満たす．

(2) さらに，$\beta \in \mathbb{N}_0^n$，$k \in \mathbb{N}_0$ とする．このとき，

$$|\partial_x^\beta \partial_t^k u(x,t)| \leq C t^{-\frac{|\beta|}{2\alpha} - k - (\frac{n}{2\alpha} + \lambda + 1)\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\lambda)}, \quad {}^\forall(x,t) \in H$$

を満たす u に依存しない定数 $C > 0$ が存在する．

補題 3.1 より，放物型ベルグマン関数は各点で有界であることがわかる．ゆえに，リースの表現定理により，任意の $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^2(\lambda)$ に対して，

$$u(x,t) = \int_H u(y,s) R(x,t;y,s) t^\lambda dV(y,s), \quad (x,t) \in H$$

を満たす $R(x,t;\cdot,\cdot) \in \boldsymbol{b}_\alpha^2(\lambda)$ が唯一存在することがわかる．問題は核関数 $R(x,t;\cdot,\cdot)$ の表現である．我々は，この問題を解決するため，t 成分に関する非整数次微積分法を $\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ 上へ導入することとした．

定義 3.2 ([2]). κ を正の実数，φ を H 上の関数とする．κ 次積分作用素 $\mathcal{D}_t^{-\kappa}$ を，

$$\mathcal{D}_t^{-\kappa}\varphi(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\kappa)} \int_t^\infty (\tau - t)^{\kappa-1} \varphi(x,\tau) d\tau, \quad (x,t) \in H$$

と定義する．

定義 3.3 ([2]). κ を正の実数，φ を H 上の関数とする．κ 次微分作用素 $\mathcal{D}_t^\kappa$ を，

$$\mathcal{D}_t^\kappa \varphi(x,t) = \mathcal{D}_t^{-(\lceil\kappa\rceil-\kappa)}(-\partial_t)^{\lceil\kappa\rceil}\varphi(x,t), \quad (x,t) \in H$$

と定義する．ここで，$\lceil\kappa\rceil$ は κ 以上の最小整数を表す．また，$\mathcal{D}_t^0\varphi = \varphi$ と定義する．

放物型ベルグマン空間上で非整数次微積分を扱っていくために，次の 2 つの補題を準備する．まず，基本解の非整数次微積分に関する性質である．

補題 3.4 ([2]). $0 < \alpha \le 1$，$\beta \in \mathbb{N}_0^n$，$\kappa > -\frac{n}{2\alpha}$ とする．このとき，次を満たす．

(1) $\partial_x^\beta \mathcal{D}_t^\kappa W^{(\alpha)}(x,t)$ と $\mathcal{D}_t^\kappa \partial_x^\beta W^{(\alpha)}(x,t)$ が well-defined であり，導関数は共に等しい．さらに，

$$|\partial_x^\beta \mathcal{D}_t^\kappa W^{(\alpha)}(x,t)| \le C(t+|x|^{2\alpha})^{-\frac{n+|\beta|}{2\alpha}-\kappa}, \quad {}^\forall(x,t) \in H$$

を満たす定数 $C > 0$ が存在する．

(2) さらに，ν を $\kappa + \nu > -\frac{n}{2\alpha}$ となる実数とする．このとき，

$$\mathcal{D}_t^\nu \partial_x^\beta \mathcal{D}_t^\kappa W^{(\alpha)}(x,t) = \partial_x^\beta \mathcal{D}_t^{\kappa+\nu} W^{(\alpha)}(x,t), \quad {}^\forall(x,t) \in H$$

が成り立つ．

(3) $\partial_x^\beta \mathcal{D}_t^\kappa W^{(\alpha)}$ は H 上 $L^{(\alpha)}$-調和である．

次に，放物型ベルグマン関数の非整数次微積分に関する基本的な性質について述べる．

補題 3.5. ([2]). $0 < \alpha \le 1$，$1 \le p < \infty$，$\lambda > -1$ とする．また，$\beta \in \mathbb{N}_0^n$ を多重指数，$\kappa > -(\frac{n}{2\alpha}+\lambda+1)\frac{1}{p}$ とする．$u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ に対し，次が成り立つ．

(1) $\partial_x^\beta \mathcal{D}_t^\kappa u(x,t)$ と $\mathcal{D}_t^\kappa \partial_x^\beta u(x,t)$ が well-defined であり，導関数は共に等しい．さらに，

$$|\partial_x^\beta \mathcal{D}_t^\kappa u(x,t)| \le C t^{-\frac{|\beta|}{2\alpha}-\kappa-(\frac{n}{2\alpha}+\lambda+1)\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\lambda)}, \quad {}^\forall(x,t) \in H$$

を満たす定数 $C > 0$ が存在する．

(2) さらに，ν を $\kappa + \nu > -(\frac{n}{2\alpha}+\lambda+1)\frac{1}{p}$ となる実数とする．このとき，

$$\mathcal{D}_t^\nu \partial_x^\beta \mathcal{D}_t^\kappa u(x,t) = \partial_x^\beta \mathcal{D}_t^{\kappa+\nu} u(x,t), \quad {}^\forall(x,t) \in H$$

が成り立つ．

(3) $\partial_x^\beta \mathcal{D}_t^\kappa u$ は H 上 $L^{(\alpha)}$-調和である．

これらの結果を用いて，$\boldsymbol{b}_\alpha^2(\lambda)$ における再生核 $R(x,t;y,s)$ の表現を求めるために，次の定理を与えた．

定理 3.6 ([2]). $0<\alpha\le 1$，$1\le p<\infty$，$\lambda>-1$ とし，$u\in \boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ とする．また，$\kappa>\frac{\lambda+1}{p}$ とする．このとき，

$$u(x,t)=C_\kappa\int_H u(y,s)\mathcal{D}_t^\kappa W^{(\alpha)}(x-y,t+s)s^{\kappa-1}dV(y,s),\qquad (x,t)\in H \tag{3.1}$$

が成り立つ．ここで，$C_\kappa=2^\kappa/\Gamma(\kappa)$ である．さらに，(3.1) は $p=1$，$\kappa=\lambda+1$ のときも成り立つ．

系 3.7 ($\boldsymbol{b}_\alpha^2(\lambda)$ 上の再生核). $0<\alpha\le 1$，$\lambda>-1$ とする．このとき，

$$R(x,t;y,s)=\frac{2^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)}\mathcal{D}_t^{\lambda+1}W^{(\alpha)}(x-y,t+s),\qquad {}^\forall(x,t),(y,s)\in H$$

は $\boldsymbol{b}_\alpha^2(\lambda)$ における再生核である．

定理 3.6 は次の定理のように，より一般的な形で表すことができる．我々は定理 3.8 の積分を $\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ における再生公式と呼ぶこととする．

定理 3.8 ([2]). $0<\alpha\le 1$，$1\le p<\infty$，$\lambda>-1$ とし，$u\in \boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ とする．また，$\nu>-\frac{\lambda+1}{p}$，$\kappa>\frac{\lambda+1}{p}$ とする． このとき，再生公式

$$u(x,t)=C_{\nu+\kappa}\int_H \mathcal{D}_t^\nu u(y,s)\mathcal{D}_t^\kappa W^{(\alpha)}(x-y,t+s)s^{\nu+\kappa-1}dV(y,s),\ {}^\forall(x,t)\in H \tag{3.2}$$

が成り立つ．さらに，(3.2) は $p=1$，$\kappa=\lambda+1$ のときも成り立つ．

4. 放物型ベルグマン関数における導関数の L^p ノルムの評価

本節では，放物型ベルグマン関数の微分ノルム評価について述べる．ここでは，t 成分に関する非整数次偏導関数 $\mathcal{D}_t^\nu u$ のノルム評価を再生公式によって，また x 成分に関する偏導関数 $\partial_x^\beta u$ のノルム評価を共役調和関数の拡張によって得られたことについて述べる．

まず，$\mathcal{D}_t^\nu u$ のノルム評価について述べる．定理 3.8 の再生公式をもとに，次の積分作用素を定義する．

定義 4.1([4]). κ を実数，f を H 上の関数とする．積分作用素 R_α^κ を次のように定義する．

$$R_\alpha^\kappa f(x,t):=C_\kappa\int_H f(y,s)\mathcal{D}_t^\kappa W^{(\alpha)}(x-y,t+s)t^{\kappa-1}dV(y,s).$$

積分作用素 R_α^κ の作用について，次の補題を述べる．

補題 4.2 ([4]). $0 < \alpha \leq 1$，$1 \leq p < \infty$，$\lambda > -1$ とする．実数 κ が $\kappa > \frac{\lambda+1}{p}$ を満たすとき，R_α^κ は $L^p(\lambda)$ から $\boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ への有界かつ上への作用素である．

再生公式と積分作用素 R_α^κ の性質を用いることで，$\mathcal{D}_t^\nu u$ のノルムを u のノルムによって評価した．

定理 4.3 ([4]). $0 < \alpha \leq 1$，$1 \leq p < \infty$，$\lambda > -1$，$u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p(\lambda)$ とする．実数 ν が $\nu > -\frac{\lambda+1}{p}$ であるならば，

$$C^{-1}\|u\|_{L^p(\lambda)} \leq \|t^\nu \mathcal{D}_t^\nu u\|_{L^p(\lambda)} \leq C\|u\|_{L^p(\lambda)}$$

を満たす u に依存しない定数 $C > 0$ が存在する．

次に，$\partial_x^\beta u$ のノルム評価について述べる．古典的な調和ベルグマン空間における同様の結果は，W. Ramey，H. Yi [12] で示されている．[12] によると，そのノルム評価は，共役調和関数によって求められている．しかし，放物型ベルグマン空間において共役調和関数の定義を用いることは，あまり良い結果をもたらすものではなかった．事実，[13] によると，空間を表すパラメータ（α, p, λ）の値によって，共役調和関数を持たない放物型ベルグマン空間が存在することがわかっている．そこで，我々は放物型ベルグマン関数に対する共役調和関数の自然な拡張を考え，その内容をもとに微分ノルムの評価を与えるに至った．

まず，$(n+1)$ 次元の共役調和関数の定義を述べる．E. M. Stein，G. Weiss[11] によると，コーシー・リーマンの偏微分方程式は次のように一般化されている．これを，一般化されたコーシー・リーマンの偏微分方程式と呼んでいる．

定義 4.4 ([11]). u を H 上の関数とする．関数 $(v_1, \cdots, v_n)$ が u の共役調和関数であるとは，$(v_1, \cdots, v_n, u)$ が次の一般化されたコーシー・リーマンの偏微分方程式，すなわち次の 3 つの式を満たすときと定義する．

$$\begin{aligned} &\partial_j v_k = \partial_k v_j \qquad (1 \leq j, k \leq n), \\ &\partial_j u = -\mathcal{D}_t v_j \qquad (1 \leq j \leq n), \\ &\mathcal{D}_t u = \sum_{j=1}^n \partial_j v_j. \end{aligned}$$

定義 4.4 を用いて，[12] では調和ベルグマン関数における共役調和関数の一意存在性について，次の結果を与えている．

定理 4.5 ([12]). $1 \leq p < \infty$ とし，$u \in \boldsymbol{b}_{1/2}^p$ とする．このとき，u の共役調和関数 $(v_1, \cdots, v_n)$ が唯一存在し，$v_j \in \boldsymbol{b}_{1/2}^p$ を満たす．さらに，

$$C^{-1}\|u\|_{L^p} \leq \sum_{j=1}^n \|v_j\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p}$$

を満たす u に依存しない定数 $C > 0$ が存在する．

共役調和関数の放物型に対する自然な拡張について，我々は[3]，[5] で追究してきた．その結果，次のような拡張を導入した．我々は，次の定義を $L^{(\alpha)}$-共役と呼んでいる．

定義 4.6 ([5]). u を H 上の関数とする．$(v_1,\cdots,v_n)$ が u の $L^{(\alpha)}$-共役であるとは，$v_j(x,\cdot), u(x,\cdot) \in \mathcal{FC}^{\frac{1}{2\alpha}}$ かつ，$(v_1,\cdots,v_n,u)$ が次の式を満たすときをいう．

$$\begin{aligned}
&\partial_j v_k = \partial_k v_j \qquad (1 \le j,k \le n),\\
&\partial_j u = -\mathcal{D}_t^{\frac{1}{2\alpha}} v_j \quad (1 \le j \le n),\\
&\mathcal{D}_t^{\frac{1}{2\alpha}} u = \sum_{j=1}^{n} \partial_j v_j.
\end{aligned}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ のとき，$L^{(\frac{1}{2})}$-共役は定義 4.4 の共役調和関数であることに注意する．次の定理では，任意の放物型ベルグマン関数 u に対し，u の $L^{(\alpha)}$-共役が唯一存在することを示している．

定理 4.7 ([5]). $0<\alpha\le 1$，$1\le p<\infty$，$\lambda>-1$ とする．また，$u\in \boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$ とする．このとき，u の $L^{(\alpha)}$-共役 $(v_1,\cdots,v_n)$ が唯一存在し，$v_j \in \boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$ を満たす．さらに，

$$C^{-1}\|u\|_{L^p(\lambda)} \le \sum_{j=1}^{n} \|v_j\|_{L^p(\lambda)} \le C\|u\|_{L^p(\lambda)}.$$

を満たす u に依存しない定数 $C>0$ が存在する．

我々は定理 4.7 を用いることで，x 成分に関する偏導関数 $\partial_x^\beta u$ のノルムを u のノルムによって評価した．

定理 4.8 ([5]). $0<\alpha\le 1$，$1\le p<\infty$，$\lambda>-1$，$u\in \boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda)$ とする．このとき，任意の $m\in\mathbb{N}_0$ に対し，

$$C^{-1}\|u\|_{L^p(\lambda)} \le \sum_{|\gamma|=m} \|t^{\frac{m}{2\alpha}}\partial_x^\gamma u\|_{L^p(\lambda)} \le C\|u\|_{L^p(\lambda)}$$

を満たす u に依存しない $C>0$ が存在する．

5. 放物型ベルグマン空間の共役空間及び前共役空間とその応用

本節では，放物型ベルグマン空間の共役空間及び前共役空間について述べる．古典的なベルグマン空間論では，$p=1$ におけるベルグマン空間の共役空間や前共役空間が，どのような空間と対応するかを問題としている．我々の考える放物型ベルグマン空間においても，同様の問題について追究した．

[3]，[4] で，放物型ベルグマン空間の共役空間と前共役空間について，以下の結果を得ている．結果を述べるために，次の 3 つの関数空間を定義する．$0<\alpha\le 1$ とする．

$\mathcal{B}_\alpha = \{u \in C^1(H), L^{(\alpha)}$-調和, $\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha} := \sup_{(x,t)\in H} \{t^{\frac{1}{2\alpha}}|\nabla_x u(x,t)| + t|\partial_t u(x,t)|\} < \infty\}$
$\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha = \{u \in \mathcal{B}_\alpha, u(0,1) = 0\}$
$\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0} = \{u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha, \lim_{(x,t)\to\partial H\cup\{\infty\}} \{t^{\frac{1}{2\alpha}}|\nabla_x u(x,t)| + t|\partial_t u(x,t)|\} = 0\}$
$\mathcal{B}_\alpha$ は $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_\alpha}$ のもとでセミノルム空間となる．そこで $u(0,1) = 0$ の制限をさらに加え，バナッハ空間を構成した．$\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$ を放物型ブロッホ空間，$\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}$ を放物型リトルブロッホ空間と呼ぶ.

放物型ベルグマン空間の共役空間と前共役空間について，次の定理を与えた.

定理 5.1 ([3], [4]). $0 < \alpha \le 1$，$\lambda > -1$ とする.

(1) $1 < p < \infty$ とし，q を p の指数共役，すなわち $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする．このとき，$(\boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda))^* \cong \boldsymbol{b}^q_\alpha(\lambda)$ が次の積分対のもとで成り立つ.

$$\langle u, v\rangle_\lambda = \int_H u(x,t)v(x,t)t^\lambda dV(x,t), \quad u \in \boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda),\ v \in \boldsymbol{b}^q_\alpha(\lambda).$$

(2) $(\boldsymbol{b}^1_\alpha(\lambda))^* \cong \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$ が次の積分対のもとで成り立つ.

$$\langle u, v\rangle_\lambda = C_{\lambda+2}\int_H u(y,s)\mathcal{D}_t v(y,s)s^{\lambda+1}dV(y,s), \quad u \in \boldsymbol{b}^1_\alpha(\lambda),\ v \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha.$$

(3) $\boldsymbol{b}^1_\alpha(\lambda) \cong (\widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0})^*$ が次の積分対のもとで成り立つ.

$$\langle u, v\rangle_\lambda = C_{\lambda+2}\int_H u(y,s)\mathcal{D}_t v(y,s)s^{\lambda+1}dV(y,s), \quad u \in \boldsymbol{b}^1_\alpha(\lambda),\ v \in \widetilde{\mathcal{B}}_{\alpha,0}.$$

特に (3) の関係と積分対の一般化を用いることで，$p = 1$ において荷重の異なる放物型ベルグマン空間の間の関係を表現した．その結果を次の定理で述べる.

定理 5.2 ([3]). $0 < \alpha \le 1$ とする．また，$\lambda_1, \lambda_2 > -1$ とする．このとき，$\boldsymbol{b}^1_\alpha(\lambda_1) \cong \boldsymbol{b}^1_\alpha(\lambda_2)$ が $\mathcal{D}_t^{-\lambda_1}u = \mathcal{D}_t^{-\lambda_2}v$ ($u \in \boldsymbol{b}^1_\alpha(\lambda_1), v \in \boldsymbol{b}^1_\alpha(\lambda_2)$) の関係のもとで成り立つ.

さらに，一般の p に関する荷重の異なる放物型ベルグマン空間においても，同様の対応が表現できたことを，次の定理で述べる.

定理 5.3 ([5]). $0 < \alpha \le 1$，$1 \le p < \infty$ とする．また，$\lambda_1, \lambda_2 > -1$ とする．このとき，$\boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda_1) \cong \boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda_2)$ が $\mathcal{D}_t^{-\frac{\lambda_1}{p}}u = \mathcal{D}_t^{-\frac{\lambda_2}{p}}v$ ($u \in \boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda_1), v \in \boldsymbol{b}^p_\alpha(\lambda_2)$) の関係のもとで成り立つ.

6. 放物型ブロッホ空間の解析

本節では，放物型ブロッホ空間の解析について述べる．特に，放物型ブロッホ空間の研究は放物型ベルグマン空間の $p = \infty$ に相当する空間の研究として扱う．まず，放物型ブロッホ空間の定義を述べる．５節で既に放物型ブロッホ空間を定

義しているが，本節では一般化した放物型ブロッホ空間を定義する．$0<\alpha\le 1$ とし，$m(\alpha)=\max\left\{1,\frac{1}{2\alpha}\right\}$ とする．$\sigma>-m(\alpha)$ に対し，$\mathcal{B}_\alpha(\sigma)$ と $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\alpha(\sigma)=\{u\in C^1(H),&\ L^{(\alpha)}\text{-調和},\\ &\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)}:=\sup_{(x,t)\in H}t^\sigma\{t^{\frac{1}{2\alpha}}|\nabla_x u(x,t)|+t|\partial_t u(x,t)|\}<\infty\}\\ \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)=\{u\in \mathcal{B}_\alpha(\sigma),&\ u(0,1)=0\}\end{aligned}$$

$\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ は，$\|\cdot\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)}$ のもとでバナッハ空間となる。以降，$\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ を放物型ブロッホ空間と呼ぶ。

放物型ブロッホ関数の基本的性質について，次の補題で述べる．

補題 6.1 ([6]). $0<\alpha\le 1$，$\sigma>-m(\alpha)$，$\beta\in\mathbb{N}_0^n$ とする．また，$\kappa>\max\{0,-\sigma\}$ もしくは $\kappa=0$ とする．$u\in\mathcal{B}_\alpha(\sigma)$ としたとき，次を満たす．

(1) $\partial_x^\beta\mathcal{D}_t^\kappa u$ と $\mathcal{D}_t^\kappa\partial_x^\beta u$ が well-defined であり，この２つの偏導関数は共に等しい．さらに，$(\beta,\kappa)\neq(0,0)$ であるならば，

$$|\partial_x^\beta\mathcal{D}_t^\kappa u(x,t)|\le Ct^{-\frac{|\beta|}{2\alpha}-\kappa-\sigma}\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)},\quad {}^\forall(x,t)\in H$$

を満たす u に依存しない定数 $C>0$ が存在する．

(2) $\nu>\max\{0,-\sigma\}$ であるならば，

$$\mathcal{D}_t^\nu\partial_x^\beta\mathcal{D}_t^\kappa u(x,t)=\partial_x^\beta\mathcal{D}_t^{\kappa+\nu}u(x,t),\quad {}^\forall(x,t)\in H \tag{6.1}$$

が成り立つ．また，負の実数 ν が $\nu<\sigma$ かつ $\nu+\kappa>\max\{0,-\sigma\}$ を満たすならば, (6.1) が成り立つ．

(3) $\partial_x^\beta\mathcal{D}_t^\kappa u$ は H 上 $L^{(\alpha)}$-調和である．

次に，放物型ブロッホ空間におけるの再生公式について述べる．ここでは，放物型ベルグマン空間の $p=\infty$ に相当する空間として，定理 3.8 に相当する拡張と捉える．問題は，再生公式を満たす核関数が存在し，どのように表現されるかである．そこで，次の関数を定義する．$0<\alpha\le 1$，κ を実数とする．$H\times H$ 上の関数 $\omega_\alpha^{\beta,\kappa}$ を次のように定義する．

$$\omega_\alpha^\kappa(x,t;y,s)=\mathcal{D}_t^\kappa W^{(\alpha)}(x-y,t+s)-\mathcal{D}_t^\kappa W^{(\alpha)}(-y,1+s),\quad (x,t),(y,s)\in H$$

次の定理が，放物型ブロッホ空間上の再生公式である．

定理 6.2 ([6]) $0<\alpha\le 1$，$\sigma>-m(\alpha)$，$\nu>-\sigma$，$\kappa>\sigma$ とする．このとき，再生公式

$$u(x,t)=C_{\nu+\kappa}\int_H\mathcal{D}_t^\nu u(y,s)\omega_\alpha^\kappa(x,t;y,s)s^{\nu+\kappa-1}dV(y,s),\quad (x,t)\in H$$

が任意の $u\in\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ で成り立つ．

我々は再生公式を用いて，これまで次の内容について明らかにしてきた．まず，放物型ブロッホ関数における偏導関数のノルムの評価について，次の定理を述べる．

定理 6.3 ([7], [8]). $0 < \alpha \leq 1$，$\sigma > -m(\alpha)$ とする．また，$u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ とする．
(1) $\kappa > \max\{0, -\sigma\}$ とする．このとき，

$$C^{-1}\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} \leq \|t^{\kappa+\sigma}\mathcal{D}_t^\kappa u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)}$$

を満たす u に依存しない定数 $C > 0$ が存在する．

(2) $m \in \mathbb{N}$ とする．このとき

$$C^{-1}\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} \leq \sum_{|\gamma|=m} \|t^{\frac{m}{2\alpha}+\sigma}\partial_x^\gamma u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)}$$

を満たす u に依存しない定数 $C > 0$ が存在する．

次に，放物型ブロッホ関数の $L^{(\alpha)}$-共役（定義 4.6）について，次の結果を得ている．

定理 6.4 ([8]). $0 < \alpha \leq 1$，$\sigma > -m(\alpha)$ とする．また，$u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ とする．このとき，u の $L^{(\alpha)}$-共役 $(v_1, \cdots, v_n)$ が唯一存在し，$v_j \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma)$ を満たす．さらに，

$$C^{-1}\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} \leq \sum_{j=1}^{n} \|v_j\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)} \leq C\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha(\sigma)}$$

を満たす u に依存しない定数 $C > 0$ が存在する．

最後に，定理 5.3 の放物型ブロッホ空間に対応する結果について，次の定理を述べる．

定理 6.5 ([8]). $0 < \alpha \leq 1$ とする．また，$\sigma_1, \sigma_2 > -m(\alpha)$ とする．このとき，$\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma_1) \cong \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma_2)$ が $\mathcal{D}_t^{-\sigma_1+\kappa}u = \mathcal{D}_t^{-\sigma_2+\kappa}v$ ($u \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma_1), v \in \widetilde{\mathcal{B}}_\alpha(\sigma_2)$) の関係のもとで成り立つ．ここで，κ は $\kappa > \max\{0, \sigma_1, \sigma_2\}$ を満たす任意の実数である．

References

[1] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, *Harmonic function theory*, 2nd edition, Graduate Texts in Math., **137**, Springer-Verlag, NewYork, 2001.

[2] Y. Hishikawa, *Fractional calculus on parabolic Bergman spaces*, Hiroshima math. J., **38**, (2008), 471–488.

[3] Y. Hishikawa, *The reproducing formula with fractional orders on the parabolic Bloch space*, J. Math. Soc. Japan, **62**, (2010), 1219–1255.

[4] Y. Hishikawa, M. Nishio, M. Yamada *A conjugate system and tangential derivative norms on parabolic Bergman spaces*, Hokkaido Math. J., **39**, (2010), 85–114.

[5] Y. Hishikawa, M. Nishio, and M. Yamada, $L^{(\alpha)}$-conjugates on parabolic Bergman spaces, Potential anal., **40**, (2014), 525–537.

[6] Y. Hishikawa and M. Yamada, Function spaces of parabolic Bloch type, Hiroshima Math. J., **41**, (2011), 55–87.

[7] Y. Hishikawa, M. Nishio, and M. Yamada, Conjugate functions on spaces of parabolic Bloch type, J. Math. Soc. Japan, **65**, (2013), 487–520.

[8] Y. Hishikawa, M. Nishio, and M. Yamada, A system of conjugate functions on parabolic Bloch spaces, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[9] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, *α-parabolic Bergman space*, Osaka J. Math. **42**, (2005), 133-162.

[10] M. Nishio, N. Suzuki, and M. Yamada, *Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces*, Hokkaido math. J., **36**, (2007), 567–587.

[11] E. M. Stein and G. Weiss, On the theory of harmonic functions of several variables I. The theory of H^p-spaces, Acta Math. **103**, (1960), 25–62.

[12] W. Ramey and H. Yi, *Harmonic Bergman functions on half-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **348**, (1996), 633–660.

[13] M. Yamada, *Harmonic conjugates of parabolic Bergman functions*, Advanced studies Pure Math., **44**, (2006), 391–402.

空間1次元Dirac-Klein-Gordon方程式の初期値問題の適切性について

町原 秀二

埼玉大学 理工学研究科数理電子情報部門

1. 序論

本講演では, 空間変数 1 次元 Dirac-Klein-Gordon 方程式を題材にその初期値問題の適切性について考察する. 一般に偏微分方程式の初期値問題が適切であるとは,

- 解が存在する.
- 解が一意である.
- 解が初期値に対して連続的に依存する.

の 3 条件を満たすことをいう. 微分方程式の初期値問題を取り扱う上で重要な条件である. ここではもう少し詳しく条件を整理する. 所謂 Hadamard の意味の適切性であるが,

- 解の存在する空間は時間経過後も設定した初期値と同じ空間にとどまることを要請する. つまり広い空間には存在する解が初期値の空間に属さない場合はこの要件を満たさないとする.
- 一意性に関しては実は時間一様で初期値と同じ空間に対して, より狭い空間での一意性が得られればよいとする. もしさらに時間一様, 初期値と同じ空間で一意性が得られればそれは無条件一意の性質をもつという.
- 初期値に対する解の連続依存性であるが, 初期値と解のそれぞれの所属する関数空間のノルムを利用して, 初期値列とそれに対応する解の列を考え, $n \to \infty$ のときに

$$u_n(0) \to u(0) \quad \text{in } H \quad \Longrightarrow \quad u_n \to u \quad \text{in } X.$$

そしてもしこの 3 つの条件のうち, 一つでも否定的な結果が得られれば初期値問題は非適切であるという.

さて Dirac-Klein-Gordon 方程式は 2 次の非線形項をもつ非線形偏微分方程式である. これら非線形偏微分方程式, とりわけ非線形双曲型方程式の適切性を考察する上では L^2 を基礎空間とした Sobolev 空間で問題を考察することが自然であり, より広い初期条件と解のクラスでの適切性を証明することが最初の目標となる. 包含

$$H^s \hookrightarrow H^\sigma \quad \Longleftrightarrow \quad s \geq \sigma$$

より, 言い換えれば, より低い微分指数の Sobolev 空間で示すことになる.

しかしその際に「どこまで微分指数を下げれば満足するのか？」という疑問が生じる. 一つの指標が尺度不変性の議論から得られる臨界指数である. さらに, 適切性の限界を与える, すなわちある限界以上の低い微分指数のクラスおいて, その問題の非適切性が示されれば, 適切性と非適切性の空間の臨界が明確となる. 適切性と非適切性で微分指数の範囲を完全に分類することがここでの問題の最終解決である. 適切・非適切のいずれの場合においても, その証明においては, 限界となる指数(臨界指数)での取り扱いが難しく個々の状況に応じた方法が要求される. また, 時刻無限まで適切性が成立するという意味の時間大域的適切性の証明には各方程式が独特にもつ解の構造を用いたアプリオリ評価を用意する.

2. 空間1次元 Dirac-Klein-Gordon 方程式

次の方程式系の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} i\gamma^\mu D_\mu \psi = m\psi + \phi\psi, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \\ (\partial_t^2 - \partial_x^2 + M^2)\phi = \psi^* \gamma^0 \psi, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, \\ \psi(0,x) = \psi_0(x), \quad \phi(0,x) = \phi_0(x), \ \partial_t \phi(0,x) = \phi_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.1}$$

ここで未知関数 ψ と ϕ は

$$\psi = \psi(t,x) = \begin{pmatrix} \psi_1(t,x) \\ \psi_2(t,x) \end{pmatrix} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2,$$
$$\phi = \phi(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

でそれぞれ Dirac のスピノールと Klein-Gordon のスカラー（実数）値関数を表す. また $\gamma^\mu D_\mu$ は偏微分作用素 $\gamma^\mu D_\mu = \gamma^0 \partial_t + \gamma^1 \partial_x$ であり, 反交換関係を保つパウリ行列

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

によって与えられる. $m, M \geq 0$ は粒子の質量を表す定数である. 両方程式を結ぶ非線形項は2次でありそれぞれ次の形になる

$$\phi\psi = \begin{pmatrix} \phi\psi_1 \\ \phi\psi_2 \end{pmatrix},$$
$$\psi^* \gamma^0 \psi = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2.$$

この形は湯川相互作用項と呼ばれる.

3. 初期値問題適切性の結果

3.1. 適切性の結果

初期値問題の適切性に関する結果を記すために記号を揃える. Fourier 変換

$$(\mathcal{F}_x f(x))(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx,$$
$$(\mathcal{F}_{t,x} u(t,x)(\tau,\xi) = \widetilde{u}(\tau,\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\xi - it\tau} u(t,x) dtdx.$$

一般化された Sobolev 空間のノルム: $s \in \mathbb{R}$ に対して

$$\|f\|_{H^s} = \|\langle\xi\rangle^s \widehat{f}\|_{L^2}.$$

また次のノルムを定義する. $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\|u\|_{Z^{a,b}} = \|\langle\tau+\xi\rangle^a \langle\tau-\xi\rangle^b \tilde{u}\|_{L^2_\tau L^2_\xi},$$
$$\|u\|_{Y^{\alpha,a,b}} = \|\langle\xi\rangle^\alpha \langle\tau+\xi\rangle^a \langle\tau-\xi\rangle^b \tilde{u}\|_{L^2_\xi L^1_\tau},$$

ここで $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$ とする.

結果を記す. 時間局所適切性を TLW, 時間大域適切性を TGW と略す. 指数は $(\psi_\pm, \phi, \phi_t) \in H^s \times H^r \times H^{r-1}$ に対するものである.

- Chadam (1973), Chadam and Glassey (1974), TGW $s = r = 1$.
- Bournaveas (2000), TGW $s = 0, r = 1$.
- Bournaveas and Gibbeson (2006), TGW $s = 0$, $\frac{1}{4} \le r \le 1$.
- Fang (2004, 2008), TLW $-\frac{1}{4} < s \le 0$, $\frac{1}{2} < r \le 1+2s$, TGW $s = 0$.
- Pecher (2006), TLW $s > -\frac{1}{4}, r > 0, |s| \le r \le 1+s, r < 1+2s$, TGW $s = 0$.
- M. (2007), TLW $s > -\frac{1}{4}, r > 0, 2|s| \le r \le 1+2s, r \le 1+s$. TGW $s = 0$.
- Selberg and Tesfahun (2008, 2010), TLW $s > -\frac{1}{4}, r > 0, |s| \le r \le 1+s$.

そして2010年に中西賢次氏, 津川光太郎氏との共同研究により次を得た.

Theorem 3.1 ([37]). 次を満たす指数

$$s > -\frac{1}{2}, \quad |s| \le r \le s+1 \tag{3.2}$$

に対して *Dirac-Klein-Gordon* 方程式系の初期値問題 (2.1) は $(\psi, \phi, \partial_t\phi) \in H^s \times H^r \times H^{r-1}$ において時間局所的適切である. また (3.2) に加え $s \ge 0$ のとき時間大域的適切である.

尺度不変性の議論より得られる Sobolev 空間の臨界指数は次である

$$(s, r) = (-1, -\frac{1}{2}) \qquad \text{scaling critical.}$$

また上記ここまでの結果で時間大域的適切性 TGW の結果はいずれも $s \geq 0$ におけるものであり, 次の保存則が重要な役割を果たした. Dirac の解の L^2 ノルムが保存される

$$\|\psi_1(t)\|_{L^2}^2 + \|\psi_2(t)\|_{L^2}^2 = \|\psi_1(0)\|_{L^2}^2 + \|\psi_2(0)\|_{L^2}^2 \qquad {}^\forall t > 0. \tag{3.3}$$

しかし $s < 0$ における時間大域的適切 TGW の結果もある

- Selberg (2007) $-\frac{1}{8} < s < 0,\ -s + \sqrt{s^2 - s} < r \leq 1 + s.$
- Tesfahun (2009) $-\frac{1}{8} < s < 0,\ s + \sqrt{s^2 - s} < r \leq 1 + s.$
- Candy (2013) $-\frac{1}{6} < s < 0,\ s - \frac{1}{4} + \sqrt{(s - \frac{1}{4})^2 - s} < r \leq 1 + s.$

講演では深く入らないが Selberg 氏の結果は Bourgain の高周波 · 低周波の分離の方法, そして Tesfahun 氏と Candy 氏の結果はともに Colliander 氏, Keel 氏, Staffilani 氏, Takaoka 氏, Tao 氏が確立した I method を用いる.

3.2. 適切性の証明の概要

ここから時間局所適切性の証明の概要を記す. まず初めに DKG を書き換える. $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ に対し $u_\pm := \psi_1 \mp \psi_2$ と定めて

$$\begin{cases} (\partial_t + \partial_x)u_+ = i(m - \phi)u_-, \\ (\partial_t - \partial_x)u_- = i(m - \phi)u_+, \\ (\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi = -M^2\phi + 2\Re(u_+\overline{u_-}), \\ u_\pm(0,x) = u_{\pm,0}(x),\ \phi(0,x) = \phi_0(x),\ \partial_t\phi(0,x) = \phi_1(x). \end{cases}$$

よって以降, 解は $(u_\pm, \phi)$ を求めればよい.

$$(\psi, \phi) \longleftrightarrow (u_\pm, \phi).$$

Duhamel の原理で微分方程式を積分方程式に書き換える

$$\begin{aligned} u_+^{(n+1)} &= u_+^F + I_+((m - \phi^{(n)})u_-^{(n)}), \\ u_-^{(n+1)} &= u_-^F + I_-((m - \phi^{(n)})u_+^{(n)}), \\ \phi^{(n+1)} &= \phi^F + I_+I_-(M^2\phi^{(n)} - 2\Re(u_+^{(n)}u_-^{(n)})), \end{aligned}$$

ここで F は自由（線形）解を表す

$$\begin{aligned} u_\pm^F(t,x) &= u_{\pm,0}(x \mp t), \\ \phi^F(t,x) &= \frac{\phi_0(x+t) + \phi_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \phi_1(y)dy, \end{aligned}$$

そして $I_\pm$ は Duhamel 項を表す

$$I_\pm(v) = -i\int_0^t v(\tau, x \mp (t-\tau))d\tau.$$

縮小写像の原理, つまり逐次近似法に基づき解を求める. このときに次の双線形評価が利用された

Lemma 3.2. 次が任意の u, v に対し成立

- $a \prec \{a_1, a_2\},\ b \prec \{b_1, b_2\}$ とする. このとき

$$\|uv\|_{Z^{a,b}} \lesssim \|u\|_{Z^{a_1,b_1}}\|v\|_{Z^{a_2,b_2}}. \tag{3.4}$$

- $a_0 \prec \{a_1, a_2\},\ b_0 \prec \{b_1, b_2\},\ \alpha \prec \{a_0 - a, b_0 - b\}$ として $\min\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\} > a + b + \frac{1}{2}$ とする. このとき

$$\|uv\|_{Y^{\alpha,a,b}} \lesssim \|u\|_{Z^{a_1,b_1}}\|v\|_{Z^{a_2,b_2}}. \tag{3.5}$$

ただしここで $c \prec \{a, b\}$ とは次のいずれかが成り立つことである,

(1) $a + b \geq 0,\ c \leq a,\ c \leq b,\ c < a + b - \frac{1}{2}$,

(2) $a + b > 0,\ c < a,\ c < b,\ c \leq a + b - \frac{1}{2}$.

双線形評価 (3.4) は次の 1 変数関数に対する評価式が基礎となっている. $c \prec \{a, b\}$ に対して

$$\|uv\|_{H^c} \lesssim \|u\|_{H^a}\|v\|_{H^b}.$$

ここで条件 $c \prec \{a, b\}$ は必要条件でもある.

適切性の証明において末端点 $s = r = 0$ 以外では Lemma 3.2 を用いた. またこれら双線形評価を使うものとは別証明として解を線形解部分と非斉次項部分に分け, 別々の関数空間を設定し評価する方法もある. この方法は末端点でも有効である. 時間大域的適切性に関してはDirac 方程式の解のアプリオリ評価として L^2 保存則 (3.3) を利用する. $s \geq 0$ での評価は容易である. そしてKlein-Gordon 方程式の解に対しては十分な平滑化効果があるためその Dirac 方程式の解の評価が利用できる.

4. 初期値問題の非適切性

4.1. 非適切性の結果

Theorem 4.1 ([37, 40, 41]). 指数 (s, r) が以下のいずれかの条件を満たす場合, *Dirac-Klein-Gordon* 方程式系の初期値問題 (2.1) は $(\psi, \phi, \partial_t\phi) \in H^s \times H^r \times H^{r-1}$ において非適切である.

(1) $s > \max(0, r)$,

(2) $r > \max(s+1, \frac{1}{2})$,

(3) $s < \min(-r, 0),\ r < \frac{1}{2}$,

(4) $s = 0,\ r < 0$,

(5) $s < -\frac{1}{2},\ r = \frac{1}{2}$.

*2010*年に *1, 2* が 中西氏, 津川氏との共同研究により示された. *2015*年に *3* が, *2016*年に *4, 5* が岡本葵氏との共同研究により示された.

4.2. Area 3 の証明

Area 3 においては次の保存則が用いられた.

Lemma 4.2. *Chadam* と *Glassey* の発見 *[13].*

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_1(t,x) - \bar{\psi}_2(t,x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\psi_{01}(x) - \bar{\psi}_{02}(x)|^2 dx, \quad t > 0.$$

よってもし $\psi_{01} = \bar{\psi}_{02}$ ならば $\psi_1 = \bar{\psi}_2$, つまり

$$\psi^*\gamma^0\psi = |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 = 0.$$

これは $\Re u_{+,0} = \Im u_{-,0} = 0$ ならば $\Re u_+ = \Im u_- = 0$, つまり

$$\Re(u_+\bar{u}_-) = \Re u_+ \Re u_- + \Im u_+ \Im u_- = 0.$$

この設定において Klein-Gordon の解は線形解となる

$$\phi(t,x) = \frac{\phi_0(x+t) + \phi_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \phi_1(y)dy.$$

ここから Area 3: $s + r < 0, s < 0, r < \frac{1}{2}$ における非適切性を考える. 簡単のため質量項を 0 とする $m = M = 0$.

$$(\partial_t \pm \partial_x)u_\pm = -i\phi u_\mp, \quad (\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi = \Re(u_+\overline{u_-}),$$
$$u_\pm(0,x) = u_{\pm,0}(x), \quad \phi(0,x) = \phi_0(x), \quad \partial_t\phi(0,x) = \phi_1(x).$$

逐次近似法の第二近似を求める

$$\begin{aligned}
u_{\pm}^{(1)}(t,x) &:= u_{\pm,0}(x \mp t),\\
\phi^{(1)}(t,x) &:= \frac{\phi_0(x+t)+\phi_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\phi_1(y)dy,\\
u_{\pm}^{(2)}(t,x) &:= -i\int_0^t (\phi^{(1)}u_{\mp}^{(1)})(t', x\mp(t-t'))dt'.
\end{aligned}$$

また $\Re u_{+,0} = \Im u_{-,0} = 0$ を設定し $\phi = \phi^{(1)}$ とする.

指数を $s < s_0 < -r$ として $\delta > 0$ をとる. 初期値の列を次のようにとる

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_{+,0} &= \delta N^{-s_0}(\chi_{[N-1,N+1]} - \chi_{[-N-1,-N+1]}),\\
u_{-,0} &= 0,\\
\widehat{\phi}_0 &= \delta N^{s_0}\chi_{[-N-1,-N+1]},\\
\phi_1 &= 0.
\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}
\|u_{+,0}\|_{H^s}^2 &= \|\langle\xi\rangle^s \widehat{u}_{+,0}\|_{L^2}^2\\
&\sim \delta^2 N^{-2s_0}\int_{N-1}^{N+1}\langle\xi\rangle^{2s}dx \sim \delta^2 N^{2(s-s_0)} \to 0,\\
\|\phi_0\|_{H^r}^2 &= \|\langle\xi\rangle^r \widehat{\phi}_0\|_{L^2}^2\\
&= \delta^2 N^{2s_0}\int_{-N-1}^{-N+1}\langle\xi\rangle^{2r}dx \sim \delta^2 N^{2(r+s_0)} \to 0.
\end{aligned}$$

第二近似項

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}u_{-}^{(2)}(t,\xi) = -\frac{i}{2}e^{it\xi}\Big(&\int \widehat{\phi}_0(\xi-\eta)\frac{e^{-2it\eta}-1}{-2i\eta}\widehat{u_{+,0}}(\eta)d\eta\\
&+\frac{e^{-2it\xi}-1}{-2i\xi}\int \widehat{\phi}_0(\xi-\eta)\widehat{u_{+,0}}(\eta)d\eta\Big)
\end{aligned}$$

を評価する. 第一項は $\hat{u}_{+,0}$ の台より $\eta \to \infty$ となり

$$\frac{e^{-2it\eta}-1}{-2i\eta} \to 0$$

であることから 0 に収束する. つまり下からの評価に影響を与えない. そして第二項は台の関係より

$$\xi - \eta \sim -N, \qquad \eta \sim N$$

となり $|\xi| \lesssim 1$ としてよいために

$$\frac{e^{-2it\xi}-1}{-2i\xi} \gtrsim 1$$

となる. つまり次のように下から評価できる

$$\|u_-^{(2)}(t,\cdot)\|_{H^s} \gtrsim t\delta^2 \|\langle\cdot\rangle^s \chi_{[-1,1]}\|_{L^2} \sim t\delta^2.$$

よって第二近似項は 0 に収束しないことが分かる.

これ以降, 解 $u_\pm$ が 0 に収束しないことを示す. 関数 $v_\pm := u_\pm - u_\pm^{(1)} - u_\pm^{(2)}$ を定義. これは次を満たす

$$v_\pm(t,x) = -i\int_0^t (\phi^{(1)} v_\mp + \phi^{(1)} u_\mp^{(2)})(t', x \mp (t-t'))dt'.$$

指数の関係 $s_0 + (-s_0) = 0$ において以下の初期値に対して解く

$$u_{-,0} = \phi_1 = 0, \quad \|u_{+,0}\|_{H^{s_0}} \sim \|\phi_0\|_{H^{-s_0}} \sim \delta$$

と次を得る

$$\|v_\pm\|_{L_T^\infty H^{s_0}} \lesssim t\delta^3.$$

いま $u_-^{(1)} = 0$ より $v_- = u_- - u_-^{(2)}$ であり

$$\begin{aligned} \|u_-\|_{L_T^\infty H^s} &\geq \|u_-^{(2)}\|_{L_T^\infty H^s} - \|v_-\|_{L_T^\infty H^s} \\ &\geq \|u_-^{(2)}\|_{L_T^\infty H^s} - \|v_-\|_{L_T^\infty H^{s_0}} \gtrsim t\delta^2 - t\delta^3 \sim t\delta^2 > 0. \end{aligned}$$

つまり初期値への連続依存性の不成立が示された.

参考文献

[1] I. Bejenaru and T. Tao, *Sharp well-posedness and ill-posedness results for a quadratic non-linear Schrödinger equation*, J. Funct. Anal. **233** (2006), no. 1, 228-259.

[2] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), no. 2, 107–156.

[3] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), no. 3, 209–262.

[4] N. Bournaveas, *A new proof of global existence for the Dirac Klein-Gordon equations in one space dimension*, J. Funct. Anal. **173** (2000), no. 1, 203–213.

[5] N. Bournaveas, *Local and global solutions for a nonlinear Dirac system*, Adv. Differential Equations **9** (2004), no. 5-6, 203–213.

[6] N. Bournaveas, *Local well-posedness for a nonlinear Dirac equation in spaces of almost critical dimension*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **20** (2008), no. 3, 605–616.

[7] N. Bournaveas, T. Candy, and S. Machihara, *Local and global well-posedness for the Chern-Simons-Dirac system in one dimension*, Differential and Integral Equations **25** (2012), no. 7-8, 699-718.

[8] N. Bournaveas, and D. Gibbeson, *Low regularity global solutions of the Dirac-Klein-Gordon equations in one space dimension*, Differential Integral Equations **19** (2006), no. 2, 211–222.

[9] N. Bournaveas and D. Gibbeson, *Global charge class solutions of the Dirac-Klein-Gordon equations in one space dimension*, Differential Integral Equations **19** (2006), no. 9, 1001–1018.

[10] T. Candy, *Global existence for an L^2 critical nonlinear Dirac equation in one dimension*, Adv. Differential Equations **16** (2011), no. 7-8, 643–666.

[11] T. Candy, *Bilinear estimates and applications to global well-posedness for the Dirac-Klein-Gordon equation on $\mathbb{R}^{1+1}$*, J. Hyperbolic Differ. Equ. **10** (2013), no. 1, 1–35.

[12] J. M. Chadam, *Global solutions of the Cauchy problem for the (classical) coupled Maxwell-Dirac equations in one space dimension*, J. Functional Analysis **13** (1973), 173–184.

[13] J. Chadam and R. Glassey, *On certain global solutions of the Cauchy problem for the (classical) coupled Klein-Gordon-Dirac equations in one and three space dimensions*, Arch. Rational Mech. Anal **54** (1974), 223-237.

[14] P. D'Ancona, D. Foschi and S. Selberg, *Local well-posedness below the charge norm for the Dirac-Klein-Gordon system in two space dimensions*, J. Hyperbolic Differ. Equ. **4** (2007), no. 2, 295–330.

[15] P. D'Ancona, D. Foschi and S. Selberg, *Null structure and almost optimal local regularity for the Dirac-Klein-Gordon system*, J. Eur. Math. Soc. **9** (2007), no. 4, 877–899.

[16] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, *Three-dimensional massive gauge theories*, Physical Review Letters **48** (1982), no.15, 975-978.

[17] Y.-F. Fang, *A direct proof of global existence for the Dirac-Klein-Gordon equations in one space dimension*, Taiwanese J. Math. **8** (2004), 33–41.

[18] Y.-F. Fang, *On the Dirac-Klein-Gordon equation in one space dimension*, Differential Integral Equations **17** (2004), 1321–1346.

[19] Y.-F Fang, and M. G. Grillakis, *On the Dirac-Klein-Gordon system in $2+1$ dimensions*, preprint.

[20] Y.-F. Fang, and M. G. Grillakis, *On the Dirac-Klein-Gordon equations in three space dimensions*, Comm. Partial Differential Equations **30** (2005), 783–812.

[21] Y.-F. Fang and H.-C. Huang, *A critical case of the Dirac-Klein-Gordon equations in one space dimension*, Taiwanese J. Math. **12** (2008), no. 5, 1045–1059.

[22] H. G. Feichtinger, *Modulation spaces on locally compact Abelian groups*, Technical Report, University of Vienna, 1983, in: "Proc. Internat. Conf. on Wavelets and Applications" (R. Radha, M. Krishna, and S. Yhangavelu eds.), New Delhi Allied Publishers, 2003, 1-56.

[23] J. Ginibre, Y. Tsutsumi, and G. Velo, *On the Cauchy problem for the Zakharov system*, J. Funct. Anal. **151** (1997), no. 2, 384–436.

[24] A. Gruenrock and H. Pecher *Global solutions for the Dirac-Klein-Gordon system in two space dimensions*, preprint, arXiv:0903.3189v1 [math.AP].

[25] J. Holmer, *Local ill-posedness of the 1D Zakharov system*, Electron. J. Differential Equations (2007), No. 24, 22 pp.

[26] H. Huh, *Global solutions and asymptotic behaviors of the Chern-Simons-Dirac equations in $\mathbb{R}^{1+1}$*, J. Math. Anal. Appl. **366** (2010), no. 2, 706-713.

[27] T. Iwabuchi and T. Ogawa, *Ill-posedness for nonlinear Schrödinger equation with*

quadratic non-linearity in low dimensions, Trans. Amer. Math. Soc., in press.

[28] M. Keel and T. Tao, *Local and global well-posedness of wave maps on* $\mathbf{R}^{1+1}$ *for rough data*, Internat. Math. Res. Notices **21** (1998), 1117–1156.

[29] N. Kishimoto, *Remark on the paper "Sharp well-posedness and ill-posedness results for a quadratic non-linear Schrödinger equation" by I. Bejenary and T. Tao*, Atl. Electron. J. Math. **4** (2010), no. 1, 35-48.

[30] N. Kishimoto and T. Tsugawa, *Local well-posedness for quadratic nonlinear Schrödinger equations and the "good" Bussinesq equation*, Differential Integral Equations **23** (2010), no. 5-6, 463-493.

[31] S. Klainerman and M. Machedon, *Space-time estimates for null forms and the local existence theorem*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), no. 9, 1221–1268.

[32] S. Klainerman and M. Machedon, *Smoothing estimates for null forms and applications*, Duke Math. J. **81** (1995), no. 1, 99–133 (1996), A celebration of John F. Nash, Jr.

[33] A. Lopez and E. Fradkin, *Fractional quantum Hall effect and Chern-Simons gauge theories*, Phys. Rev. B **44** (1991), no.10, 5246-5262.

[34] S. Machihara, *One dimensional Dirac equation with quadratic nonlinearities*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **13** (2005), no. 2, 277–290.

[35] S. Machihara, *Dirac equation with certain nonlinearities in one space dimension*, Commun. Contemp. Math. **9** (2007), no. 3, 421–435.

[36] S. Machihara, *The Cauchy problem for the 1-D Dirac–Klein–Gordon equation*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **14** (2007), no. 5-6, 625–641.

[37] S. Machihara, K. Nakanishi, and K. Tsugawa, *Well-posedness for nonlinear Dirac equations in one dimension*, Kyoto J. Math., **50** (2010), No. 2, 403-451.

[38] S. Machihara and T. Ogawa, *Global well-posedness for one dimensional Chern-Simons-Dirac system in* L^p, to appear in Communication in PDE.

[39] 町原秀二, 小川卓克, $1+1$ 次元 *Chern-Simons-Dirac* 方程式の L^p 時間大域適切性, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会 函数方程式論分科会（於 九州大学）講演アブストラクト.

[40] S. Machihara and M. Okamoto, *Ill-posedness for the Cauchy problem of the Chern-Simons-Dirac system in one dimension*, J. Differential Equations, 258, (2015), 1356—1394.

[41] S. Machihara and Mamoru Okamoto, *Remarks on the ill-posedness for the Dirac-Klein-Gordon system*, Dyn. Partial Differ. Equ., 13, (2016), 179–190.

[42] F. Melnyk, *Local Cauchy problem for the nonlinear Dirac and Dirac-Klein-Gordon equations on Kerr space-time*, J. Math. Phys. **47** (2006), no. 5, 052503, 16 pp.

[43] T. Ozawa and K. Yamauchi, *Structure of Dirac matrices and invariants for nonlinear Dirac equations*, Differential Integral Equations **17** (2004), no. 9-10, 971-982.

[44] H. Pecher, *Low regularity well-posedness for the one-dimensional Dirac-Klein-Gordon system*, Electron. J. Differential Equations (2006), No. 150, 13 pp.

[45] T. Roy, *Adapted linear-nonlinear decomposition and global well-posedness for solutions to the defocusing cubic wave equation on* $\mathbb{R}^3$, Discrete Contin. Dyn. Syst. **24** (2009), no. 4, 1307–1323.

[46] T. Runst and W. Sickel, *Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations*, de Gruyter Series in Nonlinear Anal-

ysis and Applications, **3**, Berlin, 1996.

[47] S. Selberg and A. Tesfahun, *Low regularity well-posedness of the Dirac-Klein-Gordon system in one space dimension*, Commun. Contemp. Math. **10** (2008), no. 2, 181–194.

[48] S. Selberg and A. Tesfahun, *Remarks on regularity and uniqueness of the Dirac-Klein-Gordon equations in one space dimension*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **17** (2010), no. 4, 453–465.

[49] S. Selberg and A. Tesfahun, *Low regularity well-posedness for some nonlinear Dirac equations in one space dimension*, Differential Integral Equations **23** (2010), no. 3-4, 265–278.

[50] S. Selberg, *Global well-posedness below the charge norm for the Dirac-Klein-Gordon system in one space dimension*, Int. Math. Res. Not. IMRN. **17** (2008), Art. ID rnm058, 25 pp.