第55回実函数論・函数解析学合同シンポジウム

講演集

期日： 2016年9月1日(木) – 9月3日(土)

会場： 首都大学東京 南大沢キャンパス

まえがき

本講演集は 2016 年 9 月 1 日 (木) から 9 月 3 日 (土) までの 3 日間にわたり, 首都大学東京の南大沢キャンパスで開催される第 55 回実函数論・函数解析学合同シンポジウムの講演集です.

本シンポジウムの開催のために多くの方々にご協力をいただきましたが, 関係者皆様のご尽力によって, 講演者の方々の素晴らしい論文を本講演集で発表することができました. 各グループの責任者の方々, 講演者の皆様, 本シンポジウム参加者の皆様方に深く感謝いたします.

また, 特に会場責任者の澤野嘉宏先生をはじめとする首都大東京理工学部の皆様には大変お世話になりました. ここに深く感謝の意を表します.

なお, 本シンポジウムの講演集の作成には, 下記の科学研究費補助金の援助を受けています.

基盤研究 (C) (代表 中野 史彦) 研究課題番号: 26400145
「ランダムシュレーディンガー作用素の準位統計」

示野 信一 (関西学院大学・理工学部)
松岡 勝男 (日本大学・経済学部)

第55回実函数論・函数解析学合同シンポジウム
プログラム

期日: 2016 年 9 月 1 日 (木) – 9 月 3 日 (土)
会場: 首都大学東京 南大沢キャンパス 1 号館 101 号室
〒 192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1
http://www.tmu.ac.jp/

9月1日 (木)

13:30–14:30 野井 貴弘 (首都大学東京・理工学研究科)
"Generalized Triebel-Lizorkin Morrey space について"

14:45–15:45 鈴木 章斗 (信州大学・工学部)
"空間依存するコインをもつ量子ウォークの弱収束定理"

16:00–17:00 岡安　類 (大阪教育大学・教育学部)
"Haagerup approximation property for von Neumann algebras"

9月2日 (金)

9:30–10:30 中濱 良祐 (東京大学大学院・数理科学研究科)
"Intertwining operators between holomorphic discrete series representations"

10:45–11:45 眞野 智行 (琉球大学・理学部)
"平坦構造の一般化と複素鏡映群・パンルヴェ方程式"

13:45–14:45 都築　寛 (広島修道大学・経済科学部)
"Solvability of heat equations coupled with Navier–Stokes equations in 2D and 3D domains"

15:00–16:00 鈴木 智成 (九州工業大学・工学研究院)
"ν-generalized metric space について"

16:15–17:15 杉本　充 (名古屋大学大学院・多元数理科学研究科)
"平滑化評価式および制限定理の最良定数と関連する話題"

懇親会: 18:00–20:00
会場: 首都大学東京 大学内 ルベソンベール

9月3日(土)

9:30–10:30 井上　啓 (山陽小野田市立山口東京理科大学・工学部)
"量子ゼノ効果に関連した量子系の時間発展"

10:45–11:45 山崎 丈明 (東洋大学・理工学部)
"Some recent topics on operator means"

開催責任者: 示野 信一 (関西学院大・理工)
松岡 勝男 (日本大・経済)
会場責任者: 澤野 嘉宏 (首都大東京・理工)

目次

Generalized Triebel–Lizorkin Morrey spaces について

野井　貴弘
(首都大学東京　客員研究員)

1　Introduction

講演者は近年, 中村氏（首都大学東京）と澤野氏（首都大学東京）との共同研究 [6] で, Besov space $B^s_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ と Triebel–Lizorkin space $F^s_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ のノルムにおいて, L^q ノルムの部分を generalized Morrey space $\mathcal{M}^\varphi_q(\mathbb{R}^n)$ に置き換えることにより, generalized Besov Morrey space $\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(\mathbb{R}^n)$ と generalized Triebel–Lizorkin Morrey space $\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(\mathbb{R}^n)$ を導入し, smooth atomic decomposition, quark decomposition, trace operator の有界性, pointwise multiplier の有界性等を示した.

本講演では, generalized Triebel–Lizorkin Morrey space $\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(\mathbb{R}^n)$ における local mean による特徴付け（定理 2.1）, non-smooth atomic decomposition（定理 3.8 ）と pointwise multiplier（定理 4.2）への応用について述べる. 得られる結果は generalized Besov Morrey space $\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(\mathbb{R}^n)$ に対しても同様に成立する. この研究は出来氏（岡山大学）との共同研究である.

最初に, generalized Morrey space $\mathcal{M}^\varphi_q(\mathbb{R}^n)$ を定義する.

定義 1.1 (Generalized Morrey spaces [4]). $0 < q < \infty$ とし, $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ とする. このとき, generalized Morrey space $\mathcal{M}^\varphi_q(\mathbb{R}^n)$ を, 可測関数 f で,

$$\|f\|_{\mathcal{M}^\varphi_q} \equiv \sup_{Q\in\mathcal{D}} \varphi(\ell(Q)) \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

を満たすもの全体の集合と定義する.

$0 < q < \infty$ に対して, $\mathcal{G}_q$ を, 非減少関数 $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ で,

$$\varphi(t_1){t_1}^{-n/q} \geq \varphi(t_2){t_2}^{-n/q} \quad (0 < t_1 \leq t_2 < \infty) \tag{1}$$

を満たすもの全体の集合と定義する．このとき, 中井 [5] により, 次の補題が示されている．

補題 1.2 ([5, p.446])**.** $0 < q < \infty$ とする．任意の $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ に対し,

$$\mathcal{M}_q^{\varphi}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{M}_q^{\varphi^*}(\mathbb{R}^n)$$

を満たす $\varphi^* \in \mathcal{G}_q$ が存在する．

このことから, $\mathcal{M}_q^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ を考える際には, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ を仮定するのは自然である．

可積分関数 f に対して, Fourier 変換と逆 Fourier 変換を

$$\begin{cases} \mathcal{F}f(\xi) \equiv (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n) \\ \mathcal{F}^{-1}f(x) \equiv (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi \quad (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

とする．$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して, $\varphi(D)f \equiv \mathcal{F}^{-1}[\varphi\mathcal{F}f]$ と定義する．

定義 1.3 ([6, Definition 1.3])**.** $0 < q < \infty$, $0 < r \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$ とし, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とする．$r < \infty$ のときは, さらに $t \ge \tilde{t}$ に対して,

$$\frac{t^{\varepsilon}}{\varphi(t)} \le \frac{Cr^{\varepsilon}}{\varphi(r)} \quad (t \ge r) \tag{2}$$

を満たす, ある定数 $C, \varepsilon > 0$ が存在すると仮定する．$\theta, \tau \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ は

$$0 \notin \operatorname{supp}(\tau), \quad \theta(\xi) > 0 \text{ if } \xi \in Q(2), \quad \tau(\xi) > 0 \text{ if } \xi \in Q(2) \setminus Q(1).$$

を満たすとし, 任意の $\xi \in \mathbb{R}^n$ と $k \in \mathbb{N}$ に対し, $\tau_k(\xi) \equiv \tau(2^{-k}\xi)$ と定義する．

The (nonhomogeneous) generalized Triebel-Lizorkin Morrey space $\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}(\mathbb{R}^n)$ を, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ で

$$\|f\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}} = \|f\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}(\theta,\tau)} \equiv \begin{cases} \|\theta(D)f\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}} + \left\| \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} 2^{jsr} |\tau_j(D)f|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}} & (r < \infty), \\ \|\theta(D)f\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}} + \left\| \displaystyle\sup_{j\in\mathbb{N}} 2^{js} |\tau_j(D)f| \right\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}} & (r = \infty) \end{cases} \tag{3}$$

が有限になるもの全体の集合と定義する．

$\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}(\mathbb{R}^n)$ は $\theta, \tau \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ により定義されているが, $\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}(\mathbb{R}^n)$ は, θ と τ の取り方に依らずに定義することができる．

定理 1.4 ([6, Theorem 1.4])**.** $0 < q < \infty$, $0 < r \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とする．さらに, $r < \infty$ のときは, φ は (2) を満たすとする．このとき, 異なる θ と τ の選び方（θ' と τ' とする）に対して, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}(\theta,\tau)} \sim \|\cdot\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}(\theta',\tau')}$ が成り立つ．

2 Local means による特徴付け

この章では local means による $\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}(\mathbb{R}^n)$ の特徴付けを述べる.

$\{\Psi_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ と $a > 0$ に対して,

$$(\Psi_k^* f)_a(x) \equiv \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{|(\Psi_k * f)(y)|}{1 + |2^k(y-x)|^a}$$

を Peetre maximal operator という.

$\psi_0, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\psi_j(x) \equiv \psi(2^{-j}x) \quad (j \in \mathbb{N})$$

と定義し, さらに, $k \in \mathbb{N}_0$ に対して, $\Psi_k \equiv \mathcal{F}\psi_k$ とする.

定理 2.1 (cf. [6, Lemma A.1])**.** $R \in \mathbb{N}_0$ と $s \in \mathbb{R}$ は $R > s$ を満たすとする. また, $\psi_0, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を,

(i) $0 \le |\beta| < R$ を満たす $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ に対して

$$D^\beta \psi(0) = 0 \tag{4}$$

を満たし,

(ii) ある $\epsilon > 0$ に対して,

$$|\psi_0(x)| > 0 \quad on \quad \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \epsilon\} \tag{5}$$
$$|\psi(x)| > 0 \quad on \quad \{x \in \mathbb{R}^n : \epsilon/2 < |x| < 2\epsilon\} \tag{6}$$

が成り立つとする.

$0 < q < \infty$, $0 < r \le \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし, $r < \infty$ のときは φ は (2) を満たすとする. 任意の $a > \frac{n}{\min\{1,q,r\}}$ と $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\|f\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}} \sim \|\{2^{js}\Psi_j * f\}_{j=0}^\infty\|_{\mathcal{M}^\varphi_q(\ell^r)} \sim \|\{2^{js}(\Psi_j^* f)_a\}_{j=0}^\infty\|_{\mathcal{M}^\varphi_q(\ell^r)}$$

が成り立つ.

注意 2.2. 1. (5) と (6) は Tauberian condition と呼ばれる.

2. $R = 0$ のときは, モーメント条件 (4) は考えない.

2.1 Key results

定理 2.1 を証明するにあたり, いくつか準備をする.

補題 2.3 ([6, Lemma 2.5])**.** $0 < u, q < \infty$, $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ とする. このとき,

$$\| \, |f|^u \, \|_{\mathcal{M}_q^\varphi} = \left(\|f\|_{\mathcal{M}_{uq}^{\varphi^{1/u}}} \right)^u$$

が任意の $f \in \mathcal{M}_{uq}^{\varphi^{1/u}}(\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つ.

次に, maximal operator の有界性の結果を述べる.

$\mathcal{Q}$ を全ての立方体の集合とする. このとき $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$Mf(x) \equiv \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{\chi_Q(x)}{|Q|} \int_Q |f(y)| \, dy \tag{7}$$

により定義される作用素 M を *Hardy–Littlewood maximal operator* という.

Hardy–Littlewood maximal operator に対して, 次の有界性が成り立つ.

定理 2.4 ([6, Theorem 2.9])**.** $1 < q < \infty$, $1 < r < \infty$, $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ とする.

1. 可測関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ に対して,

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}_q^\varphi} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}_q^\varphi} \tag{8}$$

が成り立つ. 特に, 任意の $\mathcal{M}_q^\varphi(\mathbb{R}^n)$ の関数列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ に対して,

$$\left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} Mf_j \right\|_{\mathcal{M}_q^\varphi} \lesssim \left\| \sup_{j \in \mathbb{N}} |f_j| \right\|_{\mathcal{M}_q^\varphi} \tag{9}$$

が成り立つ.

2. (2) を仮定すると, 任意の $\mathcal{M}_q^\varphi(\mathbb{R}^n)$ の関数列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ に対して,

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^\infty (Mf_j)^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{\mathcal{M}_q^\varphi} \lesssim \left\| \left(\sum_{j=1}^\infty |f_j|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{\mathcal{M}_q^\varphi} \tag{10}$$

が成り立つ.

次に, Hardy type の不等式を述べる.

補題 2.5 (Hardy type inequality)**.** $0 < q, r \le \infty$, $\delta > 0$, $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ とする．$\{g_\nu\}_{\nu=-\infty}^{\infty}$ を $\mathbb{R}^n$ 上の非負の可測関数とし，

$$G_j(x) \equiv \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} 2^{-|j-\nu|\delta} g_\nu(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n, j \in \mathbb{Z})$$

とする．このとき，

$$\|\{G_j\}_{j=-\infty}^{\infty}\|_{\mathcal{M}_q^\varphi(\ell^r)} \lesssim_{q,r,\delta} \|\{g_\nu\}_{\nu=-\infty}^{\infty}\|_{\mathcal{M}_q^\varphi(\ell^r)}$$

が成り立つ．

2.2 定理 2.1 の証明

定理 2.1 を 2 つのパートに分ける．最初に定理 2.6 で，異なる Peetre maximal operators の間の不等式を示す．次に，定理 2.7 で，Peetre maxmal operator の有界性を示す．定理 2.6 と定理 2.7 から，定理 2.1 を示すことができる．

定理 2.6. $\psi_0, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を定理 *2.1* と同じ関数とし，$\phi_0, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とする．$x \in \mathbb{R}^n$ と $j \in \mathbb{N}$ に対して，$\phi_j(x) \equiv \phi(2^{-j}x)$ と定義し，また，$j \in \mathbb{N}_0$ に対して，$\Phi_j \equiv \hat{\phi}_j$ と定義する．さらに，$R \in \mathbb{N}_0$ と $s \in \mathbb{R}$ は $R > s$ を満たし，ψ は

$$D^\beta \psi(0) = 0 \quad (0 \le |\beta| < R)$$

を満たすとする．さらに，

$$\begin{aligned} |\phi_0(x)| > 0 \quad &on \quad \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \epsilon\} \\ |\phi(x)| > 0 \quad &on \quad \{x \in \mathbb{R}^n : \epsilon/2 < |x| < 2\epsilon\} \end{aligned}$$

を満たす定数 $\epsilon > 0$ が存在すると仮定する．

$0 < q < \infty$, $0 < r \le \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし，$r < \infty$ のときは φ は (2) を満たすとする．このとき，$a > \frac{n}{\min\{1,q,r\}}$ に対して，

$$\|\{2^{js}(\Psi_j^* f)_a\}_{j=0}^{\infty}\|_{\mathcal{M}_q^\varphi(\ell^r)} \lesssim \|\{2^{js}(\Phi_j^* f)_a\}_{j=0}^{\infty}\|_{\mathcal{M}_q^\varphi(\ell^r)} \tag{11}$$

が成り立つ．

Proof. Kempka-Vybíral [3, Theorem 12] は 2-microlocal Besov spaces with variable exponents において，この定理を示している．$w_k = 2^{ks}$ として Kempka-Vybíral [3, Theorem 12] の証明を辿ると，

$$2^{vs}(\Psi_v^* f)_a(x) \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-|k-v|\delta} 2^{ks}(\Phi_k^* f)_a(x)$$

が任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つことがわかる．ここで, $\delta := \min(1, R-s) > 0$ である．よって, 補題 2.5 より (11) を得る． □

定理 2.7. $\psi_0, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とし, さらに,

$$\begin{aligned} |\psi_0(x)| > 0 \quad &on \quad \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \epsilon\} \\ |\psi(x)| > 0 \quad &on \quad \{x \in \mathbb{R}^n : \epsilon/2 < |x| < 2\epsilon\} \end{aligned}$$

を満たす定数 $\epsilon > 0$ が存在するとする．

$0 < q < \infty$, $0 < r \le \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし, $r < \infty$ のときは φ は (2) を満たすとする．このとき, $a > \frac{n}{\min\{1,q,r\}}$ に対して,

$$\|\{2^{js}(\Psi_j^* f)_a\}_{j=0}^\infty\|_{\mathcal{M}_q^\varphi(\ell^r)} \lesssim \|\{2^{js}\Psi_j * f\}_{j=0}^\infty\|_{\mathcal{M}_q^\varphi(\ell^r)}$$

が成り立つ．

Proof. Kempka と Vybíral [3, Proof of Theorem 13, (25)] により,

$$(\Psi_v^* f)_a(x)^t \le C_N \sum_{k=0}^\infty 2^{-Nkt} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{(k+v)n} |(\Psi_{k+v} * f)(z)|^t}{(1 + 2^{(k+v)a}|x-z|^a)^t} \, \mathrm{d}z$$

が, 任意の $N \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{N}_0$ と $t \in (0, \infty)$ に対して成り立つことが示されている．

$t > \min\{1, q, r\}$ とし, $\delta = N + s > 0$ とする．このとき, $ta > n$ であるので, 右辺の積分は, maximal operator を使って評価でき,

$$\begin{aligned} 2^{tvs}(\Psi_v^* f)_a(x)^t &\lesssim \sum_{k=0}^\infty 2^{-(N+s)kt} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^{(k+v)n} |2^{(k+v)s}(\Psi_{k+v} * f)(z)|^t}{(1 + 2^{(k+v)a}|x-z|^a)^t} \, \mathrm{d}z \\ &\lesssim \sum_{l=v}^\infty 2^{-t\delta(l-v)} M(|2^{ls}(\Psi_l * f)(x)|^t) \end{aligned}$$

が任意の $N \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$ と $v \in \mathbb{N}_0$ に対して成り立つ．よって, $\mathcal{M}_{q/t}^{\varphi^t}(\ell^{r/t})$ 準ノルムをとり, 補題 2.5 を使うことにより,

$$\begin{aligned} \left\| \left\{ 2^{tvs}(\Psi_v^* f)_a^t \right\}_{v=0}^\infty \right\|_{\mathcal{M}_{q/t}^{\varphi^t}(\ell^{r/t})} &\lesssim \left\| \left\{ \sum_{l=v}^\infty 2^{-t\delta(l-v)} M(|2^{ls}(\Psi_l * f)|^t) \right\}_{v=0}^\infty \right\|_{\mathcal{M}_{q/t}^{\varphi^t}(\ell^{r/t})} \\ &\lesssim \left\| \left\{ M(|2^{ls}(\Psi_l * f)|^t) \right\}_{l=0}^\infty \right\|_{\mathcal{M}_{q/t}^{\varphi^t}(\ell^{r/t})}. \end{aligned}$$

が成り立つ．よって, 定理 2.4 と補題 2.3 により, 定理が成り立つ． □

3 Non-smooth atomic decomposition

中村-野井-澤野 [6] において, smooth atomic decomposition に関する結果を得ている. さらに, この結果を使うことにより, 3.2 節で, non-smooth atomic decomposition を考える.

3.1 Smooth atomic decomposition

中村-野井-澤野 [6] による smooth atomic decomposition の結果を述べるために, 数列空間を定義する.

$j \in \mathbb{Z}$ と $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し, $Q_{jm} \equiv \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{m_k}{2^j}, \frac{m_k + 1}{2^j} \right)$ と定義する. また, $\chi_{Q_{jm}}$ を Q_{jm} 上の特性関数とする.

定義 3.1. $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とする. さらに, $r < \infty$ のときは, φ に対して, (2) を仮定する.

The (nonhomogeneous) generalized Triebel-Lizorkin-Morrey sequence space $\mathbf{e}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}(\mathbb{R}^n)$ を 2 重添え字の複素数列 $\lambda = \{\lambda_{jm}\}_{j \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n}$ で,

$$\|\lambda\|_{\mathbf{e}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}} \equiv \begin{cases} \left\| \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsr} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\lambda_{jm}| \chi_{Q_{jm}} \right)^r \right\}^{\frac{1}{r}} \right\|_{\mathcal{M}^\varphi_q} & (r < \infty), \\ \left\| \sup_{j \in \mathbb{N}_0} 2^{js} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\lambda_{jm}| \chi_{Q_{jm}} \right) \right\|_{\mathcal{M}^\varphi_q} & (r = \infty) \end{cases}$$

が有限なもの全体の集合とする.

次に, smooth atoms の定義を述べる.

定義 3.2 (Smooth atoms)**.** $L \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$, $K \in \mathbb{N}_0$ とする.

1. $m \in \mathbb{Z}^n$ とする. C^K 級の関数 $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ が (K, L)-atom supported near Q_{0m} であるとは, $|\alpha| \leq K$ を満たす任意の $\alpha \in {\mathbb{N}_0}^n$ に対して,

$$|D^\alpha a(x)| \leq \chi_{3Q_{0m}}(x) \tag{12}$$

が成り立つときをいう.

2. $j \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}^n$ とする. C^K 級の関数 $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ が (K, L)-atom supported near Q_{jm} であるとは, $|\alpha| \le K$ を満たす任意の $\alpha \in {\mathbb{N}_0}^n$ に対して,

$$2^{-j|\alpha|}|D^\alpha a(x)| \le \chi_{3Q_{jm}}(x) \tag{13}$$

が成り立ち, さらに, $L \ge 0$ のときには, $|\beta| \le L$ を満たす任意の $\beta \in {\mathbb{N}_0}^n$ に対して, モーメント条件

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\beta a(x)\, dx = 0 \tag{14}$$

が成り立つときをいう.

3. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathbb{R}^n)$ で, 各 $j \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n$ に対して, a_{jm} は (K, L)-atom supported near Q_{jm} である C^K 級の関数列 $\{a_{jm}\}_{j \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n}$ 全体の集合をあらわすものとする.

中村-野井-澤野 [6] の Smooth atomic decomposition の結果を述べる.

定理 3.3. $0 < q < \infty$, $0 < r \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty) \in \mathcal{G}_q$ とし, $L \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$, $K \in \mathbb{N}_0$ とする. $\sigma_{qr} \equiv n\left(\frac{1}{\min(1,q,r)} - 1\right)$ とし, K と L は

$$K \ge [1+s]_+, \quad L \ge \max(-1, [\sigma_{qr} - s]),$$

を満たすとする. さらに, $r < \infty$ のときは, φ は (2) を満たすとする.

1. $f \in \mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき,

$$f = \sum_{j=0}^\infty \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{jm} a_{jm} \right) \quad \text{in} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \tag{15}$$

と

$$\|\lambda\|_{\mathbf{e}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}} \tag{16}$$

を満たす $\{a_{jm}\}_{j \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n} \in \mathfrak{A}$ と $\lambda = \{\lambda_{jm}\}_{j \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n} \in \mathbf{e}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}(\mathbb{R}^n)$ が存在する.

2. $\{a_{jm}\}_{j \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n} \in \mathfrak{A}$, $\lambda = \{\lambda_{jm}\}_{j \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n} \in \mathbf{e}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき,

$$f \equiv \sum_{j=0}^\infty \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{jm} a_{jm} \right)$$

は $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ で収束し, $\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}(\mathbb{R}^n)$ に属する. さらに,

$$\|f\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}} \lesssim \|\lambda\|_{\mathbf{e}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}}. \tag{17}$$

が成り立つ.

3.2 Non-smooth atomic decomposition

Besov space と Triebel–Lizorkin space における non-smooth atomic decomposition の証明法を参考に, generalized Triebel–Lizorkin Morrey space における結果を導く. ここでは, 最近発表された Gonçaleves-Kempka [2, Theorem 3.14] による 2-microlocal Besov and Triebel–Lizorkin spaces with variable exponents における non-smooth atomic decomposition の証明法を参考にする.

Gonçaleves-Kempka [2] による non-smooth atom の定義を述べるために, Hölder space $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ を導入する.

$k \in \mathbb{N}_0$ とする. . このとき, $\mathrm{BC}^k(\mathbb{R}^n)$ を, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ で, $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ であり, 任意の $|\alpha| < k$ に対して, $D^\alpha f$ が有界な連続関数であるもの全体の集合とする. BC^k のノルムを

$$\|f\|_{\mathrm{BC}^k} \equiv \sum_{|\alpha| \le k} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty}$$

により定義する.

$s \in \mathbb{R}$ に対し, $\lfloor s \rfloor \in \mathbb{Z}$ と $\{s\} \in (0,1]$ を $s = \lfloor s \rfloor + \{s\}$ を満たすものとする. $s > 0$ に対して, s 次の Hölder space を,

$$\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n) \equiv \Bigg\{ f \in BC^{\lfloor s \rfloor}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{C}^s} :\equiv \sum_{|\alpha| \le \lfloor s \rfloor} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha| = \lfloor s \rfloor} \sup_{x,y \in \mathbb{R}^n,\, x \ne y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^{\{s\}}} < \infty \Bigg\}.$$

と定義する. ここで, $s = 0$ のときは, $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \equiv L^\infty(\mathbb{R}^n)$ と定義する.

定義 3.4 (Non-smooth atoms). $K, L \ge 0$, $d > 1$, $c > 0$ とする. 関数 $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ がnon-smooth $[K, L]$-atom centered at $Q_{\nu,m}$ であるとは, 任意の $\nu \in \mathbb{N}_0$ と $m \in \mathbb{Z}^n$ に対して,

$$\operatorname{supp} a \subset dQ_{\nu,m}, \tag{18}$$

$$\|a(2^{-\nu}\cdot)\|_{\mathcal{C}^K(\mathbb{R}^n)} \le c, \tag{19}$$

が成り立ち, 任意の $\psi \in \mathcal{C}^L(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\left| \int_{dQ_{\nu,m}} \psi(x) a(x)\, \mathrm{d}x \right| \le c 2^{-\nu(L+n)} \|\psi\|_{\mathcal{C}^L(\mathbb{R}^n)} \tag{20}$$

が成り立つときをいう.

注意 3.5. $L=0$ のときは, 条件 (20) は考えない.

注意 3.6. $K,L\geq 0$ と $K',L'\in\mathbb{N}_0$ は $K\leq K'$ and $L\leq L'$ を満たすとする. このとき, 任意の smooth $[K',L']$-atom は, non-smooth $[K,L]$-atom でもある. $a_{\nu,m}$ を smooth $[K',L']$-atom centered at $Q_{\nu,m}$ とする. このとき, (18) は自然に成立している. (19) が成り立つことを示す. (13) より,

$$\begin{aligned}\|a_{\nu,m}(2^{-\nu}\cdot)\|_{\mathcal{C}^K} &\lesssim \sum_{|\alpha|\leq K'}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|D^\alpha(a_{\nu,m}(2^{-\nu}x))|\\ &\leq \sum_{|\alpha|\leq K'}2^{-\nu|\alpha|}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|D^\alpha(a_{\nu,m})(2^{-\nu}x)|\\ &\leq C\end{aligned}$$

であるので, (19) も成り立つ.

最後に, (20) が成り立つことを示す. $\psi\in\mathcal{C}^L(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, ψ は $C^{\lfloor L\rfloor}$ 級の関数であるので, $\lfloor L\rfloor-1$ 次の項までのテイラー展開より, ある定数 $\theta\in(0,1)$ が存在し,

$$\begin{aligned}\psi(x) = &\sum_{|\beta|\leq\lfloor L\rfloor-1}\frac{1}{\beta!}D^\beta\psi(2^{-\nu}m)\cdot(x-2^{-\nu}m)^\beta\\ &+\sum_{|\beta|=\lfloor L\rfloor}\frac{1}{\beta!}D^\beta\psi(2^{-\nu}m+\theta(x-2^{-\nu}m))\cdot(x-2^{-\nu}m)^\beta\end{aligned}$$

が成り立つ. $\xi=2^{-\nu}m+\theta(x-2^{-\nu}m)$ とおくと,

$$\begin{aligned}&\left|\psi(x)-\sum_{|\beta|\leq\lfloor L\rfloor}\frac{1}{\beta!}D^\beta\psi(2^{-\nu}m)\cdot(x-2^{-\nu}m)^\beta\right|\\ &=\left|\sum_{|\beta|=\lfloor L\rfloor}\frac{1}{\beta!}\left(D^\beta\psi(\xi)-D^\beta\psi(2^{-\nu}m)\right)\cdot(x-2^{-\nu}m)^\beta\right|\\ &\leq\sum_{|\beta|=\lfloor L\rfloor}\frac{1}{\beta!}\left|\frac{D^\beta\psi(\xi)-D^\beta\psi(2^{-\nu}m)}{\xi-2^{-\nu}m}\right|\theta|x-2^{-\nu}m|^{|\beta|+1}\\ &\leq c\|\psi\|_{\mathcal{C}^L}|x-2^{-\nu}m|^{\lfloor L\rfloor+1}\end{aligned}$$

である. モーメント条件 (14) より,

$$\left|\int_{dQ_{\nu,m}}\psi(x)a_{\nu,m}(x)\,\mathrm{d}x\right|\lesssim\|\psi\|_{\mathcal{C}^L}\int_{dQ_{\nu,m}}|a_{\nu,m}(x)||x-2^{-\nu}m|^{\lfloor L\rfloor+1}\,\mathrm{d}x$$

を得ることができる．$dQ_{\nu,m} = \prod_{i=1}^{n}[2^{-\nu}m_i + 2^{-\nu-1}(1-d), 2^{-\nu}m_i + 2^{-\nu-1}(1+d))$ であることと, $L \le \lfloor L \rfloor + 1$ であることに注意をして, $x = 2^{-\nu}y$ と変数変換をすると,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{dQ_{\nu,m}} \psi(x) a_{\nu,m}(x) \, \mathrm{d}x \right| \\
&\lesssim 2^{-\nu(L+n)} \|\psi\|_{\mathcal{C}^L} \int_{\prod_{i=1}^{n}[m_i+2^{-1}(1-d), m_i+2^{-1}(1+d))} |a_{\nu,m}(2^{-\nu}y)||y-m|^{\lfloor L \rfloor+1} \, \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

となるので, $\alpha = 0$ として (13) を使い, $z = y - m$ と変数変換をすれば,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{dQ_{\nu,m}} \psi(x) a_{\nu,m}(x) \, \mathrm{d}x \right| \\
&\lesssim 2^{-\nu(L+n)} \|\psi\|_{\mathcal{C}^L} \int_{\prod_{i=1}^{n}[m_i+2^{-1}(1-d), m_i+2^{-1}(1+d))} |a_{\nu,m}(2^{-\nu}y)||y-m|^{\lfloor L \rfloor+1} \, \mathrm{d}y \\
&\lesssim 2^{-\nu(L+n)} \|\psi\|_{\mathcal{C}^L} \int_{\prod_{i=1}^{n}[m_i+2^{-1}(1-d), m_i+2^{-1}(1+d))} |y-m|^{\lfloor L \rfloor+1} \, \mathrm{d}y \\
&\lesssim 2^{-\nu(L+n)} \|\psi\|_{\mathcal{C}^L} \int_{[2^{-1}(1-d), 2^{-1}(1+d))^n} |z|^{\lfloor L \rfloor+1} \, \mathrm{d}z \\
&\lesssim 2^{-\nu(L+n)} \|\psi\|_{\mathcal{C}^L}
\end{aligned}$$

となるので, (20) が成り立つことがわかる．

Non-smooth atom による級数に対して, 次の収束性が成り立つ．

補題 3.7. *$0 < q < \infty$, $0 < r \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$ とする．$K, L \in \mathbb{R}$ は $K, L \ge 0$, $K > s$ と $L > \sigma_{q,r} - s$ を満たすとする．このとき, non-smooth $[K, L]$-atoms centered at $Q_{\nu,m}$ $a_{\nu,m}$ と $\lambda \in \mathbf{e}^s_{\mathcal{M}^{\varphi}_q, r}$ に対して,*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{\nu,m} a_{\nu,m}$$

は $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ で収束する．

証明は次に述べる non-smooth atomic decomposition の証明と同様の手法で示せるので, 3.5 節で示す．

Non-smooth atomic decomposition の結果を述べる．

定理 3.8. *$0 < q < \infty$, $0 < r \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$ とし, $K, L \in \mathbb{R}$ は $K, L \ge 0$, $K > s$ と $L > \sigma_{q,r} - s$ を満たすとする．このとき, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ が $\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^{\varphi}_q, r}(\mathbb{R}^n)$ に属する必要*

十分条件は, ある *non-smooth* $[K,L]$*-atoms centered at* $Q_{\nu,m}$ $\{a_{\nu,m}\}_{\nu\in\mathbb{N}_0,m\in\mathbb{Z}^n}$ と $\lambda=\{\lambda_{\nu m}\}_{\nu\in\mathbb{N}_0,m\in\mathbb{Z}^n}\in\mathbf{e}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}$ が存在し, f を

$$f=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\lambda_{\nu,m}a_{\nu,m}\quad in\quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \tag{21}$$

と表すことができることである. さらに,

$$\|f\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}}\sim\inf\|\lambda\|_{\mathbf{e}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}}$$

が成り立つ. ここで, 下限は (21) を満たす係数 $\lambda=\{\lambda_{\nu,m}\}_{\nu\in\mathbb{N}_0,m\in\mathbb{Z}^n}$ 全てにわたってとるものとする.

3.3 Key lemmas

定理3.8を示すために, Gonçalves-Kempka [2] が示した補題を導入する. Gonçalves-Kempka [2] は実数値の non-smooth atoms に対して考察をしているが, 次の補題は複素数値の non-smooth atoms に対しても成り立つ.

補題 3.9 ([2, Lemma 3.6]). $j\in\mathbb{N}_0$ とし, $\psi_j(x)=\psi(2^{-j}x)$ を定理 *2.1* の *local mean* とする. R を (4) における数とする. このとき, 任意に大きい $K>0$ と $L\le R+1$ に対して, $2^{-jn}\psi_j$ は *non-smooth* $[K,L]$*-atom centered at* $Q_{j,0}$ である.

補題 3.10 ([2, Lemma 3.7]). $j\in\mathbb{N}_0$ とする. $\psi_j(x)=\psi(2^{-j}x)$ を定理 *2.1* における *local mean* とし, $\{a_{\nu,m}\}_{\nu\in\mathbb{N}_0,m\in\mathbb{Z}^n}$ を *non-smooth* $[K,L]$*-atoms centered at* $Q_{\nu,m}$ とする. このとき,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\Psi_j(y)a_{\nu,m}(x-y)\,\mathrm{d}y\right|\le c2^{-(j-\nu)K}\chi_{cQ_{\nu,m}}(x)\quad for\quad j\ge\nu$$

と

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\Psi_j(x-y)a_{\nu,m}(y)\,\mathrm{d}y\right|\le c2^{-(\nu-j)(L+n)}\chi_{c2^{\nu-j}Q_{\nu,m}}(x)\quad for\quad j<\nu$$

が成り立つ.

補題 3.11 ([1, Lemma A.2]). $\kappa\ge n,\ \varepsilon>0,\ \{\lambda_{\nu m}\}_{\nu\in\mathbb{N}_0,m\in\mathbb{Z}^n}\in\mathbb{C}$ とする. このとき,

$$\left|\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\lambda_{\nu m}\langle 2^\nu x-m\rangle^{-\kappa-\varepsilon}\right|\lesssim\left(M\left[\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\lambda_{\nu m}\chi_{Q_{\nu m}}\right)^{\frac{n}{\kappa}}\right](x)\right)^{\frac{\kappa}{n}} \tag{22}$$

が成り立つ.

補題 3.12. $0 < q < \infty$, $0 < r \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とする．さらに, $r < \infty$ のときは, φ は (2) を満たすとする．このとき,

$$(\|f_1 + f_2\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}})^{\min(1,q,r)} \le (\|f_1\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}})^{\min(1,q,r)} + (\|f_2\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}})^{\min(1,q,r)}$$

が任意の $f_1, f_2 \in \mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つ．

命題 3.13 ([6, Proposition 3.6])**.** $0 < q < \infty$, $0 < r \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とする．さらに, $r < \infty$ のときは, φ は (2) を満たすとする．このとき,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ．

3.4 定理 3.8 の証明

Gonçalves-Kempka [2, Theorem 3.14] の証明法を参考にする．$K', L' \in \mathbb{N}$ は $K \le K'$ and $L \le L'$ を満たすとする．注意 3.6 により, 任意の smooth $[K', L']$-atom は a non-smooth $[K, L]$-atom である．K と L の仮定から, $K' \ge [1+s]_+$ と $L' > \sigma_q - s$ が成り立つことに注意する．よって, “必要条件” であることは, smooth atomic decompositions (定理**??**) からわかる．

よって, “十分条件” であることを示す．f を,

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{\nu,m} a_{\nu,m} = \sum_{\nu=0}^{j} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{\nu,m} a_{\nu,m} + \sum_{\nu=j+1}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{\nu,m} a_{\nu,m} =: f_j + f^j$$

と 2 つの部分に分ける．このとき, 定理 2.1 から,

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}} &\sim \|\{2^{js}\Psi_j * f\}_{j=0}^{\infty}\|_{\mathcal{M}^\varphi_q(\ell^r)} \\ &\lesssim \|\{2^{js}\Psi_j * f_j\}_{j=0}^{\infty}\|_{\mathcal{M}^\varphi_q(\ell^r)} + \|\{2^{js}\Psi_j * f^j\}_{j=0}^{\infty}\|_{\mathcal{M}^\varphi_q(\ell^r)} \\ &=: I + II \end{aligned} \tag{23}$$

とできることがわかる．

Step 1. I を評価する．つまり, $j \ge \nu$ のときを考える．補題 3.10 から, 任意の $x \in cQ_{\nu,m}$ に対して,

$$|2^{js}\Psi_j * f_j(x)| \lesssim \sum_{\nu=0}^{j} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\lambda_{\nu,m}| 2^{-(j-\nu)(K-s)} 2^{\nu s} \chi_{cQ_{\nu,m}}(x)$$

が成り立つ. $\delta = K - s$ として, 補題 2.5 を使うと,

$$\begin{aligned} I &\lesssim \left\| \left\{ \sum_{\nu=0}^{j} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{\nu,m}| 2^{-(j-\nu)(K-s)} 2^{\nu s} \chi_{cQ_{\nu,m}}(\cdot) \right\}_{j=0}^{\infty} \right\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}(\ell^r)} \\ &\lesssim \left\| \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{\nu,m}| 2^{\nu s} \chi_{cQ_{\nu,m}}(\cdot) \right\}_{\nu=0}^{\infty} \right\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}(\ell^r)} \end{aligned}$$

が成り立つ. 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と $N_1 > 0$ に対して,

$$\chi_{cQ_{\nu,m}}(x) \lesssim (1 + |2^{\nu}x - m|)^{-N_1}$$

が成り立つことに注意する. $0 < t < \min\{1, q\}$ とし, N_1 と $\epsilon > 0$ を $N_1 > n/t + \epsilon$ を満たすものとする. 補題 3.11 と定理 2.4 から,

$$\begin{aligned} I &\lesssim \left\| \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{\nu,m}| 2^{\nu s} \chi_{cQ_{\nu,m}}(\cdot) \right\}_{\nu=0}^{\infty} \right\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}(\ell^r)} \\ &\lesssim \left\| \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{\nu,m}| 2^{\nu s} (1 + |2^{\nu} \cdot - m|)^{-N_1} \right\}_{\nu=0}^{\infty} \right\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}(\ell^r)} \\ &\lesssim \left\| \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{\nu,m}| 2^{\nu s} (1 + |2^{\nu} \cdot - m|)^{-n/t-\epsilon} \right\}_{\nu=0}^{\infty} \right\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}(\ell^r)} \\ &\lesssim \left\| \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{\nu,m}| 2^{\nu s} \langle 2^{\nu} \cdot - m \rangle^{-n/t-\epsilon} \right\}_{\nu=0}^{\infty} \right\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}(\ell^r)} \\ &\lesssim \left\| \left\{ \left[M \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{\nu,m}|^t 2^{\nu s t} \chi_{Q_{\nu,m}} \right) \right]^{1/t} \right\}_{\nu=0}^{\infty} \right\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}(\ell^r)} \\ &\lesssim \|\lambda\|_{\mathbf{e}^s_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}} \end{aligned}$$

と評価することができる.

Step 2. II を評価する. つまり, $j < \nu$ の場合を考える. 補題 3.10 より, 任意の $x \in c2^{\nu-j}Q_{\nu,m}$ に対して,

$$|2^{js}\Psi_j * f_j(x)| \lesssim \sum_{\nu=j+1}^{\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\lambda_{\nu,m}| 2^{-(\nu-j)(L+n+s)} 2^{\nu s} \chi_{c2^{\nu-j}Q_{\nu,m}}(x)$$

が成り立つ. 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と $N_2 > 0$ に対して,

$$\chi_{c2^{\nu-j}Q_{\nu,m}}(x) \lesssim (1 + 2^j|x - 2^{-\nu}m|)^{-N_2}$$

が成り立つことに注意すると,

$$|2^{js}\Psi_j * f_j(x)| \lesssim \sum_{\nu=j+1}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|\lambda_{\nu,m}|2^{-(\nu-j)(L+n+s)}2^{\nu s}(1+2^j|x-2^{-\nu}m|)^{-N_2}$$

が成り立つことがわかる. $0<t<\min\{1,q,r\}$ とし, N_2 を $\frac{n}{t}<N_2\le L+n+s$ を満たすものとする. このとき, $N_2>\frac{n}{t}+\epsilon$ を満たす $\epsilon>0$ が存在するので, 補題 3.11 から,

$$\begin{aligned}
II &\lesssim \left\| \left\{ \sum_{\nu=j+1}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|\lambda_{\nu,m}|2^{-(\nu-j)(L+n+s)}2^{\nu s}(1+2^j|\cdot-2^{-\nu}m|)^{-N_2} \right\}_{j=0}^{\infty} \right\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}(\ell^r)} \\
&\lesssim \left\| \left\{ \sum_{\nu=j+1}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|\lambda_{\nu,m}|2^{-(\nu-j)(L+n+s-N)}2^{\nu s}(1+|2^{\nu}\cdot-m|)^{-n/t-\epsilon} \right\}_{j=0}^{\infty} \right\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}(\ell^r)} \\
&\lesssim \left\| \left\{ \sum_{\nu=j+1}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|\lambda_{\nu,m}|2^{-(\nu-j)(L+n+s-N)}2^{\nu s}\langle 2^{\nu}\cdot-m\rangle^{-n/t-\epsilon} \right\}_{j=0}^{\infty} \right\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}(\ell^r)} \\
&\lesssim \left\| \left\{ \sum_{\nu=j+1}^{\infty}2^{-(\nu-j)(L+n+s-N)}\left[M\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}2^{\nu st}|\lambda_{\nu,m}|^t\chi_{\nu,m}(\cdot)\right)\right]^{1/t} \right\}_{j=0}^{\infty} \right\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}(\ell^r)}
\end{aligned}$$

を得る. 補題 2.5($\delta=L+n+s-N\ge 0$)と定理 2.4 により,

$$\begin{aligned}
II &\lesssim \left\| \left\{ \sum_{\nu=j+1}^{\infty}2^{-(\nu-j)(L+n+s-N)}\left[M\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}2^{\nu st}|\lambda_{\nu,m}|^t\chi_{\nu,m}(\cdot)\right)\right]^{1/t} \right\}_{j=0}^{\infty} \right\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}(\ell^r)} \\
&\lesssim \left\| \left\{ \left[M\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}2^{\nu st}|\lambda_{\nu,m}|^t\chi_{\nu,m}(\cdot)\right)\right]^{1/t} \right\}_{\nu=0}^{\infty} \right\|_{\mathcal{M}_q^{\varphi}(\ell^r)} \\
&= \left\| \left\{ M\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}2^{\nu st}|\lambda_{\nu,m}|^t\chi_{\nu,m}(\cdot)\right) \right\}_{\nu=0}^{\infty} \right\|_{\mathcal{M}_{q/t}^{\varphi^t}(\ell^r)}^{1/t} \\
&\lesssim \left\| \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}^n}2^{\nu st}|\lambda_{\nu,m}|^t\chi_{\nu,m}(\cdot) \right\}_{\nu=0}^{\infty} \right\|_{\mathcal{M}_{q/t}^{\varphi^t}(\ell^r)}^{1/t} \\
&= \|\lambda\|_{\mathbf{e}^s_{\mathcal{M}_q^{\varphi},r}}
\end{aligned}$$

が成り立つ.

3.5 補題 3.7 の証明

定理 3.8 の証明の Step 2 と同様の手法で示すことができる．$\epsilon > 0$ を $L > \sigma_q + \epsilon - s$ を満たすように取る．いま,

$$f^\nu = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{\nu,m} a_{\nu,m}$$

とすると, 明らかに $f^\nu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ である．定理 3.8 の証明の Step 2 と同様にして,

$$\|f^\nu\|_{\mathcal{E}^{s-\epsilon}_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}} \lesssim \|\lambda\|_{\mathbf{e}^{s-\epsilon}_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}} \lesssim 2^{-\nu\epsilon}\|\lambda\|_{\mathbf{e}^{s}_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}}$$

が成り立つことがわかる．よって, 補題 3.12 から,

$$\left\|\sum_{\nu=0}^{\infty} f^\nu\right\|^{\min\{1,q,r\}}_{\mathcal{E}^{s-\epsilon}_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}} \lesssim \sum_{\nu=0}^{\infty} \|f^\nu\|^{\min\{1,q,r\}}_{\mathcal{E}^{s-\epsilon}_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}} \lesssim \|\lambda\|^{\min\{1,q,r\}}_{\mathbf{e}^{s}_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}} < \infty$$

が成り立つ．命題 3.13 より, $\sum_{\nu=0}^{\infty} f^\nu$ は $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ で収束する．

4 Pointwise multipliers

中村-野井-澤野 [6] において, クォーク分解を利用することにより, 次の pointwise multiplier の結果を得ている．

定理 4.1 ([6, Theorem 5.4])**.** $0 < q < \infty$, $0 < r \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とする．$k > s > \sigma_{qr}$ ならば, 写像

$$g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto g \cdot f \in \mathrm{BC}^k(\mathbb{R}^n)$$

は $\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(\mathbb{R}^n)$ からそれ自身への有界線形作用素に拡張することができる．つまり,

$$\|g \cdot f\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}} \lesssim \|g\|_{\mathrm{BC}^k}\|f\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}}$$

が任意の $f \in \mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(\mathbb{R}^n)$ と $g \in \mathrm{BC}^k(\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つ．

ここで, 前節で示した non-smooth atomic decomposition を応用することにより, より一般的な pointwise multipliers の有界性を示すことができる．

定理 4.2 (Pointwise multiplier)**.** $0 < q, r \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とする．$\rho > \max\{s, \sigma_q - s\}$ とすると,

$$\|\varphi \cdot f\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}} \lesssim \|\varphi\|_{\mathcal{C}^\rho}\|f\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}}$$

が任意の $\varphi \in \mathcal{C}^\rho(\mathbb{R}^n)$ と $f \in \mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つ．

4.1 Key lemmas

定理 4.2 を示すために, Gonçalves-Kempka [2] により得られた補題を使う.

補題 4.3 ([2, Lemma 4.1]). $\rho \geq 0$ とする. このとき, 任意の $f, g \in \mathcal{C}^\rho(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\|f \cdot g\|_{\mathcal{C}^\rho} \lesssim \|f\|_{\mathcal{C}^\rho}\|g\|_{\mathcal{C}^\rho}$$

が成り立つ. 特に, $f \cdot g \in \mathcal{C}^\rho(\mathbb{R}^n)$ である.

補題 4.4 ([2, Lemma 4.2]). $\rho \geq \max\{K, L\}$ とする. このとき, 任意の *non-smooth* $[K, L]$*-atoms* $\{a_{\nu,m}\}_{\nu\in\mathbb{N}_0, m\in\mathbb{Z}^n}$ と $\varphi \in \mathcal{C}^\rho(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$c\|\varphi\|_{\mathcal{C}^\rho}^{-1} \cdot \varphi \cdot a_{\nu,m}$$

が *non-smooth* $[K, L]$*-atom centered at* $dQ_{\nu,m}$ であるような定数 $c > 0$ が存在する.

4.2 定理 4.2 の証明

Gonçalves-Kempka [2, Theorem 4.3] と同様の議論をする. $f \in \mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}(\mathbb{R}^n)$ とする. K を $\rho \geq K > s$ を満たすようにとり, L を $\rho \geq L > \sigma_{q,r} - s$ を満たすものとする. 定理 3.8 より, ある $\lambda = \{\lambda_{\nu,m}\}_{\nu\in\mathbb{N}_0, m\in\mathbb{Z}^n} \in \mathbf{e}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}$ と non-smooth $[K, L]$-atoms $\{a_{\nu m}\}_{\nu\in\mathbb{N}_0, m\in\mathbb{Z}^n}$ が存在し, f を

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \lambda_{\nu,m} a_{\nu,m}$$

と分解でき, さらに,

$$\|\lambda\|_{\mathbf{e}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}}$$

が成り立つ. 補題 4.3 より,

$$\varphi \cdot f = \|\varphi\|_{\mathcal{C}^\rho} \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \lambda_{\nu,m}\left(\|\varphi\|_{\mathcal{C}^\rho}^{-1} \cdot \varphi \cdot a_{\nu,m}\right)$$

は, $\|\varphi\|_{\mathcal{C}^\rho}\lambda$ を係数とする $\varphi \cdot f$ における non-smooth atomic decomposition である. よって, 再度定理 3.8 を使うことにより,

$$\|\varphi \cdot f\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}} \lesssim \|\varphi\|_{\mathcal{C}^\rho}\|\lambda\|_{\mathbf{e}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}} \lesssim \|\varphi\|_{\mathcal{C}^\rho}\|f\|_{\mathcal{E}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}}$$

が成り立つ.

参考文献

[1] M. Frazier and B. Jawerth, *A discrete transform and decompositions of distribution spaces.* J. Funct. Anal. **93** (1990), 34–170.

[2] H. F. Gonçalves, and H. Kempka, *Non-smooth atomic decomposition of 2-microlocal spaces and application to pointwise multiplies.* J. Math. Anal. Appl. **434** (2016), 1875–1890.

[3] H. Kempka and J. Vybíral, *Spaces of variable smoothness and Integrability : Characterizations by Local Means and Ball Means of Differences.* J. Fourier Anal. Appl. **18** (2012), 852–891.

[4] E. Nakai, *Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces.* Math. Nachr. **166** (1994), 95–103.

[5] E. Nakai, A characterization of pointwise multipliers on the Morrey spaces, Sci. Math. Jpn **3** (2000), 445–454.

[6] S. Nakamura, T. Noi and Y. Sawano, *Gereralized Morrey spaces and trace operator.* Sci. China Math. **59** (2016), 281–336.

空間依存するコインをもつ量子ウォークの弱収束定理

信州大学　鈴木章斗

1　はじめに

量子ウォークにおける弱収束定理は，2002 年に，今野 [6] によってはじめて証明された．弱収束手定理に関する比較的最近までの研究成果がまとめられたものとしては、[8, 9, 11, 15] が挙げられる．一口に量子ウォークといっても，連続時間のものと離散時間のものの 2 種類がある．連続時間のものは，グラフ上のラプラシアンをハミルトニアンにもつ量子力学系とみなせるので，離散シュレーディンガー作用素の研究の範疇にある [2]. 一方で，離散時間のものは，ハミルトニアンと呼ぶべきものが定まらないので，離散シュレーディンガー作用素のそれとは異なるアプローチが必要となる．この講演では，専ら離散時間のみを考え，量子ウォークといったら，離散時間量子ウォークを指す．

量子ウォークを，ランダムウォークの量子版とする見方がある．ランダムウォークでは，1 次元格子 $\mathbb{Z}$ 上を移動するランダムウォーカーが，時刻 t で位置 $x \in \mathbb{Z}$ に現れる確率 $\nu_t^{(\mathrm{cl})}(x)$ は，漸化式

$$\nu_{t+1}^{(\mathrm{cl})}(x) = p\nu_t^{(\mathrm{cl})}(x+1) + q\nu_t^{(\mathrm{cl})}(x-1) \tag{1.1}$$

に従う．この式は，ランダムウォーカーが，単位時間当たりに，左に確率 p，右に確率 q で移動することを意味する．ここで，p，q は非負実数で，ランダムウォーカーは必ず左または右に移動するので $p+q=1$ を満たす．一方，量子ウォークでは，時刻 t で位置 x に現れる確率 $\nu_t(x)$ は，量子ウォーカーの状態によって定まる．1 次元格子上を，左または右に運動する量子ウォーカーの状態は，ヒルベルト空間

$$\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}^2) \equiv \left\{ \Psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \sum_{x\in\mathbb{Z}} \|\Psi(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 < \infty \right\} \tag{1.2}$$

の正規化されたベクトルによって表される．時刻 t での量子ウォーカーの状態を Ψ_t で表すとき，便宜的に，$\Psi_t(x)$ も時刻 t，位置 x における量子ウォーカーの状態ということにする．このとき，状態 $\Psi_t(x)$ の時間発展は

$$\Psi_{t+1}(x) = P\Psi_t(x+1) + Q\Psi_t(x-1) \tag{1.3}$$

で与えられる．ここで，P，$Q \in M_2(\mathbb{C})$ である．量子ウォーカーが時刻 t で位置 x に存

在する確率は,
$$\nu_t(x) = \|\Psi_t(x)\|^2_{\mathbb{C}^2} \tag{1.4}$$
で定義される．状態の時間発展 (1.3) をランダムウォークの時間発展 (1.1) の量子力学的拡張とみるとき，量子ウォークは，ランダムウォークの量子版といわれる．

状態を
$$\Psi_t(x) = \begin{pmatrix} \Psi_{t,1}(x) \\ \Psi_{t,2}(x) \end{pmatrix}$$
と表すとき，添え字 1，2 が量子ウォーカーのもつ内部自由度を表すと考える．この内部自由度をカイラリティともいう．(1.3) は，量子ウォーカーが左に進むときは行列 P で，右に進むときは行列 Q で，それぞれカイラリティを変化させながら，確率的に進むことを表している．

$\mathcal{H}$ 上の作用素 U を
$$(U\Psi)(x) = P\Psi(x+1) + Q\Psi(x-1), \quad x \in \mathbb{Z} \tag{1.5}$$
で定義し，U を時間発展と呼ぶ．初期状態を $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ とすれば，(1.3) から
$$\Psi_t = U^t\Psi_0, \quad t \geq 1 \tag{1.6}$$
と表される．任意の時刻 t において，ν_t が $\mathbb{Z}$ 上の確率になることは U のユニタリ性によって保証される．

1.1 コイン付き量子ウォーク

時間発展 U がユニタリ性について述べる．より一般的な場合を考えて，U が
$$(U\Psi)(x) = P(x+1)\Psi(x+1) + Q(x-1)\Psi(x-1), \quad x \in \mathbb{Z} \tag{1.7}$$
によって定義される場合を考える．ここで，$P(x)$，$Q(x) \in M_2(\mathbb{C})$ である．$C(x) = P(x) + Q(x)$ とするとき，$\Psi \in \mathcal{H}$ に対する作用が
$$(C\Psi)(x) = C(x)\Psi(x), \quad x \in \mathbb{Z}$$
によって定義される $\mathcal{H}$ 上の作用素 C をコイン作用素という．また，時間発展が (1.7) で与えられる量子ウォークを**コイン付き量子ウォーク**という．

コイン付き量子ウォークのユニタリ性は，コイン作用素のユニタリ性によって導かれる．任意の状態を $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ と表すとき，
$$(S\Psi)(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x+1) \\ \Psi_2(x-1) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{Z}$$

で定まるユニタリ作用素をシフト作用素という．もし，任意の $x \in \mathbb{Z}$ で

$$C(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \in U(2), \quad P(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

となれば，(1.7) で定義される U は

$$U = SC \tag{1.9}$$

と表されユニタリとなる．ここで，$U(2)$ は 2 次のユニタリ群を表す．逆に，(1.7) で定義される U がユニタリであるときは，定数倍を除き (1.9) の形で表される作用素とユニタリ同値になり，(1.8) を満たすことが知られている ([10])．以上の考察から，ユニタリなコイン付き量子ウォークの時間発展 U として，ユニタリなコイン作用素 C をもつ (1.9) の形の作用素を考えれば十分である．

$C(x)$ が位置 x に依らず一定の値をとるとき，コイン作用素 C は空間一様であるという．今野 [6] で弱収束定理が得られた模型は，空間一様なコイン作用素をもつコイン付き量子ウォークである．本講演では，空間非一様なコイン作用素をもつ量子ウォークに興味がある．

1.2 弱収束定理

本講演のテーマはコイン付き量子ウォークの弱収束定理である．量子ウォーカーの初期状態を $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ とするとき，時刻 t における量子ウォーカーの位置 X_t の分布は

$$P(X_t = x) = \|\Psi_t(x)\|^2_{\mathbb{C}^2}, \quad x \in \mathbb{Z} \tag{1.10}$$

で与えられる．すなわち，確率変数 X_t は，(1.4) で定義された $\nu_t(x)$ を分布にもつ．量子ウォークの弱収束定理は，X_t/t の分布の $t \to \infty$ における弱収束をいうものである．言い換えれば，X_t/t が法則収束するような確率変数 V の存在をいうのである．特性関数の言葉でいえば

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(e^{i\xi X_t/t}) = \mathbb{E}(e^{i\xi V}), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

と同値である．

量子ウォークの弱収束定理は，ランダムウォークにおける de Moivre-Laplace の定理，または中心極限定理の量子版とみなせる．これを説明するために，まずは，ランダムウォークをおさらいしよう．時刻 t におけるランダムウォーカーの位置 $X_t^{(\mathrm{cl})}$ の分布は $\nu_t^{(\mathrm{cl})}(x)$ に他ならない．すなわち，

$$P(X_t^{(\mathrm{cl})} = x) = \nu_t^{(\mathrm{cl})}(x), \quad x \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ．$X_t^{(\mathrm{cl})}$ の分布の時間漸近的振る舞いは，次の de Moivre-Laplace の定理，または中心極限定理によって理解される．簡単のため，$p = q = 1/2$ とし，ランダムウォーカーは初期時刻 $t = 0$ で原点にいるとする．

定理 1.1 (de Moivre-Laplace)**.** 確率変数 $X_t^{(\mathrm{cl})}/\sqrt{t}$ の分布は，$t \to \infty$ のとき，標準正規分布に弱収束する．

次に，今野 [6] によって最初に証明された空間一様なコインをもつ量子ウォークの弱収束定理をみてみよう．以後，空間一様でない場合と区別するため，空間一様な量子ウォークの時間発展を

$$U_0 = SC_0$$

と書く．ここで，$C_0 \in U(2)$ は

$$C_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

と表されるとし，同じ記号で $C(x) \equiv C_0$ となる空間一様なコイン作用素を表す．分解 $C_0 = P + Q$ を (1.8) に習って適切に定めれば，U_0 は (1.5) から定まる時間発展に等しいことがわかる．以後，$0 < |a| < 1$ を仮定する．$|a| = 0$ または $|a| = 1$ の場合は，単純なものになってしまうためである（[9] を参照されたい）．

初期状態 $\Psi_0(x)$ を

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} \varphi, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

と仮定し，原点から出発する量子ウォークを考える．ここで，$\varphi \in \mathbb{C}^2$ は単位ベクトルである．これまで同様，量子ウォーカーの位置 X_t を (1.10) で定義する．ただし，状態の時間発展は，(1.11) と (1.12) を用いて，$\Psi_t = U_0^t \Psi_0$ と定義する．

定理 1.2 (今野の弱収束定理 [6])**.** 確率変数 X_t/t の分布は，$t \to \infty$ のとき，確率分布

$$\mu(dv) = (1 - cv) f_K(v; |a|) dv \tag{1.13}$$

に弱収束する．ここで，$c = c(a, b, \varphi)$ は定数である．また，f_K は今野関数と呼ばれる次の関数である．

$$f_K(v; r) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 - r^2}}{\pi(1 - v^2)\sqrt{r^2 - v^2}}, & v \in (-r, r), \\ 0, & \text{その他}. \end{cases} \tag{1.14}$$

この定理における定数 $c = c(a, b, \varphi)$ の具体形は，原著論文 [6] などを参照してほしい．

こうして，ランダムウォークにおける de Moivre-Laplace の定理（定理 1.1）と量子ウォークにおける今野の定理（定理 1.2）は，位置 $X_t^{(\mathrm{cl})}$ および X_t の適当なスケールによる弱収束定理として捉えることができた．これが，量子ウォークの弱収束定理が de Moivre-Laplace の定理の量子版と言われる所以である．しかしながら，これら 2 つの弱収束定理は次の点でかなり異なったものになっている．まず，時間スケールにおいては，ランダムウォークは，$1/\sqrt{t}$ でスケールされるのに対し，量子ウォークでは，$1/t$ でスケールされる．量子ウォークのこの性質を，線形的広がりとよび，形式的に

$$X_t \sim tV$$

と表す．また，弱極限分布も，ランダムウォークでは標準正規分布であるのに対し，量子ウォークでは密度関数が有界な台をもち，$\pm|a|$ 付近で発散する今野関数を用いて表されることも特徴的である．

本講演の目的は，空間依存する（非一様な）コインから定義される時間発展 U をもつ量子ウォークの弱収束定理を紹介することである．

2 GJS 法

今野 [6, 7] による定理 1.2 の最初の証明は，組み合わせ論的な方法で行われた．その後，Grimmett ら [3] は，フーリエ変換を用いた GJS 法によって，証明を簡略化し，初期条件や次元を拡張する結果を得た．ここでは，GJS 法を用いた定理 1.2 の証明を概観しつつ，空間に依存するコインをもつ量子ウォークの弱収束定理の主張を述べる準備を行う．

GJS 法では，正規化された任意の状態 $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ を初期状態にとれる．X_t/t の特性関数を，$\mathcal{H}$ 上の作用素の言葉に翻訳しよう．$\mathcal{H}$ 上の位置作用素 $\hat{x}$ を

$$(\hat{x}\Psi)(x) = x\Psi(x), \quad x \in \mathbb{Z}$$

と定義する．時間発展 U_0 に対する $\hat{x}$ のハイゼンベルグ作用を

$$\hat{x}_0(t) = U_0^{-t}\hat{x}U_0^t$$

とする．1 点 $x \in \mathbb{Z}$ にのみ台をもつ $\Psi \in \mathcal{H}$ のなす部分空間への射影を Π_x とする．すなわち，

$$(\Pi_x\Psi)(y) = \begin{cases} \Psi(x), & y = x \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

とする．X_t/t の特性関数は，次のように，初期状態とハイゼンベルグ作用素を用いて表される．

補題 2.1. X_t/t の特性関数は

$$\mathbb{E}(e^{i\xi X_t/t}) = \langle \Psi_0, e^{i\xi\hat{x}_0(t)/t}\Psi_0\rangle, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

と表せる．

証明．X_t/t の分布は

$$P(X_t = x) = \|\Psi_t(x)\|^2_{\mathbb{C}^2} = \|\Pi_x U^t \Psi_0\|^2 = \langle U_0^t\Psi_0, \Pi_x U_0^t \Psi_0\rangle$$

と表せる．X_t/t の特性関数の定義より

$$\mathbb{E}(e^{i\xi X_t/t}) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} e^{i\xi x/t} P(X_t = x) = \left\langle U_0^t\Psi_0, \left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} e^{i\xi x/t}\Pi_x\right) U_0^t\Psi_0 \right\rangle$$

と表せる．位置作用素は自己共役で，$\hat{x} = \sum_{x\in\mathbb{Z}} x\Pi_x$ とスペクトル分解できるので，ユニタリ共変性から $e^{i\xi\hat{x}_0(t)/t} = U_0^{-t}e^{i\xi\hat{x}/t}U_0^t = U_0^{-t}\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} e^{i\xi x/t}\Pi_x\right)U_0^t$ となり，補題が証明できた． □

Grimmett たちが成した最も重要なことは，

$$\lim_{t\to\infty} \left\langle \Psi_0, e^{i\xi\hat{x}_0(t)/t}\Psi_0 \right\rangle = \left\langle \Psi_0, e^{i\xi\hat{v}_0}\Psi_0\right\rangle, \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

を満たす自己共役作用素 $\hat{v}_0$ を見つけたことである．$\hat{v}_0$ は速度作用素とか漸近速度と呼ばれる．漸近速度 $\hat{v}_0$ のスペクトル測度 $E_{\hat{v}_0}$ から定まる確率分布 $\|E_{\hat{v}_0}(\cdot)\Psi_0\|^2$ に従う確率変数を V とおく．このとき，補題 2.1 とスペクトル定理より

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}(e^{i\xi X_t/t}) &= \langle \Psi_0, e^{i\xi\hat{v}_0}\Psi_0\rangle \\ &= \int_{\sigma(\hat{v}_0)} e^{i\xi v} d\|E_{\hat{v}_0}(v)\Psi_0\|^2 = \mathbb{E}(e^{i\xi V})\end{aligned}$$

となる．これは，X_t/t が V に法則収束することと，X_t/t の弱極限分布は $\|E_{\hat{v}_0}(\cdot)\Psi_0\|^2$ であることを意味する．要するに，GJS 法による量子ウォークの弱収束定理の証明では，漸近速度 $\hat{v}_0$ を見つければよいのである．

以下では，GJS 法の核心部である $\hat{v}_0$ の構成法を説明する．まず，時間発展 U_0 をフーリエ変換で対角化する．フーリエ空間を $\mathcal{K} = L^2\left([0,2\pi], \frac{dk}{2\pi}\right)$ と定義し，フーリエ変換 $\mathscr{F}: \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ を

$$\mathscr{F}\Psi(k) \equiv \hat{\Psi}(k) := \sum_{x\in\mathbb{Z}} e^{-ikx}\Psi(x), \quad k \in [0, 2\pi]$$

で定義する．このとき，U_0 のフーリエ変換 $\mathscr{F}U_0\mathscr{F}^{-1}$ は

$$\hat{U}_0(k) = \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} C_0 \in U(2)$$

による $\mathcal{K}$ 上の掛け算作用素になる．$\hat{U}_0(k)$ の固有値 $\lambda_j(k)$ $(j = 1, 2)$ に対する固有ベクトルを $|u_j(k)\rangle$ $(j = 1, 2)$ とおくと

$$\hat{U}_0(k) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j(k) |u_j(k)\rangle\langle u_j(k)|, \quad k \in [0, 2\pi]$$

と対角化される．ファイバー直積分の言葉で書けば

$$\mathscr{F}U_0\mathscr{F}^{-1} = \int_{[0,2\pi]}^{\oplus} \left(\sum_{j=1}^{2} \lambda_j(k) |u_j(k)\rangle\langle u_j(k)| \right) \frac{dk}{2\pi} \tag{2.2}$$

と表せる．いま，$v_j(k) = i\lambda_j'(k)/\lambda_j(k)$ $(j = 1, 2)$ として，エルミート行列 $\hat{v}_0(k) \in M_2(\mathbb{C})$ を

$$\hat{v}_0(k) = \sum_{j=1}^{2} v_j(k) |u_j(k)\rangle\langle u_j(k)|, \quad k \in [0, 2\pi]$$

で定義する．

注意 2.1. $\hat{v}_0(k)$ のエルミート性は，その表示から，固有値 $v_j(k)$ が実数であることによって保証される．実際，$\lambda_j(k)$ はユニタリ行列の固有値なので，$\lambda_j(k) = e^{i\eta_j(k)}$ $(\eta_j(k) \in [0, 2\pi])$ と表せるから，$v_j(k) = -\eta_j'(k) \in \mathbb{R}$ となる．

さて，$\hat{v}_0(k)$ による $\mathcal{K}$ 上の掛け算作用素をフーリエ変換にもつ自己共役作用素を $\hat{v}_0$ とする．すなわち，

$$\mathscr{F}\hat{v}_0\mathscr{F}^{-1} = \int_{[0,2\pi]}^{\oplus} \left(\sum_{j=1}^{2} v_j(k) |u_j(k)\rangle\langle u_j(k)| \right) \frac{dk}{2\pi}$$

とする．この $\hat{v}_0$ が漸近速度になる．実は，(2.1) より強い次の事実が成り立つ．

補題 2.2 ([14])**.**

$$\text{s-}\lim_{t\to\infty} e^{i\xi\hat{x}_0(t)/t} = e^{i\xi\hat{v}_0}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

証明の概略．詳しい証明は，[14] を参照してもらうことにして，アイディアだけ述べる．求めるべき極限は

$$\text{s-}\lim_{t\to\infty} (\hat{x}_0(t)/t - z)^{-1} = (\hat{v}_0 - z)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

と同値だが，極限議論とレゾルベント公式より，適当な部分空間で

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\left(\hat{v}_0-\frac{\hat{x}_0(t)}{t}\right)\Psi\right\|=0$$

をいえば十分である．フーリエ変換すると，固有ベクトルの直交性から

$$\begin{aligned}\left(\mathscr{F}\frac{\hat{x}_0(t)}{t}\Psi\right)(k)&=\hat{U}_0(k)^{-t}\left(\frac{i}{t}\frac{d}{dk}\right)\hat{U}_0(k)^t\hat{\Psi}(k)\\&=\frac{i}{t}\sum_{j=1}^{2}\lambda_j(k)^{-t}\left(\frac{d}{dk}\lambda_j(k)^t\right)|u_j(k)\rangle\langle u_j(k)|\hat{\Psi}(k)+O(t^{-1})\end{aligned}$$

のように展開でき，適当に部分空間と固有ベクトルを選べば，主要項以外は k について一様に $O(t^{-1})$ 評価できる．また，$(i/t)\lambda_j(k)^{-t}\big(\frac{d}{dk}\lambda_j(k)^t\big)=v_j(k)$ と計算できるから，主要項は，$\hat{v}_0(k)\Psi(k)$ に等しい．よって，

$$\left\|\left(\hat{v}-\frac{\hat{x}_0(t)}{t}\right)\Psi\right\|^2=\int_0^{2\pi}\frac{dk}{2\pi}\left\|\hat{v}_0(k)\hat{\Psi}(k)-\left(\mathscr{F}\frac{\hat{x}_0(t)}{t}\Psi\right)(k)\right\|^2=O(t^{-2})$$

となり，$t\to\infty$ とすれば，結論を得る． □

後は，弱極限分布 $\|E_{\hat{v}_0}(\cdot)\Psi_0\|^2$ から，密度関数をもとめれば，定理 1.2 の証明が完了する．密度関数の計算は，4.2 節で行う．

3　空間依存するコインをもつ量子ウォーク

3.1　仮定と基本的性質

前節までは，空間一様なコイン C_0 をもつ量子ウォークを考えた．ここからは，空間依存するコインをもつ時間発展 $U=SC$ を考える．次を仮定する．

(H) ある $C_\infty\in U(2)$ が存在して

$$\|C(x)-C_\infty\|\le c_1|x|^{-1-\epsilon},\quad x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

となる．ここで，$c_1>0$，$\epsilon>0$ は x に依存しない定数である．

例 3.1 (one defect model)**.** $C(x)$ を次のように定める．$C_0,C_\infty\in U(2)$ とするとき，

$$C(x):=\begin{cases}C_0, & x=0,\\ C_\infty, & \text{その他}\end{cases}$$

とする．明らかに，$\|C(x)-C_\infty\|=0$ $(x\neq 0)$ となり，(H) を満たす．

例 3.2 (infinite defects)**.** 次に，無限に defect をもつものを考えよう．C_∞ を Hadamard 行列

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

に等しいとし，

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{1+|x|^{-2-2\epsilon}} & \sqrt{1-|x|^{-2-2\epsilon}} \\ \sqrt{1-|x|^{-2-2\epsilon}} & -\sqrt{1+|x|^{-2-2\epsilon}} \end{pmatrix}, \quad x \neq 0$$

とおくと，(H) を満たす．

以後，常に (H) が仮定されているものとする．このとき，

$$U_\infty = SC_\infty \tag{3.1}$$

とすると，U_∞ は並進対称性をもち，(2.2) のようにファイバー分解可能になる．また，U_∞ に対する位置作用素のハイゼンベルグ作用素

$$\hat{x}_\infty(t) = U_\infty^{-t}\hat{x}U_\infty^{t}$$

に対しても，漸近速度 $\hat{v}_\infty$ が前節同様

$$\mathscr{F}\hat{v}_\infty\mathscr{F}^{-1} = \int_{[0,2\pi]}^{\oplus}\left(\sum_{j=1}^{2} v_j(k)|u_j(k)\rangle\langle u_j(k)|\right)\frac{dk}{2\pi}$$

と定義できる．ここで，記号を節約するため

$$C_\infty = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と C_∞ の要素も C_0 と同じ記号で表し，$v_j(k) = i\lambda_j(k)/\lambda_j(k)$，$\lambda_j(k)$, $u_j(k)$ も U_0 のときと同じ記号を使った．実は，$|a| = 0$ または $|a| = 1$ のときは，$v_j(k)$ が定数になってしまう．そのため，これまでと同様に，$0 < |a| < 1$ の仮定をおく．この条件があると，$v_j(k)$ は定数にならず，$\hat{v}_\infty$ は純粋に絶対連続スペクトルをもつ．補題 2.2 より

$$\text{s-}\lim_{t\to\infty} e^{i\xi\hat{x}_\infty(t)/t} = e^{i\xi\hat{v}_\infty} \tag{3.2}$$

となる．

Asch，Bourget，Joye らにより特異連続スペクトルの非存在定理 [1, Theorem 3.4, Proposition 4.1] が証明されている．

定理 3.1. 仮定 (H) の下で，U は特異連続スペクトルをもたない．

詳しくは，原論文 [1, Proposition 4.1] を参照してもらいたい．

3.2 散乱理論

次に，量子ウォークの時間発展 U と U_∞ に対する波動作用素の構成について概観する．まず，仮定 (H) の重要な帰結は，次の補題である．

補題 3.1. $U - U_\infty$ は，トレースクラス作用素である．

Proof. 直接計算より，

$$\begin{aligned} |U - U_\infty| &= ((U - U_\infty)^*(U - U_\infty))^{1/2} = ((C - C_\infty)^*(C - C_\infty))^{1/2} \\ &= \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}}((C(x) - C_\infty)^*(C(x) - C_\infty))^{1/2} = \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}}|C(x) - C_\infty| \end{aligned}$$

となるので，仮定 (H) より，$\mathrm{Tr}|U - U_\infty| < \infty$ がいえる． □

次の補題は，Kato-Rosenblum の定理の離散時間版もしくはユニタリ版である．証明は，[4, 5, 14] などを参照してほしい．

補題 3.2. U_1, U_2 をユニタリ作用素とし，$U_1 - U_2$ はトレースクラス作用素とする．このとき，

$$\operatorname*{s\text{-}\lim}_{t\to\infty} U_1^{-t}U_2^t\Pi_{\mathrm{ac}}(U_2)$$

が存在する．

補題 3.1 より，$U - U_\infty$ と $U_\infty - U$ はトレースクラス作用素なので，補題 3.2 より，次の 2 つの極限

$$\operatorname*{s\text{-}\lim}_{t\to\infty} U^{-t}U_\infty^t\Pi_{\mathrm{ac}}(U_\infty), \quad \operatorname*{s\text{-}\lim}_{t\to\infty} U_\infty^{-t}U^t\Pi_{\mathrm{ac}}(U).$$

が存在する．

定理 3.2. $W_+ = \text{s-}\lim_{t\to\infty} U^{-t}U_\infty^t\Pi_{\mathrm{ac}}(U_\infty)$ は，$\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(U_\infty)$ から $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(U)$ へのユニタリ作用素で，その共役は $W_+^* = \text{s-}\lim_{t\to\infty} U_\infty^{-t}U^t\Pi_{\mathrm{ac}}(U)$ である．

いま，時間発展 U に対する位置作用素のハイゼンベルグ作用素を

$$\hat{x}(t) = U^{-t}\hat{x}U^t$$

と表す．$\hat{v}_\infty$ をこの節の冒頭で定義したものとし，

$$\hat{v} = W_+\hat{v}_\infty W_+^*$$

とおく．

定理 3.3 ([14])**.** 仮定 (H) の下で

$$\text{s-}\lim_{t\to\infty} e^{i\xi\hat{x}(t)/t} = \Pi_{\mathrm{p}}(U) + e^{i\xi\hat{v}}\Pi_{\mathrm{ac}}(U), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

が成り立つ.

定理 3.3 を示すためには次を示せばよい.

命題 3.1.

(1) $\text{s-}\lim_{t\to\infty} e^{i\xi\hat{x}(t)/t}\Pi_{\mathrm{p}}(U) = \Pi_{\mathrm{p}}(U), \quad \xi \in \mathbb{R}.$
(2) $\text{s-}\lim_{t\to\infty} e^{i\xi\hat{x}(t)/t}\Pi_{\mathrm{ac}}(U) = e^{i\xi\hat{v}}\Pi_{\mathrm{ac}}(U), \quad \xi \in \mathbb{R}.$

まず, 命題 3.1 を使って, 定理 3.3 を証明してしまおう.

定理 3.3 の証明. 定理 3.1 より, $\Pi_{\mathrm{p}}(U) + \Pi_{\mathrm{ac}}(U) = 1$ である. よって, 命題 3.1 より

$$\begin{aligned}\text{s-}\lim_{t\to\infty} e^{i\xi\hat{x}(t)/t} &= \text{s-}\lim_{t\to\infty} e^{i\xi\hat{x}(t)/t}\Pi_{\mathrm{p}}(U) + \text{s-}\lim_{t\to\infty} e^{i\xi\hat{x}(t)/t}\Pi_{\mathrm{ac}}(U) \\ &= \Pi_{\mathrm{p}}(U) + e^{i\xi\hat{v}}\Pi_{\mathrm{ac}}(U)\end{aligned}$$

となり, 証明が完了する. □

命題 3.1 の証明をすれば, 定理 3.3 は完成する.

命題 3.1 の証明. まず, (1) を示す. これは, $\mathcal{H}$ 上の任意のユニタリ作用素で成り立つ. 極限議論により, U の有限個の固有ベクトル η_n $(n = 1, \ldots, N)$ の線形結合 $\Psi = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \eta_n$ について $\lim_{t\to\infty} e^{i\xi\hat{x}(t)/t}\Psi = \Psi$ を示せばよい. 実際, λ_n を η_n に対応する固有値とすると

$$\begin{aligned}\|e^{i\xi\hat{x}(t)/t}\Psi - \Psi\| &= \|(e^{i\xi\hat{x}/t} - 1)U^t\Psi\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \lambda_n^t (e^{i\xi\hat{x}/t} - 1)\eta_n \right\| \le \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n| \|(e^{i\xi\hat{x}/t} - 1)\eta_n\|\end{aligned}$$

となる. 優収束定理を使うと

$$\lim_{t\to\infty} \|(e^{i\xi\hat{x}/t} - 1)\eta_n\|^2 = \lim_{t\to\infty} \sum_{x\in\mathbb{Z}} |e^{i\xi x/t} - 1|^2 \|\eta_n(x)\|^2 = 0$$

となるから, (1) が証明できる.

(2) を示す．定理 3.2 より，$e^{i\xi v} = W_+ e^{i\xi v_\infty} W_+^*$ となる．$W_t = U^{-t} U_0^t$ とおくと

$$\begin{aligned} I(t) :&= e^{i\xi\hat{x}(t)/t}\Pi_{\mathrm{ac}}(U) - e^{i\xi\hat{v}}\Pi_{\mathrm{ac}}(U) \\ &= W_t e^{i\xi\hat{x}_\infty(t)/t}(W_t^* - W_+^*)\Pi_{\mathrm{ac}}(U) \\ &\qquad + W_t\left(e^{i\xi\hat{x}_\infty(t)/t} - e^{i\xi\hat{v}_\infty}\right)W_+^*\Pi_{\mathrm{ac}}(U) \\ &\qquad + (W_t - W_+)e^{i\xi\hat{v}_\infty}W_+^*\Pi_{\mathrm{ac}}(U) \\ &=: I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) \end{aligned}$$

と分解できる．定理 3.2 と (3.2) より，$\operatorname{s-lim}_{t\to\infty} I_1(t) = \operatorname{s-lim}_{t\to\infty} I_2(t) = 0$ となる．また，$[U_\infty, e^{i\xi v_\infty}] = \operatorname{s-lim}_{t\to\infty} U_\infty\left(e^{i\xi\hat{x}_\infty(t)/t} - e^{i\xi\hat{x}_\infty(t+1)/t}\right) = 0$ なので，$[\Pi_{\mathrm{ac}}(U_\infty), e^{i\xi v_\infty}] = 0$ が成り立つ．$\mathrm{Ran}(W_+^*) = \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(U_\infty)$ なので

$$I(t) = I_3(t) + o(1) = (W_t - W_+)\Pi_{\mathrm{ac}}(U_\infty)e^{i\xi\hat{v}_\infty}W_+^*\Pi_{\mathrm{ac}}(U) + o(1)$$

となり，定理 3.2 より結論を得る． □

3.3 弱収束定理

空間依存するコインをもつ時間発展 U に対する量子ウォーカーの位置を X_t で表し，確率分布

$$\mu_V = \|\Pi_{\mathrm{p}}(U)\Psi_0\|^2\delta_0 + \|E_{\hat{v}}(\cdot)\Pi_{\mathrm{ac}}(U)\Psi_0\|^2. \tag{3.3}$$

に従う確率変数を V とする．μ_V が確率測度であることは,

$$\mu_V(\mathbb{R}) = \|\Pi_{\mathrm{p}}(U)\Psi_0\|^2 + \|\Pi_{\mathrm{ac}}(U)\Psi_0\|^2$$

と，定理 3.1 から従う．次の弱収束定理は本講演の主定理である．

定理 3.4 ([14])**.** X_t/t の分布は，$t \to \infty$ のとき，確率分布

$$\mu = \|\Pi_{\mathrm{p}}(U)\Psi_0\|^2\delta_0 + \|E_{\hat{v}}(\cdot)\Pi_{\mathrm{ac}}(U)\Psi_0\|^2 \tag{3.4}$$

に弱収束する．

証明. 定理 3.4 は，X_t/t が V に法則収束することと同値である．つまり,

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}(e^{i\xi X_t/t}) = \mathbb{E}(e^{i\xi V}), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

を示せばよい．定理 3.1 と定理 3.2 より

$$\langle\Psi_0, (\Pi_{\mathrm{p}}(U) + e^{i\xi\hat{v}}\Pi_{\mathrm{ac}}(U))\Psi_0\rangle = \|\Pi_{\mathrm{p}}(U)\Psi_0\|^2 + \langle\Psi_{\mathrm{ac}}(U)\Psi_0, e^{i\xi\hat{v}}\Pi_{\mathrm{ac}}(U))\Psi_0\rangle$$

である．よって，定理 3.3 とスペクトル分解定理から

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}(e^{i\xi X_t/t}) &= \lim_{t\to\infty}\left\langle \Psi_0, e^{i\xi\hat{x}(t)/t}\Psi_0\right\rangle \\ &= e^{i\xi 0}\|\Pi_{\mathrm{p}}(U)\Psi_0\|^2 + \int e^{i\xi v} d\|E_{\hat{v}}(v)\Pi_{\mathrm{ac}}(U)\Psi_0\|^2 \\ &= \mathbb{E}(e^{i\xi V})\end{aligned}$$

となり証明が完了する． □

4 弱極限分布

この節では，前節で得られた弱極限分布 μ_V を詳しく調べていく．

4.1 局在化

(3.3) より

$$P(V=0) = \|\Pi_{\mathrm{p}}(U)\Psi_0\|^2$$

が成り立つ．$P(V=0)>0$ のとき，局在化が起きるという．局在化が起きるための必要十分条件は，初期状態が固有空間とオーバーラップをもつことである．ここでは，$P(V=0)$ の別の表示を求めよう．まず，X_t の分布の長時間平均を

$$\bar{\nu}_\infty(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1}P(X_t=x)$$

と表す．

定理 4.1.

$$P(V=0) = \sum_{x\in\mathbb{Z}}\bar{\nu}_\infty(x).$$

証明．Wiener の定理または RAGE の定理の離散版 (たとえば，[13]) を考えると

$$\bar{\nu}_\infty(x) = \|(\Pi_{\mathrm{p}}(U)\Psi_0)(x)\|^2$$

となるから，両辺の和をとると結論を得る． □

4.2 密度関数

極限分布 μ_V の絶対連続部分 $\|E_{\hat{v}}(\cdot)\Psi_0\|^2$ を計算する．まず，$\hat{v}_\infty$ のスペクトルを計算しよう．$C_\infty \in U(2)$ の一般形は

$$C_\infty = \begin{pmatrix} |a|e^{i\alpha} & b \\ -\bar{b}e^{i\delta} & |a|e^{i(\delta-\alpha)} \end{pmatrix}$$

である．ただし，

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \quad \mathrm{det} C_\infty = e^{i\delta}, \quad (\alpha, \delta \in [0, 2\pi))$$

とした．これまでと同様に，$0 < |a| < 1$ を仮定する．このとき，$U_\infty = SC_\infty$ のフーリエ変換は行列

$$\hat{U}_\infty(k) = \begin{pmatrix} e^{ik} & 0 \\ 0 & e^{-ik} \end{pmatrix} C_\infty = \begin{pmatrix} |a|e^{i(\alpha+k)} & be^{ik} \\ -\bar{b}e^{i(\delta-k)} & |a|e^{i(\delta-\alpha-k)} \end{pmatrix}$$

でファイバー分解できて，その固有値は

$$\lambda_\pm(k) = (\tau(k) \pm i\sqrt{1-\tau(k)^2})e^{i\delta/2},$$

となる．ここで，$\tau(k) = |a|\cos(k + \alpha - \delta/2)$ とおいた．このとき

$$v_\pm(k) := \frac{i\lambda'_\pm(k)}{\lambda_\pm(k)} = \frac{\mp|a|\sin(k+\alpha-\delta/2)}{\sqrt{1-\tau(k)^2}}$$

となる．よって

$$\sigma(\hat{v}_\infty) = \{v_\pm(k) \mid k \in [0, 2\pi)\} = [-|a|, |a|]$$

となる．また，[12, Theorem XIII.86] から，$\hat{v}_\infty$ のスペクトルは純粋に絶対連続である．

次に，$\|E_{\hat{v}_\infty}(\cdot)\Psi_0\|^2$ の密度関数を求める．以後，簡単のため，$\alpha - \delta/2 = 0$ として

$$v_\pm(k) = \frac{\mp|a|\sin k}{\sqrt{1-|a|^2\cos^2 k}}$$

で計算するが，一般の場合も同様に計算できる．この場合，$v_\pm$ の微分は

$$\frac{dv_\pm}{dk} = \frac{\mp\mathrm{sgn}(\cos k)}{\pi f_K(v_\pm(k); |a|)} \tag{4.1}$$

と計算できる．ここで，f_K は (1.14) で定義される今野関数である．(4.1) より，各 $v \in [0, |a|]$ に対して

$$v = v_-(k)$$

を満たす $k \in [0, \pi/2]$ は一意に定まるので，それを $k(v)$ と表す．

補題 4.1. $P_{\pm}^{\Psi_0}(k) = |\langle \hat{u}_{\pm}(k), \hat{\Psi}_0(k)\rangle|^2$ とおいて

$$w(\pm|v|;\Psi_0) = \frac{1}{2}\Big\{P_{\mp}^{\Psi_0}(k(|v|)) + P_{\mp}^{\Psi_0}(\pi - k(|v|)) \\ + P_{\pm}^{\Psi_0}(\pi + k(|v|)) + P_{\pm}^{\Psi_0}(2\pi - k(|v|))\Big\}$$

とするとき

$$d\|E_{\hat{v}_\infty}(v)\Psi_0\|^2 = w(v;\Psi_0) f_K(v;|a|)dv \tag{4.2}$$

と表せる.

証明. $\hat{v}_\infty$ の定義と (4.1) を用いて，$v = v_{\pm}(k)$ と変数変換すると

$$\langle \Psi_0, e^{i\xi\hat{v}_\infty}\Psi_0\rangle = \sum_{j=\pm}\int_0^{2\pi}\frac{dk}{2\pi}e^{i\xi v_j(k)}P_j^{\Psi_0}(k) \\ = \int_{[-|a|,|a|]} e^{i\xi v} w(v;\Psi_0) f_K(v;|a|)dv$$

が任意の $\xi \in \mathbb{R}$ で成り立つ．スペクトル定理から，左辺は $\|E_{\hat{v}_\infty}(\cdot)\Psi_0\|^2$ の特性関数に等しいので結論を得る.

□

以上から，$\|E_{\hat{v}}(\cdot)\Pi_{\mathrm{ac}}(U)\Psi_0\|^2$ の密度関数が求まる.

定理 4.2. $\Psi_+ = W_+^*\Psi_0$ とおくと

$$d\|E_{\hat{v}}(v)\Pi_{\mathrm{ac}}(U)\Psi_0\|^2 = w(v;\Psi_+) f_K(v;|a|)dv.$$

となる.

証明. 定理 3.2 と，スペクトル測度のユニタリ共変性から

$$\|E_{\hat{v}}(\cdot)\Pi_{\mathrm{ac}}(U)\Psi_0\|^2 = \|W_+E_{\hat{v}_\infty}(\cdot)W_+^*\Pi_{\mathrm{ac}}(U)\Psi_+\|^2 = \|E_{\hat{v}_\infty}(\cdot)\Psi_+\|^2$$

となる．(4.2) で，Ψ_0 に Ψ_+ を代入すれば結論を得る. □

Acknowledgements　本研究は JSPS 科研費 26800054 の助成を受けたものである.

参考文献

[1] J. Asch, O. Bourget, A. Joye, Spectral stability of unitary network models, *Rev. Math. Phys.* **27**, 1530004, 22pp., 2015.

[2] A. M. Childs, E. Farhi, S. Gutmann, An example of the difference between quantum and classical random walks, *Qauntum Inf. Process.* **1**, 35 – 43, 2002.

[3] G. Grimmett, S. Janson, P. Scudo, Weak limits for quantum random walks, *Phys. Rev. E* **69**, 026119, 2004.

[4] T. Kato, S. T. Kuroda, Theory of simple scattering and eigenfunction expansions, *Functional analysis and related fields* (Proc. Conf. for M. Stone, Univ. Chicago, Chicago, Ill., 1968), 99 – 131, Springer, New York, 1970.

[5] T. Kato, S. T. Kuroda The absract theory of scattering, *Rocky Mountain J. Math.* **1**, 127 – 172, 1971.

[6] N. Konno, Quantum random walks in one dimension, *Quantum Inf. Process.* **1**, 345–354, 2002.

[7] N. Konno, A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk, *J. Math. Soc. Japan* **57**, 1179–1195, 2005.

[8] N. Konno, Quantum walks, *Quantum Potential Theory*, 309–452, Lecture Notes in Math., **1954**, Springer, Berlin, 2008.

[9] 今野紀雄，量子ウォーク，森北出版，2014.

[10] H. Ohno, Unitary equivalent classes of one-dimensional quantum walks, arXiv:1603.05778.

[11] R. Portugal, Quantum walks and search algorithms, Springer, 2013.

[12] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics Vol. IV*, Academic Press, New York, 1977.

[13] E. Segawa, A. Suzuki, Genrator of an abstract quantum walk, *Quantum Stud.: Math. Found.* **3**, 11 – 30, 2016.

[14] A. Suzuki, Asymptotic velocity of a position-dependent quantum walk, *Quantum Inf. Process.* **15**, 103 – 119, 2016.

[15] S. E. Venegas-Andraca, Quantum walks: a comprehensive review, *Quantum Inf. Process.* **11**, 1015–1106, 2012.

Haagerup approximation property for von Neumann algebras

岡安　類　(大阪教育大学)

2016年9月1日

1. はじめに

本講演では, [4], [17], [18], [16] で得られた von Neumann 環に関する Haagerup approximation property (以下, HAP と略記) についての一連の結果を紹介する.

作用素環についての準備は必要最小限に留める. 作用素環の包括的な教科書として, 竹崎 [23, 24, 25] を挙げておく. この原稿を書くにあたり, 作用素環の専門家が書いた数学の論説, 泉 [10, 11], 勝良 [13], 河東 [14], 幸崎 [15], 小澤 [19, 20], 境 [22] を参考にした. 合わせて参照されたい.

2. 準備

2.1. C*-環と von Neumann 環

作用素環の主な研究対象は, ($\mathbb{C}$ 上の) Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ (普通は可分無限次元) の上の有界線形作用素全体 $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ の $*$-演算

$$\langle x^*\xi, \eta\rangle = \langle \xi, x\eta\rangle \quad (x \in \mathbb{B}(\mathcal{H}), \xi, \eta \in \mathcal{H})$$

に閉じている部分環であり, しかるべき位相で閉じているもの考える. 作用素 norm

$$\|x\| := \sup\{\|x\xi\| : \xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leq 1\} \quad (x \in \mathbb{B}(\mathcal{H}))$$

によって導入される作用素 norm 位相を考えれば, **C*-環**といい, また semi-norm の族

$$p_\xi(x) := \|x\xi\| \quad (\xi \in \mathcal{H})$$

で定義される**強作用素位相**を考えれば, **von Neumann 環**という. 強作用素位相の方が作用素 norm 位相より弱い位相だから, von Neumann 環も C*-環と考えられるが, 実際の研究手法は大分異なり, 作用素環の研究者としては, C*-環と von Neumann 環の 2 つからなっている意識である. もちろん, 両者には様々な類似点や関連があり, 互いに刺激しあって発展し続けている.

例 1 $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ は von Neuman 環 (でありC*-環) である. 特に, $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ のとき, $n \times n$ 行列環 $\mathbb{M}_n = \mathbb{B}(\mathbb{C}^n)$ である. このとき, $*$-演算は行列の各成分の複素共役をとり, 転置行列を対応させたものである. 実は有限次元な C*-環はいくつかの行列環の直和の形に限る.

例 2 測度空間 (Ω, μ) に対して, 本質的有界関数空間 $L^\infty(\Omega, \mu)$ は von Neumann 環である. 実際, Hilbert 空間 $L^2(\Omega, \mu)$ への掛け算作用素により,

$$L^\infty(\Omega, \mu) \subset \mathbb{B}(L^2(\Omega, \mu))$$

とみなせる. 実は (積に関して) 可換な von Neumann 環は $L^\infty(\Omega, \mu)$ の形に限る.

本研究は科研費 (課題番号:25800065) の助成を受けたものである.

Hilbert 空間を用いない抽象的な定義[1] も存在する．またすべての (抽象的な) C*-環は, 上の意味での (具体的な) C*-環と同型である．

例 3 コンパクト Hausdorff 空間 Ω 上の複素数値連続関数空間 $C(\Omega)$ は $*$-演算と norm を

$$f^*(\omega) := \overline{f(\omega)}, \quad \|f\| := \sup\{|f(\omega)| : \omega \in \Omega\} \quad (f \in C(\Omega))$$

と定義すれば, C*-環である．実は可換な (単位的) C*-環は $C(\Omega)$ の形に限る．

以上の例から, 一般の C*-環論は "非可換トポロジー", von Neumann 環論は "非可換測度論" と呼ばれたりもする．他分野に向けた標語的なところもあるが, Connes の非可換幾何学はこれらの延長線上にある．

2.2. von Neumann 環の分類

以下, von Neumann 環に話を限ることにする．部分集合 $S \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ に対して,

$$S' := \{x \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) : xy = yx, \forall y \in S\}$$

とおき, S の**可換子**と言う．$S \subset S'' := (S')'$ は自明な包含関係であるが, von Neumann 環の特徴付けが次で与えられる:

定理 4 (Double Commutant Theorem) $1 := \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ を含む $*$-部分環 $M \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ に対して次が同値:

(1) $M = M''$;

(2) M は von Neumann 環.

これにより, 作用素の極分解や自己共役作用素のスペクトル分解などの基本的操作が von Neumann 環の内部で実行できることが保証される．

von Neumann 環 M に対して, 中心が自明のとき, すなわち, $\mathcal{Z}(M) := M \cap M' = \mathbb{C}1$ のとき, **因子環**という．一般の von Neumann 環は中心に沿って, 因子環の "直積分" に分解できるので, 因子環を調べることが, 中心的な話題である．

次に因子環 M を射影により分類する．$p \in M$ が $p = p^* = p^2$ を満たすとき, **射影**という．一般に von Neumann 環の中には十分多くの射影が存在する．(可換な von Neumann 環の場合, $L^\infty(\Omega, \mu)$ であることを思い出して欲しい.[2]) M の射影全体を $\mathcal{P}(M)$ とする．$p, q \in \mathcal{P}(M)$ に対して, $v^*v = p$, $vv^* = q$ を満たす $v \in M$ が存在するとき, p は q に **Murray-von Neumann 同値**であるといい, $p \sim q$ とかく．また $p, q \in \mathcal{P}(M)$ に対して, $p \sim r \leq q$ を満たす $r \in \mathcal{P}(M)$ が存在するとき, $p \precsim q$ とかくことにすると, 関係 $\precsim$ は反射的かつ推移的であり, [$p \precsim q$ かつ $p \succsim q$] ならば, $p \sim q$ である．更に, 関係 $\precsim$ に関して次の基本定理が成り立つ:

定理 5 (比較可能定理) M を因子環とする．$p, q \in \mathcal{P}(M)$ に対して, $p \precsim q$ または $p \succsim q$ である．

[1] $\mathbb{C}$ 上の $*$-環 A 上の norm が $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ と **C*-条件** $\|a^*a\| = \|a\|^2$ $(a, b \in A)$ を満たすとき, **C*-norm** といい, A が C*-norm に関して完備であるとき, C*-環と言う．von Neumann 環に関しては後述.

[2] 逆に, C*-環の場合は, 全く非自明な射影を持たないことがある．例えば, Ω が連結なコンパクト空間のとき, $C(\Omega)$ は自明な射影 1 または 0 しかもたない.

$p \in \mathcal{P}(M)$ に対して, $q \leq p$, $q \sim p$ が $q = p$ を意味するとき, p は**有限**であるという. 有限な射影の部分射影は再び有限である. もし, $1 \in M$ が有限であるとき, M は**有限**であるといい, 有限な $0 \neq p \in \mathcal{P}(M)$ が存在するとき, M を**半有限**であるという.

定義 6 M を因子環とする.

- 極小な $0 \neq p \in \mathcal{P}(M)$ が存在するとき, M を**I 型**という.
- 有限かつ I 型でないとき, M を$\mathbf{II_1}$ **型**という.
- 半有限かつ I 型でも II_1 型でもないとき, M を$\mathbf{II_\infty}$ **型**という.
- 半有限でないとき, M を**III 型**という.

I 型因子環は $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ と同型で, $\mathcal{H}$ の次元で完全に決まる. もし $\dim \mathcal{H} = n$ ($n = 1, 2, \ldots, \infty$) ならば, $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ は I_n 型であるという. また II_∞ 型因子環は II_1 型因子環と I_∞ 型因子環 $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ のテンソル積となる. したがって, 主に興味があるのは II_1 型, III 型因子環である.

2.3. 群と von Neumann 環

歴史的な順序に沿って例を挙げる. まず群 von Neumann 環を紹介する. 離散群 G に対して, **左正則表現** $\lambda\colon G \to \ell^2(G)$ を考える:

$$(\lambda(s)\xi)(t) := \xi(s^{-1}t) \quad (\xi \in \ell^2(G))$$

このとき, $\{\lambda(s) : s \in G\} \subset \mathbb{B}(\ell^2(G))$ で生成される von Neumann 環 $L(G)$ を G の**群 von Neumann 環**という.

例 7 $G = \mathbb{Z}$ のとき, Fourier 変換により $\ell^2(\mathbb{Z}) = L^2(\mathbb{T}, \mu)$ であるから, $L(\mathbb{Z}) = L^\infty(\mathbb{T}, \mu)$ がわかる. μ は $\mathbb{T}$ 上の Lebesgue 測度である. 一般の可換離散群 G に対しても, Fourier 変換により $L(G) = L^\infty(\widehat{G}, \mu)$ となる. $\widehat{G}$ は G の Pontrjagin 双対であり, μ はコンパクト群 $\widehat{G}$ 上の Haar 測度である.

もし G が **ICC** (Infinite Conjugacy Class) のとき, すなわち, 任意の $e \neq s \in G$ に対する共役類 $C(s) := \{tst^{-1} : t \in G\}$ が無限個の元からなるとき, $L(G)$ は II_1 型因子環になる. さらに, $\delta_e(s) := \delta_{e,s}$ とし, $M := L(G)$ 上の線形汎関数 τ を

$$\tau(a) := \langle a\delta_e, \delta_e \rangle \quad (a \in L(G))$$

と定義すると, 次の性質を満たす:

(1) $\tau(a) \geq 0$ $(a \geq 0)$ [**正値性**];

(2) $a \geq 0$, $\tau(a) = 0$ ならば, $a = 0$ [**忠実性**];

(3) $\tau(1) = 1$ [**単位的**];

(4) $\tau(\sup x_i) = \sup \tau(x_i)$ ($(x_i) \subset M^+$ は有界な増大 net) [**正規性**];

(5) $\tau(ab) = \tau(ba)$ $(\forall a, b)$ [**trace 条件**].

実は, このような線形汎関数τの存在は, von Neumann環Mが, 有限であることを特徴づける. もしMが因子環ならば, その存在は一意であることもわかる. この線形汎関数τのことを単に**trace**と呼ぶことにする. 一般に, 正規な正値線形汎関数全体の集合をM_*と書いて, Mの**前双対**という. このとき, $M=(M_*)^*$が成り立つ. 実は, von Neumann環はBanach空間の双対であるC*-環として特徴付けられる. (境の定理) これは$L^\infty(\Omega,\mu)=L^1(\Omega,\mu)^*$の一般化でもある.

例 8 対称群$\mathfrak{S}_n$ ($n\in\mathbb{N}$) に対して, $\mathfrak{S}_\infty:=\bigcup_{n=1}^\infty\mathfrak{S}_n$ とおく. このとき, $L(\mathfrak{S}_\infty)$は (性質Γをもつ[3]) **AFD** II_1型因子環である.

AFDはApproximately Finite Dimensionalの略である. Murray-von Neumannは AFD II_1型因子環の一意性を示した. この因子環をRと表すことが多い.

定理 9 (Murray-von Neumann) II_1型因子環Mに対して, 次が同値:

(1) $M=L(\mathfrak{S}_\infty)$;

(2) $M=\overline{\bigcup_{n=1}^\infty M_n}$, 但し, (M_n)はMの有限次元$*$-部分環の増大列.

Murray-von Neumannは2つ目のII_1型因子環を性質Γを用いて示しているが, 現在はnon-AFDであることもわかっている.

例 10 $\mathbb{F}_2$を2元によって生成される自由群とする. $L(\mathbb{F}_2)$は (性質Γを持たない) non-AFD II_1型因子環である.

自由群因子環$L(\mathbb{F}_n)$はMurray-von Neumannの時代から知られている例であるが, これらが生成元の個数$n\geq 2$に依るかどうかは未だに未解決である.
3つ目のII_1型因子環は御園生とSchwartzによる. Schwartzは群の従順性をvon Neumann環に翻訳して問題を解決した.

例 11 $L(\mathfrak{S}_\infty\times\mathbb{F}_2)$は (性質$\Gamma$を持つ) non-AFD II_1型因子環である.

次に群の従順性について詳しく紹介する. 従順性はBanach-Tarskiのparadoxを解析するためにvon Neumannが導入した. 可算離散群Gが**従順**であるとは, Gのコンパクト凸集合K上の連続アフィン作用が固定点を持つときをいう. 有限群は明らかに従順であり, 可換群が従順であることはMarkov-角谷の不動点定理が保証する. 従順群のクラスは部分群, 商群, 拡大, 増大和の操作で閉じているので, 冪零群や可解群も従順になる. 従順性の同値条件は数多く存在するが, 今回の内容に関係したものを挙げる.

定理 12 可算離散群Gに対して以下同値:

(1) Gは従順;

(2) $\ell^\infty(G)$上に左平行移動不変な単位的正値線形汎関数$\mu\colon\ell^\infty(G)\to\mathbb{C}$が存在する;

(3) G上の有限台を持つ正定値関数(φ_n)で1に各点収束するものが存在する;

(4) $1_G\preccurlyeq\lambda$.

[3] II_1型因子環Mとtrace τに対して, 性質Γを持つとは次で定義する: すべての$x\in M$に対して, $\|u_nx-xu_n\|_2\to 0$となるユニタリーの列$u_n\in M$で$\tau(u_n)=0$となるものが存在する. ただし, $\|x\|_2:=\sqrt{\tau(x^*x)}$で$M$上の$L^2$-normを定義する.

但し, $\mu\colon \ell^\infty(G)\to\mathbb{C}$ が**左平行移動不変**とは, $s\in G$, $f\in\ell^\infty(G)$ に対して, $\mu(f)=\mu(s\cdot f)$ が成り立つことという. ここで, $(s\cdot f)(t):=f(s^{-1}t)$ である. また G 上の関数 φ が**正定値**であるとは, 任意の $n\in\mathbb{N}$, $s_1,\dots,s_n\in G$ に対して, 行列

$$[\varphi(s_i^{-1}s_j)]_{1\le i,j\le n}\in\mathbb{M}_n$$

が正定値, すなわち,

$$\sum_{i,j=1}^n \overline{c}_i\varphi(s_i^{-1}s_j)c_j\ge 0\quad (c_1,\dots,c_n\in\mathbb{C})$$

のときを言う. ユニタリ表現 $\pi\colon G\to\mathbb{B}(\mathcal{H})$ と $\pi'\colon G\to\mathbb{B}(\mathcal{H}')$ に対して, 写像 $\pi(s)\mapsto\pi'(s)$ がそれぞれの表現で生成される C*-環 $\mathrm{C}^*(\pi(G))$ と $\mathrm{C}^*(\pi'(G))$ の間の (連続な)$*$-準同型に拡張できるとき, $\pi'\preccurlyeq\pi$ と表す. $1_G\colon G\to\mathbb{C}$ は $1_G(s)=1$ と定義される**自明表現**である.

例 13 自由群 $\mathbb{F}_2$ は非従順である.

自由群 $\mathbb{F}_2$ を部分群として含む群は非従順である. その逆も正しいかというのが von Neumann の問題であったが, 1980 年に Ol'shanskii によって反例が示された. また群の従順性に関する問題に Thompson 群 F が従順かどうかが有名な未解決問題として残っている.

G 上の正定値関数 φ に対して, 乗数作用素 $m_\varphi\colon L(G)\to L(G)$ を $\lambda(s)\mapsto\varphi(s)\lambda(s)$ と定義すると, m_φ は完全正写像である. 一般に, von Neumann 環 M, N に対して, 線形写像 $\theta\colon M\to N$ が**完全正**であるとは, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して,

$$\theta^{(n)}\colon \mathbb{M}_n(M)\ni[x_{ij}]_{i,j}\mapsto[\theta(x_{ij})]_{i,j}\in\mathbb{M}_n(N)$$

が正であるときを言う.

定義 14 von Neumann 環 M が **semidiscrete** とは, 有限階完全正縮小写像 θ_n で id_M に各点強作用素収束するものが存在するときをいう.

上の考察から可算離散群 G が従順ならば $L(G)$ が semidiscrete であることがわかるが, 実は同値であることがわかっている. また von Neumann 環に関して, AFD 性と semidiscrete が同値であることもわかっている.

定理 15 (Effros-Lance) 可算離散群 G に対して, 以下同値:

(1) G が従順;

(2) $L(G)$ が semidiscrete.

定理 16 (Connes) von Neuman 環 M に対して, 以下同値:

(1) M が AFD;

(2) M が semidiscrete.

したがって, $L(\mathbb{F}_2)$ は確かに non-AFD である. 昔は von Neumann 環の真に新しい例を構成することは難しい問題であったが, その後の研究により, 現在では多くの例が知られている. 下記は前世紀までに知られていたいくつかの有名な例である.

- 非可算無限個の II_1 型因子環の存在. (McDuff, 境)
- 非可算無限個の III 型因子環の存在. (Powers, 荒木-Woods)
- AFD III_λ 型因子環 $(0 < \lambda \leq 1)$ はただ一つ存在. (Connes, Haagerup)
- 局所コンパクト群 G が従順ならば, $L(G)$ は semidiscrete. しかし逆は不成立. (Connes)
- $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して, $L(G_\lambda)$ が III_λ 型因子環となる局所コンパクト群 G_λ が存在する. (Godement, Sutherland, Blackadar)

3. Haagerup 性

従順性を少し弱めた概念に Haagerup 性がある.

定義 17 可算離散群 G が次の同値条件を満たすとき, **Haagerup 性**を持つという:

(1) G 上の無限遠で消滅する正定値関数 φ_n で 1 に各点収束するものが存在する;

(2) G の mixing なユニタリー表現 $(\pi, \mathcal{H})$ で $1_G \preccurlyeq \pi$ を満たすものが存在する. 但し, ユニタリー表現 $(\pi, \mathcal{H})$ が **mixing** とは, 任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して, $G \ni s \mapsto \langle \pi(s)\xi, \eta \rangle \in \mathbb{C}$ が無限遠で消滅することをいう.

Haageup は非従順な群の代表格ともいうべき自由群 $\mathbb{F}_n$ が "従順っぽい" 性質を持つことを示し, 当時の関係者を驚かせた. これが, Haagerup 性を考えるようになったきっかけである. 実際, Baum-Connes 予想など広く応用が知られている. (詳しくは [6] を参照.)

定理 18 (Haageup) 自由群 $\mathbb{F}_n$ は Haagerup 性を持つ.

群の Haagerup 性を von Neumann 環に移植するために以下を準備する. von Neumann 環 M と $\varphi \in M_*$ に対して,

$$N_\varphi := \{a \in M \mid \varphi(a^*a) = 0\}$$

とおくと, M の norm 閉な左 ideal になる. M/N_φ 上の内積を

$$\langle \Lambda_\varphi(a), \Lambda_\varphi(b) \rangle := \varphi(a^*b) \quad (a, b \in M)$$

と定義する. 但し, $\Lambda_\varphi \colon M \to M/N_\varphi$ は自然な商写像とする. これを完備化した Hilbert 空間を $L^2(M, \varphi)$ とかく. また M は自然に $L^2(M, \varphi)$ に表現できる.

$$\pi_\varphi(x)\Lambda_\varphi(a) := \Lambda_\varphi(xa) \quad (x, a \in M)$$

もし φ が忠実ならば表現 π_φ は単射になるので, π_φ を省略して, $M \subset \mathbb{B}(L^2(M, \varphi))$ と見なすことが多い.

定理 19 (長田まりゑ) 可算離散 ICC 群 G に対して, 以下同値:

(1) G は Haagerup 性を持つ;

(2) II_1 型因子環 $M := L(G)$ 上の正規完全正縮小写像 θ_n で次の性質を持つものが存在する:

- $\tau \circ \theta_n \leq \tau$;
- θ_n が id_M に各点強作用素位相で収束する;
- 次で定義される縮小作用素 T_n がコンパクト:

$$T_n \Lambda_\varphi(a) := \Lambda(\theta_n(a)) \quad (a \in M)$$

(2) の条件を **HAP** と呼ぶことにする. 長田 [7] はこれにより, $L(\mathbb{F}_2)$, $L(SL(3,\mathbb{Z}))$, $L(\mathbb{F}_2 \times SL(3,\mathbb{Z}))$ が互いに非同型な non-AFD II_1 型因子環であることを示した. その後, Jolissaint は有限 von Neumann 環 M の場合に HAP の概念を拡張した. すなわち, M が因子環でなければ trace τ の取り方は一通りではないので, trace τ の取り方に依存しないことを証明した. また Popa の deformation-vs-rigidity strategy[21] による最近の II_1 型因子環の研究の目覚ましい発展にこの性質が巧みに活用されている.

HAP の概念を一般の von Neumann 環 M に拡張するためには, trace τ を一般の正規状態 [4] φ に取り替えれば良いが, φ の取り方に依存しないことを確かめるのは簡単ではない. 実際, Caspers-Skalski[5] はこの方向で HAP を定義し, 議論しているが, 証明は長い. そこで我々は (2) において, 写像 θ_n ではなく作用素 T_n に注目することで, より簡単な定義を与えることができた. そのために von Neumann 環の標準形を考える.

定理 20 (Haagerup) 任意の von Neumann 環は次の形と同型である. この $(M, \mathcal{H}, J, P)$ を von Neumann 環の**標準形**といい, ユニタリー同値の意味でただひとつである: von Neumann 環 M は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に表現され, $J^2 = 1$ を満たす $\mathcal{H}$ 上の反線形等距離作用素 J と自己双対 [5] な正錐 $P \subset \mathcal{H}$ で次を満たすものが存在する:

(1) $JMJ = M'$;

(2) $J\xi = \xi$ $(\xi \in P)$;

(3) $aJaJP \subset P$ $(a \in M)$;

(4) $JcJ = c^*$ $(c \in \mathcal{Z}(M))$. [6]

例 21 局所コンパクト群 G 上のモジュラー関数を Δ とする. 離散群のときと同様に群 von Neumann 環 $M := L(G)$ が定義される. 右正則表現 ρ を考えれば, von Neumann 環 $R(G)$ が得られ, $M' = R(G)$ が成立する.

$$(\rho(s)\xi)(t) := \Delta(s)^{1/2}\xi(ts) \quad (\xi \in L^2(G))$$

このとき,

$$(J\xi)(s) := \Delta(s)^{1/2}\overline{\xi(s^{-1})} \quad (\xi \in L^2(G))$$

かつ

$$P := \overline{\{\xi * (J\xi) \mid \xi \in C_c(G)\}} \subset L^2(G)$$

[4] 単位的正値線形汎関数を状態という.
[5] $P^\circ := \{\xi \in \mathcal{H} \mid \langle \xi, \eta \rangle \geq 0, \eta \in P$ とおき, $P = P^\circ$ を満たすときをいう.
[6] 不要であることが安藤-Haagerup[1] により示された.

と定義すれば, $L(G)$ の標準形である. ただし, $\xi * \eta$ は合成積である:

$$(\xi * \eta)(t) := \int \xi(ts^{-1})\eta(s)ds \quad (\xi, \eta \in C_c(G))$$

例 22 $(\mathbb{M}_n, \mathbb{M}_n, *, \mathbb{M}_n^+)$ が標準形である. ただし, Hilbert 空間 $\mathbb{M}_n$ は通常の単位的 trace による内積を入れ, $*$ は通常の随伴作用である.

例 23 φ を von Neumann 環 M 上の正規状態とする.

$$S_\varphi \Lambda_\varphi(a) := \Lambda_\varphi(a^*) \quad (a \in M)$$

により, $L^2(M, \varphi)$ 上の非有界作用素 S_φ が得られる. その閉包も S_φ で書くことにする. 極分解を $S_\varphi = J_\varphi \Delta_\varphi^{1/2}$ と表す. パラメーター $\alpha \in [0, 1/2]$ に対して,

$$P_\varphi^\alpha := \overline{\{\Delta_\varphi^\alpha \Lambda_\varphi(a) \mid a \in M^+\}}$$

を**荒木の正錐族** [2] といい, $(M, L^2(M, \varphi), J_\varphi, P_\varphi^{1/4})$ は標準形である.

Hilbert 空間上の作用素に "完全正" という概念を考えるために, von Neumann 環 M と $\mathbb{M}_n$ のテンソル積の標準形を考える必要がある. ベクトルを成分に持つ行列 $[\xi_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathcal{H}) := \mathbb{M}_n \otimes \mathcal{H}$ が n-**正**とは,

$$\sum_{i,j} a_i J a_j J \xi_{ij} \in P \quad (a_1, \ldots, a_n \in M)$$

で定義する. これら全体を $P^{(n)}$ で表す. このとき, $(\mathbb{M}_n(M), \mathbb{M}_n(\mathcal{H}), J \otimes *, P^{(n)})$ が標準形になる.

定義 24 $(M, \mathcal{H}, J, P)$ を von Neumann 環の標準形とする. $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素 T が**完全正**であるとは,

$$[T\xi_{ij}] \in P^{(n)} \quad ([\xi_{ij}] \in P^{(n)})$$

のときをいう.

定義 25 von Neumann 環 M が **HAP** を持つとは, コンパクト完全正縮小写像 T_n で 1 に強作用素位相で収束するものが存在するときをいう. この定義は標準形の取り方に依らないことがユニタリー同値性を使ってすぐに確かめられる.

以下の定理が我々の一連の結果の主定理である:

定理 26 σ-有限[7] von Neumann 環 M に対して, 以下同値:

(1) M は HAP を持つ;

(2) 任意の / またはある忠実正規状態 φ と $\alpha \in [0, 1/2]$ に対して, M 上の正規完全正縮小写像 θ_n で次の性質を持つものが存在する;

- $\varphi \circ \theta_n \leq \varphi$;

[7] M が σ-有限であることが, 正規状態が存在することを特徴づける. 一般の von Neumann 環の時は荷重で議論すれば良い.

- θ_n が id_M が各点強作用素位相で収束する;
- 次で定義される縮小作用素 T_n がコンパクト:

$$T_n \Delta_\varphi^\alpha \Lambda_\varphi(a) := \Delta_\varphi^\alpha \Lambda_\varphi(\theta_n(a)) \quad (a \in M)$$

(3) 任意の / またはある $p \in (1, \infty)$ に対して, M は L^p-**HAP** を持つ;

(4) strictly mixing M-M 双加群 $\mathcal{H}$ が存在して, $L^2(M) \preccurlyeq \mathcal{H}$ である.

いくつか注意を与える.

(3) について: von Neumann 環 M と正規状態 φ に関する標準 Hilbert 空間を $L^2(M, \varphi)$ と書いたが, 一般に, $L^1(M, \varphi) = M_*, L^\infty(M, \varphi) = M$ となるような Banach 空間 $L^p(M, \varphi)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ が様々な流儀で定義できる. よって, $L^2(M, \varphi)$ での議論を自然に $L^p(M, \varphi)$ に拡張できる.

(4) について: 群の表現の話は von Neumann 環には双加群として移植される. strictly mixing は群の表現の mixing に対応する概念である. 有限 von Neumann 環の場合には既に Bannon-Fang[3] によって与えられていた. この特徴付けを使って, 局所コンパクト群 G が Haagerup 性を持つならば, 群 von Neumann 環 $L(G)$ が HAP を持つことを示すことができる. これは一般の量子群でも正しい. (量子群の Haagerup 性は Daws-Fima-Skalski-White[8] で定義されている.) 講演時間があれば von Neumann 環の双加群や特徴づけ (4) についても詳しく話したい.

参考文献

[1] H. Ando and U. Haagerup; Ultraproducts of von Neumann algebras. *J. Funct. Anal.* **266** (2014), no. 12, 6842–6913.

[2] H. Araki; Some properties of modular conjugation operator of von Neumann algebras and a non-commutative Radon-Nikodym theorem with a chain rule. *Pacific J. Math.* **50** (1974), 309–354.

[3] J. P. Bannon and J. Fang; Some remarks on Haagerup's approximation property. *J. Operator Theory* **65** (2011), 403–417.

[4] M. Caspers, R. Okayasu, A. Skalski, and R. Tomatsu; Generalisations of the Haagerup approximation property to arbitrary von Neumann algebras. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **352** (2014), 507–510.

[5] M. Caspers and A. Skalski; The Haagerup property for arbitrary von Neumann algebras. *Int. Math. Res. Not.*, **19** (2015), no.6, 9857–9887

[6] P.-A. Cherix, M. Cowling, P. Jolissaint, P. Julg, and A. Valette; Groups with the Haagerup property. *Progress in Mathematics,* **197**. Birkhüser Verlag, Basel, 2001. viii+126 pp.

[7] M. Choda; Group factors of the Haagerup type. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **59** (1983), 174–177.

[8] M. Daws, P. Fima, A. Skalski, and S. White; The Haagerup property for locally compact quantum groups. *J. Reine Angew. Math.*, To appear.

[9] U. Haagerup; An example of a nonnuclear C*-algebra, which has the metric approximation property. *Invent. Math.* **50** (1978/79), 279–293.

[10] 泉正己; C*-環の分類理論. 数学, **57** (2005) 282–301.

[11] 泉正己; 作用素環への群作用の分類について. 数学, **63** (2011) 145–160.

[12] P. Jolissaint; Haagerup approximation property for finite von Neumann algebras. *J. Operator Theory* **48** (2002), 549–571.

[13] 勝良健史; 位相力学系とグラフ C^* 環. 数学, **61** (2009) 40–63

[14] 河東泰之; Subfactor 理論とその応用—作用素環と場の量子論—. 数学, **54** (2002) 337–347

[15] 幸崎 秀樹; 作用素環の指数理論. 数学, **41** (1989) 289–304

[16] R. Okayasu, N. Ozawa and R. Tomatsu; Haagerup approximation property via bimodules. *Math. Scand.*, accepted. arXiv:1501.06293

[17] R. Okayasu and R. Tomatsu; Haagerup approximation property for arbitrary von Neumann algebras. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **51** (2015), no.3, 567–603.

[18] R. Okayasu and R. Tomatsu; Haagerup approximation property and positive cones associated with a von Neumann algebra. *J. Operator Theory.*, accepted. arXiv:1403.3971

[19] 小澤登高; 作用素空間論とその応用. 数学, **56** (2004) 297–307.

[20] 小澤登高; 離散群と作用素環. 数学, **61** (2009) 337–351.

[21] S. Popa; Deformation and rigidity for group actions and von Neumann algebras. *International Congress of Mathematicians. Vol. I*, 445–477, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

[22] 境正一郎; II_1-factor の実例に関する最近の話題. 数学, **24** (1974) 81–89

[23] M. Takesaki; Theory of operator algebras. I. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, 124. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, **5**. Springer-Verlag, Berlin, 2002. xx+415 pp.

[24] M. Takesaki; Theory of operator algebras. II. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, 125. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, **6**. Springer-Verlag, Berlin, 2003. xxii+518 pp.

[25] M. Takesaki; Theory of operator algebras. III. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, 127. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, **8**. Springer-Verlag, Berlin, 2003. xxii+548 pp.

Intertwining operators between holomorphic discrete series representations

Ryosuke Nakahama*
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

2016/9/2

1 Introduction

First we review the known results about the branching lows when we restrict a representation of a Lie group to some Lie subgroup. Let G be a Lie group, $G_1 \subset G$ be a closed subgroup, and let $\mathcal{H}$ be a representation of G. We consider the restriction $\mathcal{H}|_{G_1}$ of the representation $\mathcal{H}$ to the subgroup G_1. Then in general, it may behave wildly, for example, it may contain continuous spectrums, or its multiplicity becomes infinite. However, Kobayashi and his collaborators found the conditions for $(G, G_1, \mathcal{H})$ such that $\mathcal{H}|_{G_1}$ behaves nicely, for example, it is discretely decomposable, its multiplicity becomes finite or uniformly bounded, or it decomposes multiplicity-freely. Then under such nice conditions, it is expected that we can study the branching low of $\mathcal{H}|_{G_1}$ more in detail and in explicit form. Namely, for a representation $\mathcal{H}_1$ of G_1 which appears abstractly in the decomposition of $\mathcal{H}|_{G_1}$, we want to construct the G_1-intertwining operator between $\mathcal{H}|_{G_1}$ and $\mathcal{H}_1$. Such program was suggested recently by Kobayashi, and was studied by several people, e.g., Clerc-Kobayashi-Ørsted-Pevzner [1] (2011), Kobayashi-Pevzner [8, 9] (2015), Kobayashi-Speh [10] (2015), Möllers-Oshima [12] (2015), and Peng-Zhang [14] (2004).

In this talk we assume that G and G_1 are of Hermitian type, namely, the corresponding Riemannian symmetric spaces G/K, G_1/K_1 have the natural complex structure and become the Hermitian symmetric spaces, and also assume that the embedding map $G_1/K_1 \hookrightarrow G/K$ is holomorphic. Moreover let $\mathcal{H}$ be a holomorphic discrete series representation of G. Then it is proved by Kobayashi that the restriction $\mathcal{H}|_{G_1}$ is discretely decomposable, its multiplicity is finite, and moreover the multiplicity becomes uniformly bounded if (G, G_1) is a symmetric pair. Thus for a representation $\mathcal{H}_1$ of G_1 which appears in the decomposition of $\mathcal{H}|_{G_1}$, the speaker has aimed to construct the G_1-intertwining operators between $\mathcal{H}|_{G_1}$ and $\mathcal{H}_1$.

Now we summarize the speaker's results. The speaker constructed the G_1-

*Email: nakahama@ms.u-tokyo.ac.jp

intertwining operators $\mathcal{H}|_{G_1} \rightleftarrows \mathcal{H}_1$ in the case (G, G_1) is one of

$$\begin{array}{ll} (U(q,s), U(q,s') \times U(s'')), & (SO^*(2s), SO^*(2(s-1)) \times SO(2)), \\ (SO^*(2s), U(1, s-1)), & (SO(2,2s), U(1,s)), \end{array}$$

which are given by normal derivatives, constructed the operators $\mathcal{H}|_{G_1} \to \mathcal{H}_1$ in the case (G, G_1) is of the form

$$(G_0 \times G_0, \Delta G_0)$$

when $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_1$ are of scalar type, which gives essentially the same results with Peng-Zhang (2004), and constructed the operators $\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}|_{G_1}$ in the case (G, G_1) is one of

$$\begin{array}{ll} (Sp(s,\mathbb{R}), Sp(s',\mathbb{R}) \times Sp(s'',\mathbb{R})), & (U(q,s), U(q',s') \times U(q'',s'')), \\ (SO^*(2s), SO^*(2s') \times SO^*(2s'')), & (Sp(s,\mathbb{R}), U(s',s'')), \\ (SO^*(2s), U(s',s'')), & (SU(s,s), Sp(s,\mathbb{R})), \\ (SU(s,s), SO^*(2s)), & (SO(2,n), SO(2,n') \times SO(n'')), \end{array}$$

when $\mathcal{H}$ are of scalar type and $\mathcal{H}|_1$ are multiplicity-free under $K_1 \subset G_1$, the maximal compact subgroup of G_1, but except for one series of $(SU(2s+1, 2s+1), SO^*(2(2r+1)))$.

2 Holomorphic discrete series representations

First we review the holomorphic discrete series representations. Let G be a simple Lie group, and $K \subset G$ be the maximal compact subgroup of G. We assume that K has a non-discrete center, and G has a complexification $G^{\mathbb{C}}$. We denote the Lie algebras of G, K and $G^{\mathbb{C}}$ by the corresponding lower case fraktur, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ and $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Let $\vartheta : G \to G$ be the Cartan involution which fixes K, and we extend it to $\vartheta : G^{\mathbb{C}} \to G^{\mathbb{C}}$ anti-holomorphically. Then we can take an element $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ in the center of $\mathfrak{k}$ such that the eigenvalues of $ad(z)$ are $+\sqrt{-1}$, 0, $-\sqrt{-1}$. We write the corresponding eigenspace decomposition as $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}^-$. Then it is known that there exists a domain $D \subset \mathfrak{p}^+$ such that it is diffeomorphic to the Hermitian symmetric space G/K through the following diagram.

$$\begin{tikzcd} G/K \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\wr"] & G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}P^- \\ D \arrow[r, hook] & \mathfrak{p}^+ \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

Now let (τ, V) be a holomorphic representation of $K^{\mathbb{C}}$, and χ be a suitable character of $\tilde{K}^{\mathbb{C}}$, the universal covering group of $K^{\mathbb{C}}$. We consider the space of holomorphic sections $\Gamma_{\mathcal{O}}(G/K, \tilde{G} \times_{\tilde{K}} (V \otimes \chi^{-\lambda}))$ of the holomorphic line bundle $\tilde{G} \times_{\tilde{K}} (V \otimes \chi^{-\lambda}) \to \tilde{G}/\tilde{K} = G/K$. Then since $G/K \simeq D$ is a contractible complex domain, it is isomorphic to the space of vector-valued holomorphic functions on D.

$$\Gamma_{\mathcal{O}}(G/K, \tilde{G} \times_{\tilde{K}} (V \otimes \chi^{-\lambda})) \simeq \mathcal{O}(D, V).$$

Then under this identification, $\tilde{G}$ acts on $\mathcal{O}(D, V)$ by the form

$$\tau_\lambda(g)f(w) = \chi(\mu(g^{-1}, w))^\lambda \tau(\mu(g^{-1}, w))^{-1} f(g^{-1}w) \qquad (g \in G,\ w \in D),$$

using some smooth map $\mu : \tilde{G} \times D \to \tilde{K}^{\mathbb{C}}$. Then if there exists a Hilbert subspace $\mathcal{H}_\lambda(D, V) \subset \mathcal{O}(D, V)$ such that $\tilde{G}$ acts unitarily on it, then the representation $(\tau_\lambda, \mathcal{H}_\lambda(D, V))$ is called the unitary highest weight representation of $\tilde{G}$. Especially, if the parameter λ is sufficiently large, then this action preserves the explicit inner product

$$\langle f, g\rangle_{\lambda,\tau} := \int_D \big(\tau(B(w)^{-1})f(w), g(w)\big)_\tau\, \chi(B(w))^{\lambda - p} dw \qquad (f, g \in \mathcal{O}(D, V)),$$

where p is an integer which is determined from $\mathfrak{g}$, and $B : \mathfrak{p}^+ \supset D \to \tilde{K}^{\mathbb{C}}$ is some smooth map. Let $\mathcal{H}_\lambda(D, V)$ be the space of all elements such that the norm given as above is finite. Then the corresponding unitary representation $(\tau_\lambda, \mathcal{H}_\lambda(D, V))$ is called the holomorphic discrete series representation of $\tilde{G}$.

Example 1. *We define the Lie group G as*

$$G := \left\{ g \in GL(2r, \mathbb{C}) : g \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} {}^t g = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix},\ g \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix} \bar{g} \right\}.$$

Then G is isomorphic to $Sp(r, \mathbb{R})$ via the Cayley transform. The corresponding Hermitian symmetric space G/K is diffeomorphic to

$$D_{Sp(r,\mathbb{R})} = \{ w \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{C}) : I - ww^* \textit{ is positive definite.} \}.$$

Let (τ, V) be a representation of $K^{\mathbb{C}} = GL(r, \mathbb{C})$. Then the universal covering group $\tilde{G}$ acts on $\mathcal{O}(D_{Sp(r,\mathbb{R})}, V)$ by

$$\tau_\lambda\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \right) f(w) := \det(Cw + D)^{-\lambda} \tau\big({}^t(Cw + D)\big)\, f\big((Aw + B)(Cw + D)^{-1}\big).$$

Then if the parameter λ is sufficiently large, this preserves the inner product

$$\langle f, g\rangle_{\lambda,\tau} := \int_D \big(\tau((I - ww^*)^{-1})f(w), g(w)\big)_\tau \det(I - ww^*)^{\lambda - (r+1)} dw.$$

Now we consider a reductive subgroup $G_1 \subset G$. Without loss of generality we may assume that G_1 is stable under the Cartan involution ϑ of G. We denote the Cartan decompostion of $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{Lie}(G_1)$ under ϑ as $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{p}_1$. We assume that $\mathfrak{p}_1^{\mathbb{C}} = (\mathfrak{p}_1^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{p}^+) \oplus (\mathfrak{p}_1^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{p}^-)$ holds, and write $\mathfrak{p}_1^+ := \mathfrak{p}_1^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{p}^+$, $\mathfrak{p}_2^+ := (\mathfrak{p}_1^+)^\perp$. Here the orthogonal complement is taken with respect to the restriction of the Killing form of $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ on $\mathfrak{p}^+ \times \mathfrak{p}^-$, under the identification $\overline{\mathfrak{p}^+} \simeq \mathfrak{p}^-$ via ϑ. Then G_1/K_1 is diffeomorphic to a bounded domain $D_1 \subset \mathfrak{p}_1^+$, and the embedding map $G_1/K_1 \hookrightarrow G/K$ is holomorphic. Now, since the $\tilde{K}$-finite part $\mathcal{O}(D, V)_{\tilde{K}}$ of $\mathcal{O}(D, V)$ equals to the polynomial space $\mathcal{P}(\mathfrak{p}^+, V)$, and since $\mathfrak{p}^+$ acts on $\mathcal{O}(D, V)_{\tilde{K}} = \mathcal{P}(\mathfrak{p}^+, V)$

by 1st order differential operators with constant coefficients, the space of $\mathfrak{p}^+$-null vectors equals to the space of polynomials on $\mathfrak{p}_2^+$.

$$(\mathcal{O}(D,V)_{\tilde{K}})^{\mathfrak{p}_1^+} \simeq \mathcal{P}(\mathfrak{p}_2^+, V).$$

Then since every $(\mathfrak{g}_1, \tilde{K}_1)$-submodule in $\mathcal{O}(D,V)_{\tilde{K}}$ contains some $\mathfrak{p}_1^+$-null vectors, if $(\mathcal{H}_\lambda(D,V)_{\tilde{K}})^{\mathfrak{p}_1^+} \simeq \mathcal{H}_\lambda(D,V)_{\tilde{K}} \cap \mathcal{P}(\mathfrak{p}_2^+, V)$ is decomposed under $\tilde{K}_1$ as

$$\mathcal{H}_\lambda(D,V)_{\tilde{K}} \cap \mathcal{P}(\mathfrak{p}_2^+, V) = \bigoplus_{W \in \hat{K}_1} m(W) W \otimes \chi^{-\lambda},$$

then $\mathcal{H}_\lambda(D,V)$ is decomposed under $\tilde{G}_1$ as

$$\mathcal{H}_\lambda(D,V)|_{\tilde{G}_1} \simeq \sum_{W \in \hat{K}_1}^{\oplus} m(W) \mathcal{H}_\lambda(D_1, W).$$

We note that if λ is sufficiently large, $\mathcal{H}_\lambda(D,V)_{\tilde{K}} = \mathcal{P}(\mathfrak{p}^+, V)$ holds, and hence $(\mathcal{H}_\lambda(D,V)_{\tilde{K}})^{\mathfrak{p}_1^+} \simeq \mathcal{P}(\mathfrak{p}_2^+, V)$ holds. In this case the computation of the decomposition is easier. In such cases we want to construct the $\tilde{G}_1$-intertwining operators

$$\mathcal{H}_\lambda(D,V)|_{\tilde{G}_1} \rightleftarrows \mathcal{H}_\lambda(D_1, W).$$

3 Main results for the simplest cases

In this section, we consider

$$(G, G_1) = (Sp(1,\mathbb{R}) \times Sp(1,\mathbb{R}), \Delta Sp(1,\mathbb{R})), \quad \tilde{G} \curvearrowright \mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(1,\mathbb{R})}) \hat{\boxtimes} \mathcal{H}_\mu(D_{Sp(1,\mathbb{R})}),$$

or

$$(G, G_1) = (Sp(2,\mathbb{R}), U(1,1)), \quad \tilde{G} \curvearrowright \mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(2,\mathbb{R})}),$$

where $\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})})$ is the holomorphic discrete series representation of $Sp(s,\mathbb{R})$ of scalar type. We recall that $\widetilde{Sp}(s,\mathbb{R})$ acts on $\mathcal{O}(D_{Sp(s,\mathbb{R})})$ by

$$\tau_\lambda\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}\right) f(w) = \det(Cw+D)^{-\lambda} f\left((Aw+B)(Cw+D)^{-1}\right).$$

Then there exists a unitary subrepresentation $\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})}) \subset \mathcal{O}(D_{Sp(s,\mathbb{R})})$ if and only if

$$\lambda \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \ldots, \frac{s-1}{2}\right\} \cup \left(\frac{s-1}{2}, \infty\right).$$

The K-finite part $\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})})_{\tilde{K}}$ equals to the whole polynomial space $\mathcal{P}(\mathrm{Sym}(r,\mathbb{C}))$ if $\lambda > \frac{s-1}{2}$, and $\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})})$ is a holomorphic discrete series if $\lambda > s$.

When $(G, G_1) = (Sp(1,\mathbb{R}) \times Sp(1,\mathbb{R}), \Delta Sp(1,\mathbb{R}))$, the spaces $\mathfrak{p}^+$, $\mathfrak{p}_1^+$ and $\mathfrak{p}_2^+$ are given as

$$\mathfrak{p}^+ = \mathrm{Sym}(1,\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Sym}(1,\mathbb{C}), \qquad \begin{aligned} \mathfrak{p}_1^+ &= \{(x,x)\} \simeq \mathrm{Sym}(1,\mathbb{C}), \\ \mathfrak{p}_2^+ &= \{(x,-x)\} \simeq \mathrm{Sym}(1,\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Then the polynomial space $\mathcal{P}(\mathfrak{p}_2^+)$ is decomposed under $K_1 = \Delta U(1)$ as

$$\mathcal{P}(\mathfrak{p}_2^+) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k(\mathrm{Sym}(1,\mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{C}_{-2k}.$$

Accordingly, when $\lambda, \mu > 0$, $\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(1,\mathbb{R})}) \hat{\boxtimes} \mathcal{H}_\mu(D_{Sp(1,\mathbb{R})})$ is decomposed under $\tilde{G}_1$ as

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(1,\mathbb{R})}) \hat{\boxtimes} \mathcal{H}_\mu(D_{Sp(1,\mathbb{R})})|_{\tilde{G}_1} &\simeq \sum_{k=0}^{\infty}{}^{\oplus} \mathcal{H}_{\lambda+\mu}(D_{Sp(1,\mathbb{R})}, \mathbb{C}_{-2k}) \\ &\simeq \sum_{k=0}^{\infty}{}^{\oplus} \mathcal{H}_{\lambda+\mu+2k}(D_{Sp(1,\mathbb{R})}).\end{aligned}$$

Similarly, when $(G, G_1) = (Sp(2,\mathbb{R}), U(1,1))$, the spaces $\mathfrak{p}^+$, $\mathfrak{p}_1^+$ and $\mathfrak{p}_2^+$ are given as

$$\mathfrak{p}^+ = \mathrm{Sym}(2,\mathbb{C}), \qquad \mathfrak{p}_1^+ = M(1,\mathbb{C}), \qquad \mathfrak{p}_2^+ = \mathrm{Sym}(1,\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Sym}(1,\mathbb{C}).$$

Then the polynomial space $\mathcal{P}(\mathfrak{p}_2^+)$ is decomposed under $K_1 = U(1) \times U(1)$ as

$$\mathcal{P}(\mathfrak{p}_2^+) = \bigoplus_{k_1,k_2=0}^{\infty} \mathcal{P}_{k_1}(\mathrm{Sym}(1,\mathbb{C})) \boxtimes \mathcal{P}_{k_2}(\mathrm{Sym}(1,\mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{k_1,k_2=0}^{\infty} \mathbb{C}_{-2k_1} \boxtimes \mathbb{C}_{-2k_2}.$$

Accordingly, when $\lambda > \frac{1}{2}$, $\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(2,\mathbb{R})})$ is decomposed under $\tilde{G}_1$ as

$$\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(2,\mathbb{R})})|_{\tilde{G}_1} \simeq \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}{}^{\oplus} \mathcal{H}_{\lambda,\lambda}(D_{U(1,1)}, \mathbb{C}_{-2k_1} \boxtimes \mathbb{C}_{-2k_2}) \simeq \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}{}^{\oplus} \mathcal{H}_{\lambda+2k_1,\lambda+2k_2}(D_{U(1,1)}).$$

Here we realize $U(s',s'')/U(s') \times U(s'') \simeq D_{U(s',s'')}$ as the domain in $M(s',s'';\mathbb{C})$, and we denote by $\mathcal{H}_{\lambda,\mu}(D_{U(s',s'')})$ the holomorphic discrete series representation of $\tilde{U}(s',s'')$ of scalar type, on which $\tilde{U}(s',s'')$ acts by

$$\begin{aligned}&\tau_{\lambda,\mu}\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}\right) f(w) \\ &\qquad = \det(A^* + wB^*)^{-\lambda} \det(Cw + D)^{-\mu} f\left((Aw+B)(Cw+D)^{-1}\right).\end{aligned}$$

Now we give the main theorems for these cases.

Theorem 2 (Cohen [2], Peng-Zhang [14], Kobayashi-Pevzner [9])**.** *When* $(G, G_1) = (Sp(1,\mathbb{R}) \times Sp(1,\mathbb{R}), \Delta Sp(1,\mathbb{R}))$,

$$\mathcal{F}^*_{\lambda,\mu,k} : \mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(1,\mathbb{R})}) \hat{\boxtimes} \mathcal{H}_\mu(D_{Sp(1,\mathbb{R})}) \to \mathcal{H}_{\lambda+\mu+2k}(D_{Sp(1,\mathbb{R})}) \quad (\lambda, \mu > 0, k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}),$$

$$\mathcal{F}^*_{\lambda,\mu,k} f(y) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-k)_m}{(\lambda)_{k-m}(\mu)_m} \frac{1}{m!} \left.\frac{\partial^k}{\partial x_L^{k-m} \partial x_R^m}\right|_{x_L = x_R = y} f(x_L, x_R)$$

intertwines the $\tilde{G}_1$-action.

Here $(\lambda)_m := \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+m-1)$.

Theorem 3 (N). *When $(G, G_1) = (Sp(2,\mathbb{R}), U(1,1))$,*

$$\mathcal{F}_{\lambda,k_1,k_2} : \mathcal{H}_{\lambda+2k_1,\lambda+2k_2}(D_{U(1,1)})_{\tilde{K}_1} \to \mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(2,\mathbb{R})})_{\tilde{K}} \quad (\lambda > \tfrac{1}{2}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}),$$
$$\mathcal{F}_{\lambda,k_1,k_2} f \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} = x_{11}^{k_1} x_{22}^{k_2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\lambda + k_1 + k_2 + \frac{1}{2}\right)_m} \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{4} x_{11} x_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_{12}^2} \right)^m f(x_{12})$$

intertwines the $(\mathfrak{g}_1, \tilde{K}_1)$-action.

Remark 4. *The operator $\mathcal{F}_{\lambda,k_1,k_2} : \mathcal{H}_{\lambda+2k_1,\lambda+2k_2}(D_{U(1,1)})_{\tilde{K}_1} \to \mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(2,\mathbb{R})})_{\tilde{K}}$ gives the adjoint of the $\tilde{G}_1$-intertwining operator $\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(2,\mathbb{R})}) \to \mathcal{H}_{\lambda+2k_1,\lambda+2k_2}(D_{U(1,1)})$ given by Kobayashi's F-method [7, 8, 9].*

4 Proof of main results

We prove the main results in the following steps.

(1) Find the $\tilde{G}_1$-invariant kernel function.

(2) Write the intertwining operator in the integral expression.

(3) Rewrite this in the differential expression.

(4) Compute explicitly this by using the series expansion etc.

We work in more general setting until Step 3, namely,

$$(G, G_1) = (Sp(s,\mathbb{R}) \times Sp(s,\mathbb{R}), \Delta Sp(s,\mathbb{R})),$$
$$\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})}) \hat{\boxtimes} \mathcal{H}_\mu(D_{Sp(s,\mathbb{R})}) \supset \mathcal{H}_{\lambda+\mu}(D_{Sp(s,\mathbb{R})}, W),$$

where $W \subset \mathcal{P}(\mathrm{Sym}(s,\mathbb{R}))$ is a $K_1 = U(s)$-submodule, or

$$(G, G_1) = (Sp(s,\mathbb{R}), U(s', s'')),$$
$$\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})}) \supset \mathcal{H}_{\lambda,\lambda}(D_{U(s',s'')}, W' \boxtimes W''),$$

where $s' + s'' = s$, and $W' \boxtimes W'' \subset \mathcal{P}(\mathrm{Sym}(s',\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Sym}(s'',\mathbb{C}))$ is a $K_1 = U(s') \times U(s'')$-submodule.

Step 1: Find the $\tilde{G}_1$-invariant kernel function.

We fix a $K_1 = U(s)$-submodule $W \subset \mathcal{P}(\mathrm{Sym}(s,\mathbb{R}))$, or $K_1 = U(s') \times U(s'')$-submodule $W' \boxtimes W'' \subset \mathcal{P}(M(s', s''; \mathbb{C}))$. Then there exists uniquely (up to constant multiple) a polynomial $K_W(x, y) \in W \otimes \overline{W} \subset \mathcal{P}(\mathrm{Sym}(s,\mathbb{C}) \times \overline{\mathrm{Sym}(s,\mathbb{C})})$ resp. $K_{W',W''}(x, y) \in (W' \boxtimes W'') \otimes \overline{(W' \boxtimes W'')} \subset \mathcal{P}(\mathrm{Sym}(s',\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Sym}(s'',\mathbb{C}) \times \overline{\mathrm{Sym}(s',\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Sym}(s'',\mathbb{C})})$ such that

$$K_W(kx^tk, k^{*-1}y\bar{k}^{-1}) = K_W(x, y) \quad (x, y \in \mathfrak{p}_2^+ = \mathrm{Sym}(s,\mathbb{C}),\ k \in K_1^{\mathbb{C}} = GL(s,\mathbb{C}))$$

resp.

$$K_{W',W''}(k_1 x_1 {}^t k_1, k_2 x_2 {}^t k_2, k_1^{*-1} y_1 \bar{k}_1^{-1}, k_2^{*-1} y_2 \bar{k}_2^{-1}) = K_{W',W''}(x_1, x_2, y_1, y_2)$$
$$((x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathfrak{p}_2^+ = \mathrm{Sym}(s', \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Sym}(s'', \mathbb{C})),$$
$$(k_1, k_2) \in K_1^{\mathbb{C}} = GL(s', \mathbb{C}) \times GL(s'', \mathbb{C}))$$

We define $\hat{K}_W(x_L, x_R; y_1, y_2) \in \mathcal{O}(\mathfrak{p}^+ \times \overline{\mathfrak{p}_1^+ \times \mathfrak{p}_2^+}) = \mathcal{O}(\mathrm{Sym}(s, \mathbb{C}) \times \mathrm{Sym}(s, \mathbb{C}) \times \mathrm{Sym}(s, \mathbb{C}) \times \mathrm{Sym}(s, \mathbb{C}))$ by

$$\hat{K}_W(x_L, x_R; y_1, y_2)$$
$$:= \det(I - y_1^* x_L)^{-\lambda} \det(I - y_1^* x_R)^{-\mu} K_W\left(x_L(I - y_1^* x_L)^{-1} - x_R(I - y_1^* x_R)^{-1}, y_2\right),$$

or define $\hat{K}_{W',W''}(x; y_{11}, y_{22}, y_{12}) \in \mathcal{O}(\mathfrak{p}^+ \times \overline{\mathfrak{p}_1^+ \times \mathfrak{p}_2^+}) = \mathcal{O}(\mathrm{Sym}(s, \mathbb{C}) \times \overline{M(s', s''; \mathbb{C})} \times \mathrm{Sym}(s', \mathbb{C}) \times \mathrm{Sym}(s'', \mathbb{C}))$ by

$$\hat{K}_{W',W''}(x; y_{12}, y_{11}, y_{22})$$
$$:= \det\left(I - \begin{pmatrix} 0 & y_{12} \\ {}^t y_{12} & 0 \end{pmatrix}^* x\right)^{-\lambda} K_{W',W''}\left(\mathrm{Proj}_2\left(x\left(I - \begin{pmatrix} 0 & y_{12} \\ {}^t y_{12} & 0 \end{pmatrix}^* x\right)^{-1}\right), y_{11}, y_{22}\right),$$

where $\mathrm{Proj}_2 : \mathfrak{p}^+ = \mathrm{Sym}(s, \mathbb{C}) \to \mathfrak{p}_2^+ = \mathrm{Sym}(s', \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Sym}(s'', \mathbb{C})$ is defined as $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ {}^t x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \mapsto (x_{11}, x_{22})$. Then $\hat{K}_W$ and $\hat{K}_{W',W''}$ satisfy the $\tilde{G}_1$-invariance in the following sense. For $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(s, \mathbb{R})$ (resp. $U(s', s'')$) and $x \in \mathrm{Sym}(s, \mathbb{C})$ (resp. $M(s', s''; \mathbb{C})$), we write $gx := (Ax + B)(Cx + D)^{-1}$. Also, for $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U(s', s'')$, write $\tilde{g} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & B \\ 0 & \overline{D} & \overline{C} & 0 \\ 0 & \overline{B} & \overline{A} & 0 \\ C & 0 & 0 & D \end{pmatrix} \in Sp(s, \mathbb{R})$.

Proposition 5. *(1) For $x_L, x_R, y_1, y_2 \in \mathrm{Sym}(s, \mathbb{C})$, $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(s, \mathbb{R})$,*

$$\hat{K}_W\left(gx_L, gx_R; gy_1, {}^t(Cy_1 + D)^{-1} y_2 (Cy_1 + D)^{-1}\right)$$
$$= \det(Cx_L + D)^\lambda \det(Cx_R + D)^\mu \hat{K}_W(x_L, x_R; y_1, y_2) \overline{\det(Cy_1 + D)}^{\lambda+\mu}.$$

(2) For $x \in \mathrm{Sym}(s, \mathbb{C})$, $y_{12} \in M(s', s''; \mathbb{C})$, $y_{11} \in \mathrm{Sym}(s', \mathbb{C})$, $y_{22} \in \mathrm{Sym}(s'', \mathbb{C})$, $g \in U(s', s'')$,

$$\hat{K}_{W',W''}\big(\tilde{g}x; gy_{12}, (A^* + y_{12}B^*)^{-1} y_{22} {}^t(A^* + y_{12}B^*)^{-1},$$
$${}^t(Cy_{12} + D)^{-1} y_{22} (Cy_{12} + D)^{-1}\big)$$
$$= \det(\tilde{C}x + \tilde{D})^\lambda \hat{K}_{W',W''}(x; y_{12}, y_{11}, y_{22}) \overline{\det(A^* + y_{12}B^*)}^\lambda \overline{\det(Cy_{12} + D)}^\lambda.$$

Step 2: Write the intertwining operator in the integral expression.

From the above proposition, we easily get the following corollary.

Corollary 6. *(1) When $(G,G_1)=(Sp(s,\mathbb{R})\times Sp(s,\mathbb{R}),\Delta Sp(s,\mathbb{R}))$, the linear maps*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_W^*&:\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})})\hat{\boxtimes}\mathcal{H}_\mu(D_{Sp(s,\mathbb{R})})\to\mathcal{H}_{\lambda+\mu}(D_{Sp(s,\mathbb{R})},W),\\ \mathcal{F}_W^*f(y_1,y_2)&:=\langle f,\hat{K}_W(\cdot,\cdot;y_1,y_2)\rangle_{\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})})\hat{\boxtimes}\mathcal{H}_\mu(D_{Sp(s,\mathbb{R})})},\\ \mathcal{F}_W&:\mathcal{H}_{\lambda+\mu}(D_{Sp(s,\mathbb{R})},W)\to\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})})\hat{\boxtimes}\mathcal{H}_\mu(D_{Sp(s,\mathbb{R})}),\\ \mathcal{F}_Wf(x_L,x_R)&:=\langle f,\overline{\hat{K}_W(x_L,x_R;\cdot,\cdot)}\rangle_{\mathcal{H}_{\lambda+\mu}(D_{Sp(s,\mathbb{R})},W)}\end{aligned}$$

intertwine the $\tilde{G}_1$-action.

(2) When $(G,G_1)=(Sp(s,\mathbb{R}),U(s',s''))$, the linear maps

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{W',W''}^*&:\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})})\to\mathcal{H}_{\lambda,\lambda}(D_{U(s',s'')},W'\boxtimes W''),\\ \mathcal{F}_{W',W''}^*f(y_{12},y_{11},y_{22})&:=\langle f,\hat{K}_{W',W''}(\cdot;y_{12},y_{11},y_{22})\rangle_{\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})})},\\ \mathcal{F}_{W',W''}&:\mathcal{H}_{\lambda,\lambda}(D_{U(s',s'')},W'\boxtimes W'')\to\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})}),\\ \mathcal{F}_{W',W''}f(x)&:=\langle f,\overline{\hat{K}_{W',W''}(x;\cdot,\cdot,\cdot)}\rangle_{\mathcal{H}_{\lambda,\lambda}(D_{U(s',s'')},W'\boxtimes W'')}\end{aligned}$$

intertwine the $\tilde{G}_1$-action.

Especially, when $(G,G_1)=(Sp(s,\mathbb{R})\times Sp(s,\mathbb{R}),\Delta Sp(s,\mathbb{R}))$, if $\lambda,\mu>s$, then since the inner product is given by the explicit integral, the intertwining operator

$$\mathcal{F}_W^*:\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})})\hat{\boxtimes}\mathcal{H}_\mu(D_{Sp(s,\mathbb{R})})\to\mathcal{H}_{\lambda+\mu}(D_{Sp(s,\mathbb{R})},W)$$

is given by the integral operator

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_W^*f(y_1,y_2)&=\langle f,\hat{K}_W(\cdot,\cdot;y_1,y_2)\rangle_{\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})})\hat{\boxtimes}\mathcal{H}_\mu(D_{Sp(s,\mathbb{R})})}\\ &=\iint_{D_s\times D_s}\overline{\hat{K}_W(x_L,x_R;y_1,y_2)}f(x_L,x_R)\\ &\qquad\times\det(I-x_Lx_L^*)^{\lambda-(s+1)}\det(I-x_Rx_R^*)^{\mu-(s+1)}dx_Ldx_R,\end{aligned}$$

and

$$\mathcal{F}_W:\mathcal{H}_{\lambda+\mu}(D_{Sp(s,\mathbb{R})},W)\to\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})})\hat{\boxtimes}\mathcal{H}_\mu(D_{Sp(s,\mathbb{R})})$$

is written as

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Wf(x_L,x_R)&=\langle f,\overline{\hat{K}_W(x_L,x_R;\cdot,\cdot)}\rangle_{\mathcal{H}_{\lambda+\mu}(D_{Sp(s,\mathbb{R})},W)}\\ &=\iint_{D_s\times\mathrm{Sym}(s,\mathbb{R})}\hat{K}_W(x_L,x_R;y_1,(I-y_1y_1^*)y_2(I-y_1^*y_1))f(y_1,y_2)\\ &\qquad\times e^{-\operatorname{tr}(y_2y_2^*)}\det(I-y_1y_1^*)^{\lambda+\mu-(s+1)}dy_1dy_2.\end{aligned}$$

Similarly, when $(G,G_1)=(Sp(s,\mathbb{R}),U(s',s''))$ and $\lambda>s$, the intertwining operators are given by the integral operators.

Step 3: Rewrite the operator in the differential expression.

In the previous steps, we got the intertwining operators in the integral expession. However, the kernel function $\hat{K}_W$ is a bit complicated. Moreover, in general, the intertwining operator $\mathcal{H}|_{G_1} \to \mathcal{H}_1$ from the holomorphic discrete series representation of the larger group to that of the smaller group is given by a differential operator (Kobayashi-Pevzner 2015 [8]), but we cannot see this fact directly from the integral expression. Therefore we want to rewrite the intertwining operator in different form. In order to do this, we make use of the following fact. Let $\mathfrak{p}^+$ be a complex vector space, with the inner product $(\cdot|\cdot)$ and let $\dim \mathfrak{p}^+ = n$. Then for any $f \in \mathcal{P}(\mathfrak{p}^+)$, we have

$$f(x) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathfrak{p}^+} f(z) e^{(x|z)} e^{-(z|z)} dz.$$

That is, $\mathcal{O} \cap L^2\left(\mathfrak{p}^+, \frac{1}{\pi^n} e^{-(z|z)} dz\right)$ has the reproducing kernel $e^{(x|z)}$.

First we consider $\mathcal{F}_W^* : \mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})}) \hat{\boxtimes} \mathcal{H}_\mu(D_{Sp(s,\mathbb{R})}) \to \mathcal{H}_{\lambda+\mu}(D_{Sp(s,\mathbb{R})}, W)$. By substituting f with the previous equality, we get

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_W^* f(y_1, y_2) = \langle f, \hat{K}_W(\cdot, \cdot; y_1, y_2)\rangle_{\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})}) \hat{\boxtimes} \mathcal{H}_\mu(D_{Sp(s,\mathbb{R})})} \\
&= \frac{1}{\pi^{s(s+1)}} \iint_{\mathrm{Sym}(s,\mathbb{C})^{\oplus 2}} f(z_L, z_R) \langle e^{\mathrm{tr}(x_L z_L^*) + \mathrm{tr}(x_R z_R^*)}, \hat{K}_W(x_L, x_R; y_1, y_2)\rangle_{\mathcal{H}_\lambda \hat{\boxtimes} \mathcal{H}_\mu, (x_L, x_R)} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times e^{-\mathrm{tr}(z_L z_L^*) - \mathrm{tr}(z_R z_R^*)} dz_L dz_R \\
&= \frac{1}{\pi^{s(s+1)}} \iint_{\mathrm{Sym}(s,\mathbb{C})^{\oplus 2}} f(z_L, z_R) \mathcal{F}_W^* (e^{\mathrm{tr}(x_L z_L^*) + \mathrm{tr}(x_R z_R^*)})_{x_L, x_R}(y_1, y_2) e^{-\mathrm{tr}(z_L z_L^*) - \mathrm{tr}(z_R z_R^*)} dz_L dz_R.
\end{aligned}$$

Since $\mathcal{F}_W^*$ intertwines the $\tilde{G}_1$-action and $\exp(\mathfrak{p}_1^+)$ acts by linear translation,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_W^* (e^{\mathrm{tr}(x_L z_L^*) + \mathrm{tr}(x_R z_R^*)})_{x_L, x_R}(y_1, y_2) = \mathcal{F}_W^* (e^{\mathrm{tr}((x_L + y_1) z_L^*) + \mathrm{tr}((x_R + y_1) z_R^*)})_{x_L, x_R}(0, y_2) \\
&= \langle e^{\mathrm{tr}(x_L z_L^*) + \mathrm{tr}(x_R z_R^*)}, \hat{K}_W(x_L, x_R; 0, y_2)\rangle_{\mathcal{H}_\lambda \hat{\boxtimes} \mathcal{H}_\mu, (x_L, x_R)} e^{\mathrm{tr}(y_1 z_L^*) + \mathrm{tr}(y_1 z_R^*)} \\
&= \langle e^{\mathrm{tr}(x_L z_L^*) + \mathrm{tr}(x_R z_R^*)}, K_W(x_L - x_R, y_2)\rangle_{\mathcal{H}_\lambda \hat{\boxtimes} \mathcal{H}_\mu, (x_L, x_R)} e^{\mathrm{tr}(y_1 z_L^*) + \mathrm{tr}(y_1 z_R^*)}.
\end{aligned}$$

Now we define

$$F_W^*(z_L, z_R; y_2) := \langle e^{\mathrm{tr}(x_L z_L^*) + \mathrm{tr}(x_R z_R^*)}, K_W(x_L - x_R, y_2)\rangle_{\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})}) \hat{\boxtimes} \mathcal{H}_\mu(D_{Sp(s,\mathbb{R})}), (x_L, x_R)}.$$

Then this becomes a polynomial, and the intertwining operator $\mathcal{F}_W^* : \mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})}) \hat{\boxtimes} \mathcal{H}_\mu(D_{Sp(s,\mathbb{R})}) \to \mathcal{H}_{\lambda+\mu}(D_{Sp(s,\mathbb{R})}, W)$ is given by

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_W^* f(y_1, y_2) \\
&= \frac{1}{\pi^{s(s+1)}} \iint_{\mathrm{Sym}(s,\mathbb{C})^{\oplus 2}} f(z_L, z_R) F_W^*(z_L, z_R; y_2) e^{\mathrm{tr}(y_1 z_L^*) + \mathrm{tr}(y_1 z_R^*)} e^{-\mathrm{tr}(z_L z_L^*) - \mathrm{tr}(z_R z_R^*)} dz_L dz_R \\
&= \frac{1}{\pi^{s(s+1)}} \iint_{\mathrm{Sym}(s,\mathbb{C})^{\oplus 2}} f(z_L, z_R)\, F_W^* \left(\overline{\frac{\partial}{\partial x_L}}, \overline{\frac{\partial}{\partial x_R}}; y_2 \right) e^{\mathrm{tr}(x_L z_L^*) + \mathrm{tr}(x_R z_R^*)} \Big|_{x_L = x_R = y_1} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times e^{-\mathrm{tr}(z_L z_L^*) - \mathrm{tr}(z_R z_R^*)} dz_L dz_R \\
&= F_W^* \left(\overline{\frac{\partial}{\partial x_L}}, \overline{\frac{\partial}{\partial x_R}}; y_2 \right) \Big|_{x_L = x_R = y_1} f(x_L, x_R).
\end{aligned}$$

Similarly we define

$$\begin{aligned}
&F_W(x_2;w_1,w_2) := \langle e^{\mathrm{tr}(y_1w_1^*)+\mathrm{tr}(y_2w_2^*)}, \overline{\hat{K}_W(x_2,-x_2;y_1,y_2)}\rangle_{\mathcal{H}_{\lambda+\mu}(D_{Sp(s,\mathbb{R})},W),(y_1,y_2)} \\
&= \langle e^{\mathrm{tr}(y_1w_1^*)+\mathrm{tr}(y_2w_2^*)}, \overline{\det(I-\overline{y_1}x_2)^{-\lambda}\det(I+\overline{y_1}x_2)^{-\mu}} \\
&\qquad\qquad \times \overline{K_W\left(x_2(I-y_1^*x_2)^{-1}+x_2(I+y_1^*x_2)^{-1},y_2\right)}\rangle_{\mathcal{H}_{\lambda+\mu}(D_{Sp(s,\mathbb{R})},W),(y_1,y_2)} \\
&= \langle e^{\mathrm{tr}(y_1w_1^*)+\mathrm{tr}(y_2w_2^*)}, \overline{\det(I-y_1^*x_2)^{-\lambda}\det(I+y_1^*x_2)^{-\mu}} \\
&\qquad\qquad\quad \times \overline{K_W\left(2(I-x_2y_1^*)^{-1}x_2(I+y_1^*x_2)^{-1},y_2\right)}\rangle_{\mathcal{H}_{\lambda+\mu}(D_{Sp(s,\mathbb{R})},W),(y_1,y_2)}.
\end{aligned}$$

Then $\mathcal{F}_W : \mathcal{H}_{\lambda+\mu}(D_{Sp(s,\mathbb{R})},W)_{\tilde{K}_1} \to (\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})}) \hat{\boxtimes} \mathcal{H}_\mu(D_{Sp(s,\mathbb{R})}))_{\tilde{K}}$ is given by

$$\mathcal{F}_W f(x_L,x_R) = F_W\left(x_L-x_R;\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\bigg|_{\substack{y_1=x_L+x_R,\\ y_2=x_L-x_R}} f(y_1,y_2).$$

This is an infinite-order differential operator, but is well-defined on $\tilde{K}_1$-finite vectors.

Similarly, when $(G,G_1)=(Sp(s,\mathbb{R}),U(s',s''))$, we define

$$\begin{aligned}
F^*_{W',W''}(z;y_{11},y_{22}) &:= \left\langle e^{\mathrm{tr}(xz^*)}, \hat{K}_{W',W''}(x;0,y_{11},y_{22})\right\rangle_{\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})}),x} \\
&= \left\langle e^{\mathrm{tr}(xz^*)}, K_{W',W''}(x_{11},x_{22};y_{11},y_{22})\right\rangle_{\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})}),x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&F_{W',W''}(x_{11},x_{22};w_{12},w_{11},w_{22}) \\
&:= \left\langle e^{\mathrm{tr}(yw^*)}, \overline{\hat{K}_{W',W''}\left(\begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22}\end{pmatrix};y_{12},y_{11},y_{22}\right)}\right\rangle_{\mathcal{H}_{\lambda,\lambda}(D_{U(s',s'')},W'\boxtimes W''),y} \\
&= \left\langle e^{\mathrm{tr}(yw^*)}, \overline{\det(I-\overline{y_{12}}x_{22}y_{12}^*x_{11})^{-\lambda}}\right. \\
&\quad \left.\times \overline{K_{W',W''}\left(x_{11}(I-\overline{y_{12}}x_{22}y_{12}^*x_{11})^{-1}, x_{22}(I-y_{12}^*x_{11}\overline{y_{12}}x_{22})^{-1},y_{11},y_{22}\right)}\right\rangle_{\substack{\mathcal{H}_{\lambda,\lambda}(D_{U(s',s'')},\\ W'\boxtimes W''),y}}
\end{aligned}$$

(where we write $x=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ {}^tx_{12} & x_{22}\end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ {}^ty_{12} & y_{22}\end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ {}^tw_{12} & w_{22}\end{pmatrix}$). Then the intertwining operators $\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})}) \underset{\mathcal{F}_{W',W''}}{\overset{\mathcal{F}^*_{W',W''}}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}_{\lambda,\lambda}(D_{U(s',s'')},W'\boxtimes W'')$ are given by

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^*_{W',W''}f(y_{12},y_{11},y_{22}) &:= F^*_{W',W''}\left(\overline{\frac{\partial}{\partial x}};y_{11},y_{22}\right)\bigg|_{\substack{x_{12}=y_{12},\\ x_{11}=x_{22}=0}} f(x), \\
\mathcal{F}_{W',W''}f(x) &:= F_{W',W''}\left(x_{11},x_{22};\overline{\frac{\partial}{\partial y}}\right)\bigg|_{\substack{y_{12}=x_{12},\\ y_{11}=y_{22}=0}} f(y_{12},y_{11},y_{22}).
\end{aligned}$$

Thus we want to compute explicitly

$$F^*_W(z_L,z_R;y_2),\ F_W(x_2;w_1,w_2),\ F^*_{W',W''}(z;y_{11},y_{22}),\ F_{W',W''}(x_{11},x_{22};w_{12},w_{11},w_{22}).$$

In fact, $F^*_W(z_L,z_R;y_2)$ and $F_{W',W''}(x_{11},x_{22};w_{12},w_{11},w_{22})$ are explicitly computable for some $W\subset\mathcal{P}(\mathrm{Sym}(s,\mathbb{C}))$, $W'\boxtimes W''\subset\mathcal{P}(\mathrm{Sym}(s',\mathbb{C})\oplus\mathrm{Sym}(s'',\mathbb{C}))$.

Step 4: Compute the differential expression explicitly.

Now we compute the differential expression of the intertwining operators in the simplest cases. First we let $s = 1$ and consider $(G, G_1) = (Sp(1,\mathbb{R}) \times Sp(1,\mathbb{R}), \Delta Sp(1,\mathbb{R}))$. If $\lambda, \mu > 1$, $F_W^*(z_L, z_R; y_2)$ is given by

$$\begin{aligned}
&F_W^*(z_L, z_R; y_2) = \langle e^{x_L\overline{z_L}+x_R\overline{z_R}}, K_W(x_L - x_R, y_2)\rangle_{\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(1,\mathbb{R})})\hat{\boxtimes}\mathcal{H}_\mu(D_{Sp(1,\mathbb{R})}),(x_L,x_R)} \\
&= \iint_{\substack{\{|x_L|<1\}\\ \times\{|x_R|<1\}}} e^{x_L\overline{z_L}+x_R\overline{z_R}}\overline{K_W(x_L - x_R, y_2)}(1-|x_L|^2)^{\lambda-2}(1-|x_R|^2)^{\mu-2}dx_L dx_R.
\end{aligned}$$

Let $W = \mathcal{P}_k(\mathrm{Sym}(1,\mathbb{C}))$. Then we have $K_W(x,y) = x^k\bar{y}^k$, and

$$\begin{aligned}
&F_W^*(z_L, z_R; y_2) \\
&= y_2^k \iint_{\substack{\{|x_L|<1\}\\ \times\{|x_R|<1\}}} e^{x_L\overline{z_L}+x_R\overline{z_R}}\overline{(x_L - x_R)^k}(1-|x_L|^2)^{\lambda-2}(1-|x_R|^2)^{\mu-2}dx_L dx_R \\
&= y_2^k \sum_{m=0}^{k} \frac{(-k)_m}{m!} \int_{|x_L|<1} e^{x_L\overline{z_L}}\overline{x_L^{k-m}}(1-|x_L|^2)^{\lambda-2}dx_L \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \int_{|x_R|<1} e^{x_R\overline{z_R}}\overline{x_R^m}(1-|x_R|^2)^{\mu-2}dx_R.
\end{aligned}$$

Since we have

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|<1} e^{x\bar{z}}\overline{x^m}(1-|x|^2)^{\mu-2}dx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\overline{z^j}}{j!}\int_0^1\int_0^{2\pi}(re^{\sqrt{-1}\theta})^j(re^{-\sqrt{-1}\theta})^m(1-r^2)^{\mu-2}rd\theta dr \\
&= 2\pi\frac{\overline{z^m}}{m!}\int_0^1 r^{2m}(1-r^2)^{\mu-2}rdr = \pi\frac{\overline{z^m}}{m!}\int_0^1 s^m(1-s)^{\mu-2}ds \\
&= \pi\frac{\overline{z^m}}{m!}B(m+1,\mu-1) = \pi\frac{\overline{z^m}}{m!}\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\mu-1)}{\Gamma(\mu+m)} = \frac{\pi}{\mu-1}\frac{\overline{z^m}}{(\mu)_m},
\end{aligned}$$

it follows that

$$F_W^*(z_L, z_R; y_2) = \frac{\pi^2}{(\lambda-1)(\mu-1)}y_2^k\sum_{m=0}^{k}\frac{(-k)_m}{(\lambda)_{k-m}(\mu)_m}\frac{1}{m!}\overline{z_L^{k-m}z_R^m}.$$

Hence $\mathcal{F}_W^* : \mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(1,\mathbb{R})}) \hat{\boxtimes} \mathcal{H}_\mu(D_{Sp(1,\mathbb{R})}) \to \mathcal{H}_{\lambda+\mu}(D_{Sp(1,\mathbb{R})}, \mathcal{P}_k(\mathrm{Sym}(1,\mathbb{C})))$ is given by

$$\mathcal{F}_W^* f(y_1, y_2) = y_2^k\sum_{m=0}^{k}\frac{(-k)_m}{(\lambda)_{k-m}(\mu)_m}\frac{1}{m!}\left.\frac{\partial^k}{\partial x_L^{k-m}\partial x_R^m}\right|_{x_L=x_R=y_1} f(x_L, x_R).$$

Finally, since $\mathcal{H}_{\lambda+\mu}(D_{Sp(1,\mathbb{R})}, \mathcal{P}_k(\mathrm{Sym}(1,\mathbb{C}))) \simeq \mathcal{H}_{\lambda+\mu+2k}(D_{Sp(1,\mathbb{R})})$ via $y_2^k f(y_1) \mapsto f(y)$, $\mathcal{F}_{\lambda,\mu,k}^* : \mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(1,\mathbb{R})}) \hat{\boxtimes} \mathcal{H}_\mu(D_{Sp(1,\mathbb{R})}) \to \mathcal{H}_{\lambda+\mu+2k}(D_{Sp(1,\mathbb{R})})$ is given by

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu,k}^* f(y) = \sum_{m=0}^{k}\frac{(-k)_m}{(\lambda)_{k-m}(\mu)_m}\frac{1}{m!}\left.\frac{\partial^k}{\partial x_L^{k-m}\partial x_R^m}\right|_{x_L=x_R=y} f(x_L, x_R).$$

Next we consider $(G, G_1) = (Sp(2,\mathbb{R}), U(1,1))$. Then $F_{W',W''}$ is given as

$$\begin{aligned}
&F_{W',W''}(x_{11}, x_{22}; w_{12}, w_{11}, w_{22}) \\
&= \Big\langle e^{\operatorname{tr}(yw^*)}, \overline{(1-\overline{y_{12}}x_{22}y_{12}^*x_{11})^{-\lambda}} \\
&\quad \times \overline{K_{W',W''}\big(x_{11}(1-\overline{y_{12}}x_{22}y_{12}^*x_{11})^{-1}, x_{22}(1-y_{12}^*x_{11}\overline{y_{12}}x_{22})^{-1}, y_{11}, y_{22}\big)} \Big\rangle_{\substack{\mathcal{H}_{\lambda,\lambda}(D_{U(1,1)}, \\ W'\boxtimes W''),y}}.
\end{aligned}$$

Let $W' \boxtimes W'' = \mathcal{P}_{k_1}(\mathrm{Sym}(1,\mathbb{C})) \boxtimes \mathcal{P}_{k_2}(\mathrm{Sym}(1,\mathbb{C})) \simeq \mathbb{C}_{-2k_1} \boxtimes \mathbb{C}_{-2k_2}$. Then we have $K_{W',W''}(x_{11}, x_{22}, y_{11}, y_{22}) = (x_{11}\overline{y_{11}})^{k_1}(x_{22}\overline{y_{22}})^{k_2}$, and

$$\begin{aligned}
&F_{W',W''}(x_{11}, x_{22}; w_{12}, w_{11}, w_{22}) \\
&= \Big\langle e^{\operatorname{tr}(yw^*)}, \overline{(1-\overline{y_{12}}x_{22}y_{12}^*x_{11})^{-\lambda-k_1-k_2}(x_{11}\overline{y_{11}})^{k_1}(x_{22}\overline{y_{22}})^{k_2}} \Big\rangle_{\mathcal{H}_{\lambda,\lambda}(D_{U(1,1)}, \mathbb{C}_{-2k_1}\boxtimes\mathbb{C}_{-2k_2}),y}.
\end{aligned}$$

Since $\mathcal{H}_{\lambda,\lambda}(D_{U(1,1)}, \mathbb{C}_{-2k_1}\boxtimes\mathbb{C}_{-2k_2}) \simeq \mathcal{H}_{\lambda+2k_1,\lambda+2k_2}(D_{U(1,1)})$ via $y_{11}^{k_1}y_{22}^{k_2}f(y_{12}) \mapsto f(y_{12})$, we have

$$\begin{aligned}
&F_{W',W''}(x_{11}, x_{22}; w_{12}, w_{11}, w_{22}) \\
&= (x_{11}\overline{w_{11}})^{k_1}(x_{22}\overline{w_{22}})^{k_2}\Big\langle e^{2y_{12}w_{12}^*}, \overline{(1-\overline{y_{12}}x_{22}y_{12}^*x_{11})^{-\lambda-k_1-k_2}} \Big\rangle_{\mathcal{H}_{\lambda+2k_1,\lambda+2k_2}(D_{U(1,1)}),y_{12}} \\
&= (x_{11}\overline{w_{11}})^{k_1}(x_{22}\overline{w_{22}})^{k_2}\int_{|y_{12}|<1} e^{2y_{12}w_{12}^*}(1-\overline{y_{12}}x_{22}y_{12}^*x_{11})^{-\lambda-k_1-k_2} \\
&\qquad\qquad \times (1-|y_{12}|^2)^{2(\lambda+k_1+k_2)-2}dy_{12} \\
&= (x_{11}\overline{w_{11}})^{k_1}(x_{22}\overline{w_{22}})^{k_2}\int_{|y_{12}|<1} e^{2y_{12}w_{12}^*}\sum_{m=0}^\infty \frac{(\lambda+k_1+k_2)_m}{m!}(x_{11}x_{22}\overline{y_{12}}^2)^m \\
&\qquad\qquad \times (1-|y_{12}|^2)^{2(\lambda+k_1+k_2)-2}dy_{12} \\
&= (x_{11}\overline{w_{11}})^{k_1}(x_{22}\overline{w_{22}})^{k_2}\sum_{m=0}^\infty \frac{(\lambda+k_1+k_2)_m}{m!} \\
&\qquad\qquad \times \frac{\pi}{2(\lambda+k_1+k_2)-1}\frac{1}{(2(\lambda+k_1+k_2))_{2m}}(4x_{11}x_{22}\overline{w_{12}}^2)^m \\
&= \frac{\pi}{2(\lambda+k_1+k_2)-1}(x_{11}\overline{w_{11}})^{k_1}(x_{22}\overline{w_{22}})^{k_2}\sum_{m=0}^\infty \frac{2^{2m}(\lambda+k_1+k_2)_m}{(2(\lambda+k_1+k_2))_{2m}}\frac{1}{m!}(x_{11}x_{22}\overline{w_{12}}^2)^m \\
&= \frac{\pi}{2(\lambda+k_1+k_2)-1}(x_{11}\overline{w_{11}})^{k_1}(x_{22}\overline{w_{22}})^{k_2}\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{\left(\lambda+k_1+k_2+\frac{1}{2}\right)_m}\frac{1}{m!}(x_{11}x_{22}\overline{w_{12}}^2)^m.
\end{aligned}$$

Therefore the intertwining operator $\mathcal{F}_{W',W''} : \mathcal{H}_{\lambda,\lambda}(D_{U(1,1)}, \mathbb{C}_{-2k_1}\boxtimes\mathbb{C}_{-2k_2})_{\tilde{K}_1} \to \mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(2,\mathbb{R})})_{\tilde{K}}$ is given by

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\lambda,k_1,k_2}f\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22}\end{pmatrix} &= \left(x_{11}\frac{\partial}{\partial y_{11}}\right)^{k_1}\left(x_{22}\frac{\partial}{\partial y_{22}}\right)^{k_2} \\
&\quad\times \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{\left(\lambda+k_1+k_2+\frac{1}{2}\right)_m}\frac{1}{m!}\left(\frac{1}{4}x_{11}x_{22}\frac{\partial^2}{\partial y_{12}^2}\right)^m\bigg|_{\substack{y_{12}=x_{12}, \\ y_{11}=y_{22}=0}} f(y_{12}, y_{11}, y_{22}),
\end{aligned}$$

and $\mathcal{F}_{\lambda,k_1,k_2} : \mathcal{H}_{\lambda+2k_1,\lambda+2k_2}(D_{U(1,1)})_{\tilde{K}_1} \to \mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(2,\mathbb{R})})_{\tilde{K}}$ is given by

$$\mathcal{F}_{\lambda,k_1,k_2} f \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} = x_{11}^{k_1} x_{22}^{k_2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\lambda + k_1 + k_2 + \frac{1}{2}\right)_m} \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{4} x_{11} x_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_{12}^2} \right)^m f(x_{12}).$$

Here, since we take the gradient with respect to the inner product $\operatorname{tr}(xy^*)$ on $\operatorname{Sym}(2,\mathbb{C})$, we substitute $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_{12}}$ for $\overline{w_{12}}$.

5 Results for groups of higher rank

In this section we give the results on $(\mathfrak{g}_1, \tilde{K}_1)$-intertwining operators for $(G, G_1) = (Sp(s,\mathbb{R}), U(s',s''))$ for general s, s', s'' with $s' + s'' = s$. In this case we have

$$\mathfrak{p}^+ = \operatorname{Sym}(s,\mathbb{C}), \qquad \mathfrak{p}_1^+ = M(s',s'';\mathbb{C}), \qquad \mathfrak{p}_2^+ = \operatorname{Sym}(s',\mathbb{C}) \oplus \operatorname{Sym}(s'',\mathbb{C}).$$

In order to write the branching of $\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})})|_{\tilde{G}_1}$, we prepare some notations. Let

$$\mathbb{Z}_{++}^s := \{(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s : m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_s \geq 0\}.$$

For $x \in \operatorname{Sym}(s,\mathbb{C})$, $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}_{++}^s$, we set

$$\Delta_{\mathbf{m}}(x) := \prod_{l=1}^{s-1} \det((x_{ij})_{1 \leq i,j \leq l})^{m_l - m_{l+1}} \det(x)^{m_s},$$
$$\mathcal{P}_{\mathbf{m}}(\operatorname{Sym}(s,\mathbb{C})) := \operatorname{span}\{\Delta_{\mathbf{m}}(lx{}^t l) : l \in GL(s,\mathbb{C})\}.$$

Then the polynomial space $\mathcal{P}(\mathfrak{p}_2^+)$ is decomposed under $K_1 = U(s') \times U(s'')$ as

$$\mathcal{P}(\mathfrak{p}_2^+) = \bigoplus_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{++}^{s'}} \bigoplus_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_{++}^{s''}} \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(\operatorname{Sym}(s',\mathbb{C})) \boxtimes \mathcal{P}_{\mathbf{l}}(\operatorname{Sym}(s'',\mathbb{C})).$$

Accordingly, $\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})})$ is decomposed under $\tilde{G}_1$ as

$$\mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})})|_{\tilde{G}_1} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{++}^{s'}}^{\oplus} \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_{++}^{s''}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\lambda,\lambda}(D_{U(s',s'')}, \mathcal{P}_{\mathbf{k}}(\operatorname{Sym}(s',\mathbb{C})) \boxtimes \mathcal{P}_{\mathbf{l}}(\operatorname{Sym}(s'',\mathbb{C}))).$$

From now on we only consider the representation of $\tilde{G}_1$ of the form

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \mathcal{H}_{\lambda,\lambda}(D_{U(s',s'')}, \mathcal{P}_{(k,\dots,k)}(\operatorname{Sym}(s',\mathbb{C})) \boxtimes \mathcal{P}_{\mathbf{l}}(\operatorname{Sym}(s'',\mathbb{C}))) \\ &\simeq \mathcal{H}_{\lambda+2k,\lambda}(D_{U(s',s'')}, \mathbb{C} \boxtimes \mathcal{P}_{\mathbf{l}}(\operatorname{Sym}(s'',\mathbb{C}))). \end{aligned}$$

Sometimes we write $\mathcal{P}_{\mathbf{l}}(\operatorname{Sym}(s'',\mathbb{C})) = \mathcal{P}_{\mathbf{l}}$ for short if there is no confusion.

Next we define some polynomials. For $x, y, z \in \operatorname{Sym}(s'',\mathbb{C})$ and $\mathbf{m}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}_{++}^{s''}$, let

$$\begin{aligned} K_{\mathbf{m}}(x,y) &= \operatorname{Proj}_{\mathbf{m},x}\left(e^{\operatorname{tr}(xy^*)}\right) \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}} \boxtimes \overline{\mathcal{P}_{\mathbf{m}}}, \\ K_{\mathbf{m},\mathbf{l}}(x;y,z) &= \operatorname{Proj}_{\mathbf{m},x} \operatorname{Proj}_{\mathbf{l},\bar{z}}\left(e^{\operatorname{tr}(x(y+z)^*)}\right) \\ &= \operatorname{Proj}_{\mathbf{l},\bar{z}}\left(K_{\mathbf{m}}(x,y+z)\right) \\ &= \operatorname{Proj}_{\mathbf{m},x}\left(e^{\operatorname{tr}(xy^*)} K_{\mathbf{l}}(x,z)\right) \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}} \boxtimes \overline{\mathcal{P}} \boxtimes \overline{\mathcal{P}_{\mathbf{l}}}, \end{aligned}$$

where $\mathrm{Proj}_{\mathbf{m},x}$ is the projection onto $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ with respect to the variable x etc. Also, for $\mathbf{m} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{s''}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{s''}$ and $d \in \mathbb{N}$, we write

$$(\lambda + \mathbf{a})_{\mathbf{m},d} = \prod_{j=1}^{s''} \left(\lambda + a_j - \frac{d}{2}(s'' - 1) \right)_{m_j}.$$

Then we have the following theorem.

Theorem 7 (N)**.** *When $(G, G_1) = (Sp(s, \mathbb{R}), U(s', s''))$ with $s = s' + s''$,*

$$\mathcal{F}_{\lambda,k,\mathbf{l}} : \mathcal{H}_{\lambda+2k,\lambda}(D_{U(s',s'')}, \mathbb{C} \boxtimes \mathcal{P}_{\mathbf{l}})_{\tilde{K}_1} \to \mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})})_{\tilde{K}} \quad (\lambda > \tfrac{s-1}{2}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^{s''}_{++}),$$

$$\mathcal{F}_{\lambda,k,\mathbf{l}} f \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ {}^t x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} = \det(x_{11})^{k_1}$$

$$\times \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{s''}_{++}} \frac{1}{\left(\lambda + k + \mathbf{l} + \frac{1}{2}\right)_{\mathbf{m}-\mathbf{l},1}} K_{\mathbf{m},\mathbf{l}} \left(x_{22}; \overline{{}^t\left(\frac{\partial}{\partial y_{12}}\right) x_{11} \frac{\partial}{\partial y_{12}}, \frac{\partial}{\partial y_{22}}} \right) \bigg|_{y_{12}=x_{12}, y_{22}=0} f(y_{12}, y_{22})$$

$$(x_{12} \in M(s', s''; \mathbb{C}),\ x_{11} \in \mathrm{Sym}(s', \mathbb{C}),\ x_{22} \in \mathrm{Sym}(s'', \mathbb{C}))$$

intertwines the $(\mathfrak{g}_1, \tilde{K}_1)$-action.

Here, $\frac{\partial}{\partial y_{12}}, \frac{\partial}{\partial y_{22}}$ are the gradient on $M(s', s''; \mathbb{C})$, $\mathrm{Sym}(s'', \mathbb{C})$ with respect to the inner product $\mathrm{tr}(xy^*)$ on $\mathrm{Sym}(s, \mathbb{C})$.

Especially, if $\mathbf{l} = (l, \ldots, l)$, then $\mathcal{H}_{\lambda+2k,\lambda}(D_{U(s',s'')}, \mathbb{C} \boxtimes \mathcal{P}_{\mathbf{l}}) \simeq \mathcal{H}_{\lambda+2k,\lambda+2l}(D_{U(s',s'')})$ via $\det(y_{22})^l f(y_{12}) \mapsto f(y_{12})$, and the polynomial $K_{\mathbf{m},\mathbf{l}}(x; y, z)$ is proportional to $\det(xz^*)^l K_{\mathbf{m}-\mathbf{l}}(x, y)$. Therefore by changing $\mathbf{m} - \mathbf{l}$ to $\mathbf{m}$, the intertwining operator $\mathcal{F}_{\lambda,k,\mathbf{l}} : \mathcal{H}_{\lambda+2k,\lambda+2l}(D_{U(s',s'')})_{\tilde{K}_1} \to \mathcal{H}_\lambda(D_{Sp(s,\mathbb{R})})_{\tilde{K}}$ is given by

$$\mathcal{F}_{\lambda,k,\mathbf{l}} f \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ {}^t x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} = \det(x_{11})^{k_1} \det(x_{22})^{k_2}$$

$$\times \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{s''}_{++}} \frac{1}{\left(\lambda + k + l + \frac{1}{2}\right)_{\mathbf{m},1}} K_{\mathbf{m}} \left(x_{22}, \overline{{}^t\left(\frac{\partial}{\partial x_{12}}\right) x_{11} \frac{\partial}{\partial x_{12}}} \right) f(x_{12})$$

For the proof, we compute

$$\begin{aligned} &F_{W',W''}(x_{11}, x_{22}; w_{12}, w_{11}, w_{22}) \\ &= \left\langle e^{\mathrm{tr}(yw^*)}, \overline{\det(x_{11} y_{11}^*)^k \det(I - \overline{y_{12}} x_{22} y_{12}^* x_{11})^{-\lambda-k}} \right. \\ &\qquad \left. \times\, \overline{K_{\mathbf{l}}\big(x_{22}(I - y_{12}^* x_{11} \overline{y_{12}} x_{22})^{-1}, y_{22}\big)} \right\rangle_{\mathcal{H}_{\lambda,\lambda}(D_{U(s',s'')}, W' \boxtimes W''), y} \end{aligned}$$

To do this, we expand $\det(I - \overline{y_{12}} x_{22} y_{12}^* x_{11})^{-\lambda-k} K_{\mathbf{l}}\big(x_{22}(I - y_{12}^* x_{11} \overline{y_{12}} x_{22})^{-1}, y_{22}\big)$. By using Faraut-Korányi's result, we have

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^{s''}_{++}} (\lambda+k)_{\mathbf{l},1} \det(I-\overline{y_{12}}x_{22}y_{12}^*x_{11})^{-\lambda-k} K_{\mathbf{l}}\big(x_{22}(I-y_{12}^*x_{11}\overline{y_{12}}x_{22})^{-1}, y_{22}\big)\\
&= \det(I-y_{12}^*x_{11}\overline{y_{12}}x_{22})^{-\lambda-k} \det\big(I-y_{22}^*x_{22}(I-y_{12}^*x_{11}\overline{y_{12}}x_{22})^{-1}\big)^{-\lambda-k}\\
&= \det\left(I-y_{12}^*x_{11}\overline{y_{12}}x_{22}-y_{22}^*x_{22}\right)^{-\lambda-k} = \det\left(I-(y_{12}^*x_{11}\overline{y_{12}}+y_{22}^*)x_{22}\right)^{-\lambda-k}\\
&= \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^{s''}_{++}} (\lambda+k)_{\mathbf{m},1} K_{\mathbf{m}}\left(x_{22}, {}^t y_{12}x_{11}^*y_{12}+y_{22}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{m},\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^{s''}_{++}} (\lambda+k)_{\mathbf{m},1} K_{\mathbf{m},\mathbf{l}}\left(x_{22}; y_{12}x_{11}^*y_{12}, y_{22}\right).
\end{aligned}$$

By projecting both sides to $\mathcal{P}_{\mathbf{l}}$ with respect to y_{22}, we get

$$\begin{aligned}
&\det(I-\overline{y_{12}}x_{22}y_{12}^*x_{11})^{-\lambda-k} K_{\mathbf{l}}\big(x_{22}(I-y_{12}^*x_{11}\overline{y_{12}}x_{22})^{-1}, y_{22}\big)\\
&= \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^{s''}_{++}} \frac{(\lambda+k)_{\mathbf{m},1}}{(\lambda+k)_{\mathbf{l},1}} K_{\mathbf{m},\mathbf{l}}\left(x_{22}; y_{12}x_{11}^*y_{12}, y_{22}\right)\\
&= \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^{s''}_{++}} (\lambda+k+\mathbf{l})_{\mathbf{m}-\mathbf{l},1} K_{\mathbf{m},\mathbf{l}}\left(x_{22}; y_{12}x_{11}^*y_{12}, y_{22}\right).
\end{aligned}$$

Therefore we have

$$\begin{aligned}
&F_{W',W''}(x_{11},x_{22};w_{12},w_{11},w_{22})\\
&= \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^{s''}_{++}} (\lambda+k+\mathbf{l})_{\mathbf{m}-\mathbf{l},1} \left\langle e^{\mathrm{tr}(yw^*)}, \overline{\det(x_{11}y_{11}^*)^k K_{\mathbf{m},\mathbf{l}}\left(x_{22}; y_{12}x_{11}^*y_{12}, y_{22}\right)}\right\rangle_{\substack{\mathcal{H}_{\lambda,\lambda}(D_{U(s',s'')},\\ W'\boxtimes W''),y}}
\end{aligned}$$

Then by using the speaker's previous results on norm computation of holomorphic discrete series representations, we conclude

$$\begin{aligned}
&F_{W',W''}(x_{11},x_{22};w_{12},w_{11},w_{22})\\
&= \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^{s''}_{++}} \frac{2^{|\mathbf{m}-\mathbf{l}|}(\lambda+k+\mathbf{l})_{\mathbf{m}-\mathbf{l},1}}{(2(\lambda+k+\mathbf{l}))_{2(\mathbf{m}-\mathbf{l}),2}} \det(x_{11}w_{11}^*)^k K_{\mathbf{m},\mathbf{l}}\left(x_{22}; w_{12}x_{11}^*w_{12}, w_{22}\right)\\
&= \det(x_{11}w_{11}^*)^k \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^{s''}_{++}} \frac{1}{\left(\lambda+k+\mathbf{l}+\frac{1}{2}\right)_{\mathbf{m}-\mathbf{l},1}} K_{\mathbf{m},\mathbf{l}}\left(x_{22}; w_{12}x_{11}^*w_{12}, w_{22}\right)
\end{aligned}$$

up to constant multiple. Hence the theorem follows.

References

[1] J.L. Clerc, T. Kobayashi, B. Ørsted and M. Pevzner, *Generalized Bernstein-Reznikov integrals*. Math. Ann. **349** (2011), no. 2, 395–431.

[2] H. Cohen, *Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters*. Math. Ann. **217** (1975), no. 3, 271–285.

[3] J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Korányi, Q.k. Lu and G. Roos, *Analysis and geometry on complex homogeneous domains*. Progress in Mathematics, 185. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2000.

[4] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on symmetric cones*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994.

[5] T. Kobayashi, *Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs*. Representation theory and automorphic forms, 45–109, Progr. Math., 255, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2008.

[6] T. Kobayashi, *A program for branching problems in the representation theory of real reductive groups*. In M. Nevins and P. Trapa, editors, Representations of Lie Groups: In Honor of David A. Vogan, Jr. on his 60th Birthday, Progress in Mathematics. Birkhauser, vol. 312, 2015, 277–322.

[7] T. Kobayashi, B, Ørsted, P. Somberg and V. Souček, *Branching laws for Verma modules and applications in parabolic geometry. I.* Adv. Math. **285** (2015), 1796–1852.

[8] T. Kobayashi and M. Pevzner, *Differential symmetry breaking operators. I-Genreal theory and F-method*. Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), no. 2, 801–845.

[9] T. Kobayashi and M. Pevzner, *Differential symmetry breaking operators. II-Rankin-Cohen Operators for Symmetric Pairs*. Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), no. 2, 847–911.

[10] T. Kobayashi and B. Speh, *Symmetry breaking for representations of rank one orthogonal groups*. Mem. Amer. Math. Soc. 238 (2015), no. 1126.

[11] J. Möllers, B. Ørsted and Y. Oshima, *Knapp-Stein type intertwining operators for symmetric pairs*. preprint, arXiv:1309.3904.

[12] J. Möllers and Y. Oshima, *Restriction of most degenerate representations of $O(1, N)$ with respect to symmetric pairs*. J. Math. Sci. Univ. Tokyo **22** (2015), no. 1, 279–338.

[13] R. Nakahama, *Norm computation and analytic continuation of vector valued holomorphic discrete series representations*. J. Lie Theory **26** (2016), no. 4, 927–990.

[14] L. Peng and G. Zhang, *Tensor products of holomorphic representations and bilinear differential operators*. J. Funct. Anal. **210** (2004), no. 1, 171–192.

平坦構造の一般化と複素鏡映群・パンルヴェ方程式*

眞野 智行 (琉球大学) †

1 概要

1970 年代の終わり頃, 斎藤恭司氏は孤立特異点の半普遍変形族のパラメータ空間の構造についての研究から, 平坦構造の概念を導入した. 特に実鏡映群に対して, その軌道空間上の平坦座標を定義した ([19, 20] などを参照). その後 Dubrovin [4] は $2D$ 位相的場の理論における WDVV 方程式の幾何学的解釈と斎藤氏の平坦構造を統一する形で Frobenius manifold の概念を創始した. また Dubrovin によって Frobenius manifold とある種のモノドロミ保存変形の理論が密接に関係することが明らかにされ, 特に 3 次元半単純 Frobenius manifold と Painlevé VI 型方程式の 1-パラメータ族の解が対応することが証明された.

本講演では, 加藤満生氏と関口次郎氏との共同研究 [9, 10, 11] に基づいてこれらの理論の一般化について述べる. すなわち実鏡映群の平坦座標の定義を複素鏡映群の場合に一般化することと, Painlevé VI 型方程式の full parameter 族が現れるように拡張することが目標である. Dubrovin の Frobenius manifold の理論においては prepotential と呼ばれる関数が重要な役割を果たすが, 我々の拡張においては potential vector field (あるいは local vector potential) と呼ばれるベクトル量によって理論が記述される. potential vector field が積分可能なとき prepotential が存在し, Frobenius manifold の理論が再現される. また我々の理論展開においては, 多変数大久保型方程式と呼ばれる線形微分方程式を基礎においており, これによりモノドロミ保存変形との関係が明瞭に記述される. そのおかげで, 様々な例の具体的記述が可能になり, potential vector field に関する多くの新しい具体例とともに Frobenius manifold の場合においても新しい結果が得られる.

2 複素鏡映群の平坦構造

G を well generated な有限既約複素鏡映群とする, ここで G が well generated であるとは G の rank n と生成元の個数 n がともに一致することである (詳しくは [3] を参照). $U_n = \{(u_1, u_2, \ldots, u_n) | u_j \in \mathbb{C}\}$ として G の U_n への自然な作用を考える. このとき, G-

*本講演の内容は、加藤満生氏 (琉球大)・関口次郎氏 (東京農工大) との共同研究 [9, 10, 11] に基づく.

†本研究は JSPS 科研費 JP25800082 の助成を受けたものです.

不変多項式は n 個の斉次多項式 $F_i(u)$ $(1 \le i \le n)$ によって生成され商空間 $X = U_n/G$ は $\mathbb{C}^n$ に同型となることが知られている (Chevalley の定理). 以下 $F_i(u)$ の次数を d_i とし $d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n$ と仮定する. 商空間 X の座標を

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = (F_1(u), \ldots, F_n(u))$$

で定める. また商写像 $\pi_G : U_n \to X$ の分岐因子を $D \subset X$ とし, その (被約) 定義多項式を $h(x)$ とおく. (D は G の discriminant と呼ばれる.) このとき次の 2 つの事実が知られている:

Fact 1 ([3]). $h(x)$ は x_n について n 次モニックな多項式である, すなわち

$$h(x) = x_n^n + (x_n\text{について } n-1 \text{ 次以下の項}).$$

Fact 2 ([21]). D は (斎藤) 自由因子である.

ここで (斎藤恭司氏による) 対数ベクトル場と自由因子の定義を述べておこう.

Definition 2.1 ([18]). ベクトル場 $V = \sum_{i=1}^n v_i(x)\partial_{x_i}$, $v_i(x) \in \mathbb{C}[x]$ が D に沿って対数的であるとは $Vh(x)/h(x) \in \mathbb{C}[x]$ となることである. D に沿った対数的ベクトル場のなす $\mathbb{C}[x]$-加群を $Der(-\log D)$ とする. このとき, D が自由因子であるとは $Der(-\log D)$ が $\mathbb{C}[x]$-自由加群になることである. (解析的なカテゴリーで議論する際は $\mathbb{C}[x]$ を $\mathcal{O}_X$ で置き換える.)

自由因子について次の判定法が知られている:

Fact 3 ([18]). D が自由因子であるための必要十分条件は, $\mathbb{C}[x]$ の元を成分とする $n \times n$ 行列 $M_V(x) = \big(v_{ij}(x)\big)$, $v_{ij}(x) \in \mathbb{C}[x]$ で $\det M_V(x) = h(x)$ かつ $V_i := \sum_{j=1}^n v_{ij}(x)\partial_{x_j}$, $i = 1, \ldots, n$, が D に沿った対数ベクトル場となるものが存在することである. $M_V(x)$ は斎藤行列と呼ばれる.

一般に, 自由因子 D に対して, 斎藤行列の取り方は無数にあるが, (座標 $(x_1, \ldots, x_n)$ を決めたとき) 次の意味で標準的なものが存在する:

Lemma 2.1 ([3],[10]). X の座標系 $(x_1, \ldots, x_n)$ を任意に固定する. x_i $(i = 1, \ldots, n)$ に対して重みを $w(x_i) = w_i := d_i/d_n$ で定める. n 個の D に沿った重み付斉次対数ベクトル場 $V_{n+1-i}^{(h)} = \sum_{j=1}^n v_{ij}^{(h)}(x)\partial_{x_j}$ $i = 1, \ldots, n,$ で斎藤行列 $M_{V^{(h)}}(x) = \big(v_{ij}^{(h)}(x)\big)$ が $M_{V^{(h)}}(x) - x_n I_n \in \mathbb{C}[x']$ をみたすものが一意的に存在する, ただし $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. 特に $w(V_i^{(h)}) = 1 - w_{n+i-1}$, $i = 1, \ldots, n,$ で $V_1^{(h)} = \sum_{j=1}^n w_j x_j \partial_{x_j}$ (オイラー作用素) となる.

また, G-不変多項式の斉次生成系 $\{F_1(u), \ldots, F_n(u)\}$ の取り方も一般には無数にあるが, 次の意味で標準的なものが存在する:

Theorem 2.1 ([10])**.** *G-不変多項式の斉次生成系 $\{F_1^{fl}(u),\dots,F_n^{fl}(u)\}$ で次の条件 (Fl) をみたすものが存在する:*

(Fl) $t_i = F_i^{fl}(u)$ として $t=(t_1,\dots,t_n)$ を X の座標系に取る. $M_{V^{(h)}}(t)$ を *Lemma* 2.1 で述べた斎藤行列とし, $C(t)$ は t の重み付斉次多項式を成分とする行列で $V_1^{(h)}C(t) = M_{V^{(h)}}(t)$ となるものとする. また, $B_\infty := diag(w_1,\dots,w_n) - \big((1+d_n)/d_n\big)I_n$ とおく. このとき

$$dY_0 = -\big((M_{V^{(h)}}(t))^{-1}dC(t)B_\infty\big)Y_0 \tag{1}$$

は完全積分可能な *Pfaff* 系となり, その解の基本系は

$$Y_0^{(i)} = -B_\infty^{-1}M_{V^{(h)}}(t)\,{}^t(\partial_{t_1},\dots,\partial_{t_n})u_i, \qquad i=1,\dots,n,$$

で与えられる.

特に $d_1 < d_2 < \cdots < d_n$ のときは $\{F_1^{fl}(u),\dots,F_n^{fl}(u)\}$ は定数倍を除いて一意的である.

Definition 2.2. Theorem 2.1 で述べられた $\{F_1^{fl}(u),\dots,F_n^{fl}(u)\}$ を平坦生成系, 対応する X の座標系 $t=(t_1,\dots,t_n)$ を平坦座標系と呼ぶ. 特に実鏡映群の場合には斎藤恭司氏らによる定義 ([20],[19]) と一致する.

Remark 2.1. (1) を G-quotient system と呼ぶ (商写像 $\pi_G : U_n \to X$ の逆写像を記述する微分方程式であり, G をモノドロミ群にもつ). また $x' = (x_1,\dots,x_{n-1})$ を固定して x_n についての常微分方程式とみると $M_{V^{(h)}}(t)dY_0/dx_n = -B_\infty Y_0$ となり大久保型である.

さらに次のことが分かる.

Proposition 2.1. *行列 $C(t)$ の (i,j)-成分を $C_{ij}(t)$ と書く. このとき t の重み付斉次多項式の n 組 $\vec{g} = (g_1(t),\dots,g_n(t))$ で $\partial g_j(t)/\partial t_i = C_{ij}(t)$ をみたすものが一意的に存在する.*

Remark 2.2. $\vec{g}$ は [13] において potential vector field (あるいは [16] において local vector potential) と呼ばれるものに一致する. また $\vec{g}$ はある非線形微分方程式系の解として特徴づけられる. それについては後ほど一般論の中で述べる.

以上より複素鏡映群 G から出発して G-quotient system を用いて, 平坦座標系 $t = (t_1,\dots,t_n)$ と potential vector field $\vec{g}$ という対象が抽出された.

逆に t, $\vec{g}$ と d_n から複素鏡映群 G が復元できる: 実際, $\vec{g}$ が与えられると, t_k の重みを w_k として

$$\begin{aligned}
C_{ij}(t) &:= \frac{\partial g_j(t)}{\partial t_i}, \quad i,j=1,\dots,n,\\
M_{V^{(h)}}(t) &:= \sum_{k=1}^{n} w_k t_k \frac{\partial C(t)}{\partial t_k},\\
B_\infty &:= \mathrm{diag}(w_1,\dots,w_n) - \big((1+d_n)/d_n\big)I_n
\end{aligned}$$

と定めることにより, 完全積分可能な Pfaff 系 (1) が構成できる. すると (1) のモノドロミ群として G が得られる (正確に言うと (1) のモノドロミ表現が, G の複素鏡映群としての標準的表現に一致する).

Example 1. $G = G(p,p,3)$, $p \in \mathbb{Z}, p \geq 2$ を考える. G-不変多項式の斉次生成系の取り方として次のものが知られている:

$$F_1(u) = u_1u_2u_3, \quad F_2(u) = u_1^p + u_2^p + u_3^p, \quad F_3(u) = (u_1u_2)^p + (u_2u_3)^p + (u_3u_1)^p,$$

ただし $d_1 = 3, d_2 = p, d_3 = 2p$ $(w_1 = 3/2p, w_2 = 1/2, w_3 = 1)$. しかしこれは平坦生成系にはならない. まず $p \geq 3$ のとき, 平坦生成系は次で与えられる:

$$F_1^{fl}(u) = F_1(u), \quad F_2^{fl}(u) = F_2(u), \quad F_3^{fl}(u) = F_3(u) - \frac{1}{4p}F_2(u)^2.$$

また potential vector field $\vec{g}$ は次で与えられる:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{16t_1t_2^2 + pt_1t_3}{p}, \\ g_2 &= \frac{64(-p^2+3p-2)t_2^3 + 3p^2t_1^p + 12p(p-1)t_2t_3}{12p(p-1)}, \\ g_3 &= \frac{512(p-1)t_2^4 + 48p^2t_1^pt_2 + 3p^2t_3^2}{6p^2}. \end{aligned}$$

$p = 2$ のときは d_1 と d_2 の順序が入れ替わることに注意する $(d_1 = 2, d_2 = 3, d_3 = 4)$. potential vector field は

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{2}t_2^2 + t_1t_3, \\ g_2 &= 8t_1^2t_2 + t_2t_3, \\ g_3 &= \frac{64}{3}t_1^4 + 8t_1t_2^2 + \frac{1}{2}t_3^2. \end{aligned}$$

で与えられる. このとき

$$F = \frac{1}{2}t_1t_3^2 + 4t_1^2t_2^2 + \frac{1}{2}t_2^2t_3 + \frac{64}{15}t_1^5$$

と定めると

$$g_1 = \frac{\partial F}{\partial t_3}, \quad g_2 = \frac{\partial F}{\partial t_2}, \quad g_3 = \frac{\partial F}{\partial t_1}$$

となることが分かる. ($p \geq 3$ のときは $\vec{g}$ は積分可能にならないことに注意.) F はコクセタ群 A_3 の prepotential である ([4]). Dubrovin の Frobenius manifold との関係は後ほど述べる.

以降の節ではこれらの対象を理解するための一般論について述べる.

3 大久保型微分方程式の多変数化

この節では後の準備のために, 大久保型微分方程式の多変数への拡張について述べる.

$n \times n$ 行列 T, B_∞ に対して, 常微分方程式

$$(zI_n - T)\frac{dY}{dz} = -B_\infty Y \tag{2}$$

を考える. T が対角行列のとき (2) は大久保型と呼ばれるが, 本講演では T が対角化可能[1] の時 (必ずしも対角化されているとは限らない) も大久保型と呼ぶことにする.

(2) について以下の仮定をおく:

(A1) T の固有値 $\{z_1, \ldots, z_n\}$ は互いに相異なる.

(A2) $B_\infty = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ かつ $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}$.

このとき大久保型方程式 (2) を積分可能条件を保ちつつ多変数 Pfaff 系に拡張したい. そこで行列 $T = T(x)$ $(x = (x_1, \ldots, x_n))$ の成分は $\mathbb{C}^n$ の単連結領域 U 上の正則関数であると仮定する. また $H(x,z) := \det(zI_n - T(x))$ とおく. $B^{(z)} := -(zI_n - T)^{-1}B_\infty$ として次の形の Pfaff 系を考える:

$$dY = \Big(B^{(z)}dz + \sum_{i=1}^{n} B^{(i)}dx_i\Big)Y. \tag{3}$$

Lemma 3.1. B_∞ は可逆行列であるとする. (3) の $B^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ について $H(x,z)B^{(i)}$ の成分は x については U 上正則, z については多項式であると仮定する. このとき *Pfaff* 系 (3) が積分可能であるための必要十分条件は, U 上の正則関数を成分とする $n \times n$ 行列 $\tilde{B}^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ が存在して

$$B^{(i)} = -(zI_n - T)^{-1}\tilde{B}^{(i)}B_\infty, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

と書けて, かつ $T, B_\infty, \tilde{B}^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ が次の関係式をみたすことである:

$$[T, \tilde{B}^{(i)}] = O, \quad [\tilde{B}^{(i)}, \tilde{B}^{(j)}] = O \quad (\forall i, j), \tag{4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} + \tilde{B}^{(i)} + [\tilde{B}^{(i)}, B_\infty] = O, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \tilde{B}^{(i)}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{B}^{(j)}}{\partial x_i} = O, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Definition 3.1. Lemma 3.1 の条件をみたす積分可能な Pfaff 系 (3) を多変数大久保型方程式と呼ぶ.

Remark 3.1. 関係式 (4),(5),(6) は, 大久保型常微分方程式 (2) の Schlesinger 系と同値である. すなわち多変数大久保型方程式 (3) は (2) のモノドロミ保存変形を与えているとみなすこともできる. (モノドロミ保存変形については [7, 8, 6] などを参照. [10] の Appendix A にも簡単な記述がある.)

[1] T が対角化可能でないときは [12] において一般大久保型と呼ばれるが, これは non-semisimple な平坦構造を扱う場合に必要である. しかし本講演では non-semisimple な場合は扱わない.

Remark 3.2. $T, \tilde{B}^{(i)}, B_\infty$ が関係式 (4),(5),(6) をみたすならば任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $T, \tilde{B}^{(i)}, B_\infty - \lambda I_n$ もまた同じ関係式 (4),(5),(6) をみたす.

4 Saito structure

1 節で抽出された対象を捉えるための枠組みとして Sabbah によって与えられた次の概念を用いる:

Definition 4.1 ([17]). X を n 次元複素多様体とする. また TX は X の接束とする. X 上の Saito structure (without metric) とは次の対象

(i) TX 上の flat torsion free connection $\triangledown$

(ii) TX 上の symmetric Higgs field Φ

(iii) TX の大域切断 e と E (e を unit field, E を Euler field と呼ぶ)

からなるデータで, 以下の条件を満たすものである:

(a) $\pi : \mathbb{P}^1 \times X \to X$ により定まるベクトル束 $\pi^* TX$ 上の有理型接続 ∇:

$$\nabla = \pi^* \triangledown - (z \cdot \mathrm{Id} + \Phi(E))^{-1} (\pi^* \Phi) \triangledown E - (z \cdot \mathrm{Id} + \Phi(E))^{-1} \triangledown E \, dz \tag{7}$$

は可積分接続となる, ただし z は $\mathbb{P}^1$ 上の非斉次座標

(b) ベクトル場 e は $\triangledown$ の水平切断 (すなわち $\triangledown(e) = 0$), かつ $\Phi_e = \mathrm{Id} \in End_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X)$. ここで Φ_e は 1-形式 $\Phi \in End_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$ とベクトル場 e の縮約を表す.

Remark 4.1. Higgs field Φ が与えられると, TX 上に積 $\star$ を次のように定義することができる:

$$\xi \star \eta = \Phi_\xi(\eta), \quad \xi, \eta \in TX.$$

このとき次が成り立つ:

$$\Phi \text{ が symmetric } \overset{\text{def.}}{\iff} \star \text{ が可換},$$
$$\Phi \text{ が積分可能 (i.e. } \Phi \wedge \Phi = 0) \iff \star \text{ が結合的}.$$

また Definition 4.1 の (b) の $\Phi_e = \mathrm{Id}$ は e が $\star$ の単位元であることを意味する.

条件より $\triangledown$ は flat torsion free なので (少なくとも X の単連結開集合上で) n 個の関数 $(t_1, \ldots, t_n)$ で $\triangledown(\partial_{t_i}) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ をみたすものが存在する. この $(t_1, \ldots, t_n)$ を平坦座標系と呼ぶ. 以下では次の仮定をおく:

(B1) $e = \partial_{t_n}$,

(B2) $E = w_1 t_1 \partial_{t_1} + \cdots + w_n t_n \partial_{t_n}$ for $w_i \in \mathbb{C}$,

(B3) $w_n = 1$ かつ $w_i - w_j \notin \mathbb{Z}$ for $i \neq j$.

Higgs field Φ を

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \Phi^{(k)} dt_k, \quad \Phi^{(k)} \in End_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X), \quad k = 1, \ldots, n,$$

と表す. TX の基底を $\{\partial_{t_1},\dots,\partial_{t_n}\}$ と固定して, $\Phi^{(k)}, -\Phi(E), \nabla E$ をこの基底によって行列表示したものをそれぞれ $\tilde{\mathcal{B}}^{(k)}, \mathcal{T}, \mathcal{B}_\infty$ とする, すなわち

$$\Phi^{(k)}(\partial_{t_i}) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\mathcal{B}}^{(k)}_{ij}\partial_{t_j}, \quad -\Phi_{\partial_{t_i}}(E) = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{T}_{ij}\partial_{t_j}, \quad \nabla_{\partial_{t_i}}(E) = \sum_{j=1}^{n}(\mathcal{B}_\infty)_{ij}\partial_{t_j}.$$

以下では $-\Phi(E)$ (すなわち $\mathcal{T}$) は regular semisimple と仮定する.

Lemma 4.1. Φ が *symmetric* $\iff \tilde{\mathcal{B}}^{(k)}_{ij} = \tilde{\mathcal{B}}^{(i)}_{kj}$.

Proof. $\partial_{t_k} \star \partial_{t_i} = \Phi^{(k)}(\partial_{t_i}) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{B}^{(k)}_{ij}\partial_{t_j}$ から明らか. □

Lemma 4.2. $\mathcal{B}_\infty = diag[w_1,\dots,w_n]$.

Proof. $E = \sum_{i=1}^{n} w_i t_i \partial_{t_i}$ であることと $\{\partial_{t_1},\dots,\partial_{t_n}\}$ が ∇-horizontal であることより

$$\nabla(E) = \nabla\Big(\sum_{i=1}^{n} w_i t_i \partial_{t_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} w_i dt_i \partial_{t_i}.$$

□

Proposition 4.1. ∇ が可積分 $\iff \mathcal{T}, \mathcal{B}_\infty, \tilde{\mathcal{B}}^{(i)}$ $(i=1,\dots,n)$ が次の関係式をみたす:

$$\begin{cases} \big[\mathcal{T}, \tilde{\mathcal{B}}^{(i)}\big] = 0, \quad \big[\tilde{\mathcal{B}}^{(i)}, \tilde{\mathcal{B}}^{(j)}\big] = 0, \quad i,j = 1,\dots,n, \\ \dfrac{\partial \mathcal{T}}{\partial t_i} + \tilde{\mathcal{B}}^{(i)} + [\tilde{\mathcal{B}}^{(i)}, \mathcal{B}_\infty] = 0, \quad i = 1,\dots,n, \\ \dfrac{\partial \tilde{\mathcal{B}}^{(i)}}{\partial t_j} = \dfrac{\partial \tilde{\mathcal{B}}^{(j)}}{\partial t_i}, \quad i,j = 1,\dots,n. \end{cases} \tag{8}$$

Remark 4.2. Lemma 3.1 より, 関係式 (8) は Pfaff 系

$$dY = -(zI_n - \mathcal{T})^{-1}\Big(dz + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mathcal{B}}^{(i)} dt_i\Big)\mathcal{B}_\infty Y \tag{9}$$

が多変数大久保型方程式になることを意味している.

以上より, Saito structure の存在は多変数大久保型方程式を導くことが分かった. 逆に, 多変数大久保型方程式が (任意に) 与えられた時, それに付随した Saito structure が存在するかどうかを判定するための条件は次で与えられる:

Theorem 4.1 ([10])**.** 多変数大久保型方程式 (3) が U 上の *Saito structure* から得られるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial T_{n1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_{nn}}{\partial x_1} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial T_{n1}}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial T_{nn}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{10}$$

が U 上で成り立つことである. この条件がみたされるとき, $t_j := -w_j^{-1}T_{nj}(x)$, $j = 1,\dots,n$ によって $x = (x_1,\dots,x_n)$ から $t = (t_1,\dots,t_n)$ への変数変換を定めると, $t = (t_1,\dots,t_n)$ は平坦座標を与える, ここで $w_j := \lambda_j - \lambda_n + 1$ とおいた.

さて, 話を元に戻して, Saito structure から得られる多変数大久保型方程式 (9) については次が成り立つ:

Lemma 4.3. $h(t) := \det(-\mathcal{T})$ として $D := \{h(t) = 0\}$ と定める. このとき D は自由因子となり, $-\mathcal{T}$ は斎藤行列を与える.

Lemma 4.4. t についての重み付斉次関数を成分とする $n \times n$ 行列 $\mathcal{C}$ で

$$\mathcal{T} = -E\mathcal{C}, \quad \tilde{\mathcal{B}}^{(i)} = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t_i}, \quad i = 1, \ldots, n$$

をみたすものが一意的に存在する.

Proof. (8) の第 3 式から $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t_i} = \tilde{\mathcal{B}}^{(i)}$ をみたす行列 $\mathcal{C}$ が存在することが分かる. 一方, $\mathcal{T}$ は $-\Phi(E)$ の表現行列なので

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{T}_{ij}\partial_{t_j} = -\Phi_{\partial_{t_i}}(E) = -\sum_{k=1}^{n} w_k t_k \Phi_{\partial_{t_i}}(\partial_{t_k}) = -\sum_{j,k=1}^{n} w_k t_k \tilde{\mathcal{B}}^{(i)}_{kj}\partial_{t_j} \tag{11}$$

が成り立つ. これより $\mathcal{T} = -E\mathcal{C}$ が分かる. (重み付斉次関数になることの証明は省略する.) □

Proposition 4.2. t についての重み付斉次関数の n 組 $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ で $\partial g_j/\partial t_i = \mathcal{C}_{ij}$ をみたすものが一意的に存在する.

Proof. $\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t_i} = \tilde{\mathcal{B}}^{(i)}$ であることと Higgs field Φ の対称性から

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{ij}}{\partial t_k} = \frac{\partial \mathcal{C}_{kj}}{\partial t_i}, \quad i, j, k = 1, \ldots, n$$

が成り立つ. これは

$$\frac{\partial g_j}{\partial t_i} = \mathcal{C}_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

をみたす g_j が存在することを意味する. □

Definition 4.2 ([13],[16])**.** $\vec{g}$ を Saito structure の potential vector field (または local vector potential) と呼ぶ.

Proposition 4.3. *Saito structure の potential vector field* $\vec{g}$ は次の方程式をみたす:

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 g_m}{\partial t_k \partial t_i}\frac{\partial^2 g_j}{\partial t_l \partial t_m} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 g_m}{\partial t_l \partial t_i}\frac{\partial^2 g_j}{\partial t_k \partial t_m}, \quad i, j, k, l = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 g_j}{\partial t_n \partial t_i} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

$$E g_j = \sum_{k=1}^{n} w_k t_k \frac{\partial g_j}{\partial t_k} = (1 + w_j) g_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Proof. (12) は積 $\star$ の結合則から, (13) は $e = \partial_{t_n}$ が単位元であることから, (14) は g_j の斉次性から, それぞれ従う. $\square$

逆に方程式 (12),(13),(14) の解が与えられると Saito structure が構成できる:

Proposition 4.4. *$w_i - w_j \notin \mathbb{Z}$ および $w_n = 1$ をみたす $w_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, \dots, n)$ に対して, 方程式 (12), (13), (14) の正則関数解 $\vec{g} = (g_1, \dots, g_n)$ が与えられたとする ($\vec{g}$ の定義域を $U \subset \mathbb{C}^n$ とする). このとき U 上の Saito structure で, $\vec{g}$ を potential vector field, $(t_1, \dots, t_n)$ を平坦座標系に持つものが存在する. また $-\Phi(E)$ が regular semisimple となるための必要十分条件は次の (SS) で与えられる:*

(SS) $n \times n$ 行列 $\left(-(1 + w_j - w_i)\dfrac{\partial g_j}{\partial t_i}\right)_{1 \le i,j \le n}$ は regular semisimple.

Proof. $e, E, \Phi, \triangledown$ を

$$e = \partial_{t_n}, \quad E := \sum_{i=1}^{n} w_i t_i \partial_{t_i}, \quad \tilde{\mathcal{B}}_{ij}^{(k)} := \frac{\partial^2 g_j}{\partial t_k \partial t_i}, \quad \Phi := \sum_{k=1}^{n} \tilde{\mathcal{B}}^{(k)} dt_k, \quad \triangledown(\partial_{t_i}) = 0$$

で定めればよい. またこのように定めたとき

$$\mathcal{T} = \left(-(1 + w_j - w_i)\frac{\partial g_j}{\partial t_i}\right)_{1 \le i,j \le n}$$

となるので, 半単純性条件 (SS) も明らかである. $\square$

以上より, 1 節における議論は次のようにまとめられる:

Corollary 4.1. *1 節と同じ仮定の下で, 複素鏡映群の G-quotient system (1) は X 上の Saito structure を定める. 1 節で定義した平坦座標系 $(t_i) = \left(F_i^{fl}(u)\right)$ は G-quotient system に付随する Saito structure の平坦座標系に一致し, $\vec{g}$ は potential vector filed を与える.*

また G-quotient system の構成の仕方より次のことも分かる.

Corollary 4.2. *複素鏡映群の G-quotient system から定まる potential vector field は平坦座標系 t の多項式になる.*

方程式 (12),(13),(14) を一般 WDVV 方程式と呼ぶ. 特に $n = 3$ のとき, 多変数大久保型方程式を与えることと Painlevé VI 型方程式の解を与えることは同値なので, Theorem 4.1 と合わせて次を得る:

Theorem 4.2 ([10])**.** *$(n = 3)$ 一般 WDVV 方程式 (12), (13), (14) は半単純性条件 (SS) をみたすという仮定の下で Painlevé VI 型方程式*

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{y-t}\right)\frac{dy}{dt} \\ &+ \frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{t}{y^2} + \gamma\frac{t-1}{(y-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(y-t)^2}\right),\end{aligned}$$

と同値である.

Remark 4.3. Lorenzoni [15] および Arsie-Lorenzoni [1, 2] は bi-flat F-manifold と呼ばれる構造と Painlevé 方程式の関係について論じている. 特に [15] は regular semisimple bi-flat F-manifold と (full-parameter) Painlevé VI 方程式が同値であることを示した. 実は regular semisimple bi-flat F-manifold と regular semisimple Saito structure は同値な概念であり, Arsie-Lorenzoni の結果は本質的に Theorem 4.2 と同値である. しかし [15, 1, 2] では平坦座標や多変数大久保方方程式 (モノドロミ保存変形) との対応は議論されていない.

また [2] では regular だが semisimple とは限らない bi-flat F-manifold と Painlevé V, IV との関係を論じている. この結果は, 半単純性条件 (SS) を仮定しない一般 WDVV 方程式と [12] において導入された一般大久保型方程式のモノドロミ保存変形との関係を示唆する. この問題については他の場所で扱う予定である.

Remark 4.4. Corollary 4.1, 4.2 と Theorem 4.2 より rank 3 の複素鏡映群の G-quotient system から Painlevé VI 方程式の代数解が構成できることが従う. 例えば 1 節の Example 1 の $G(p,p,3)$ は Lisovyy-Tykhyy による Painlevé VI の代数解の分類リスト ([14]) の中の Solution IV に対応する.

5 Dubrovin による Frobenius manifold の理論との関係

前節の Theorem 4.2 は Dubrovin による次の結果の一般化である:

Theorem 5.1 ([4]). *次の方程式 (WDVV 方程式と呼ばれる)*

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial^3 F}{\partial t_k\partial t_i\partial t_m}\frac{\partial^3 F}{\partial t_l\partial t_j\partial t_{n+1-m}}=\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial^3 F}{\partial t_l\partial t_i\partial t_m}\frac{\partial^3 F}{\partial t_k\partial t_j\partial t_{n+1-m}},\quad i,j,k,l=1,\dots,n,\tag{15}$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t_n\partial t_i\partial t_j}=\delta_{n+1,i+j},\qquad i,j=1,\dots,n,\tag{16}$$

$$\sum_{k=1}^{n}w_k t_k\frac{\partial F}{\partial t_k}=(1-2r)F,\tag{17}$$

ただし $r\in\mathbb{C}$*,* $-2r=w_i+w_{n+1-i}$*,* $i=1,\dots,n$ *は* $n=3$ *のとき半単純性条件 (SS) の仮定の下で, Painlvé VI 方程式の 1-パラメータ族* $\alpha=-\beta=\gamma=r^2/2,\delta=(1-r^2)/2$ *と同値である.*

Theorem 5.1 は前節の議論から以下のようにして再現される.

$n\times n$ 行列 J を $J_{ij}=\delta_{n+1,i+j}$ で定義し, 一般に $n\times n$ 行列 A に対して $A^*:=J\,{}^t\!AJ$ と定める.

Proposition 5.1. *Saito structure に対して, 以下の 3 つの条件は互いに同値である:*

(i) $\mathcal{C}^*=\mathcal{C}$,

(ii) $\frac{\partial F}{\partial t_i}=g_{n+1-i}=(\vec{g}J)_i$ *をみたす重み付斉次関数* F *が存在する (*F *を prepotential と呼ぶ),*

(iii) 重み w_i は $w_{n+1-i} + w_i = -2r$ $(i = 1, \ldots, n)$ をみたし, かつ TX 上の非退化対称双一次形式 η が存在して以下の条件をみたす *(η を metric と呼ぶ):*

$$\eta(\sigma \star \xi, \zeta) = \eta(\sigma, \xi \star \zeta), \quad (\text{積との } \textit{compatibility})$$
$$(\nabla\eta)(\xi, \zeta) := d(\eta(\xi, \zeta)) - \eta(\nabla\xi, \zeta) - \eta(\xi, \nabla\zeta) = 0, \quad (\text{水平性})$$
$$(E\eta)(\xi, \zeta) := E(\eta(\xi, \zeta)) - \eta(E\xi, \zeta) - \eta(\xi, E\zeta) = -2r\eta(\xi, \zeta), \quad (\text{斉次性})$$

ただし $\sigma, \xi, \zeta \in \Theta_X$.

Proposition 5.1 の条件が満たされる時, Saito structure は Frobenius structure と同値になる. またそのとき, potential vector field $\vec{g}$ は積分可能で prepotential F が存在する. F は WDVV 方程式 (15),(16),(17) をみたす. 条件 (i) は Painlevé VI 方程式に対してパラメータの制限を課すことに対応する. 以上より Theorem 4.2 の特殊な場合として Theorem 5.1 が導かれる.

Remark 5.1. 実鏡映群の平坦構造は (多項式)prepotential をもつ (すなわち Frobenius structure になる) [4].

Theorem 4.2 および Theorem 5.1 より Painlevé VI の解に対応して potential vector field または prepotential が存在することが分かる. ここでは例として Dubrovin-Mazzocco [5] が構成した代数解に対する prepotential について述べる. この話題については [11] が詳しい.

Example 2. Dubrovin-Mazzocco [5] では Frobenius manifold に対応する Painlevé VI の 1-パラメータ族に含まれる代数解を分類した (ただし [5] では Frobenius manifold や prepotential との関係については議論されていない). そのうち 3 つは実鏡映群 A_3, B_3, H_3 の prepotential から構成されるもので, Dubrovin [4] がすでに見つけていた. これら 3 つの prepotential は多項式であり, A_3 については Example 1 で述べた. また例えば H_3 の prepotential は

$$(H_3): \quad F = \frac{t_1^{11}}{3960} + \frac{t_1^5 t_2^2}{20} + \frac{t_1^2 t_2^3}{6} + \frac{t_2^2 t_3 + t_1 t_3^2}{2}$$

である. 他に great icosahedron solution $(H_3)'$, great dodecahedron solution $(H_3)''$ と呼ばれる 2 つの解が存在するが, これらの prepotential は平坦座標の代数関数になる. $(H_3)'$ の prepotential は z を代数方程式

$$t_2 + t_1 z + z^4 = 0$$

の解としたとき

$$(H_3)': \quad F = \frac{1}{2}(t_2^2 t_3 + t_1 t_3^2) - \frac{1}{18} t_1^4 z - \frac{7}{72} t_1^3 z^4 - \frac{17}{105} t_1^2 z^7 - \frac{2}{9} t_1 z^{10} - \frac{64}{585} z^{13}$$

で与えられる, ここで t_1, t_2, t_3 が平坦座標である. また $(H_3)''$ の prepotential は z を代数方程式

$$-t_1^2 + t_2 + z^2 = 0$$

の解としたとき

$$(H_3)'' : \quad F = \frac{4063}{1701} t_1^7 + \frac{1}{2}(t_2^2 t_3 + t_1 t_3^2) + \frac{19}{135} t_1^5 z^2 - \frac{73}{27} t_1^3 z^4 + \frac{11}{9} t_1 z^6 - \frac{16}{35} z^7$$

となる．実は $(H_3), (H_3)', (H_3)''$ に対する大久保型微分方程式のモノドロミ群はすべて $W(H_3)$ に同型であるが, 表現が異なるため, 別々の代数解を導く.

References

[1] A. Arsie and P. Lorenzoni: From Darboux-Egorov system to bi-flat F-manifolds. Journal of Geometry and Physics, **70**, (2013), 98-116.

[2] A. Arsie and P. Lorenzoni: F-manifolds, muti-flat structures and Painlevé transcendents. arXiv:1501.06435

[3] D. Bessis: Finite complex reflection arrangements are $K(\pi, 1)$. Ann. of Math. **181** (2015), 809-904.

[4] B. Dubrovin: Geometry of 2D topological field theories. In:Integrable systems and quantum groups. Montecatini, Terme 1993 (M. Francoviglia, S. Greco, eds.) Lecture Notes in Math. 1620, Springer-Verlag 1996, 120-348.

[5] B. Dubrovin and M. Mazzocco: Monodromy of certain painlevé VI transcendents and reflection groups. Inv. Math. **141**, (2000), 55-147.

[6] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida: From Gauss to Painlevé, Aspects of Mathematics E16, Vieweg (1991).

[7] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno: Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. Physica 2D (1981), 306-352.

[8] M. Jimbo and T. Miwa: Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II, Physica 2D (1981), 407-448.

[9] M. Kato, T. Mano and J. Sekiguchi: Flat structures without potentials. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **60**, no.4 (2015), 481-505.

[10] M. Kato, T. Mano and J. Sekiguchi: Flat structure on the space of isomonodromic deformations. Preprint `arXiv:1511.01608`

[11] M. Kato, T. Mano and J. Sekiguchi: Flat structures and algebraic solutions to Painlevé VI equation. To appear in “Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations” in Trend in Mathematics Series, Springer.

[12] H. Kawakami: Generalized Okubo Systems and the Middle Convolution. Int. Math. Res. Not. **2010**, no.17 (2010), 3394-3421. doi:10.1093/imrn/rnq012

[13] Y. Konishi and S. Minabe: Local quantum cohomology and mixed Frobenius structure. arXiv:1405.7476

[14] O. Lisovyy and Y. Tykhyy: Algebraic solutions of the sixth Painlevé equation. J. Geometry and Physics **85** (2014), 124-163.

[15] P. Lorenzoni: Darboux-Egorov system, bi-flat F-manifolds and Painlevé VI, IMRN (2014), Vol. 12, 3279-3302.

[16] Y. Manin: F-manifolds with flat structure and Dubrovin's duality, Adv. Math. **198** no. 1, (2005), 5-26.

[17] C. Sabbah: *Isomonodromic Deformations and Frobenius Manifolds. An Introduction.* Universitext. Springer

[18] K. Saito: Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. **27** (1980) 265-291.

[19] K. Saito: On a linear structure of the quotient variety by a finite reflexion group, Preprint RIMS-288 (1979), Publ. RIMS, Kyoto Univ. **29** (1993), 535-579.

[20] K. Saito, T. Yano and J. Sekiguchi: On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group. Comm. Algebra **8** (1980), 373-408.

[21] H. Terao: Free arrangements of hyperplanes and unitary reflection groups. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **56** (1980), no. 8, 389-392.

Solvability of heat equations coupled with Navier–Stokes equations in 2D and 3D domains

都築　寛　(広島修道大学)*

1. 導入

本研究では熱方程式とNavier–Stokes方程式からなる方程式系を扱う．特に，温度θが過大・過小にならないような制限を課した問題を考える．制限のない熱方程式，Navier–Stokes方程式そしてそれらを連立させた方程式系に対しては多くの研究がある．また，制限のある熱方程式に対しても多くの論文があり，Brezis–Crandall–Pazy [1] やKenmochi–Koyama–Meyer [4] によって可解性の理論が構築されている．しかし，熱方程式，Navier–Stokes方程式，熱方程式に対する制限の3つの要素を組み合わせた問題はほとんど研究されておらず，研究の余地がある．本講演ではそれらの3つの要素を組み合わせた次の問題を扱う:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} - \Delta_p\theta + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\theta + |\theta|^{q-1}\theta - \alpha\theta + w = f & \text{in } Q := (0,T)\times\Omega, \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} - \Delta\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}(\theta) - \nabla\pi, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 & \text{in } Q. \end{cases}$$

このモデルは各時刻$t\in[0,T]$での水槽内の各点$\boldsymbol{x}\in\Omega$における非圧縮性流体の温度$\theta=\theta(t,\boldsymbol{x})$および流速$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})$を記述している．さらに，$w$が温度$\theta$に対する制限を担っており，サーモスタットによる温度調節の効果を表している．温度θがある程度大きくなるか小さくなるとwの値が変動し，それによりその後の温度変化を調節する．

本講演では数学的に扱いやすい比較的単純なモデルとしてwの変動が極端な場合(第2節)と，サーモスタットによる現象がより精密に記述されたモデルとしてwの変動が緩やかな場合(第3節)の問題を扱う．まず第2節では，温度θに対する直接的な制限として制約条件$\psi_1\le\theta\le\psi_2$を課した場合を扱う．ここでθに対するwの変動は次で与えられる:

$$\begin{cases} \psi_1 \le \theta \le \psi_2 & \text{in } Q, \\ w = 0 & \text{in } Q[\psi_1 < \theta < \psi_2], \\ w \le 0 & \text{in } Q[\theta = \psi_1], \\ w \ge 0 & \text{in } Q[\theta = \psi_2] \end{cases}$$

(図1を見よ)．ここで，$\psi_i : (t,\boldsymbol{x})\in Q \mapsto \psi_i(t,\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}$ $(i=1,2)$は$(t,\boldsymbol{x})$にのみ依存する．

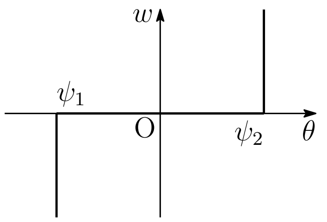

図 1: 第2節における制限

* e-mail: ytsuzuki@shudo-u.ac.jp

また, $Q[*]$ は $*$ を満たす Q の要素全体の集合とする. 次に第3節では, ヒステリシスを導入して温度 θ に対する間接的な制限を課した場合を扱う. ここで θ に対する w の変動は次で与えられる:

$$\begin{cases} \psi_1(\theta) \le w \le \psi_2(\theta) & \text{in } Q, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = 0 & \text{in } Q[\psi_1(\theta) < w < \psi_2(\theta)], \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} \ge 0 & \text{in } Q[w = \psi_1(\theta)], \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} \le 0 & \text{in } Q[w = \psi_2(\theta)]. \end{cases}$$

ここで, $\psi_i : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \psi_i(\theta) \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ は $\theta(t, \boldsymbol{x})$ に依存する (図2を見よ).

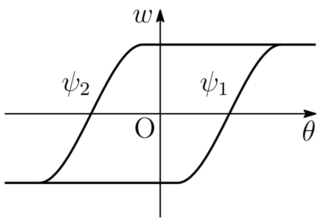

図 2: 第3節における制限

2. 制約付き熱方程式と Navier–Stokes 方程式からなる方程式系

$T > 0$ とし, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N = 2, 3)$ を十分滑らかな境界 Γ をもつ有界領域とする. 第2節では熱方程式と Navier–Stokes 方程式からなる方程式系で熱方程式に制約を課した次の問題 (P_1) を扱う:

$$(\mathrm{P}_1) \quad \begin{cases} \psi_1 \le \theta \le \psi_2 & \text{in } Q = (0,T) \times \Omega, \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta_p \theta + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \theta + |\theta|^{q-1}\theta - \alpha\theta = f & \text{in } Q[\psi_1 < \theta < \psi_2], \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta_p \theta + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \theta + |\theta|^{q-1}\theta - \alpha\theta \ge f & \text{in } Q[\theta = \psi_1], \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta_p \theta + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \theta + |\theta|^{q-1}\theta - \alpha\theta \le f & \text{in } Q[\theta = \psi_2], \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \Delta \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}(\theta) - \nabla \pi & \text{in } Q, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 & \text{in } Q, \\ \theta = 0,\ \boldsymbol{v} = 0 & \text{on } \Sigma := (0,T) \times \Gamma, \\ \theta(0,\cdot) = \theta_0,\ \boldsymbol{v}(0,\cdot) = \boldsymbol{v}_0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

ここで, $\theta : Q \to \mathbb{R}$ (温度), $\boldsymbol{v} : Q \to \mathbb{R}^N$ (流速), $\pi : Q \to \mathbb{R}$ (圧力) は未知関数である. 一方, $\psi_1, \psi_2 : Q \to \mathbb{R}$ は条件 $\psi_1 \le \psi_2$ を満たす関数であり, $f : Q \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$, $\theta_0 : \Omega \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v}_0 : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $p \ge 2$, $q \ge 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ を含め既知である. Δ_p は p-Laplace 作用素であり, $\Delta_p \theta := \operatorname{div}(|\nabla\theta|^{p-2}\nabla\theta)$ で定まる. なお第2節では, 非線形項 $|\theta|^{q-1}\theta$ を $\boldsymbol{x}$ 依存にしつつ一般化した場合 (一般化された問題 (P_1)) も扱う.

問題 (P_1) における制約条件

$$\psi_1 \le \theta \le \psi_2$$

はサーモスタットによる温度調節する効果を想定している．問題 (P_1) における方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta_p \theta + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \theta + |\theta|^{q-1}\theta - \alpha\theta = f$$

が $\psi_1 < \theta < \psi_2$ の場合に成立するが, $\theta = \psi_1$ の場合は上記の方程式の左辺が大きくなり (等号 “$=$” が “$\ge$” になり) 温度 θ が ψ_1 より下がらなくなる．一方 $\theta = \psi_2$ の場合は上記の方程式の左辺が小さくなる (等号 “$=$” が “$\le$” になり) 温度 θ が ψ_2 より上がらなくなる．

問題 (P_1) に現れる ψ_1, ψ_2 のような制約関数を用いた問題に対して [1] により初めて発展方程式の枠組みとして扱われた．ただ, その論文における制約関数は $t \in [0,T]$ に依存しない．制約関数が $t \in [0,T]$ に依存する場合は Yamazaki–Ito–Kenmochi [11] によって最初に研究され, 制約関数に対するより強い条件の下で扱われた．その後, Fukao–Kubo [2] によって制約関数に対する強い条件を課すことなく時間依存型の制約問題に対する可解性が確立された．

特に, [2, Theorem 1] では $N = 2$, $p = 2$, $q = 1$ and $\alpha = 1$ の場合, すなわち熱方程式が

$$\frac{d\theta}{dt} - \Delta\theta + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\theta = f,$$

の形をしている場合において, (P_1) で非線形項 $|\theta|^{q-1}\theta$ がない問題の解 $(\theta, \boldsymbol{v})$ の存在と一意性が証明されている．ただし, 条件

- $\psi_1, \psi_2 \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$,
  $\psi_1 \le \psi_2$ in $[0,T] \times \Omega$, $\quad \psi_1 \le 0 \le \psi_2$ on $[0,T] \times \Gamma$;
- $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $\quad \boldsymbol{g} \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$;
- $\theta_0 \in H^1_0(\Omega)$ with $\psi_1(0) \le \theta_0 \le \psi_2(0)$, $\quad \boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)$

の下での結果であり, 解 $(\theta, \boldsymbol{v})$ は次のクラスに属する:

$$\begin{aligned}
&\theta \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)), \\
&\boldsymbol{v} \in H^1(0,T;(\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega))^*) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0,T;\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega)).
\end{aligned}$$

ここで, $\boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)$, $\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega)$ は $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$ を満たす Lebesgue 空間および Sobolev 空間の関数 $\boldsymbol{v}$ 全体であり, $\mathrm{Lip}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^2$ への Lipschitz 関数全体である．

しかしながら, 物理現象の観点から [2] にはいくつか課題が残されていた．1 つは, 自然界における物理現象は非線形のものが多いにもかかわらず非線形項が扱われていなかった．もう 1 つは, 自然界は 3 次元にもかかわらず 2 次元において扱われていた．従って第 2 節の目的は次のとおりである:

(I) 熱方程式の非線形化

(II) 領域の 3 次元への拡張

2.1. 問題 (P_1) の可解性に向けた準備

$\boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)$, $\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega)$ をそれぞれ $\boldsymbol{\mathcal{D}}_\sigma(\Omega) := \{\boldsymbol{v} \in (C_0^\infty(\Omega))^N \mid \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \text{ in } \Omega\}$ の $(L^2(\Omega))^N$, $(H^1(\Omega))^N$ における閉包とし, $(\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega))^*$ を $\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega)$ の双対空間とする. また, $t \in [0,T]$ に依存する制約条件として次を定める:

$$K(t) := \{\theta \in L^2(\Omega) \mid \psi(t) \le \theta \le \psi_2(t) \text{ a.e. on } \Omega\},$$
$$I_{K(t)}(\theta) := \begin{cases} 0, & \theta \in K(t), \\ \infty, & \theta \in L^2(\Omega) \setminus K(t). \end{cases}$$

さらに, $A : \boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega) \to (\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega))^*$, $B : \boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega) \times \boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega) \to (\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega))^*$ を次で定める:

$$\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}\rangle := \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial z_j}{\partial x_i}, \qquad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega),$$
$$\langle B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{z}\rangle := \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} z_j, \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega).$$

ここで問題 (P_1) の解の定義を与える.

定義 2.1. $(\theta, \boldsymbol{v})$ が問題 (P_1) の **解** であるとは, 次を満たすことをいう:

(D1) $\theta \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, $\quad \Delta_p\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$,
$\theta(t) \in K(t)$ for all $t \in [0,T]$,
$\boldsymbol{v} \in W^{1,4/N}(0,T;(\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega))^*) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0,T;\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega))$;

(D2) $d\theta/dt - \Delta_p\theta + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\theta + |\theta|^{q-1}\theta - \alpha\theta + \partial I_{K(\cdot)}(\theta) \ni f$ in $L^2(\Omega)$ a.e.,
$d\boldsymbol{v}/dt + A\boldsymbol{v} + B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = P\boldsymbol{g}(\theta)$ in $(\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega))^*$ a.e.;

(D3) $(\theta(0), \boldsymbol{v}(0)) = (\theta_0, \boldsymbol{v}_0)$ in $L^2(\Omega)$.

ここで, P は $(L^2(\Omega))^N$ 上の $\boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)$ への直交射影 (Helmholtz 射影) である.

一方, 非線形項 $|\theta|^{q-1}\theta$ を $\boldsymbol{x}$ 依存にしつつ一般化した項 $h = h(\boldsymbol{x}, \theta)$ に変えた場合として, 一般化された問題 (P_1) に対する解の定義も同様に与える.

定義 2.2. $(\theta, \boldsymbol{v})$ が一般化された問題 (P_1) の**解**であるとは, 次を満たすことをいう:

(D1)′ $\theta \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, $\quad \Delta_p\theta, h(\cdot,\theta) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$,
$\displaystyle\int_0^\theta h(\cdot,s)\,ds \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$, $\quad \theta(t) \in K(t)$ for all $t \in [0,T]$,
$\boldsymbol{v} \in H^1(0,T;(\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega))^*) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0,T;\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega))$;

(D2)′ $d\theta/dt - \Delta_p\theta + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\theta + h(\boldsymbol{x},\theta) - \alpha\theta + \partial I_{K(\cdot)}(\theta) \ni f$ in $L^2(\Omega)$ a.e.,
$d\boldsymbol{v}/dt + A\boldsymbol{v} + B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = P\boldsymbol{g}(\theta)$ in $(\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega))^*$ a.e.;

(D3)′ $(\theta(0), \boldsymbol{v}(0)) = (\theta_0, \boldsymbol{v}_0)$ in $L^2(\Omega)$.

ここで問題 (P_1) の可解性に向けて次の条件を与える:

$$
\begin{aligned}
&\text{(A1)} && \psi_1, \psi_2 \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^{2q}(0,T;L^{2q}(\Omega)),\\
& && \Delta_p \psi_i \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad \psi_i(t) \in W^{1,p}(\Omega) \text{ a.a. } t \in (0,T) \quad \text{for } i=1,2,\\
& && \psi_1(t) \le \psi_2(t) \text{ a.e. on } \Omega, \quad \psi_1(t) \le 0 \le \psi_2(t) \text{ a.e. on } \Gamma \quad \text{for all } t \in [0,T];\\
&\text{(A2)} && f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad \boldsymbol{g} \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2);\\
&\text{(A3)} && (\theta_0, \boldsymbol{v}_0) \in (W_0^{1,p}(\Omega) \cap K(0)) \times \boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega).
\end{aligned}
$$

一方, 一般化された問題 (P_1) の可解性に向けて次の条件も同様に与える:

$$
\begin{aligned}
&\text{(A1)}' && \psi_1, \psi_2 \in H^1(0,T;L^2(\Omega)), \quad \Delta_p \psi_i, h(\cdot,\psi_i) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\\
& && \psi_i(t) \in W^{1,p}(\Omega), \quad h(\cdot,\psi_i(t,\cdot)) \in L^2(\Omega) \quad \text{a.a. } t \in (0,T) \quad \text{for } i=1,2,\\
& && \psi_1(t) \le \psi_2(t) \text{ a.e. on } \Omega, \quad \psi_1(t) \le 0 \le \psi_2(t) \text{ a.e. on } \Gamma \quad \text{for all } t \in [0,T];\\
&\text{(A2)}' && f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad \boldsymbol{g} \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2);\\
&\text{(A3)}' && (\theta_0, \boldsymbol{v}_0) \in (W_0^{1,p}(\Omega) \cap K(0)) \times \boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega), \quad \int_0^{\theta_0(\cdot)} h(\cdot,s)\,ds \in L^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

2.2. 熱方程式が非線形項 $|\theta|^{q-1}\theta$ を含む場合の問題 (P_1)

まず, [2] で扱われた問題に対して非線形項

$$|\theta|^{q-1}\theta$$

を追加した問題 $(N=2,\ p=2,\ q \ge 1,\ \alpha=0)$ を扱う. つまり (P_1) の第 2 方程式が

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\theta + |\theta|^{q-1}\theta = f$$

である (第 3 方程式, 第 4 方程式についても同様である) 問題を考える. [2] では制約関数の有界性 $\psi_1, \psi_2 \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ を仮定しており, この条件のもとでは $|\theta|^{q-1}\theta$ を Lipschitz 摂動で扱うことができる. 即ち, 特に新規性のある議論を取り入れることなく可解性を確立することができる. 従って, 非線形項 $|\theta|^{q-1}\theta$ は制約関数の有界性がない場合でこそ扱う価値があるといえる. 実際, Gagliardo–Nirenberg の不等式として [2] で用いられていた

$$\|\nabla\theta\|_{\boldsymbol{L}^4(\Omega)} \le c\|\Delta\theta\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|\theta\|^{1/2}_{L^\infty(\Omega)}$$

の代わりに

$$\|\nabla\theta\|_{\boldsymbol{L}^4(\Omega)} \le c\|\Delta\theta\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\|\nabla\theta\|^{1/2}_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}$$

を用いることで $\psi_1, \psi_2 \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ を外すことに成功した (ただし c は定数である). そして次の結果を得た:

定理 2.1 ([6, Theorem 2.1])**.** $N=2,\ p=2,\ q \ge 1,\ \alpha=0$ とし, (A1)–(A3) を仮定する. このとき問題 (P_1) の解 $(\theta, \boldsymbol{v})$ が一意的に存在する.

2.3. 熱方程式が非線形拡散 $\Delta_p\theta$ を含む場合の問題 (P_1)

次に, 拡散項 $\Delta\theta$ を p-Laplace 作用素である非線形拡散

$$\Delta_p\theta := \mathrm{div}(|\nabla\theta|^{p-2}\nabla\theta)$$

に変えつつ, 非線形項に $-\alpha\theta$ を加えてロジスティック項 $|\theta|^{q-1}\theta - \alpha\theta$ にした問題 ($N=2$, $p>2$, $q \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$) を扱う. つまり (P_1) の第 2 方程式が

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \Delta_p\theta + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\theta + |\theta|^{q-1}\theta - \alpha\theta = f$$

である (第 3 方程式, 第 4 方程式についても同様である) 問題を考える. 第 2.2 節で扱った Gagliardo–Nirenberg の不等式は線形拡散 $\Delta\theta$ を扱う $p=2$ の場合にこそ現れるものであり, $p>2$ の場合の $\Delta_p\theta$ を扱う場合では同様の不等式は得られていない. 従って評価方法を改める必要がある. そこで, p の大きさに応じて θ の正則性が上がるという特性を利用することで, Hölder の不等式と Young の不等式による簡潔な評価により上記の問題点を解決することに成功し, 次の結果を得た:

定理 2.2 ([7, Theorem 1.1])**.** $N=2$, $p>2$, $q\geq 1$, $\alpha\in\mathbb{R}$ とし, (A1)–(A3) を仮定する. このとき問題 (P_1) の解 $(\theta, \boldsymbol{v})$ が一意的に存在する.

2.4. 熱方程式が一般化された非線形項 $h(\boldsymbol{x},\theta)$ を含む場合の問題 (P_1)

非線形項 $|\theta|^{q-1}\theta$ を一般化しつつ $\boldsymbol{x}$ 依存にした項 $h(\boldsymbol{x},\theta)$ を扱った問題を考える. ここで,

$$h = h(\boldsymbol{x}, s) : \Omega \times J \to \mathbb{R}$$

($J\subset\mathbb{R}$ は 0 を含む開区間) であり, s に関して単調増加である. これは第 2.2 節, 第 2.3 節で扱った $h(\boldsymbol{x},s) = |s|^{q-1}s$ の場合の一般化である. つまり (P_1) の第 2 方程式が

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \Delta_p\theta + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\theta + h(\boldsymbol{x},\theta) - \alpha\theta = f$$

である (第 3 方程式, 第 4 方程式についても同様である) 問題を考える. 作用素論において, 角度条件と呼ばれる内積 $(\Delta_p\theta, h(\cdot,\theta))_{L^2(\Omega)}$ (または類似する項) の下からの評価が鍵となる. 第 2.2 節, 第 2.3 節では h が $\boldsymbol{x}$ に依存しない場合 ($h(\boldsymbol{x},s) = |s|^{q-1}s$) を扱っていいたため, 上記の内積の下からの評価 (0 以上であること) が容易に示されていたが, $\boldsymbol{x}$ に依存する場合は容易ではない. そこで Okazawa [5] による議論を参考にすることで, 角度条件を精密に調べることができ, 可解性を確立することに成功した.

定理 2.3 ([10, Theorem 1.2])**.** $N=2$, $p\geq 2$, $\alpha\in\mathbb{R}$ とし, (A1)′–(A3)′ を仮定する. さらに $h : (\boldsymbol{x},s)\in\Omega\times J \mapsto h(\boldsymbol{x},s)\in\mathbb{R}$ ($J\subset\mathbb{R}$ は開区間) に対して次の (h1)–(h3) を仮定する:

(h1) $0\in J$, $\quad h(\boldsymbol{x},0)=0$ for all $\boldsymbol{x}\in\Omega$, $\quad h_s \geq 0$ on $\Omega\times J$;

(h2) 各 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ に対して $s\in J\mapsto s+h(\boldsymbol{x},s)\in\mathbb{R}$ は全射;

(h3) $\varepsilon\in[0, p^p(p-1)^{-(p-1)})$, $\gamma\geq 0$, $\tilde{h}\in L^1(\Omega)$ が存在して,

$$|\nabla_{\boldsymbol{x}} h(\boldsymbol{x},s)|^p \leq \left(\varepsilon|h(\boldsymbol{x},s)|^2 + \gamma|s|^p + \tilde{h}(\boldsymbol{x})\right)|h_s(\boldsymbol{x},s)|^{p-1}, \quad (\boldsymbol{x},s)\in\Omega\times J.$$

このとき一般化された問題 (P_1) の解 $(\theta, \boldsymbol{v})$ が一意的に存在する.

例えば, 上記の定理における条件 (h1)–(h3) を満たす $h = h(\boldsymbol{x}, s)$ は次のような関数が挙げられる:

例 2.1.

$$h(\boldsymbol{x}, s) = |s|^{q(\boldsymbol{x})-1}s, \quad (\boldsymbol{x}, s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

ただし $q \in C^1(\overline{\Omega})$ は次を満たす:

$$\begin{cases} q(\boldsymbol{x}) > p-1 \quad \text{or} \quad q(\boldsymbol{x}) = p-1 > |\nabla q(\boldsymbol{x})|^{p/(p-1)} & \text{for all } \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \text{or} & \\ q(\boldsymbol{x}) \equiv q \geq 1 & \text{for all } \boldsymbol{x} \in \Omega. \end{cases}$$

例 2.2.

$$h(\boldsymbol{x}, s) = |\boldsymbol{x}|^r |s|^{q-1}s, \quad (\boldsymbol{x}, s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

ただし $q, r \geq 1$ は次を満たす:

$$\begin{cases} q = 1 \quad \text{or} \quad q > p-1 \quad \text{or} \quad q = p-1 > r^{\frac{p}{p-1}} \operatorname{dist}(0, \Omega)^{-\frac{p+r}{p-1}} & \text{if } 0 \notin \overline{\Omega}, \\ q = 1,\ r \geq p & \text{if } 0 \in \overline{\Omega}, \end{cases}$$

ここで $\operatorname{dist}(0, \Omega) := \inf_{\boldsymbol{x} \in \Omega} |\boldsymbol{x}|$ である.

2.5. 領域 Ω が 3 次元の場合の問題 (P_1)

第 2 節の最後として, 領域 Ω が 3 次元の場合の問題 (P_1) を扱う ($N = 3$, $p \geq 3$, $q = 1$, $\alpha = 1$). 2 次元で扱っていた第 2.2 節, 第 2.3 節, 第 2.4 節では, 熱方程式は $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, Navier–Stokes 方程式は $L^2(0, T; (\boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega))^*)$ をベースとして扱っていた. しかしながら, 3 次元での問題 (P_1) を同じ枠組みで扱う際に以下の問題点が生じる:

(i) Navier–Stokes 方程式の一意性が得られないため, 熱方程式と組み合わせる際, 一価作用素による議論を必要とする不動点定理が使えない.

(ii) $\boldsymbol{v} \cdot \nabla\theta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ を保証するために必要な $\theta, \boldsymbol{v}$ の正則性が上がってしまう.

(i) については Time Returned Method と呼ばれる画期的な方法により解決する. 実際, 熱方程式と Navier–Stokes 方程式の解を微小時間毎に交互に構成するという方法がその方法であり, これが不動点定理の代わりとなる. (ii) については p を大きくすることで θ の正則性が稼げるため解決が可能である.

定理 2.4 ([3, Theorems 1.1 and 1.2])**.** $N = 3$, $p \geq 3$, $q = 1$, $\alpha = 1$ とし, (A1)–(A3) を仮定する. さらに次のどちらかを仮定する:

- $p > 4$.
- ($p \geq 3$ and) $\psi_1, \psi_2 \in L^\infty(0, T; W^{1,p}(\Omega))$.

このとき問題 (P_1) の解 $(\theta, \boldsymbol{v})$ が少なくとも 1 つ存在する.

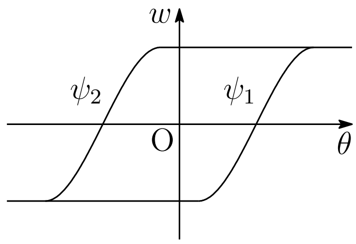

図 3: ヒステリシス

3. ヒステリシス付き熱方程式と Navier–Stokes 方程式からなる方程式系

$T>0$ とする．$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N=2,3)$ を十分滑らかな境界 Γ をもつ有界領域とする．第 3 節では次の問題 (P_2) を考える:

$$
(\mathrm{P}_2) \qquad \begin{cases}
\psi_1(\theta) \le w \le \psi_2(\theta) & \text{in } Q=(0,T)\times\Omega, \\
\dfrac{\partial w}{\partial t} = 0 & \text{in } Q[\psi_1(\theta) < w < \psi_2(\theta)], \\
\dfrac{\partial w}{\partial t} \ge 0 & \text{in } Q[w=\psi_1(\theta)], \\
\dfrac{\partial w}{\partial t} \le 0 & \text{in } Q[w=\psi_2(\theta)], \\
\dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\theta + w = f & \text{in } Q, \\
\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \Delta\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}(\theta) - \nabla\pi & \text{in } Q, \\
\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 & \text{in } Q, \\
\theta = 0,\ \boldsymbol{v} = 0 & \text{on } \Sigma = (0,T)\times\Gamma, \\
w(0,\cdot) = w_0,\ \theta(0,\cdot) = \theta_0,\ \boldsymbol{v}(0,\cdot) = \boldsymbol{v}_0 & \text{in } \Omega.
\end{cases}
$$

ここで, $w: Q \to \mathbb{R}$ (出力), $\theta: Q\to\mathbb{R}$ (入力, 温度), $\boldsymbol{v}: Q \to \mathbb{R}^N$ (流速), $\pi: Q\to\mathbb{R}$ (圧力) は未知関数である．また, $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $\psi_1 \le \psi_2$ を満たす関数であり, $f: Q\to\mathbb{R}$, $\boldsymbol{g}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$, $w_0 : \Omega\to\mathbb{R}$, $\theta_0: \Omega\to\mathbb{R}$, $\boldsymbol{v}_0 : \Omega \to \mathbb{R}^2$ を含めて既知である．

問題 (P_2) ではサーモスタットによる温度を調節する現象をより精密に記述するためにヒステリシスを導入している．実際, w に対する制約条件

$$\psi_1(\theta) \le w \le \psi_2(\theta)$$

は温度 θ によってサーモスタットの熱源 $-w$ の値が変動することを表しており, その後の流体の温度変化を調節している． ψ_1, ψ_2 の典型例として図 3 が挙げられ, 温度 θ が過大になれば熱源 $-w$ が小さくなり, θ が過小になれば $-w$ が大きくなる．問題 (P_2) におけるサーモスタットモデルは温度依存の指示関数の劣微分作用素を通して定式化される．このような仮似変分不等式による定式化が用いられた問題は多く扱われており, 例えば Kenmochi–Koyama–Meyer [4] による研究があり, 解の存在および解の漸近挙動を確立されている．しかし, Navier–Stokes 方程式と連立した問題はほとんど扱われておらず, その場合における新たな議論が必要となる．

3.1. 問題 (P$_2$) の可解性に向けた準備

$H := L^2(\Omega)$, $V := H_0^1(\Omega)$, $\boldsymbol{H} := \boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)$, $\boldsymbol{V} := \boldsymbol{H}^1_\sigma(\Omega)$ とする. また, $\theta(t, \boldsymbol{x})$ に依存する制約条件として次を定める:

$$K(\theta) := \{w \in H \mid \psi_1(\theta) \le w \le \psi_2(\theta) \text{ a.e. on } \Omega\},$$
$$I_\theta(w) := \begin{cases} 0, & w \in K(\theta), \\ \infty, & w \in H \setminus K(\theta). \end{cases}$$

また, Stokes 作用素 $A_0 : D(A_0) := (H^2(\Omega))^N \cap \boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$, $A_0 := -P\Delta$ ($P : (L^2(\Omega))^N \to \boldsymbol{H}$ は Helmholtz 射影) を導入し, $0 \le \alpha \le 2$ に対して次の Hilbert 空間を定める:

$$\boldsymbol{H}^\alpha_\sigma(\Omega) := D(A_0^{\frac{\alpha}{2}}), \qquad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{H}^\alpha_\sigma} := (A_0^{\frac{\alpha}{2}}\boldsymbol{u}, A_0^{\frac{\alpha}{2}}\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{H}}, \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^\alpha_\sigma(\Omega).$$

さらに, $-2 \le \alpha < 0$ に対して $\boldsymbol{H}^\alpha_\sigma(\Omega) := (\boldsymbol{H}^{-\alpha}_\sigma(\Omega))^*$ と定める. ここで, 次を定める:

$$\langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}\rangle_{\boldsymbol{H}^{-1+\alpha}_\sigma, \boldsymbol{H}^{1-\alpha}_\sigma} := (A_0^{\frac{1+\alpha}{2}}\boldsymbol{v}, A_0^{\frac{1-\alpha}{2}}\boldsymbol{z})_{\boldsymbol{H}}, \qquad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^{1+\alpha}_\sigma(\Omega),\ \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H}^{1-\alpha}_\sigma(\Omega),$$
$$\langle B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \boldsymbol{z}\rangle_{\boldsymbol{H}^{-1+\alpha}_\sigma, \boldsymbol{H}^{1-\alpha}_\sigma} := \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} z_j \, d\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^{1+\alpha}_\sigma(\Omega),\ \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H}^{1-\alpha}_\sigma(\Omega).$$

ここで問題 (P$_2$) の解の定義を与える.

定義 3.1. $(w, \theta, \boldsymbol{v})$ が問題 (P$_2$) の解であるとは次を満たすことをいう:

(D1) $w \in H^1(0,T;H)$, $\quad w(t) \in K(\theta(t))$ for all $t \in [0,T]$,
$\theta \in H^1(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$,
$\boldsymbol{v} \in H^1(0,T;\boldsymbol{H}^{-1+\alpha}_\sigma(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}^\alpha_\sigma(\Omega)) \cap L^2(0,T;\boldsymbol{H}^{1+\alpha}_\sigma(\Omega))$;

(D2)
$$\begin{aligned} &dw/dt + \partial I_\theta(w) \ni 0 && \text{in } H && \text{a.e. on } (0,T), \\ &d\theta/dt - \Delta\theta + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\theta + w = f && \text{in } H && \text{a.e. on } (0,T), \\ &\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + A\boldsymbol{v} + B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = P\boldsymbol{g}(\theta) && \text{in } \boldsymbol{H}^{-1+\alpha}_\sigma(\Omega) && \text{a.e. on } (0,T); \end{aligned}$$

(D3) $(w(0), \theta(0), \boldsymbol{v}(0)) = (w_0, \theta_0, \boldsymbol{v}_0) \quad \text{in } H \times H \times \boldsymbol{H}$.

ここで問題 (P$_2$) の可解性に向けて次の条件を与える:

(A1) $\psi_1, \psi_2 \in C^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$, $\quad \psi_1 \le \psi_2$ on $\mathbb{R}$;

(A2) $f \in L^2(0,T;H) \cap L^1(0,T;L^\infty(\Omega))$, $\quad \boldsymbol{g} \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R};\mathbb{R}^N)$;

(A3) $w_0 \in K(\theta_0)$, $\quad \theta_0 \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $\quad \boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{H}^\alpha_\sigma(\Omega)$.

3.2. 問題 (P$_2$) の弱解の存在

この節では, 初期関数に対する条件 $\boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{L}^2_\sigma(\Omega)$ のもとで (P$_2$) の可解性を吟味する. 即ち, Navier–Stokes 方程式が弱解のクラスの場合を考える. (P$_2$) における制約条件 (第 1 方程式から第 4 方程式) が未知関数に依存することがヒステリシスの特徴であり大きな難点でもあるが, 制約条件を関数 w からなる 1 本の方程式とみなし, 熱方程式と Navier–Stokes 方程式と合わせて 3 本の方程式からなる連立系として扱うことが重要な基盤となる. 実際, 不動点定理を 2 回適用して 3 本の方程式を結合することで, 可解性を確立して次の結果を得た:

定理 3.1 ([8, Theorem 1.1])**.** $N = 2$, $\alpha = 0$ として (A1)–(A3) を仮定する．このとき問題 (P_2) の時間大域解 $(w, \theta, \boldsymbol{v})$ が少なくとも 1 つ存在する．

3.3. 問題 (P_2) の強解の存在と一意性

この節では, 第3.2節で得られなかった (P_2) の一意性の獲得を目的とする．解の正則性が足りないことが一意性に対する難点であり, Navier–Stokes 方程式を強解のクラスとして扱うことで一意性を得ることができた．その際 Dirichlet Laplacian Δ を生成する半群 $e^{t\Delta}$ を導入し, Duhamel の原理等を用いることが重要な鍵となる．さらに, Stokes 作用素 A の分数冪を用いて分数階の Sobolev 空間の部分空間

$$\boldsymbol{H}^{\alpha}_{\sigma} := D(A^{\frac{\alpha}{2}})(\subset \boldsymbol{H}^{\alpha}(\Omega))$$

を導入することにより, どの程度の正則性があれば一意性が保証されるかを精密に調べることに成功し, 次の結果を得た:

定理 3.2 ([9, Theorems 2.1 and 2.2])**.** $N = 2, 3$ として (A1)–(A3) を仮定する．さらに次を仮定する:

$$\frac{3(N-2)}{4} < \alpha \leq 1.$$

このとき次が成立する:

- $N = 2$ のとき, 問題 (P_2) の時間大域解 $(w, \theta, \boldsymbol{v})$ が一意的に存在する．
- $N = 3$ のとき, 問題 (P_2) の時間局所解 $(w, \theta, \boldsymbol{v})$ が一意的に存在する．

参考文献

[1] H. Brezis, M. G. Crandall and A. Pazy, *Perturbations of nonlinear maximal monotone sets in Banach space*, Comm. Pure Appl. Math., **23** (1970), 123–144.

[2] T. Fukao and M. Kubo, Time-dependent double obstacle problem in thermohydraulics, pp. 73–92 in *Nonlinear Phenomena with Energy Dissipation*, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **Vol. 29**, Gakkōtosho, Tokyo, 2008.

[3] T. Fukao, Y. Tsuzuki and T. Yokota, *Solvability of p-Laplacian parabolic equations with constraints coupled with Navier–Stokes equations in 3D domains by using largeness of p*, Funkcialaj Ekvacioj, to appear.

[4] N. Kenmochi, T. Koyama and G. H. Meyer, *Parabolic PDEs with hysteresis and quasivariational inequalities*, Nonlinear Anal., **34** (1998), 665–686.

[5] N. Okazawa, *An application of the perturbation theorem for m-accretive operators. II*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **60** (1984), 10–13.

[6] M. Sobajima, Y. Tsuzuki and T. Yokota, *Existence and uniqueness of solutions to nonlinear heat equations with constraints coupled with Navier–Stokes equations in 2D domains*, Adv. Math. Sci. Appl., **22** (2012), 577–596.

[7] Y. Tsuzuki, *Solvability of p-Laplacian parabolic logistic equations with constraints coupled with Navier–Stokes equations in 2D domains*, Evol. Equ. Control Theory, **3** (2014), 191–206.

[8] Y. Tsuzuki, *Existence of solutions to heat equations with hysteresis coupled with Navier–Stokes equations in 2D domains*, J. Math. Anal. Appl., **423** (2015), 877–897.

[9] Y. Tsuzuki, *Existence and uniqueness of solutions to heat equations with hysteresis coupled with Navier–Stokes equations in 2D and 3D*, J. Math. Fluid Mech., **17** (2015), 577–597.

[10] Y. Tsuzuki, *Solvability of generalized nonlinear heat equations with constraints coupled with Navier–Stokes equations in 2D domains*, Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, AIMS Proceedings, 2015, 1079–1088.

[11] N. Yamazaki, A. Ito and N. Kenmochi, Global attractors of time-dependent double obstacle problems, pp. 288–301 in *Functional Analysis and Global Analysis*, Springer, Singapore, 1997.

ν-generalized metric space について

鈴木　智成　(九州工業大学・工学研究院)

1. 序

ν-generalized metric space という, 少し変わった空間について, 解説をしたいと考えている. 特に, 位相的な観点から述べたいと思っている.
ν-generalized metric space では, 「すべて異なる」ということがキーとなるので, 以下のように, 記号「$\neq$」を使って, 「すべて異なる」ということを表現する.

We define the meaning of "$\{x_1, x_2, \cdots, x_\mu\}^{\neq}$" by that it is a set consisting of x_1, $x_2, \cdots, x_\mu$ and $x_1, x_2, \cdots, x_\mu$ are all different. Similarly we define the meaning of "$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}{}^{\neq}$" by that it is a sequence whose n-th element is x_n and $x_1, x_2, \cdots$ are all different. We sometimes write "$\{x_n\}^{\neq}$" instead of "$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}{}^{\neq}$".

以下が ν-generalized metric space の定義である.

Definition 1 (Branciari [3]). Let X be a set, let d be a function from $X \times X$ into $[0, \infty)$ and let $\nu \in \mathbb{N}$. Then (X, d) is said to be a *ν-generalized metric space* if the following hold:

(N1) $d(x, y) = 0$ iff $x = y$ for any $x, y \in X$.

(N2) $d(x, y) = d(y, x)$ for any $x, y \in X$.

(N3) $d(x, y) \leq D(x, u_1, u_2, \cdots, u_\nu, y)$ for any $\{x, u_1, u_2, \cdots, u_\nu, y\}^{\neq} \subset X$, where $D(x, u_1, u_2, \cdots, u_\nu, y) = d(x, u_1) + d(u_1, u_2) + \cdots + d(u_\nu, y)$.

$\nu = 1$ のとき, ν-generalized metric space は通常の距離空間になる.
また, 次のように表現することもできる. (N3) において, 「$\neq$」(すべて異なる) を外せば, 通常の距離空間になる.

距離空間ではないが, 2-generalized metric space になっている例を挙げたい.

Example 2.

$$X = \{a, b, c, d\}$$
$$d(a, b) = d(a, d) = d(b, c) = d(c, d) = 1$$
$$d(a, c) = d(b, d) = 3$$

Then

$$d(a, c) = 3 > 2 = d(a, b) + d(b, c)$$
$$d(x, y) \leq 3 \leq d(x, u_1) + d(u_1, u_2) + d(u_2, y)$$

距離空間は, ある種「直接的なコンタクトが一番早い」というようなことを表現している. 一方で, Example 2 は, 「急がば回れ」というフレーズが似合う.

なお, Example 2 では, X は4点から構成されているので, 3以上の ν に関しては, 自動的に (N3) が成立し, 従って, ν-generalized metric space になっている.

ν-generalized metric space に関して, 次の問題がある.

Problem 3.

(i) ν-generalized metric space は compatible な位相を持つか ?

(ii) どのような意味で compatible か ?

距離空間における議論から, 真っ先に思いつくのが以下の位相である.

Definition 4. Let X be a topological space with topology τ. Let d be a function from $X \times X$ into $[0, \infty)$.

- τ is *compatible* with d if the following are equivalent for any net $\{x_\alpha\}$ in X and $x \in X$:
  - $\lim_\alpha d(x, x_\alpha) = 0$.
  - $\{x_\alpha\}$ converges to x in τ.
- τ is *sequentially compatible* with d if the following are equivalent for any sequence $\{x_n\}$ in X and $x \in X$:
  - $\lim_n d(x, x_n) = 0$.
  - $\{x_n\}$ converges to x in τ.

2. 準備

位相空間について, よく知られている事実をここに記述したい.

まず, ネットの定義域である有向集合について.

Definition 5. Let D be a set with the following order $\leq$:

(i) $\alpha \leq \alpha$.

(ii) $\alpha \leq \beta$ and $\beta \leq \gamma$ imply $\alpha \leq \gamma$.

(iii) for α and β, there exsists γ such that $\alpha \leq \gamma$ and $\beta \leq \gamma$.

Then D is said to be *directed* by $\leq$.

教科書によっては, 半順序性を要求するものもある. すなわち, 以下も定義に含める.

(iv) $\alpha \leq \beta$ and $\beta \leq \alpha$ imply $\alpha = \beta$.

しかしながら, ネットの収束という観点から見れば, (iv) を仮定してもしなくても本質的な違いはない.

定義域が有向集合となっている写像をネットと呼ぶ.

Definition 6. Let D be a directed set and let X be an arbitrary set. Then a mapping f from D into X is said to be a *net*.

点列を記述するとき, 通常 f とは書かず, $\{x_n\}$ のように書く. ネットに関しても同様で, f の代わりに $\{x_\alpha\}$ 等と書く. D を明示したい場合, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ または $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$（集合と区別がつく状況では）のように書く.

ネットによる収束の定義と点列による収束の定義は同一である.

Definition 7. Let X be a topological space, let $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ be a net in X and let x belong to X. Then $\{x_\alpha\}$ is said to *converge to* x if for any open neighborhood U of x, there exists some $\alpha_0 \in D$ such that $x_\alpha \in U$ for any $\alpha \in D$ with $\alpha \geq \alpha_0$.

サブネットの定義は, 部分列の定義より若干弱い. しかしながら, 収束という観点から見れば, 同一の定義である.

Definition 8. Let $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ and $\{y_\beta : \beta \in E\}$ be nets. Then $\{y_\beta\}$ is said to be a *subnet* of $\{x_\alpha\}$ if there exists a mapping f from E into D such that

(i) $y_\beta = x_{f(\beta)}$ for every $\beta \in E$;

(ii) for each $\alpha_0 \in D$ there exists $\beta_0 \in E$ such that $\beta_0 \leq \beta$ implies $\alpha_0 \leq f(\beta)$.

大雑把に表現すると, 部分列の定義では, 通常「$i < j \Longrightarrow f(i) < f(j)$」まで要求する. しかし, サブネットの定義では, 「$\lim_n f(n) = \infty$」までしか要求していない.

ネットを使うメリットは2つある.

- 点列のように扱える.
- 位相との密着度が高い.

もちろん, 1 番目のメリットは見かけ上のものであり, 本質的なものではない.
単に, 位相の難しさを有向集合に押し付けているだけである.

位相空間におけるネットの本質は以下に現れる.

Theorem 9.

- If $x_\alpha = x$ for any $\alpha \in D$, then $\{x_\alpha\}$ converges to x.
- If $\{x_\alpha\}$ converges to x, then every subnet also converges to x.
- If every subnet of $\{x_\alpha\}$ has a subnet converging to x, then $\{x_\alpha\}$ converges to x.
- If a net $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ converges to x and for every $\alpha \in D$ a net $\{x^{(\alpha)}{}_\beta : \beta \in E_\alpha\}$ converges to x_α, then $\left\{x_{(\alpha,\gamma)} : D \times \prod\{E_\alpha : \alpha \in D\}\right\}$ converges to x.

逆に, 上記を仮定して位相を定義することもできる.

1, 2, 3 番目の命題は自然なものである. 従って, 位相の本質は 4 番目の命題にある.

4 番目の命題に関して, 若干注意を必要とする.

- まず, $\gamma \in \prod\{E_\alpha : \alpha \in D\}$ は定義域を D とする写像であり, かつ $\gamma(\alpha) \in E_\alpha$ を満たす.
- 有向集合 $D \times \prod\{E_\alpha : \alpha \in D\}$ の順序 $\leq$ は以下で定義される.

  For $(\alpha_1, \gamma_1), (\alpha_2, \gamma_2) \in D \times \prod\{E_\alpha : \alpha \in D\}$, $(\alpha_1, \gamma_1) \leq (\alpha_2, \gamma_2)$ if $\alpha_1 \leq \alpha_2$ and $\gamma_1(\alpha) \leq \gamma_2(\alpha)$ for any $\alpha \in D$.
- ネット $\{x_{(\alpha,\gamma)}\}$ は以下で定義される.

  For $(\alpha, \gamma) \in D \times \prod\{E_\alpha : \alpha \in D\}$, $x_{(\alpha,\gamma)} = x^{(\alpha)}{}_{\gamma(\alpha)}$.

4 番目の命題は, 「収束」という言葉を使わない方が分かり易いかも知れない. 以下のように記述すると, 非常に自然な命題であることが分かる.

- If a net $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ converges to x and for every $\alpha \in D$ a net $\{x^{(\alpha)}{}_\beta : \beta \in E_\alpha\}$ converges to x_α, then for any open neighborhood U of x, there exist some $\alpha_0 \in D$ and some function $\gamma_0 \in \prod\{E_\alpha : \alpha \in D\}$ such that $x^{(\alpha)}{}_\beta \in U$ for any $\alpha \in D$ and $\beta \in E_\alpha$ with $\alpha \geq \alpha_0$ and $\beta \geq \gamma_0(\alpha)$.

3. compatible な位相を持つか？

ν-generalized metric space が compatible な位相を持つか, という問題は決着がついている.

$\nu = 1$ のときは, 距離空間なので, もちろん compatible な位相を持つ. また, その他に $\nu = 3$ のときも compatible な位相を持つ.

一方で $\nu \in \{2, 4, 5, \cdots\}$ のときは, compatible な位相を持たない反例がある.

Lemma 10 ([8, 10, 11])**.** Let $\nu \in \mathbb{N}$. Let (X, ρ) be a metric space and let A and B be two subsets of X with $A \cap B = \varnothing$. Assume that if ν is odd, then A consists of at most $(\nu - 1)/2$ elements. Let M be a positive real number satisfying

$$\rho(x, y) \leq M$$

for any $x \in A$ and $y \in B$. Define a function d from $X \times X$ into $[0, \infty)$ by

$$\begin{aligned}
&d(x, x) = 0 && \\
&d(x, y) = d(y, x) = \rho(x, y) && \text{if } x \in A \text{ and } y \in B \\
&d(x, y) = M && \text{otherwise.}
\end{aligned}$$

Then (X, d) is a ν-generalized metric space.

Example 11 ([8])**.** Let

$$X = \big\{(0, 0)\big\} \cup \big((0, 1] \times [0, 1]\big).$$

Define a function d from $X \times X$ into $[0, \infty)$ by

$$\begin{aligned}
&d(x, x) = 0 && \\
&d\big((0, 0), (s, 0)\big) = d\big((s, 0), (0, 0)\big) = s && \text{if } s \in (0, 1] \\
&d\big((s, 0), (p, q)\big) = d\big((p, q), (s, 0)\big) = |s - p| + q && \text{if } s, p, q \in (0, 1] \\
&d(x, y) = 3 && \text{otherwise.}
\end{aligned}$$

Then the following hold:

(i) (X, d) is not a metric space.

(ii) (X, d) is a 2-generalized metric space.

(iii) X does not have a topology which is compatible with d.

Lemma 12 ([15])**.** Let X be a set. Let $a \in X$ and let B and C be two nonempty subsets of X with

$$X = \{a\} \sqcup B \sqcup C,$$

$a \notin B$, $a \notin C$ and $B \cap C = \varnothing$. Let S be a mapping from C into B. Let M be a positive real number and let f be a function from $B \sqcup C$ into $(0, M]$. Define a function d from $X \times X$ into $[0, \infty)$ by

$$\begin{aligned}
&d(x, x) = 0 && \\
&d(a, x) = d(x, a) = f(x) && \text{if } x \in B \\
&d(Sx, x) = d(x, Sx) = f(x) && \text{if } x \in C \\
&d(x, y) = M && \text{otherwise.}
\end{aligned}$$

Then (X, d) is a ν-generalized metric space for $\nu \geq 4$.

Example 13 ([15])**.** Let

$$X = \big\{(0,0)\big\} \cup \big((0,2] \times [0,2]\big).$$

Define a function d from $X \times X$ into $[0,\infty)$ by

$$\begin{array}{ll} d(x,x) = 0 & \\ d\big((0,0),(s,0)\big) = d\big((s,0),(0,0)\big) = s & \text{if } s \in (0,2] \\ d\big((s,0),(s,t)\big) = d\big((s,t),(s,0)\big) = t & \text{if } s,t \in (0,2] \\ d(x,y) = 6 & \text{otherwise.} \end{array}$$

Then the following hold:

(i) (X,d) is not a ν-generalized metric space for $\nu = 1,2,3$.

(ii) (X,d) is a ν-generalized metric space for $\nu \geq 4$.

(iii) X does not have a topology which is compatible with d.

3-generalized metric space は, compatible な位相を持ち, かつその位相は metrizable である.

Theorem 14 ([15])**.** Let (X,d) be a 3-generalized metric space. Define a function ρ from $X \times X$ into $[0,\infty)$ by

$$\rho(x,y) = \inf\big\{D(x,u_1,\cdots,u_n,y) :\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ u_1,\cdots,u_n \in X\big\}.$$

Then (X,ρ) is a metric space; and for any $x \in X$ and for any net $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ in X, $\lim_\alpha d(x,x_\alpha) = 0$ iff $\lim_\alpha \rho(x,x_\alpha) = 0$.

4. Definition

距離空間に関する種々の概念を参考にして, ν-generalized metric space においても, 以下のように概念を定義することができる.

Definition 15. Let (X,d) be a ν-generalized metric space.

- A sequence $\{x_n\}$ in X is said to be *Cauchy* if $\lim_n \sup_{m>n} d(x_m,x_n) = 0$ holds.

- A sequence $\{x_n\}$ in X is said to be 2-*Cauchy* if

  $$\lim_{n\to\infty} \sup\big\{d(x_n,x_{n+1+2j}) :\ j = 0,1,2,\cdots\big\} = 0$$

  holds.

- A sequence $\{x_n\}$ in X is said to *converge* to x if $\lim_n d(x, x_n) = 0$ holds.

- A sequence $\{x_n\}$ in X is said to *converge only* to x if $\lim_n d(x, x_n) = 0$ holds and $\lim_n d(y, x_n) = 0$ does not hold for $y \in X \setminus \{x\}$.

- A sequence $\{x_n\}$ in X is said to *converge exclusively* to x if $\lim_n d(x, x_n) = 0$ holds and $\lim_n d(y, x_{f(n)}) = 0$ does not hold for any $y \in X \setminus \{x\}$ and for any subsequence $\{x_{f(n)}\}$ of $\{x_n\}$.

- A sequence $\{x_n\}$ in X is said to *converge to x in the strong sense* if $\{x_n\}$ is Cauchy and $\{x_n\}$ converges to x.

- X is said to be *complete* if every Cauchy sequence converges to some point in X.

- X is said to be *2-complete* if every 2-Cauchy sequence converges to some point in X.

- X is said to be *compact* if for any sequence $\{x_n\}$ in X, there exists a subsequence $\{x_{f(n)}\}$ of $\{x_n\}$ converging to some $z \in X$.

- X is *compact in the strong sense* if for any sequence $\{x_n\}$ in X, there exists a subsequence $\{x_{f(n)}\}$ of $\{x_n\}$ converging to some $z \in X$ in the strong sense.

「$\lim_n d(x_n, x) = 0$ and $\lim_n d(x_n, y) = 0$ imply $x = y$」が成立しないので, 定義すべき概念の数が多くなっている.

5. 不動点定理

完備距離空間では, 縮小写像に対する不動点定理がある（Banach の縮小原理）が, ν-generalized metric space においても, 同様の定理が証明できる.

以下の定理は Branciari が最初に主張したが, その証明に間違いがあることが指摘されている.

Theorem 16 (Branciari [3])**.** Let (X, d) be a complete ν-generalized metric space and let T be a contraction on X, that is, there exists $r \in [0, 1)$ such that

$$d(Tx, Ty) \leq r\, d(x, y)$$

for any $x, y \in X$. Then T has a unique fixed point z of T. Moreover, for any $x \in X$, $\{T^n x\}$ converges to z in the strong sense.

この定理を証明する際, 以下の 2 つの補助定理を必要とする.

Lemma 17 ([14])**.** Let (X, d) be a ν-generalized metric space. Let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be sequences in X converging to u and v in the strong sense, respectively. Then

$$d(u, v) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n)$$

holds.

Lemma 18 ([13])**.** Let (X, d) be a ν-generalized metric space and let T be a mapping on X. Assume that

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(T^n u, T^{n+1} u) < \infty$$

and

$$\lim_{n \to \infty} d(T^n u, T^{n+2} u) = 0$$

hold for some $u \in X$. Then $\{T^n u\}$ is Cauchy.

Theorem 16 の証明を与える.

Proof of Theorem 16 ([13]). Fix $u \in X$. Then we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(T^n u, T^{n+1} u) \leq \sum_{n=1}^{\infty} r^n \, d(u, Tu) < \infty.$$

We also have

$$\lim_{n \to \infty} d(T^n u, T^{n+2} u) \leq \lim_{n \to \infty} r^{n-2} \, d(u, T^2 u) = 0.$$

Therefore by Lemma 18, $\{T^n u\}$ is Cauchy. Since X is complete, $\{T^n u\}$ converges to some $z \in X$. By Lemma 17, we have

$$d(z, Tz) = \lim_{n \to \infty} d(T^n u, Tz) \leq \lim_{n \to \infty} r \, d(T^{n-1} u, z) = r \, d(z, z) = 0,$$

which implies z is a fixed point of T. Let y be a fixed point of T. Then we have

$$d(z, y) = d(Tz, Ty) \leq r \, d(z, y)$$

and hence $z = y$ holds. So the fixed point z is unique. □

以下は Edelstein の不動点定理の ν-generalized metric space 版である.

Theorem 19 ([10])**.** Let (X, d) be a compact ν-generalized metric space. Let T be a mapping on X such that

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

for any $x, y \in X$ with $x \neq y$. Then T has a unique fixed point z. Moreover $\{T^n x\}$ converges to z for any $x \in X$.

以下は Caristi の不動点定理の ν-generalized metric space 版である.

Theorem 20 ([1])**.** Let (X,d) be a ν-generalized metric space satisfying either of the following:

- ν is odd and X is complete.
- ν is even and X is 2-complete.

Let T be a mapping on X. Let f be a proper, sequentially lower semicontinuous function from X into $(-\infty,+\infty]$ bounded from below. Assume that

$$f(Tx)+d(x,Tx)\leq f(x)$$

for all $x\in X$. Then T has a fixed point.

6. その他

講演では, sequentially compatible な位相, およびその他の位相についても言及したいと考えている.

参考文献

[1] B. Alamri, T. Suzuki and L. A. Khan, *Caristi's fixed point theorem and Subrahmanyam's fixed point theorem in ν-generalized metric spaces*, J. Funct. Spaces, 2015, Art. ID 709391, 6 pp. MR3352136

[2] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math., 3 (1922), 133–181.

[3] A. Branciari, *A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces*, Publ. Math. Debrecen, 57 (2000), 31–37. MR1771669

[4] R. Caccioppoli, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una transformazione funzionale*, Rend. Accad. Naz. Lincei, 11 (1930), 794–799.

[5] J. Caristi, *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions*, Trans. Amer. Math. Soc., 215 (1976), 241–251. MR0394329

[6] J. Caristi and W. A. Kirk, *Geometric fixed point theory and inwardness conditions*, Lecture Notes in Math., Vol. 490, pp. 74–83, Springer, Berlin, 1975. MR0399968

[7] M. Edelstein, *On fixed and periodic points under contractive mappings*, J. London Math. Soc., 37 (1962), 74–79. MR0133102

[8] T. Suzuki, *Generalized metric spaces do not have the compatible topology*, Abstr. Appl. Anal., 2014, Art. ID 458098, 5 pp. MR3248859

[9] ———, *Numbers on diameter in ν-generalized metric spaces*, Bull. Kyushu Inst. Technol., 63 (2016), 1–13.

[10] ———, *Another generalization of Edelstein's fixed point theorem in generalized metric spaces*, to appear in Linear Nonlinear Anal.

[11] ———, *Completeness of* 3*-generalized metric spaces*, submitted.

[12] ———, *Every generalized metric space has a sequentially compatible topology*, submitted.

[13] T. Suzuki, B. Alamri and L. A. Khan, *Some notes on fixed point theorems in ν-generalized metric spaces*, Bull. Kyushu Inst. Technol., 62 (2015), 15–23. MR3383160

[14] T. Suzuki, B. Alamri and M. Kikkawa, *Edelstein's fixed point theorem in generalized metric spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., 16 (2015), 2301–2309. MR3429363

[15] ———, *Only* 3*-generalized metric spaces have a compatible symmetric topology*, Open Math., 13 (2015), 510–517. MR3393419

平滑化評価式および制限定理の最良定数と関連する話題

杉本　充（MITSURU SUGIMOTO）*

1. 評価式の最良定数を求めるということ

数学においては様々な不等式が知られているが，それはあくまでも等式ではなく不等式であることから,「大まかな見積もり」程度の心づもりで用いられることも多い．例えば，ある定数 $C > 0$ が存在して，評価式

$$\iint_{\mathbf{R}^2} |f(x)|^2 \, dx \le C \left(\iint_{\mathbf{R}^2} |\nabla f(x)| \, dx \right)^2$$

がすべての $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ に対して成立することが知られているが（Sobolev の不等式），これにより f の L^2-ノルムを ∇f の L^1-ノルムにより評価することができる．この程度の見積もりであっても，これが解析の様々な場面において強力な手段となっていることは事実である．

評価式をこのような目的のためだけに用いるのであれば，定数 C の具体的な値は特に意味を持たず，ただ正値であるという以上の情報は不要である．しかしながら，このような定数 C のなかで最良のものは何であろうか？という疑問は，少なくとも数学的な観点からは興味深い．実際，より精密に評価式

$$\iint_{\mathbf{R}^2} |f(x)|^2 \, dx \le \frac{1}{4\pi} \left(\iint_{\mathbf{R}^2} |\nabla f(x)| \, dx \right)^2$$

が成立することが知られており，この定数 $1/(4\pi)$ は最良のものであることも知られている．

見積もりとしての不等式の取り回しに慣れ切ってしまうと,「最良定数を求めることに何の意味があるのか？」と否定的な考え方に陥ってしまいがちであるが，最良定数は何らかの数学的真理の一つの表現であるはずだと思い直すことは時として重要である．実際，この最良定数つきの Sobolev の不等式から，等周不等式

$$|D| \le \frac{1}{4\pi} |\partial D|^2$$

が導かれる．ここで $|D|$ は領域 $D \subset \mathbf{R}^2$ の面積，$|\partial D|$ はその境界の長さを表しており，従って等周不等式は「長さ一定の閉曲線により囲まれる領域の中で面積が最大のものは円であるか？」という等周問題に対する明解な肯定的解答を与えている．

ここでは，シュレディンガー方程式の平滑化作用および制限定理に関連した様々な評価式に対し，その最良定数の具体的な値を求めるとともに，その最良定数を求めることの意味について探っていきたい．

* 名古屋大学大学院多元数理科学研究科（Graduate School of Mathematics, Nagoya University）.

2. シュレディンガー方程式の平滑化作用

自由シュレディンガー方程式の初期値問題

$$\begin{cases} (i\partial_t - \Delta_x)\, u(t,x) = 0 \\ \qquad\qquad u(0,x) = \varphi(x) \in L^2(\mathbf{R}^n) \end{cases}$$

の解

$$u(t,x) = e^{-it\Delta_x}\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi}e^{it|\xi|^2}\widehat{\varphi}(\xi)\, d\xi$$

は以下をみたすことが，Plancherel の定理を用いることにより簡単に確かめられる：

- 時刻 t を固定：

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

即ち，初期値の L^2-ノルムは時間が経過しても常に保存される．また，少し工夫を要するが，やはり Plancherel の定理を用いることにより, 以下が簡単に確かめられる：

- 位置 x を固定 ($n=1$ の場合)

$$\left\||D_x|^{1/2}u(\cdot,x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R})}$$

（ただし，$\operatorname{supp}\hat{\varphi} \subset [0,\infty)$ または $\operatorname{supp}\hat{\varphi} \subset (-\infty, 0]$）．

即ち，解を時刻 t に関して積分平均をとることにより，空間変数 x に関して 1/2 の滑らかさが増大する（これを**平滑化作用**という）．実際，$\operatorname{supp}\widehat{\varphi} \subset [0,\infty)$ として $\xi = \sqrt{\eta}$ と変換すれば ($d\xi = (2\sqrt{\eta})^{-1}d\eta$),

$$\begin{aligned} |D_x|^{1/2}e^{-it\Delta_x}\varphi(x) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{ix\xi}\xi^{1/2}e^{it\xi^2}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{ix\sqrt{\eta}}\sqrt{\eta}^{1/2}e^{it\eta}\widehat{\varphi}(\sqrt{\eta})(2\sqrt{\eta})^{-1}\, d\eta \end{aligned}$$

となるので，Plancherel の定理により

$$\begin{aligned} \||D_x|^{1/2}e^{-it\Delta_x}\varphi(x)\|^2_{L^2(\mathbf{R}_t)} =& \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |\widehat{\varphi}(\sqrt{\eta})|^2(4\sqrt{\eta})^{-1}\, d\eta \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |\widehat{\varphi}(\xi)|^2(4\xi)^{-1}2\xi\, d\xi \\ =& \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbf{R})} \end{aligned}$$

となる．ここで変換 $\eta = \xi^2$ ($d\eta = 2\xi d\xi$) を用いた. あとは，両辺に $\langle x\rangle^{-2s}$ ($s > 1/2$) をかけて x に関して積分すればよい．

この平滑化作用は $n \geq 2$ の場合にも成立することが知られている（以後，ここでは $n \geq 2$ を常に仮定することにする）：

$$\|Tu(t,x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)} \leq C\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)},$$

[A]	$T = \langle x\rangle^{-1}\langle D_x\rangle^{1/2}$	$\cdots$	$n \geq 3$,
[B]	$T = \|x\|^{a-1}\|D_x\|^a$	$\cdots$	$1 - n/2 < a < 1/2$, $n \geq 2$,
[C]	$T = \langle x\rangle^{-s}\|D_x\|^{1/2}$	$\cdots$	$s > 1/2$, $n \geq 2$.

ただし $\langle x\rangle = \sqrt{1+|x|^2}$, $\langle D_x\rangle = \sqrt{1-\Delta_x}$.

- Type [A] は Kato & Yajima (1989) ($n \geq 3$) による．また，$s < 1$ の場合には成立しない (Walther (1999)).
- Type [B] は Kato & Yajima (1989) ($n \geq 3$, $0 \leq a < 1/2$) および Sugimoto (1998) ($n \geq 2$, $1 - n/2 < a < 1/2$) による．また，$a = 1/2$ の場合は成立しない（Watanabe (1991)）.
- Type [C] は Kenig, Ponce & Vega (1991) による．また $s = 1/2$ の場合は成立しない（例えば Ruzhansky-Sugimoto (2012)）.

Sjörin, Constantin & Saut, Vega (1987-8) はこれらの局所バージョンを示している．

注意 1. より一般に，$m > 0$ に対して

$$\left\|Te^{-it|D_x|^m}\varphi\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \leq C\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)},$$

$$\begin{array}{lll} [\mathrm{A}] & T = \langle x\rangle^{-m/2}\langle D_x\rangle^{(m-1)/2} & \cdots\ n > m > 1, \\ [\mathrm{B}] & T = |x|^{a-m/2}|D_x|^a & \cdots\ (m-n)/2 < a < (m-1)/2, \\ [\mathrm{C}] & T = \langle x\rangle^{-s}|D_x|^{(m-1)/2} & \cdots\ s > 1/2. \end{array}$$

たとえば，Type [C] は次の等式（**比較原理**）が得られることより従う：

$$\sqrt{m}\||D_x|^{(m-1)/2}e^{it|D_x|^m}\varphi(x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t)} = \sqrt{l}\||D_x|^{(l-1)/2}e^{it|D_x|^l}\varphi(x)\|_{L^2(\mathbf{R}_t)}.$$

注意 2. このような評価式はしばしば**平滑化評価式**とよばれ, 双対を考えることにより，**制限定理**と同値になることが知られている：

$$\left\|w(|x|)\sigma(|D_x|)e^{-it\Delta_x}f(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \leq C_0\|f\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left\|g_{|\rho\mathbb{S}^{n-1}}\right\|_{L^2(\rho\mathbb{S}^{n-1};\rho^{n-1}d\omega)} \leq \frac{C_0\sqrt{\rho}}{\sqrt{\pi}\sigma(\rho)}\left\|w(|D_x|)^{-1}g\right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \qquad (\rho > 0).$$

例えば, Type [B] の場合には

$$\left\|f_{|\rho\mathbb{S}^{n-1}}\right\|_{L^2(\rho\mathbb{S}^{n-1};\rho^{n-1}d\omega)} \leq \frac{C_0}{\sqrt{\pi}}\,\rho^{1/2-a}\left\||D_x|^{1-a}f\right\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

($\rho > 0$) と同値であり，さらには scaling argument により

$$\left\|g_{|\mathbb{S}^{n-1}}\right\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1};d\omega)} \leq \frac{C_0}{\sqrt{\pi}}\,\|g\|_{\dot{H}^s(\mathbf{R}^n)}$$

($n/2 > s > 1/2$) とも同値になる．

注意 3. 加藤敏夫の理論より，Resolvent 評価 ($-\triangle$-supersmooth) からも平滑化評価式が導かれる：

$$\sup_{\operatorname{Im}\zeta>0}\left|\left((-\Delta_x-\zeta)^{-1}T^*f, T^*f\right)\right| \lesssim \|f\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\left\|Te^{-it\Delta_x}\varphi(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}_x^n)} \lesssim \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}_x^n)}$$

注意 4. Type [B] の臨界指数 $a = 1/2$ に対応する結果として，

$$T = |x|^{a-1}(1-\Lambda)^{1/4-a/2}|D_x|^a, \quad (1 - n/2 < a < 1/2)$$

に対して平滑化評価式が成立する（Hoshiro (1998)）．ここで，

$$-\Lambda = |x \wedge D_x|^2$$

は球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上の Laplace–Beltrami 作用素であり，球面上の作用素を $\mathbf{R}^n$ へ斉次拡張したものも同じ記号で表している．オーダーとしては

$$|x|^{a-1}(-\Lambda)^{1/4-a/2}|D_x|^a \sim |x|^{-1/2}|D_x|^{1/2}$$

であることに注意．

3. 平滑化評価式の最良定数

平滑化評価式の最良定数についてはこれまであまり知られていなかったが，$n \geq 3$ の場合に Simon (1992) により， Type [B] の $a = 0$ の場合 および Type [C] の $s = 1$ における最良定数が与えられている:

[A]	$T = \langle x \rangle^{-1} \langle D_x \rangle^{1/2}$	$\cdots$	?
[B]	$T = \|x\|^{-1}$	$\cdots$	$\sqrt{\pi/(n-2)}$
[C]	$T = \langle x \rangle^{-1} \|D_x\|^{1/2}$	$\cdots$	$\sqrt{\pi/2}$

一般の場合の最良定数は何か? また Extremiser は存在するのか？以下，この問題に対する最新の研究成果を報告する：

- Type [A] の $n = 3$, $n \geq 5$ の場合での最良定数はそれぞれ

  $$\pi^{1/2}, \qquad (\pi/2)^{1/2}$$

  であり，Etremiser は存在しない（[BS1]）．
- Type [B] の $1 - n/2 < a < 1/2$ の場合における最良定数は

  $$\left(\pi 2^{2a-1} \frac{\Gamma(1-2a)\Gamma(\frac{n}{2}+a-1)}{\Gamma(1-a)^2 \Gamma(\frac{n}{2}-a)} \right)^{1/2}$$

  であり，球対称関数がその Extremiser である（Watanabe (1991)）．
- Type [C] の $s > 1/2$, $n \geq 3$ の場合における最良定数は

  $$\left(\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-\frac{1}{2})}{2\Gamma(s)} \right)^{1/2}$$

  であり，Extremiser は存在しない（[BSS]）．

従って，残された問題は以下の 2 つの場合のみである：

・Type [A] の $n = 4$ の場合，　　・Type [C] の $n = 2$ の場合．

さらに，注意 4 に関連して，

- Type [B] の臨界指数 $a = 1/2$ の場合に相当する

  $$T = |x|^{a-1}(-\Lambda)^{1/4-a/2}|D_x|^a \sim |x|^{-1/2}|D_x|^{1/2}$$

  に対する平滑化評価式の最良定数は，

  $$\left(\pi 2^{2a-1} \frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)^2} \right)^{1/2}$$

  であり，Etremiser は存在しない（[BS2]）．

- 特に，Hoshiro の結果の場合である
$$T = |x|^{a-1}(1-\Lambda)^{1/4-a/2}|D_x|^a \sim |x|^{-1/2}|D_x|^{1/2}$$
に対しては，下からの評価も成立する（Fang-Wang (2011)）：
$$\left\| |x|^{a-1}(1-\Lambda)^{1/4-a/2}|D_x|^a e^{-it\Delta}\varphi \right\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)} \approx \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}.$$
これに対する最良定数や extremiser も詳細に調べられており，特に $n=4$ and $a=0$ の場合には恒等式
$$\left\| |x|^{-1}(1-\Lambda)^{1/4} e^{-it\Delta}\varphi \right\|_{L^2_{t,x}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^4)} = \sqrt{2\pi}\, \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^4)}.$$
が成立する（[BS2]）．

注意 5. シュレディンガー方程式に対する別のタイプの時空間評価式として，次の Strichartz 評価式も非線形解析における重要な道具として用いられる：
$$\left\| e^{-it\Delta_x} f \right\|_{L^p_t(\mathbf{R};L^q_x(\mathbf{R}^n))} \le C\|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n)},$$
ただし $2/p + n/q = n/2$, $p, q \ge 2$, $(p,q,n) \ne (2,\infty,2)$. このうち $p=q=2+4/n$ の場合が Strichartz (1977) による古典的な結果であり, endpoint に相当する $(p,q) = (2, 2n/(n-2))$ の場合は Keel-Tao (1999) によるものである．この Strichartz 評価式に対する最良定数は，部分的に以前から知られていた:

- $(p,q,n) = (6,6,1) \cdots\ 12^{-1/12}$,
- $(p,q,n) = (4,4,2) \cdots\ 2^{-1/2}$,
- $(p,q,n) = (8,4,1) \cdots\ 2^{-1/4}$.

また．これらに対する extremiser は “Gaussian” である．これらの結果のうち最初の二つは，Foschi (2007) と Hundertmark-Zharmitsky (2006) により独立に与えられた．三つ目は Bennett-Bez-Carbery-Hundertmark (2009) による．

4. 制限定理の最良定数

すでに述べたように，Type [B] の平滑化評価式の双対評価として，次の最良定数付きの制限定理が直ちに得られるが成立する（[RS]）：
$$\left\| f_{|\mathbb{S}^{n-1}} \right\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1};d\omega)} \le \left(2^{1-2s} \frac{\Gamma(2s-1)\Gamma(\frac{n}{2}-s)}{\Gamma(s)^2\Gamma(\frac{n}{2}-1+s)} \right)^{1/2} \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbf{R}^n)},$$
ただし $n/2 > s > 1/2$. Extremiser の存在は必ずしも自明ではないが，次がわかる：

- f が extremiser である必要十分条件は，
$$\widehat{f}(\xi) = c\, \frac{J_{\frac{d-2}{2}}(|\xi|)}{|\xi|^{\frac{d-2}{2}+2s}}, \qquad c \ne 0$$
と表されることである．ここで，J_ν は ν 次の Bessel function．特に $n=3$ のときには具体的に計算できて
$$f(x) = c\, \frac{(|x|+1)^{2s-1} - \big||x|-1\big|^{2s-1}}{|x|}$$
となる. さらに $s=1$ とすれば，最良定数付きの制限定理
$$\left\| f_{|\mathbb{S}^2} \right\|_{L^2(\mathbb{S}^2;d\omega)} \le \|f\|_{\dot{H}^1(\mathbf{R}^d)}$$

が成立し，等号成立は

$$f(x) = c \times \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \le 1 \\ \frac{1}{|x|} & \text{if } |x| > 1 \end{cases}$$

の時である（[BMS]）．

- $\dot{H}^s$ を H^s に置き換えた場合には次の最良定数付き評価が成立：

$$\|f|_{\mathbb{S}^{n-1}}\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1};d\omega)} \le \left(\int_0^\infty J_{\frac{n-2}{2}}(t)^2 \frac{t}{(1+t^2)^s}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \|f\|_{H^s(\mathbf{R}^n)},$$

ただし $s > 1/2$. f が extremiser である必要十分条件は，

$$\widehat{f}(\xi) = c\,\frac{J_{\frac{d-2}{2}}(|\xi|)}{|\xi|^{\frac{d-2}{2}}(1+|\xi|^2)^s}, \qquad c \neq 0$$

となることである（[BMS]）．

- $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ を $L^p(\mathbb{S}^{n-1})$ に置き換えた場合には次の最良定数付き評価が成立：

$$\|f|_{\mathbb{S}^{n-1}}\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1};d\omega)} \le \left(2^{1-2s}\frac{\Gamma(2s-1)\Gamma(\frac{n}{2}-s)}{\Gamma(s)^2\Gamma(\frac{n}{2}-1+s)}\left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\right)^{\frac{2s-1}{n-1}}\right)^{1/2} \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbf{R}^n)},$$

ただし $n/2 > s > 1/2$ かつ $p = \frac{2(n-1)}{n-2s}$. f が extremiser である必要十分条件は，$\mathbb{S}^{n-1}$ 上の関数

$$G(\omega) = \frac{1}{(1-m\cdot\omega)^{\frac{n}{2}+s-1}}, \qquad m \in \mathbf{R}^n, \quad |m| < 1.$$

により

$$f = c\,\frac{1}{|\cdot|^{n-2s}} * G d\omega, \qquad c \neq 0$$

となることである（[BMS]）．

5. 平滑化評価式の最良定数の表現

以上の様な最良定数や etremiser の情報がどのようにして得られるのかについて，簡単に説明をしておこう．まず予備的な考察として，extremiser が存在するとすればどのようなものでなくてはならないかについて考察する．

一般に X, Y をヒルベルト空間とし，$T : X \to Y$ を有界作用素とする．もし extremiser f が存在したとする：

$$\|Tf\|_Y = \|T\|_{X\to Y}\|f\|_X, \quad (f \neq 0).$$

この時，f は $T^*T : X \to X$ の固有関数であり，その固有値は $\|T\|_{X\to Y}^2$ である．つまり，$T : X \to Y$ の最良定数 は $(T^*T : X \to X$ の最大固有値$)^{1/2}$ であり，Extremiser は最大固有値の固有関数となる．実際，Schwarz の不等式により，

$$\begin{aligned}\|Tf\|_Y^2 =&(Tf, Tf)_Y = (T^*Tf, f)_X \\ \le&\|T^*Tf\|_X\|f\|_X \le \|T^*T\|_{X\to X}\|f\|_X^2 \\ =&\|T\|_{X\to Y}^2\|f\|_X^2\end{aligned}$$

となるが，f が extremiser であることより，この不等式は全て等号が成立していなくてはならない．よって Schwarz の不等式の等号成立条件により，T^*Tf と f は互いに平行である：

$$T^*Tf = {}^{\exists}\lambda f.$$

さらに，再び上の（不）等式より

$$\lambda = \|T\|_{X\to Y}^2.$$

となることがわかる．典型例は，Type [B] の平滑化評価式：

$$X = L^2(\mathbf{R}_x^n), \quad Y = L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n),$$
$$T = |x|^{a-1}|D_x|^a e^{-it\Delta_x} : X \to Y$$

であり，T^*T の固有空間分解は，**球面調和分解**

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_k$$

となる．ここで H_k は次の型の関数

$$\xi \mapsto P(\xi) f_0(|\xi|)|\xi|^{-n/2-k+1/2}.$$

の有限線形和全体で，P は k 次斉次な調和多項式で $f_0 \in L^2(0,\infty)$ である．

実は，extremiser があるとは限らない場合であっても，T^*T を $L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_k$ 上で考えることにより，

$$T = w(|x|)^{1/2}\psi(|D_x|)e^{it\phi(|D_x|)} : L^2(\mathbf{R}_x^n) \to L^2(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n)$$

の最良定数 $\mathbf{C}_n(w,\psi,\phi)$ の表現を得ることができる．ここで

- radial weight $w : [0,\infty) \to [0,\infty)$,
- smoothing function $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$,
- dispersion relation $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

である．典型例として，シュレディンガー方程式の平滑化評価式は $\phi = r^2$ の場合であり，Type [A] [B] [C] はそれぞれ

$$\begin{array}{lll}
[\mathrm{A}] & T = \langle x\rangle^{-1}\langle D_x\rangle^{1/2} & \cdots (w,\psi) = (\langle r\rangle^{-2}, \langle r\rangle^{1/2}), \\
[\mathrm{B}] & T = |x|^{a-1}|D_x|^a & \cdots (w,\psi) = (|r|^{2(a-1)}, r^a), \\
[\mathrm{C}] & T = \langle x\rangle^{-s}|D_x|^{1/2} & \cdots (w,\psi) = (\langle r\rangle^{-2s}, |r|^{1/2})
\end{array}$$

で与えられる．このとき，最良定数 $\mathbf{C}_n(w,\psi,\phi)$ は次の表現を持つ（[BSS]）：

$$\mathbf{C}_n(w,\psi,\phi) = \left(\frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \sup_{k\in\mathbf{N}_0} \sup_{\varrho>0} \lambda_k(\varrho)\right)^{1/2},$$

ただし

$$\lambda_k(\varrho) = |\mathbb{S}^{n-2}| \frac{\varrho^{n-1}\psi(\varrho)^2}{|\phi'(\varrho)|} \int_{-1}^{1} F_w(\varrho^2(1-t))\mathfrak{p}_{n,k}(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\,\mathrm{d}t \tag{5.1}$$

$$= (2\pi)^n \frac{\varrho\psi(\varrho)^2}{|\phi'(\varrho)|} \int_0^{\infty} J_{\frac{n}{2}+k-1}(t\varrho)^2 t w(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.2}$$

ここで，F_w は

$$\widehat{w(|\cdot|)}(\xi) = F_w(\tfrac{1}{2}|\xi|^2)$$

で定義される関数であり，$\mathfrak{p}_{n,k}$ は n 次元における k 次 Legendre 多項式である．

注意 6. 上記の $\lambda_k(\varrho)$ の表現のうち，Bessel 関数を用いた表現 (5.2) は Walther (2002) により示されていたものであるが，Legendre 多項式を用いる 1 番目の表現 (5.1) は T^*T の考察により別途示す事ができる．(5.1) が (5.2) と一致することを直接示す論法は今のところ発見できていないので，特殊関数論としても新しい公式である可能性がある！

注意 7. $t \in [-1, 1]$ に対して

$$|\mathfrak{p}_{n,k}(t)| \le 1 = \mathfrak{p}_{n,0}(t)$$

が成立するので，もし F_w が正値である事を仮定すれば（実際 Type [A] [B] [C]）の場合には OK）$\lambda_k(\varrho) \le \lambda_k(\varrho)$．よって，この仮定の下では

$$\mathbf{C}_n(w, \psi, \phi) = \left(\frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \sup_{\varrho>0} \lambda_0(\varrho) \right)^{1/2}$$

と簡略化される．

この最良定数の表現の導出法について，少し説明を加えておこう．球面調和分解 $L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_k$ に従って，各 $f \in L^2$ を

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{a_k} f^{(k,m)},$$

$$f^{(k,m)}(\xi) = P^{(k,m)}(\xi) f_0^{(k,m)}(|\xi|)|\xi|^{-n/2-k+1/2},$$
$$f_0^{(k,m)} \in L^2(0,\infty), \quad P^{(k,m)}(\xi) : k \text{ 次調和多項式}$$

と直交分解する．また F^{-1} を x に関する逆フーリエ変換として $S = (2\pi)^n T F^{-1}$ とおくとき，

$$S^*Sf^{(k,m)}(x) = 2\pi\lambda_k(|x|) f^{(k,m)}(x)$$

となることが確かめられる．この等式は，もし $\lambda_k(|x|)$ が $|x|$ によらなければそれが S^*S の固有値であることを述べており，この節の冒頭に考察した extremiser が存在する場合に対応している．さらに，一般の場合には固有値ではないが，その類似が成り立っていることを主張するものである．

このことから，

$$\begin{aligned} &\|Sf\|^2_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x)} = (Sf, Sf)_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x)} = (S^*Sf, f)_{L^2(\mathbb{R}^n_x)} \\ =&2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{a_k} \int_0^{\infty} \lambda_k(\varrho) |f_0^{(k,m)}(\varrho)|^2 \, \mathrm{d}\varrho \end{aligned}$$

となる．一方

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{a_k} \int_0^{\infty} |f_0^{(k,m)}(\varrho)|^2 \, \mathrm{d}\varrho$$

と表現できるので，これらの関係式から最良の不等式

$$\|Sf\|^2_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x)} \le 2\pi \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \sup_{\varrho \in [0,\infty)} \lambda_k(\varrho) \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

を得る．さらに Plancherel の定理より，

$$\|Tf\|^2_{L^2(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x)} \le \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \sup_{\varrho\in[0,\infty)} \lambda_k(\varrho)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

となる．

6. Extremiser の存在判定法

前節の考察をさらに注意深く眺めることにより，(5.1) や (5.2) で定義される $\lambda_k(\varrho)$ の挙動が extremiser の存在・非存在を決定していることがわかる：

- Extreiser が存在する必要十分条件は，

$$\lambda = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \sup_{\varrho\in[0,\infty)} \lambda_k(\varrho).$$

とおくとき，ある $k_0 \in \mathbb{N}_0$ とある正値ルベーグ測度をもつ集合 $\mathcal{S} \subset (0,\infty)$ が存在して，$\mathcal{S}$ 上で $\lambda_{k_0}(\varrho) = \lambda$ となることである（[BS1]）．

この判定法を用いれば，Type [A] や Type [C] の場合における extremiser の非存在を導くことができる．実際これらの場合，Bessel 関数の漸近挙動より

$$\varrho \int_0^\infty J_\nu(r\varrho)^2 rw(r)\,\mathrm{d}r \to \begin{cases} 0 & \cdots \quad \rho\to 0 \\ \frac{1}{\pi}\|w\|_{L^1(0,\infty)} & \cdots \quad \rho\to\infty \end{cases}$$

となることがわかるので，$\lambda_k(\varrho)$ は定数関数ではない．一方，次の事実を用いれば $\lambda_k(\varrho)$ は解析的であることもわかるので，局所的に定数になることもない：

- ある $\sigma > 1$ に対して $|w^{(m)}(r)| \lesssim (1+r)^{-\sigma-m}$ となるものとする．さらに，ある定数 $C > 0$ が存在して，すべての $m \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\int_0^\infty |r^m w^{(m)}(r)|\,\mathrm{d}r \le C^{m+1} m!\,.$$

とする．また，$\varrho \mapsto \frac{\varrho\psi(\varrho)^2}{|\phi'(\varrho)|}$ は $(0,\infty)$ の上で実解析とする．この時 $\lambda_k(\varrho)$ は $(0,\infty)$ 上で実解析的である（[BS1]）．

よって定理 1 より extremiser は存在しないことになる．

7. Mizohata-Takeuchi 予想

平滑化評価式や制限定理の最良定数を求めることの意義については未だに不明なことは多いが，シュレディンガー方程式の初期値問題の適切性を考察する際にその関わりを垣間見ることができる．このことについて簡単に解説しておこう．

Drift 項のついたシュレディンガー方程式の初期値問題

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) - \Delta_x u(t,x) + V(x)\cdot\nabla_x u(t,x) = F(t,x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

が L^2-wellposed であるためには，

$$\sup_{x\in\mathbf{R},\,\theta\in\mathbb{S}^{n-1},\,t\in\mathbf{R}} \left| \mathrm{Re}\int_0^t V(x+s\theta)\cdot\theta\,ds \right| < \infty$$

は十分か？という Mizohata-Takeuchi 予想とよばれる問題がある．これは Takeuchi (1980) により予想されたが，Mizohata (1984) による以下のような解答が知られている：

- 必要である．
- 次のより強い仮定ならば十分である：

$$\text{すべての } \alpha \text{ に対して，} \sup_{x,\in\mathbf{R},\,\theta\in\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty |\partial^\alpha V(x+s\theta)|\,ds < \infty.$$

Mizohata-Takeuchi 予想は現時点において未解決であるが，この問題において V の X-ray 変換

$$\widetilde{V}(x,\theta) = \int_0^\infty V(x+s\theta)\,ds$$

が何らかの役割を持っている事は確かなようである．

この予想と平滑化評価式との関連について考察してみよう．簡単のため $F=0$ として，方程式を積分形

$$u(t,x) = e^{-it\Delta_x}\varphi(x) + i\int_0^t e^{-i(t-s)\Delta_x} V(x)\cdot\nabla_x u(s,x)\,ds$$

に書き直して，逐次近似で解くことを考えてみる．その際，左辺 $u\in L^2_x$ となるためには，右辺第 2 項で $V\cdot\nabla u\in L^2_x$ となっていなければならないことはすぐにわかるが，平滑化評価式が述べていることは，時間で積分平均をとればそれが可能であるということである．

そこで，weight function $W(x)$ の X-ray 変換の有界性と平滑化評価式

$$\left\| W(x)|D_x|^{1/2}e^{-it\Delta_x}f(x)\right\|_{L^2(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^n_x)} \le C\|f\|_{L^2(\mathbf{R}^n_x)}$$

は互いに関連しているか?という疑問が必然的に生じてくる．これも広い意味で Mizohata-Takeuchi 予想とよばれており，Barcelo-Ruiz-Vega (1997) により次の解答が知られている：

- $W(x)=w(|x|)$（すなわち radial function）ならばこれは正しい．

実は，(5.1) や (5.2) で定義される $\lambda_k(\varrho)$ を用いた最良定数の表現式から，generic な状況においてこの事実を再証明することができる．すなわち

- $n\ge 3$, $w\ge 0$, $F_w\ge 0$ の仮定のもとで

$$\sup_{k\in\mathbf{N}_0}\sup_{\varrho>0}\lambda_k(\varrho) = \frac{(2\pi)^{n-1}}{2}\sup_{x,\in\mathbf{R},\,\theta\in\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^\infty w(|x+s\theta|)\,ds$$

  が成立する（[BSS]）．

これにより，X-ray 変換の有界性と平滑化評価式の最良定数が有限値として定まる（すなわち平滑化評価式が成立する）ことが同値であることが表現されている．

References

[BS1] N. Bez and M. Sugimoto, *On the best constant and extremisers for some smoothing estimates*, (to appear in J. Anal. Math.).

[BS2] N. Bez and M. Sugimoto, *Optimal forward and reverse estimates of Morawetz and Kato–Yajima type with angular smoothing index*, J. Fourier Anal. Appl. **21** (2015), 318-341.

[BSS] N. Bez, H. Saito and M. Sugimoto, *Applications of the Funk-Hecke theorem to smoothing and trace estimates*, Adv. Math. **285** (2015), 1767–1795.

[BMS] N. Bez, S. Machihara and M. Sugimoto, *Extremisers for the trace theorem on the sphere*, Math. Res. Lett. **23** (2016), 633–647.

[RS] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *Trace theorems: critical cases and best constants*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), 227-237.

量子ゼノ効果に関連した量子系の時間発展

井上　啓 [1]

[1] 山陽小野田市立山口東京理科大学工学部

(e-mail) kinoue@rs.tusy.ac.jp

概 要

量子ゼノ効果は概連続観測の下では時間発展が抑制されるという効果と関連している。本発表では、この抑制の記述に関して、2 つの可能性について議論する。本発表の内容は、論文 [11] に基づいている。

1　導入

$(V_t := e^{ith})_{t\geq 0}$ を量子系の時間発展を表現している H のユニタリー作用素の半群とする。ただし、h は H 上の自己共役作用素である。$\rho_0 = \rho$ を時刻 $t_0 = 0$ の量子系の状態とする。さらに、時間区間 $[0, T]$ 上の等間隔時刻をもつ時間系列

$$t_k := \frac{kT}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad T > 0 \tag{1}$$

を考える。

いま、H 上の自己共役作用素 B に従った時刻 $t_k (k = 1, \ldots, n-1)$ で観測することを考える。最後に、時刻 t_n で H 上の自己共役作用素 $A (\neq B)$ に従った観測を行うこととする。このことは、**量子ゼノ過程**と呼ばれる次の過程を考えることを意味する。

$$\begin{array}{llcccccccccc}
\text{観測} & B & & & & B & & B & & & & A \\
 & \Downarrow & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & \Downarrow \\
\text{状態} & \rho_0 & \xrightarrow[\Uparrow \eta_0]{} & \hat{\rho}_0 & \xrightarrow[V_{\frac{T}{n}}]{} & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-1} & \xrightarrow[\Uparrow \eta_{n-1}]{} & \hat{\rho}_{n-1} & \xrightarrow[V_{\frac{T}{n}}]{} & \rho_n \\
 & \Downarrow & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & \Downarrow \\
\text{出力} & \eta_0 & & & & \eta_1 & & \eta_{n-1} & & & & \xi
\end{array}$$

上記の手続きは、次の手順で構成される。

手順 1: 初期状態を ρ_0 とし、時刻 $t_0 = 0$ で自己共役作用素 B に従った観測を行う。この観測結果を η_0 とする。このとき、フォン・ノイマンルールによって、状態 ρ_0 が η_0 に依存しながら別のある状態 $\hat{\rho}_0$ に変化する。最終的に $V_{\frac{T}{n}} = V_{t_1 - t_0}$ に従った時間発展により、状態 $\hat{\rho}_0$ が時刻 t_1 での量子系の状態 ρ_1 に変化する。

手順 2: 状態 ρ_1 から始まって、上記で記述された手続きを繰り返す。すなわち、最初に自己共役作用素 B に従った観測を行い、それから、$V_{\frac{T}{n}} = V_{t_2 - t_1}$ に従った時間発展を適用する。このようにして手順 2 の結果として観測結果 η_1 と、時刻 t_2 での状態 ρ_2 を得る。

この手続きを何度も繰返し適用すると、**手順 (n-1)** の結果として時刻 t_{n-1} での自己共役作用素 B に従った観測結果である η_{n-1} 及び $(\eta_k)_{k=0}^{n-1}$ に依存している時刻 $t_n = T$ での量子系の状態 ρ_n を得る。

手順 n: 出力結果 ξ を得て、時刻 T で自己共役作用素 A に従った観測を行う。

量子ゼノ効果に関して、時間発展の抑制が何を意味するかを明確にするために次の 2 つの可能性を検討する。なお、以下では、技術的問題や複雑な計算を避けるために、有限次元ヒルベルト空間 H の場合に限定して、議論を進めることにする。

可能性 1: 自己共役作用素 B に従った観測を n 回考える。ただし、観測には時間がかからないものとする。このとき、量子ゼノ過程では形式的に $T = 0$ と置くことができ、$\eta_k = \eta_0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ が成立する。このため、量子ゼノ過程では、量子ゼノ効果を以下の性質と関連付けることができる [10]。

$$P(\eta_k = \eta_0;\ k = 1, \ldots, n-1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1. \tag{2}$$

可能性 2: 自己作用素 B に従った観測結果 $\eta_0, \ldots, \eta_{n-1}$ を無視すると、量子ゼノ過程は初期状態 ρ を出力分布 $(\eta_k)_{k=0}^{n-1}$ に関する混合状態 $\rho_n = \rho_{(\eta_k)_{k=0}^{n-1}}$ をある時刻 T で状態 $\rho_{n,T,B,h}$ に変換することに繋がる。このとき、量子ゼノ効果を以下の性質と関連付けることができる。

$$\rho_{n,T,B,h} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \rho, \quad i.e.,\ \ tr\,(A\rho_{n,T,B,h}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} tr(A\rho). \tag{3}$$

しかし、上記の性質は一般的には成立しない。もちろん、ユニタリー作用素 $B = 1_H$ に従った自明な観測の場合には、時間発展の抑制は発生しない。すなわち、一般的な自己共役作用素 B では、可能性 2 の意味において量子ゼノ効果を観測することを期待できない。次元数が 1 以上の少なくとも 1 つの固有空間をもつ自己共役作用素 B に従った自明でない観測の場合でさえ、判例を構成することができる。この理由のため、以下では、一次元の固有区間をもつ自己共役作用素の場合に限定して考察する。

これから議論を進める前に、本研究の動機について、振り返る。

量子ゼノ効果が重要な役割を担っている脳活動を記述する量子モデルが存在している。（詳細については、[10, 18, 20] を参照）

いま、脳が量子系のように振舞うことを仮定する。EEG-観測に関連した自己共役作用素 B を考える。現代の観測装置は一秒当たり $50,000$ 回の観測をすることができる。このとき、量子ゼノ過程では自己共役作用素 B に従う“概連続観測”として考察することができる。このようにして以下の関係をを得る (可能性 1 を参照)。

$$P(\eta_k = \eta_0; k = 1, \ldots, n-1) \approx 1. \tag{4}$$

このことが統計的手法をより効果的にし、統計的に得られた結果が何らかの実験的な経験と一致することに繋がる。

一方で、可能性 2 の意味において、脳の時間発展を全体的に抑制させるならば、脳の通常の活動は停止してしまうことになる。すなわち、患者が死ぬことを意味する。このことは実体験と矛盾する。さらに、脳の専門家等は、EEG-観測が脳に害を与えないことに納得している [22]。この理由は、数学的な観点からは、EEG-観測の

離散化されたモデルの場合でさえ、対応している作用素の固有空間の構造が非常に複雑と考えられるため、と解釈される。

さらに、自己崩壊と呼ばれるある脳の活動の量子モデルの不可欠な要素について振り返る [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12]。いま、一秒当たり 10^{11} 個以上の自己崩壊が脳の中で起こっており、これらの自己崩壊が観測の効果に似た量子状態の変化を引き起こしていることが知られている。この現象に対応している自己共役作用素は比較的単純なものであるが、より高い次元の固有空間をもつ。その理由のため、より高い次元の固有空間では、どのような種の量子ゼノ効果の修正を観測できるかということを確認するのは興味深い。しかし、本発表では取り扱わない。

2 量子ゼノ効果

既に前節で述べたように、技術的な問題と複雑な計算を避けるために、次元 d の有限次元ヒルベルト空間 H の場合に限定して、考える。さらに、その固有空間の次元が 1 のみの H 上の自己共役作用素 B を考える。すなわち、B は以下で与えられる。

$$B = \sum_k b_k \mathrm{Pr}_{\psi_k}. \tag{5}$$

ただし、$(\psi_k)_{k=1}^d$ は、 H の完全正規直交系 (CONS) とし、$b_k \neq b_j$ $(k \neq j)$ とする。

いま、$V = \left(V_t := e^{ith}\right)_{t \geq 0}$ を量子系の時間発展を表している H 上のユニタリー作用素の半群とする。

次の手続きを考える：時刻 $t_0 = 0$ での量子系の状態 ρ を固定し、$T > 0$ とし、時刻 t_k

$$t_k := \frac{kT}{n} \qquad (k = 1, \ldots, n-1) \tag{6}$$

で時間発展を中断して自己共役作用素 B にしたがった観測を行うものとする。

このことは、時刻 t_1 から始めて等間隔で自己共役作用素 B にしたがった繰返し観測を考えることを意味する。形式的には、これらの観測結果を確率変数 $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ と同一視する。このとき、[10] の定理 3 を使って、容易に以下を確かめることができる。

定理 1

$$P\left(\eta_k = \eta_1; k = 1, \ldots, n-1\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \tag{7}$$

が成立する。

いま、量子ゼノ過程に関して、最後に、時刻 T で自己共役作用素 A に従った観測を加える手続きを行う。このとき、自己共役作用素 B に従った観測結果 $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ を無視すれば、量子ゼノ過程は H 上の自己共役作用素の集合 $S(H)$ 上で振舞う線形チャネル $C_{T,n}$ となり、自己共役作用素 A に従う観測の結果 ξ_n の期待値は以下で与えられる。

$$E\xi_n = tr\left(\rho C_{T,n}(A)\right). \tag{8}$$

チャネル $C_{T,n}$ の定義は以下で与えられる（文献 [10] の第 2 節を参照）:

最初に、 $S(H)$ 上で振舞う線形チャネルを以下のように定義する。

$$
\begin{aligned}
K_t &:= V_t^* A V_t && (t \geq 0;\ A \in S(H)), && (9)\\
W_j(A) &:= \mathrm{Pr}_{\psi_j} A \mathrm{Pr}_{\psi_j} && (j = 1, \ldots, d;\ A \in S(H)), && (10)\\
Q_{(j_s)_{s=1}^{n-1}} &:= W_{j_1} \circ K_{\frac{T}{n}} \circ W_{j_2} \circ K_{\frac{T}{n}} \circ \cdots \circ W_{j_{n-2}} \circ K_{\frac{T}{n}} \circ W_{j_{n-1}} \\
& && (n \geq 2;\ 1 \leq j_1, \ldots, j_{n-1} \leq d). && (11)
\end{aligned}
$$

このとき、チャネル $C_{T,n}$ は以下で与えられる。

$$
C_{T,n} := C_{V,B,T,n} := \sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}} K_{\frac{T}{n}} \circ Q_{(j_s)_{s=1}^{n-1}} \circ K_{\frac{T}{n}}. \tag{12}
$$

いま、ρ を H 上の状態とし、A がその唯一の表現

$$
A = \sum_m z_m \mathrm{Pr}_{H_m}, \tag{13}
$$

によって与えられているとする。すなわち、$(H_m)_m$ は H の直交分解であり、$m \neq r$ ならば $z_m \neq z_r$ である。

また、ξ_n を時刻 T での自己共役作用素 A に従った観測結果とする。このとき、式 (13) より、

$$
\begin{aligned}
tr\left(\rho K_{\frac{T}{n}} \circ Q_{(j_s)_{s=1}^{n-1}} \circ K_{\frac{T}{n}}\left(\mathrm{Pr}_{H_m}\right)\right) = P\left(\xi_n = z_m, \eta_1 = j_1, \ldots, \eta_{n-1} = j_{n-1}\right)& \\
(n \geq 2;\ 1 \leq j_1, \ldots, j_{n-1} \leq d;\ m)& \qquad (14)
\end{aligned}
$$

を得る。このとき、式 (12)、式 (13)、式 (14) より、

$$
\begin{aligned}
tr\left(\rho C_{T,n}(A)\right) &= \sum_m z_m \sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}} tr\left(\rho K_{\frac{T}{n}} \circ Q_{(j_s)_{s=1}^{n-1}} \circ K_{\frac{T}{n}}\left(\mathrm{Pr}_{H_m}\right)\right) \\
&= \sum_m z_m \sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}} P\left(\xi_n = z_m, \eta_1 = j_1, \ldots, \eta_{n-1} = j_{n-1}\right) \\
&= E\xi_n \qquad (15)
\end{aligned}
$$

を得る。このようにして、式 (12) のチャネル $C_{T,n}$ の定義は式 (8) に一致する。

定理 2 各状態 ρ に対して、

$$
tr\left(\rho\, C_{T,n}(A)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} tr\left(\rho\left(\sum_j W_j(A)\right)\right) \quad \left(A \in S(H)\right). \tag{16}
$$

が成立する。

補足 3 量子ゼノ過程において、このチャネル

$$
\hat{C}_{T,n} := \left(\sum_j W_j\right)^{(n-1)\circ} \tag{17}
$$

は以下の作用素 V_t に従った時間発展に関連している。

$$V_t := e^{it_0} = 1_H \quad (t \geq 0), \tag{18}$$

すなわち、自己共役作用素 B に従った繰返し観測のみが行われていることを意味する。

また、

$$\left(\sum_j W_j\right)^{(n-1)\circ} = \sum_j W_j \tag{19}$$

より、定理 *2* を適用すると

$$tr\left(\rho\, C_{T,n}(A)\right) - tr\left(\rho\, \hat{C}_{T,n}(A)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad (A \in S(H)) \tag{20}$$

を得る。このことは、可能性 *2* の意味でどんな時間発展の抑制が起こりえるかを明確にする。

補足 4 $Z_{T,n}(\rho)$ を以下の式 *(21)* によって特徴付けられる状態とする。

$$tr\left(AZ_{T,n}(\rho)\right) = tr\left(\rho C_{T,n}(A)\right) \quad (A \in S(H)) \tag{21}$$

このとき、$Z_{T,n}(\rho)$ は量子ゼノ過程において時刻 T での状態を表している。さらに、観測結果を無視すると自己共役作用素 B に依存した観測は状態 ρ を以下の式 *(22)* によって特徴付けられる状態に推移する。

$$tr\left(W_B(\rho)A\right) = tr\left(\rho \sum_j W_j(A)\right) \quad (A \in S(H)). \tag{22}$$

このとき、定理 *2* は以下のように表される。

$$Z_{T,n}(\rho) \xrightarrow[n\to+\infty]{} W_B(\rho). \tag{23}$$

このため、$W_B(\rho) = \rho$ ならば、

$$Z_{T,n}(\rho) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \rho \tag{24}$$

を得る。たとえば、ρ が自己共役作用素 B の量子状態ならば、式 *(24)* を得る。*(*たとえば、文献 *[10]* の *example A. Turing* を参照*).*

3 定理 2 の証明

次の補助定理は定理 2 の証明において主要な部分である。

補助定理 5 $t > 0,\ j = 1, \ldots, d$ とするとき、以下が成立する。

$$\left(W_j\left(V_{\frac{t}{n}}\right)\right)^n = \left(\mathrm{Pr}_{\psi_j} V_{\frac{t}{n}} \mathrm{Pr}_{\psi_j}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{it\langle\psi_j|h\psi_j\rangle}\mathrm{Pr}_{\psi_j} \tag{25}$$

証明：次元 d の有限ヒルベルト空間 H 上の自己共役作用素 h を考える。このとき、その固有空間の次元が全て 1 であるとすると

$$h = \sum_k a_k \mathrm{Pr}_{\varphi_k} \tag{26}$$

となる。ここで、$(\varphi_k)_{k=1}^d$ は H の CONS である。
　このとき、

$$\mathrm{Pr}_{\psi_j} V_{\frac{t}{n}} \mathrm{Pr}_{\psi_j} = \sum_k e^{i\frac{t}{n}a_k} \mathrm{Pr}_{\psi_j} \mathrm{Pr}_{\varphi_k} \mathrm{Pr}_{\psi_j} \quad (k, j = 1, \ldots, d) \tag{27}$$

であり、簡単な計算より、

$$\mathrm{Pr}_{\psi_j} \mathrm{Pr}_{\varphi_k} \mathrm{Pr}_{\psi_j} \psi = |\langle \varphi_k | \psi_j \rangle|^2 \, \mathrm{Pr}_{\psi_j} \psi \quad (\psi \in H) \tag{28}$$

を示すことができる。すなわち、

$$\mathrm{Pr}_{\psi_j} \mathrm{Pr}_{\varphi_k} \mathrm{Pr}_{\psi_j} = |\langle \varphi_k | \psi_j \rangle|^2 \, \mathrm{Pr}_{\psi_j} \quad (k, j = 1, \ldots, d). \tag{29}$$

式 (29) より、

$$\left\langle \psi_j \middle| \mathrm{Pr}_{\psi_j} \mathrm{Pr}_{\varphi_k} \mathrm{Pr}_{\psi_j} \psi_j \right\rangle = |\langle \varphi_k | \psi_j \rangle|^2 \quad (k, j = 1, \ldots, d) \tag{30}$$

を得る。$1_H = \sum_k \mathrm{Pr}_{\varphi_k}$ より、

$$\sum_k |\langle \varphi_k | \psi_j \rangle|^2 = 1 \quad (j = 1, \ldots, d) \tag{31}$$

であり、さらに、式 (26) と式 (30) より、

$$\langle \psi_j | h\psi_j \rangle = \sum_k a_k |\langle \varphi_k | \psi_j \rangle|^2 \quad (j = 1, \ldots, d) \tag{32}$$

となる。最後に、式 (27) と式 (29) より、

$$\left(\mathrm{Pr}_{\psi_j} V_{\frac{t}{n}} \mathrm{Pr}_{\psi_j} \right)^n = \left(\sum_k e^{i\frac{t}{n}a_k} |\langle \varphi_k | \psi_j \rangle|^2 \right)^n \mathrm{Pr}_{\psi_j} \tag{33}$$

を得る。いま、

$$\alpha_n := n \sum_k \left(e^{i\frac{t}{n}a_k} - 1 \right) |\langle \varphi_k | \psi_j \rangle|^2 \tag{34}$$

とおくと、式 (31) と式 (34) より、

$$\left(\sum_k e^{i\frac{t}{n}a_k} |\langle \varphi_k | \psi_j \rangle|^2 \right)^n = \left(1 + \frac{\alpha_n}{n} \right)^n \tag{35}$$

を得る。このとき、容易に

$$\alpha_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} it \sum_k a_k |\langle \varphi_k | \psi_j \rangle|^2 \tag{36}$$

が成り立つことを示せる。このようにして、式 (36)、式 (35)、式 (33)、式 (32) より、以下が成立することを示すことができる。

$$\left(\mathrm{Pr}_{\psi_j} V_{\frac{t}{n}} \mathrm{Pr}_{\psi_j}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{it\langle\psi_j|h\psi_j\rangle} \mathrm{Pr}_{\psi_j}. \tag{37}$$

W_j の定義より、直ちに、

$$\left(W_j\left(V_{\frac{t}{n}}\right)\right)^n = \left(\mathrm{Pr}_{\psi_j} V_{\frac{t}{n}} \mathrm{Pr}_{\psi_j}\right)^n. \tag{38}$$

以上より、この補助定理は証明された。□

補足 6 補助定理 *5* より、直ちに、

$$\sum_j \left(W_j\left(V_{\frac{t}{n}}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \hat{V}_t \tag{39}$$

が成立する。ただし、

$$\hat{V}_t := e^{it\hat{h}} \tag{40}$$

であり、自己共役作用素 $\hat{h}$ は

$$\hat{h} := \sum_k \langle\psi_k\,|h\psi_k\rangle\,\mathrm{Pr}_{\psi_k} \tag{41}$$

で定義される。

定理 2 の証明:

定理 1 より、

$$\sum_{\exists(k,s)j_k\neq j_s} P\left(\xi = z_m, \eta_1 = j_1, \ldots, \eta_{n-1} = j_{n-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{42}$$

式 (14) より、

$$\sum_{\exists(k,s)j_k\neq j_s} tr\left(\rho K_{\frac{T}{n}} \circ Q_{(j_s)_{s=1}^{n-1}} \circ K_{\frac{T}{n}}\left(\mathrm{Pr}_{H_m}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \tag{43}$$

を得る。さらに、

$$\begin{aligned} Q_{(j)_{s=1}^{n-1}}(D) \;\;=\;\; & \left(\left(\mathrm{Pr}_{\psi_j} V_{\frac{T}{n}} \mathrm{Pr}_{\psi_j}\right)^{n-1}\right)^* W_j(D)\left(\mathrm{Pr}_{\psi_j} V_{\frac{T}{n}} \mathrm{Pr}_{\psi_j}\right)^{n-1} \\ & (D \in S(H); j = 1, \ldots, d)) \end{aligned} \tag{44}$$

が成立することを容易に導くことができる。

式 (44)、補助定理 5、$K_{\frac{T}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1_{S(H)}$ より、

$$tr\left(\rho K_{\frac{T}{n}} \circ Q_{(j)_{s=1}^{n-1}} \circ K_{\frac{T}{n}}\left(\mathrm{Pr}_{H_m}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} tr\left(\rho W_j\left(\mathrm{Pr}_{H_m}\right)\right). \tag{45}$$

いま、式 (15)、式 (43)、式 (45) より、

$$tr\left(\rho C_{T,n}(A)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} tr\left(\rho\left(\sum_j W_j(A)\right)\right) \tag{46}$$

と結論付けることができる。以上より、定理 2 は証明された.。□

補足 7 定理 *2* の証明は、以下で定義される量子ゼノ過程が $S(H)$ 上のユニタリーチャネル $C_{t,\infty}$ と関連していることを示している。

$$C_{t,\infty} := e^{-it\hat{h}} A e^{it\hat{h}} \quad (t \geq 0, A \in S(H)). \tag{47}$$

このとき、以下が成立することを容易に導くことができる。

$$\sum_j W_j \circ C_{t,\infty} = \sum_j W_j. \tag{48}$$

このようにして、$W_B(\rho)$ は $\hat{V} = \left(\hat{V}_t\right)$ に関して不変であると結論付けることができる。すなわち、量子ゼノ過程 *(*定理 *2,* 補足 *4* を参照*)* は、$\rho \to W_B(\rho)$ により、状態の集合から $\hat{V}$-不変状態の集合への写像へと導くものとみなせる。

参考文献

[1] A. Degasperis, L. Fonda and G.C. Ghirardi, Does the lifetime of an unstable system depend on the measuring apparatus?, *Il Nuovo Cimento*, **21 A**, No.3 (1974), 471-484.

[2] K.-H. Fichtner and L. Fichtner, Bosons and a quantum model of the brain, FSU Jena, Faculty of Mathematics and Informatics, Jena, *Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik*, **Math/Inf/08/05** (2005), 27 pages.

[3] K.-H. Fichtner and L. Fichtner, Quantum models of brain activities I - Recognition of signals, In J.C. Garcia, R. Quezada, and S.B. Sontz, editors, Quantum Probability and Related topics, *QP-PQ: Quantum Probability and White Noise Analysis*, **XXIII** (2008), 135-144.

[4] K.-H. Fichtner, L. Fichtner, W. Freudenberg, and M. Ohya, On a mathematical model of brain activities, In Quantum Theory, Reconsideration of Foundations-4, *AIP Conference Proceedings*, **962** (2007), 85-90.

[5] K.-H. Fichtner, L. Fichtner, W. Freudenberg, and M. Ohya, On a quantum model of the recognition process, In L. Accardi, W. Freudenberg, and M. Ohya, editors, Quantum Bio-Informatics, *QP-PQ: Quantum Probability and White Noise Analysis*, **XXI** (2008), 64-84, .

[6] K.-H. Fichtner, L. Fichtner, W. Freudenberg, and M. Ohya, On a quantum model of the brain activities, In L. Accardi, W. Freudenberg, and M. Ohya, editors, Quantum Bio-Informatics III, *QP-PQ:Quantum Probability and White Noise Analysis*, **XXVI** (2010), 81-92.

[7] K.-H. Fichtner, L. Fichtner, W. Freudenberg, and M. Ohya, Quantum models of the recognition process - on a convergence theorem, *Open Systems and Information Dynamics*, **17**, No.2 (2010), 161-187.

[8] K.-H. Fichtner, L. Fichtner, W. Freudenberg, and M. Ohya, Self-collapses of quantum systems and brain activities, In L. Accardi, W. Freudenberg, and M. Ohya, editors, Quantum Bio-Informatics IV, *QP-PQ: Quantum Probability and White Noise Analysis*, **XXVIII** (2011), 101-115.

[9] K.-H. Fichtner, L. Fichtner, K. Inoue, and M. Ohya, Internal noise caused by the memory, *Open Systems and Information Dynamics*, **18**, No.4 (2011), 405-422.

[10] K.-H. Fichtner and K. Inoue, On the quantum Zeno effect and time series related to quantum measurements, *Applied Mathematics*, **4**, No.10C (2013), 61-69.

[11] K.-H. Fichtner and K. Inoue, Time evolution of quantum systems related to the quantum Zeno scheme, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **4**, No.1 (2015), 115-126.

[12] K.-H. Fichtner, K. Inoue, and M. Ohya, On a quantum model of brain activities - distribution of the outcomes of EEG-measurements and random point fields, *Open Systems and Information Dynamics*, **19**, No.4 (2012), 1250025.

[13] P. Facchi, D.A. Lidar and S. Pascazio, Unification of dynamical decoupling and the quantum Zeno effect, *Phys. Rev. A*, **69** (2004), 032314.

[14] R. Hari, O.V. Lounasmaa, Neuromagnetism: tracking the dynamics of the brain, *Physics World*, **13** (2000), 33-38.

[15] S. Hameroff and R. Penrose, Orchestrated objective reduction of quantum coherence in brain microtubules: the "Orch OR" model for consciousness, *Mathematics and Computer Simulation*, **40** (1996), 453-480.

[16] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Germany (1932).

[17] T. Nakanishi, K. Yamane, and M. Kitano, Absorption-free optical control of spin systems: the quantum Zeno effect in optical pumping, *Phys. Rev. A*, **65** (2001), 013404.

[18] R. Penrose, *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds and The Laws of Physics*, Oxford University Press, UK (1989).

[19] B. Misra and E.C.G. Sudarshan, The Zeno's paradox in quantum theory, *J. Math. Phys.*, **18**, No.4 (1977), 756-763.

[20] J.M. Schwartz, H.P. Stapp and M. Beauregard, Quantum physics in neuroscience and psychology: a neurophysical model of mind-brain interaction, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B*, **360**, No.1458 (2005), 1309-1327.

[21] C. Teuscher and D. Hofstadter, *Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker*, Springer-Verlag, Germany (2004).

[22] W. Tirsch, *Biomedizinische Relevanz der quantitativen EEG Analyse*, Shaker Verlag, Germany (2009).

Some recent topics on operator means

山崎　丈明 (東洋大学 理工学部)

Abstract

作用素単調関数の研究は, ヒルベルト空間上の有界線形作用素の研究においてもっとも重要な研究対象の一つとして挙げられ, Loewner による積分表示で特徴づけられている．一方, 作用素単調関数と密接なつながりを持つ作用素平均の理論は, Kubo-Ando によって始められている．作用素平均の理論は, ある条件をみたした作用素単調関数と 1 対 1 対応を持つ事が知られている．最近では, 作用素平均は 2 個の作用素を結ぶ path として考えることにより, 幾何学的な考察を通して研究されるようになってきた．

本講演では, 作用素平均 –特に重みつき作用素平均– に関する最近の話題を紹介する．その背景には, 幾何学的なイメージがあることを紹介する．また, 近年盛んに研究され始めた n 個の作用素平均について, Karcher mean と呼ばれる代表的な幾何平均の定義と特徴づけを紹介する．

1. Introduction

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の集合を $B(\mathcal{H})$, $B(\mathcal{H})_{sa}$ を自己共役作用素の集合とする．$A \in B(\mathcal{H})_{sa}$ が positive semidefinite とは, $\mathcal{H}$ の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いて $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ for all $x \in \mathcal{H}$ と定義する．また, invertible な positive semidefinite 作用素を positive definite という．$B(\mathcal{H})_+$ を positive semidefinite operators, $B(\mathcal{H})_{++}$ を positive definite operators の集合とする．$A, B \in B(\mathcal{H})_{sa}$ に対して, $A - B \in B(\mathcal{H})_+$ のとき, $B \leq A$ と定義する．

$A \in B(\mathcal{H})_{sa}$ については, 自己共役な行列の対角化に相当する, スペクトル分解がよく知られている．これは, $A \in B(\mathcal{H})_{sa}$ に対して spectral measure が存在して,

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda dE_\lambda$$

と表現できることである, ここで, $\sigma(A)$ は A の spectrum とする．このとき, $\sigma(A)$ 上で定義された関数 f を用いて functional calculus $f(A)$ を次のように定義する．

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) dE_\lambda.$$

自己共役作用素の順序について, 作用素単調関数と呼ばれる概念は非常に重要である．

Definition 1 (Operator monotone function)**.** A real-valued function f defined on an interval J is said to be an operator monotone function if and only if for each $A, B \in B(\mathcal{H})_{sa}$ such that $\sigma(A), \sigma(B) \subset J$, $B \leq A$ implies

$$f(B) \leq f(A).$$

作用素単調関数の代表的な例として, $f(x) = x^{\alpha}$ ($\alpha \in [0,1]$) や $f(x) = (\frac{1+x^r}{2})^{\frac{1}{r}}$ ($r \in [-1,1] \setminus \{0\}$) などが知られている. 作用素単調関数は複素上半平面から複素上半平面への複素解析関数へと解析接続をすることができることや, 次の特徴づけが知られている.

Theorem 1.1 ([10])**.** *Let f be a continuous operator monotone function on $[0,\infty)$. Then there exists a positive measure μ on $(0,\infty)$ and $\beta \geq 0$ such that*

$$f(x) = f(0) + \beta x + \int_0^{\infty} \frac{\lambda x}{x+\lambda} d\mu(\lambda), \quad x \in [0,\infty),$$

where

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda}{1+\lambda} d\mu(\lambda) < +\infty.$$

作用素の平均については, Pusz-Woronowicz が $A, B \in B(\mathcal{H})_{++}$ における geometric mean を次のように定義した [13].

$$A \sharp B = A^{\frac{1}{2}} (A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}.$$

これを受けて, [7] では作用素平均の公理が次のように定義された.

Definition 2 (Operator connection, [7])**.** For all $A, B \in B(\mathcal{H})_+$, the binary operation $\mathfrak{M}(A,B) \in B(\mathcal{H})_+$ is called an operator connection if it satisfies the following conditions: For $A, B, C, D \in B(\mathcal{H})_+$ and $X \in B(\mathcal{H})_{sa}$,

(i) $A \leq C$ and $B \leq D$ imply $\mathfrak{M}(A,B) \leq \mathfrak{M}(C,D)$ (joint monotonicity);

(ii) $X\mathfrak{M}(A,B)X \leq \mathfrak{M}(XAX, XBX)$ (transformer inequality);

(iii) if $A_n \downarrow A$ and $B_n \downarrow B$, then $\mathfrak{M}(A_n, B_n) \downarrow \mathfrak{M}(A,B)$ (upper semi-continuity).

Moreover if $\mathfrak{M}(I,I) = I$, then $\mathfrak{M}$ is called an operator mean.

作用素平均と作用素単調関数の間には, 次のような 1 対 1 の関係がある.

Theorem 1.2 ([7])**.** *For each operator connection $\mathfrak{M}$, there exists a unique operator monotone function $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ such that*

$$f(x)I = \mathfrak{M}(I, tI) \quad (t \in (0,\infty)),$$

and for $A \in B(\mathcal{H})_{++}$ and $B \in B(\mathcal{H})_+$, the formula

$$\mathfrak{M}(A,B) = A^{\frac{1}{2}} f(A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}}) A^{\frac{1}{2}},$$

where $I \in B(\mathcal{H})$ means the identity operator. Especially, if $\mathfrak{M}$ is an operator mean, then there exists a unique operator monotone function f such that $f(1) = 1$.

Theorem 1.2 における作用素単調関数 f を作用素結合 $\mathfrak{M}$ の表現関数 (representing function) と呼ぶ. したがって, 全ての作用素結合（作用素平均）は作用素単調関数で特徴づけられる. 作用素平均の典型的な例としては, 次が挙げられる.

Example 1.1 (Examples of operator means)**.** Let $A, B \in B(\mathcal{H})_{++}$ and $t \in [0,1]$. Then the following operator means are well known.

(i) The weighted arithmetic mean is defined by

$$\mathfrak{A}_t(A,B) = (1-t)A + tB,$$

and its representing function is $\mathfrak{a}_t(x) = (1-t) + tx$.

(ii) The weighted geometric mean is defined by

$$\mathfrak{G}_t(A,B) = A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}},$$

and its representing function is $\mathfrak{g}_t(x) = x^t$.

(iii) The weighted harmonic mean is defined by

$$\mathfrak{H}_t(A,B) = \left[(1-t)A^{-1} + tB^{-1}\right]^{-1},$$

and its representing function is $\mathfrak{h}_t(x) = [(1-t) + tx^{-1}]^{-1}$.

(iv) For each $r \in [-1,1] \setminus \{0\}$, the weighted power mean is defined by

$$\mathfrak{P}_{r,t}(A,B) = A^{\frac{1}{2}}\left[(1-t)I + t(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^r\right]^{\frac{1}{r}} A^{\frac{1}{2}},$$

and its representing function is $\mathfrak{p}_{r,t}(x) = [(1-t) + tx^r]^{\frac{1}{r}}$.

特に, weighted power mean は weighted arithmetic mean, weighted geometric mean, weighted harmonic mean を含んでいる. 実際 weighted power mean の representing function において, $r = 1, -1$ を代入すると, weighted arithmetic mean, weighted harmonic mean を得る. また,

$$\lim_{r\to 0}\mathfrak{p}_{r,t}(x) = \lim_{r\to 0}[(1-t) + tx^r]^{\frac{1}{r}} = x^t$$

より, weighted power mean は weighted geometric mean を含んでいることがわかる.

本講演では, 最初に 2 個の作用素による作用素平均 –特に重みつき作用素平均– に関する最近の話題を紹介する. その背景には, 幾何学的なイメージがあることを紹介する. また, 近年盛んに研究され始めた n 個の作用素平均について, Karcher mean と呼ばれる代表的な幾何平均の定義と特徴づけを紹介する.

2. 2 個の作用素の重みつき平均

Definition 2 によって公理的に定義された作用素平均は, Example 1.1 以外にも多くの作用素平均が知られている. 実際, Theorem 1.2 により, 作用素単調関数を考えることで作用素平均をいくらでも作ることができる. しかし, 重みつき平均という視点からすると, 実は Example 1.1 以外の重みつき作用素平均の具体的な例は知られていない. この section では, 任意の作用素平均から重みつき作用素平均を作り出す方法をいくつか紹介する. また, 特に重要な interpolational という性質を紹介する.

最初に, 重みが $t \in [0,1]$ である重みつき作用素平均の定義をしよう.

Definition 3 (t-Weighted operator mean, [15])**.** Let $\mathfrak{M}$ be an operator mean with the representing function $\mathfrak{m}$. $\mathfrak{M}$ is said to be a t-weighted operator mean if and only if $\mathfrak{m}'(1) = t$.

この定義は次の定理から well-defined であることが分かる.

Theorem 2.1 ([12])**.** *Let* $\mathfrak{m}$ *be an operator monotone function satisfying* $\mathfrak{m}(1) = 1$. *Then* $\mathfrak{m}'(1) = t \in [0,1]$.

また, t-weighted operator mean の表現関数は次の性質を持つ.

Theorem 2.2 ([12])**.** *Let* $\mathfrak{m}$ *be an operator monotone function satisfying* $\mathfrak{m}(1) = 1$ *and* $\mathfrak{m}'(1) = t \in [0,1]$. *If* $\mathfrak{m}(x)$ *is not* x *or a constant, then*

$$[(1-t) + tx^{-1}]^{-1} \leq \mathfrak{m}(x) \leq (1-t) + tx$$

holds for all $x > 0$.

平均の素朴なイメージとしては, 2 点の内分点であるが, 重みつきの平均を考えることで, 平均は 2 点を結ぶ path であると考えることができる. 作用素の平均についても同様の考察ができる. $\mathfrak{M}_t$ を t-weighted operator mean, $\mathfrak{m}_t$ をその representing function とする. ここで, $\mathfrak{m}_t(x)$ が $t \in [0,1]$ について連続であれば, Theorem 2.2 より, $\mathfrak{m}_0(x) = 1$, $\mathfrak{m}_1(x) = x$ を得る. すなわち, $A, B \in B(\mathcal{H})_{++}$ に対して,

$$\mathfrak{M}_0(A,B) = A, \quad \mathfrak{M}_1(A,B) = B.$$

よって, 重みつき作用素平均は, 2 個の作用素 A, B を結ぶ path として考えることもできる. これを踏まえて, 以下, 3 通りの重みつき作用素平均の構成方法を紹介しよう.

最初の定義は symmetric operator mean ($\mathfrak{M}(A,B) = \mathfrak{M}(B,A)$ for all $A, B \in B(\mathcal{H})_{++}$) から t-weighted operator mean を構成する方法である. なお, symmetric operator mean は, Theorem 1.2 からその表現関数 $\mathfrak{m}$ が

$$\mathfrak{m}(x) = x\mathfrak{m}(x^{-1}) \quad \text{for all } x > 0$$

を満たすことより, $\mathfrak{m}'(1) = \frac{1}{2}$, すなわち, $\frac{1}{2}$-weighted operator mean であることが分かる.

Definition 4 ([4])**.** Let $\mathfrak{M}$ be a symmetric operator mean. Then for each $t \in [0,1]$, the t-weighted operator mean $\mathfrak{M}_t^{FK}$ is defined by the following procedure: Let $A, B \in B(\mathcal{H})_{++}$. The initial conditions are defined by

$$\mathfrak{M}_0^{FK}(A,B) = A, \quad \mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}^{FK}(A,B) = \mathfrak{M}(A,B), \quad \mathfrak{M}_1^{FK}(A,B) = B.$$

We define $\mathfrak{M}_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}^{FK}(A,B)$ for natural numbers n and k with $2k-1 < 2^{n+1}$ by the following inductive relation

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}^{FK}(A,B) &= \mathfrak{M}\left(\mathfrak{M}_{\frac{k-1}{2^n}}^{FK}(A,B), \mathfrak{M}_{\frac{k}{2^n}}^{FK}(A,B)\right) \\ &= \mathfrak{M}\left(\mathfrak{M}_{\frac{k}{2^n}}^{F}(A,B), \mathfrak{M}_{\frac{k-1}{2^n}}^{F}(A,B)\right).\end{aligned}$$

Symmetric operator mean $\mathfrak{M}(A,B)$ は $\frac{1}{2}$-weighted operator mean であることから, $\mathfrak{M}(A,B)$ は A, B のある種の中点をとっていること考えられる. Definition 4 では, A, B から始めて, 次々に $\mathfrak{M}$ に対応した中点をとることで, $\frac{k}{2^n}$-weighted operator mean を定義している.

Theorem 2.3 (Barbour path, [8])**.** *For each $t \in [0,1]$, Let*

$$\varphi_t(x) = \sqrt{x}\frac{t\sqrt{x} + (1-t)}{t + (1-t)\sqrt{x}}.$$

Then φ_t is an operator monotone function with $\varphi_t(1) = 1$ and

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t(x)\right|_{x=1} = t.$$

Then the operator mean which is represented by φ_t is a t-weighted operator mean. Moreover $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{x}$, $\varphi_1(x) = x$.

Definition 2.3 では, 重みなしの geometric mean を中点として, 端点を上手につないだ path として φ_t を考えることができる. 同様にして, 中点を一般的な作用素平均としたときの t-weighted operator mean 構成方法は [8] で紹介されている. この方法の利点は, t-weighted operator mean の表現関数を, 具体的な式で表現できることである.

Definition 5 ([12])**.** Let $\mathfrak{M}$ be an operator mean with a representing function $\mathfrak{m}$. Let $A, B \in B(\mathcal{H})_{++}$ and $t \in [0,1]$. Let $a_0 = 0$ and $b_0 = 1$, $A_0 = A$ and $B_0 = B$. Define a_n, b_n and A_n, B_n recursively by the following procedure defined inductively for all $n = 0, 1, 2, ...$:

(i) if $a_n = t$, then $a_{n+1} := a_n$ and $b_{n+1} := a_n$, $A_{n+1} := A_n$ and $B_{n+1} := A_n$,

(ii) if $b_n = t$, then $a_{n+1} := b_n$ and $b_{n+1} := b_n$, $A_{n+1} := B_n$ and $B_{n+1} := B_n$,

(iii) if $(1-\mathfrak{m}'(1))a_n + \mathfrak{m}'(1)b_n \le t$, then $a_{n+1} := (1-\mathfrak{m}'(1))a_n + \mathfrak{m}'(1)b_n$ and $b_{n+1} := b_n$, $A_{n+1} := \mathfrak{M}(A_n, B_n)$ and $B_{n+1} := B_n$,

(iv) if $(1-\mathfrak{m}'(1))a_n + \mathfrak{m}'(1)b_n > t$, then $a_{n+1} := a_n$ and $b_{n+1} := (1-\mathfrak{m}'(1))a_n + \mathfrak{m}'(1)b_n$, $A_{n+1} := A_n$ and $B_{n+1} := \mathfrak{M}(A_n, B_n)$.

そして, このプロセスで得られた作用素列 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ はともに同じ作用素に Thompson metric で収束することが次の定理で示されている. $A, B \in B(\mathcal{H})_{++}$ に対して, Thompson metric $d(A,B)$ は次のように定義される.

$$d(A,B) = \max\{\log M(A/B), \log M(B/A)\},$$

where $M(A/B) = \inf\{\alpha > 0 \mid A \le \alpha B\}$. そして, $B(\mathcal{H})_{++}$ は Thompson metric において complete である [14].

Theorem 2.4 ([12])**.** *The sequences $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ given in Definition 5 are convergent and have the same limit point in the Thompson metric.*

Theorem 2.4 で得られた極限を $\mathfrak{M}_t^{PP}(A,B)$ と表すことにする. なお, $\mathfrak{M}_t^{PP}$ について, その representing function を $\mathfrak{m}_t(x)$ とすれば, $\dfrac{\partial}{\partial x}\mathfrak{m}_t(x)|_{x=1} = t$ となることはすぐにわかる. 従って, $\mathfrak{M}_t^{PP}$ は t-weighted operator mean である.

Proposition 2.5 ([12])**.** *Let $\mathfrak{M}$ be an operator mean with a representing function $\mathfrak{m}$, and let $\mathfrak{N}$ be an operator mean. $\mathfrak{M}_t^{PP}(A,B)$ for $A, B \in B(\mathcal{H})_{++}$ and $t \in [0,1]$ fulfills the following properties:*

(i) $\mathfrak{M}_t^{PP}(A,B)$ *is an operator mean,*

(ii) *if $\mathfrak{N}(A,B) \le \mathfrak{M}(A,B)$, then $\mathfrak{N}_t^{PP}(A,B) \le \mathfrak{M}_t^{PP}(A,B)$,*

(iii) $\mathfrak{M}_{f'(1)}^{PP}(A,B) = \mathfrak{M}(A,B)$,

(iv) $\mathfrak{M}_t^{PP}(A,B)$ *is continuous in t.*

Definition 5 による作用素列の極限を用いた t-weighted operator mean の定義はやや複雑だが, 次のことが分かっている.

Proposition 2.6 ([15])**.** *The weighted operator means by Definitions 4 and 5 are the same, i.e.,*

$$\mathfrak{M}_t^{FK}(A,B) = \mathfrak{M}_t^{PP}(A,B)$$

for all symmetric operator means $\mathfrak{M}$, $t \in [0,1]$ and $A, B \in B(\mathcal{H})_{++}$.

以下, 作用素平均 $\mathfrak{M}$ と $t \in [0,1]$ に対して, Definition 5 による t-weighted operator mean を $\mathfrak{M}_t$ と表すことにする. なお, Definition 4 における symmetric という条件は本質的ではない.

次に, weighted operator mean の重要な性質のひとつである interpolational property について紹介しよう.

Definition 6 (Interpolational means, [4]).

(i) For each $t \in [0,1]$, let $\mathfrak{m}_t : (0,\infty)^2 \to (0,\infty)$ be a continuous function. Assume $\mathfrak{m}_t$ is point-wise continuous of functions on $t \in [0,1]$. The family of continuous functions $\{\mathfrak{m}_t\}_{t\in[0,1]}$ is said to be an interpolatinal mean if and only if the following condition is satisfied;

$$\mathfrak{m}_\delta(\mathfrak{m}_\alpha(a,b), \mathfrak{m}_\beta(a,b)) = \mathfrak{m}_{(1-\delta)\alpha+\delta\beta}(a,b)$$

for all $\alpha, \beta, \delta \in [0,1]$ and $a, b \in (0,\infty)$.

(ii) For each $t \in [0,1]$, let $\mathfrak{M}_t$ be a t-weighted operator mean. Assume $\mathfrak{M}_t$ is continuous on $t \in [0,1]$. The family of t-weighted operator means $\{\mathfrak{M}_t\}_{t\in[0,1]}$ is said to be an operator interpolational mean if and only if the following condition is satisfied;

$$\mathfrak{M}_\delta(\mathfrak{M}_\alpha(A,B), \mathfrak{M}_\beta(A,B)) = \mathfrak{M}_{(1-\delta)\alpha+\delta\beta}(A,B)$$

for all $\alpha, \beta, \delta \in [0,1]$ and all $A, B \in B(\mathcal{H})_{++}$.

Interpolational mean の概念は [4] において初めて定義されているが, そこでは作用素に関する定義だけであった. しかし, 次に紹介するように数と作用素の場合では, interpolational mean の特徴づけが異なることから, 数の場合における interpolational mean も定義している. Operator interpolational mean の典型的な例としては, arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean などがすぐにわかる. さらに, それらを含んでいる power mean も operator interpolational mean である. しかしながら, それ以外の具体例は挙がっていなかった.

次に挙げるのは, interpolational mean の特徴づけである.

Theorem 2.7 ([15]). *For each $t \in [0,1]$, let $\mathfrak{m}_t : (0,\infty)^2 \to (0,\infty)$ be a continuous function. Assume that $\mathfrak{m}_t$ is point-wise continuous of functions on $t \in [0,1]$, and is satisfying the following conditions*

(i) $\mathfrak{m}_0(a,b) = a$, $\mathfrak{m}_1(a,b) = b$ *and* $\mathfrak{m}_t(a,a) = a$ *for all* $a, b \in (0,\infty)$ *and* $t \in [0,1]$,

(ii) *if* $\mathfrak{m}_{\frac{1}{2}}(a,b) = a$ *or* b, *then* $a = b$ *for all* $a, b \in (0,\infty)$.

Then the following assertions are equivalent:

(1) $\{\mathfrak{m}_t\}_{t\in[0,1]}$ *is an interpolational mean,*

(2) *there exists a real-valued function* f *defined on* $(0,\infty)$ *such that*

$$\mathfrak{m}_t(a,b) = f^{-1}[(1-t)f(a) + tf(b)]$$

for all $t \in [0,1]$ *and* $a, b \in (0,\infty)$*.*

Corollary 2.8 ([15])**.** *For* $t \in [0,1]$*, let* $\mathfrak{m}_t : (0,\infty)^2 \to (0,\infty)$ *be a real-valued continuous function on each variables satisfying the following condition*

$$[(1-t)a^{-1}+tb^{-1}]^{-1} \le \mathfrak{m}_t(a,b) \le (1-t)a+tb$$

for all $a, b \in (0,\infty)$ *and* $t \in [0,1]$*. Assume that* $\{\mathfrak{m}_t\}_{t\in[0,1]}$ *is point-wise continuous of functions on* $t \in [0,1]$*. Then the following assertions are equivalent:*

(1) $\{\mathfrak{m}_t\}_{t\in[0,1]}$ *is an interpolational mean,*

(2) *there exists a real-valued function* f *defined on* $(0,\infty)$ *such that*

$$\mathfrak{m}_t(a,b) = f^{-1}[(1-t)f(a)+tf(b)]$$

for all $t \in [0,1]$ *and* $a, b \in (0,\infty)$*.*

Operator interpolational mean の特徴づけは, より厳しい条件になっている.

Theorem 2.9 ([15])**.** *For* $t \in [0,1]$*, let* $\mathfrak{M}_t$ *be a* t*-weighted operator mean with the representing function* $\mathfrak{m}_t$*. If* $\{\mathfrak{m}_t\}_{t\in[0,1]}$ *is point-wise continuous of functions on* $t \in [0,1]$ *and*

$$[(1-t)+tx^{-1}]^{-1} \le \mathfrak{m}_t(x) \le (1-t)+tx$$

holds for all $t \in [0,1]$ *and* $x > 0$*, then they are mutually equivalent:*

(1) $\{\mathfrak{M}_t\}_{t\in[0,1]}$ *is an operator interpolational mean,*

(2) *there exists* $r \in [-1,1]$ *such that* $\mathfrak{m}_t(x) = [(1-t)+tx^r]^{\frac{1}{r}}$*, where we consider the case* $r=0$ *as* $\mathfrak{m}_t(x) = x^t$*.*

Operator interpolational mean はかなり強い条件であることがわかったが, これを弱くした次の作用素平均の性質については, まだ研究が始まったばかりである.

Definition 7 (Operator convex mean, [17])**.** For each $t \in [0,1]$, let $\mathfrak{M}_t$ be a t-weighted operator mean. Assume $\mathfrak{M}_t$ is continuous on $t \in [0,1]$. The family of t-weighted operator means $\{\mathfrak{M}_t\}_{t\in[0,1]}$ is said to be an operator convex mean if and only if the following condition is satisfied;

$$\mathfrak{M}_\delta(\mathfrak{M}_\alpha(A,B), \mathfrak{M}_\beta(A,B)) \le \mathfrak{M}_{(1-\delta)\alpha+\delta\beta}(A,B)$$

for all $\alpha, \beta, \delta \in [0,1]$ and all $A, B \in B(\mathcal{H})_{++}$.

もちろん, operator interpolational mean は operator convex mean である.

Proposition 2.10 ([17]). *Let $\mathfrak{M}$ be an operator mean. Assume that $\{\mathfrak{M}_t\}_{t\in[0,1]}$ is an operator convex mean, then*

$$\mathfrak{M}_{(1-\delta)\alpha+\delta\beta}(A,B) \leq (1-\delta)\mathfrak{M}_\alpha(A,B) + \delta\mathfrak{M}_\beta(A,B) \tag{2.1}$$

holds for all $\alpha, \beta, \delta \in [0,1]$ and $A, B \in B(\mathcal{H})_{++}$.

Operator convex mean の特徴づけは, まだ得られていないが, 任意の operator mean が operator convex mean になるとは限らないことがわかっている. たとえば, 表現関数 $\mathfrak{i}(x) = \frac{1}{e}x^{\frac{x}{x-1}}$ で定義される identric mean は operator mean であるが, その t-weighted operator mean の族 $\{\mathfrak{I}_t\}_{t\in[0,1]}$ は operator convex mean ではない. しかしながら, (2.1) を満たさないような t-weighted operator mean の例は, まだ見つかっていない.

2 個の作用素の平均の理論の最後に, 次の結果を紹介しよう.

Theorem 2.11 ([17]). *Let $\mathfrak{M}$ be an operator mean with a representing function $\mathfrak{m}$. Assume that there exists $r \in [-1,1]$ such that*

$$\mathfrak{p}_{r,t}(x) \leq \mathfrak{m}_t(x)$$

for all $t \in [0,1]$ and $x > 0$. Then there exists a probability measure μ on $[0,1]$ such that

$$\mathfrak{m}(x) = \int_0^1 \mathfrak{p}_{r,t}(x)d\mu(t).$$

対数平均は作用素平均であり, その表現関数は $\mathfrak{l}(x) = \frac{x-1}{\log x}$ である. よく知られているように,

$$\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{x} \leq \frac{x-1}{\log x} = \int_0^1 x^t dt = \mathfrak{l}(x)$$

であるが,

$$\lim_{r\to 0}\mathfrak{p}_{r,t}(x) = \lim_{r\to 0}[(1-t)+tx^r]^{\frac{1}{r}} = x^t$$

より, Theorem 2.11 はその一般化であることが分かる.

3. n 個の作用素の平均

2 個の作用素の平均の理論については, [7] で公理的に定義されたが, これを n 個の作用素の平均へと拡張する試みは, 長い間問題となっていた. 実際, Theorem 1.2 における作用素平均の具体的な表現の仕方や, その表現関数は容易に n 個の作用素の平均へと拡張出来ない. この問題に対して, 10 個の良い性質を持つ, n 個の行列に対する幾何平均が初めて [1] で定義された. この 10 個の良い性質とは, 現在では ALM properties と呼ばれ, n 個の作用素の幾何平均を考察する上で, 重要な性質とされている. 以下, ALM properties を紹介しよう. n を自然数とする.

$\mathbb{A}=(A_1,...,A_n)\in B(\mathcal{H})^n_{++}$, $\mathbb{B}=(B_1,...,B_n)\in B(\mathcal{H})^n_{++}$, $\omega=(w_1,...,w_n)\in(0,1)^n$ such that $\sum_{i=1}^n w_i=1$ とする．また，$\mathfrak{G}(\omega;\mathbb{A})$ を重みパラメータ ω に対する n 個の作用素 $A_1,...,A_n$ の geometric mean とする（以下の ALM properties を満たす n 個の作用素の geometric mean の定義はいくつかあるが，そのうちの一つを後で紹介する．）

ALM properties

(1) If $\{A_1,...,A_n\}$ is commutative, then

$$\mathfrak{G}(\omega;\mathbb{A})=\prod_{i=1}^n A_i^{w_i}.$$

(2) For each $c_i>0$ $(i=1,2,...,n)$,

$$\mathfrak{G}(\omega;c_1A_1,...,c_nA_n)=\prod_{i=1}^n c_i^{w_i}\mathfrak{G}(\omega;\mathbb{A}).$$

(3) For each permutation σ on $\{1,2,...,n\}$,

$$\mathfrak{G}(w_{\sigma(1)},...,w_{\sigma(n)};A_{\sigma(1)},...,A_{\sigma(n)})=\mathfrak{G}(\omega;\mathbb{A}).$$

(4) If $A_i\le B_i$ for all $i=1,2,...,n$, then

$$\mathfrak{G}(\omega;\mathbb{A})\le\mathfrak{G}(\omega;\mathbb{B}).$$

(5) $\mathfrak{G}(\omega;\mathbb{A})$ is continuous in each A_i $(i=1,2,...,n)$.

(6) For each invertible $X\in B(\mathcal{H})$,

$$X^*\mathfrak{G}(\omega;\mathbb{A})X=\mathfrak{G}(\omega;X^*A_1X,...,X^*A_nX).$$

(7) For $\lambda\in[0,1]$,

$$(1-\lambda)\mathfrak{G}(\omega;\mathbb{A})+\lambda\mathfrak{G}(\omega;\mathbb{B})\le\mathfrak{G}(\omega;(1-\lambda)\mathbb{A}+\lambda\mathbb{B}).$$

(8) $\mathfrak{G}(\omega;A_1^{-1},...,A_n^{-1})^{-1}=\mathfrak{G}(\omega;\mathbb{A})$.

(9) If A_i are matrices with same size, then

$$\det\mathfrak{G}(\omega;\mathbb{A})=\prod_{i=1}^n(\det A_i)^{w_i}.$$

(10)

$$\left[\sum_{i=1}^n w_iA_i^{-1}\right]^{-1}\le\mathfrak{G}(\omega;\mathbb{A})\le\sum_{i=1}^n w_iA_i.$$

この ALM properties を満たす n 個の作用素の幾何平均は現在のところ [1], [3], [5], [2] において定義された 3 種類の幾何平均が知られている. 特に [2] で定義された幾何平均は least square mean, Riemannian geometric mean, Karcher mean などと呼ばれ, 最近多くの研究者によって研究されている. Karcher mean は, 最初 [2] で定義されたが, それは行列の場合であった. その後, [11] で異なる特徴づけが得られて, それが一般の positive invertible な線形作用素のケースでも定義できることが [9] で示された. 以下, [9] で定義されたものを紹介する.

Definition 8 (Karcher mean, [11], [9])**.** For a natural number n, let $\mathbb{A} = (A_1, ..., A_n) \in B(\mathcal{H})^n_{++}$ and $\omega = (w_1, ..., w_n) \in (0, 1)^n$ such that $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Then the Karcher mean $\Lambda(\omega; \mathbb{A})$ is defined by the unique positive invertible solution of the following operator equation:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \log X^{\frac{-1}{2}} A_i X^{\frac{-1}{2}} = 0.$$

Karcher mean は行列の場合, 次のように定義することも出来る. 同じサイズの positive definite matrices A, B に対して,

$$\delta(A, B) = \| \log A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}} \|_2$$

とする. ここで, $\|X\|_2 = \sqrt{\mathrm{trace} X^* X}$ とする. δ を Riemannian metric という.

Definition 9 (Karcher mean, [2])**.** For a natural number n, let $\mathbb{A} = (A_1, ..., A_n)$ be a tuple of n-positive definite matrices with same size, and $\omega = (w_1, ..., w_n) \in (0, 1)^n$ such that $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Then the Karcher mean $\Lambda(\omega; \mathbb{A})$ is defined by the argument minimum of the following square sum, i.e.,

$$\Lambda(\omega; \mathbb{A}) = \underset{X \in B(\mathcal{H})_{++}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n} w_i \delta(X, A_i)^2,$$

where "argmin$f(x)$" means the point x stands for the minimum value of $f(x)$.

行列の場合は, 上記 2 種類の定義によって, 同一の Karcher mean が定義できる. 一般の作用素においては, 2 番目のような定義は今のところ知られていない. さらに, [6] において, Karcher mean の第 3 の特徴づけとして次の no dice theorem と呼ばれる定理が知られている.

Theorem 3.1 (No dice theorem, cf. [6])**.** *Let $\mathbb{A} = (A_1, ..., A_n)$ be a tuple of n-positive definite matrices. Define a sequence $\{X_k\}$ as*

$$X_1 = A_1, ..., X_n = A_n, X_{n+1} = A_1, X_{n+2} = A_2, ...$$

and let $\{S_n\}$ *be a sequence defined by*

$$S_1 = X_1, S_n = X_{n-1} \sharp_{\frac{1}{n}} X_n.$$

Then $\lim_{n\to\infty} S_n = \Lambda(\omega; \mathbb{A})$*, where* $\omega = (\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}) \in (0,1)^n$.

[1] や [3], [5] で定義された幾何平均は上記のような幾何学的や方程式による特徴づけは持っておらず, すべて帰納的な定義によっている. また, 次の定理は Karcher mean だけが持っている性質である.

Theorem 3.2 ([16])**.** *Let* $\mathbb{A} = (A_1, ..., A_n) \in B(\mathcal{H})_{++}$ *and let* $\omega = (w_1, ..., w_n) \in (0,1)^n$*. If* $\sum_{i=1}^{n} w_i \log A_i \leq 0$*, then* $\Lambda(\omega; \mathbb{A}) \leq I$.

Theorem 3.3 ([16])**.** *Let* $\mathbb{A} = (A_1, ..., A_n) \in B(\mathcal{H})_{++}$ *and let* $\omega = (w_1, ..., w_n) \in (0,1)^n$*. If* $\Lambda(\omega; \mathbb{A}) \leq I$*, then* $\Lambda(\omega; A_1^p, ..., A_n^p) \leq I$ *holds for all* $p \geq 1$.

References

[1] T. Ando, C.K. Li and R. Mathias, *Geometric means*, Linear Algebra Appl., **385** (2004), 305–334.

[2] R. Bhatia and J. Holbrook, *Riemannian geometry and matrix geometric means*, Linear Algebra Appl., **413** (2006), 594–618.

[3] D. Bini, B. Meini and F. Poloni, *An effective matrix geometric mean satisfying the Ando-Li-Mathias properties*, Math. Comp., **79** (2010), 437–452.

[4] J.I. Fujii and E. Kamei, *Uhlmann's interpolational method for operator means*, Math. Japon., **34** (1989), 541–547.

[5] S. Izumino and N. Nakamura, *Geometric means of positive operators II*, Sci. Math. Jpn., **69** (2009), 35–44.

[6] J. Holbrook, *No dice: a deterministic approach to the Cartan centroid*, J. Ramanujan Math. Soc., **27** (2012), 509–521.

[7] F. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann., **246** (1980), 205–224.

[8] F. Kubo, N. Nakamura, K. Ohno and S. Wada, *Barbour path of operator monotone functions*, Far East J. Math. Sci., **57** (2011), 181–192.

[9] J. Lawson and Y. Lim, *Karcher means and Karcher equations of positive definite operators*, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B, **1** (2014), 1–22.

[10] K. Löwner, *ber monotone Matrixfunktionen*, Math. Z., **38** (1934), 177–216.

[11] M. Moakher, *A differential geometric approach to the geometric mean of symmetric positive-definite matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., **26** (2005) 735–747.

[12] M. Pálfia and D. Petz, *Weighted multivariable operator means of positive definite operators*, Linear Algebra Appl., **463** (2014), 134–153.

[13] W. Pusz and S.L. Woronowicz, *Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map*, Rep. Math. Phys., **8** (1975), 159–170.

[14] A.C. Thompson, *On certain contraction mappings in a partially ordered vector space*, Proc. Amer. Math. Soc., **14** (1963), 438–443.

[15] Y. Udagawa, T. Yamazaki and M. Yanagida, *Some properties of weighted operator means and characterizations of interpolational means*, submitted.

[16] T. Yamazaki, *The Riemannian mean and matrix inequalities related to the Ando-Hiai inequality and chaotic order*, Oper. Matrices, **6** (2012), 577–588.

[17] T. Yamazaki, Preprint.

Takeaki Yamazaki, Department of Electrical, Electronic and Communications Engineering,, Faculty of Science and Engineering,, Toyo University, 2100, Kujirai, Kawagoe-shi, Saitama 350-8585, Japan

E-mail address: t-yamazaki@toyo.jp