第54回実函数論・函数解析学
合同シンポジウム
講演集

期日： 2015年9月2日(水) – 9月4日(金)

会場： 神奈川大学 横浜キャンパス

まえがき

本講演集は 2015 年 9 月 2 日 (水) から 9 月 4 日 (金) までの 3 日間にわたり, 神奈川大学の横浜キャンパスで開催される第 54 回実函数論・函数解析学合同シンポジウムの講演集です.

本シンポジウムの開催のために多くの方々にご協力をいただきましたが, 関係者皆様のご尽力によって, 講演者の方々の素晴らしい論文を本講演集で発表することができました. 各グループの責任者の方々, 講演者の皆様, 本シンポジウム参加者の皆様方に深く感謝いたします.

また, 特に会場責任者の山崎教昭先生をはじめとする神奈川大工学部の皆様には大変お世話になりました. ここに深く感謝の意を表します.

なお, 本シンポジウムの講演集の作成及び会場運営費等は, 下記の科学研究費補助金 (代表者名の五十音順で記載) の援助を受けています.

基盤研究 (C) (代表 山崎 教昭) 研究課題番号: 26400179
「結晶粒界運動に関連する自由境界問題の数学解析と発展」

基盤研究 (C) (代表 横田 智巳) 研究課題番号: 25400119
「準線形退化型ケラー・シーゲル系と複素ギンツブルク・ランダウ型方程式の研究」

中野 史彦 (学習院大学・理学部)
横田 智巳 (東京理科大学・理学部)

第54回実函数論・函数解析学合同シンポジウム
プログラム

期日: 2015年9月2日(水) – 9月4日(金)
会場: 神奈川大学 横浜キャンパス 3号館2階205講堂
〒221-8686 神奈川県横浜市神奈川区六角橋3-27-1
http://www.kanagawa-u.ac.jp/aboutus/facilities/yokohama/

9月2日(水)

13:30–14:30 曽布川 拓也 (早稲田大学・グローバルエデュケーションセンター)
"関数空間の実補間理論とMorrey空間の一般化"

14:45–15:45 酒匂 宏樹 (新潟大学・工学部)
"逆正弦則と直交多項式の漸近挙動"

16:00–17:00 阿部 敏一 (新潟大学・工学部)
"単位的C*-環の正凸錐上のジャイロ構造とその応用"

9月3日(木)

9:30–10:30 菊池 万里 (富山大学大学院・理工学研究部)
"弱空間に於けるマルチンゲール不等式"

10:45–11:45 植木 誠一郎 (茨城大学・工学部)
"Fock空間の微分作用による特徴付けと積分作用素"

13:45–14:45 入山 聖史 (東京理科大学・理工学部)
"非可換代数を用いた暗号系と擬似乱数生成アルゴリズムについて"

15:00–16:00 岡田 靖則 (千葉大学大学院・理学研究科)
"On the unique solvability and the reversibility of coupling equations"

16:15–17:15 伊藤 真吾 (北里大学・一般教育部)
"波束変換による波面集合の特徴付けについて"

懇親会: 18:00–20:00
会場: 神奈川大学 横浜キャンパス 1号館8階806会議室

9月4日 (金)

9:30–10:30 田中 雄一郎 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)
“球多様体への可視的作用とその応用について”

10:45–11:45 中島 秀斗 (九州大学大学院・数理学研究院)
“等質錐の基本相対不変式に付随する一般化された b-関数”

開催責任者: 中野 史彦 (学習院大・理)
横田 智巳 (東京理科大・理)
会場責任者: 山崎 教昭 (神奈川大・工)

目次

関数空間の実補間理論と Morrey 空間の一般化 *

曽布川拓也 (早大 GEC)

1 関数空間の実補間理論

1.1 実補間空間とは

$1 \leq p_0 \leq p \leq p_1 \leq \infty$ とする。任意の $f \in L^p(\Omega, \mu)$ に対して f は L^{p_0} と L^{p_1} の元の和で表すことが出来る。実際,

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & (|f(x)| > 1) \\ 0 & (|f(x)| \leq 1) \end{cases} \qquad f_1(x) = f(x) - f_0(x) \tag{1.1}$$

と定めてやれば、$f = f_0 + f_1$, $f_i \in L^{p_i}$ $(i = 0, 1)$ とわかる。従って L^p は L^{p_0} と L^{p_1} の「混合状態」であると言える。しかしこれだけでは p の違いまでは判別できない。これがどのように「混合」しているかを考えるために、次のような加重平均を取ることにする。

定義 1.1. $f \in L^{p_0} + L^{p_1}$ とする。$0 < t < \infty$ に対して

$$K(t, f : L^{p_0}, L^{p_1}) = \inf\left\{ \|f_0\|_{L^{p_0}} + t\|f_1\|_{L^{p_1}} \,\middle|\, f = f_0 + f_1,\ f_i \in L^{p_i},\ i = 0, 1 \right\} \tag{1.2}$$

さらに $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ に対して

$$\|f\|_{\theta,q} = \left[\int_0^\infty \left(\frac{K(t, f : L^{p_0}, L^{p_1})}{t^\theta} \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} \tag{1.3}$$

と定める。$\|f\|_{\theta,q} < \infty$ となる $f \in L^{p_0} + L^{p_1}$ 全体の集合を, $K_{\theta,q}(L^{p_0}, L^{p_1})$ で表し、L^{p_0} と L^{p_1} の実補間空間と呼ぶ [1]。

各 $t > 0$ に対して $K(t, \cdot : L^{p_0}, L^{p_1})$ は $L^{p_0} + L^{p_1}$ 上のノルムを定めるが、それらは同値である。そこでこれらに重みをつけて平均したのがこのノルムである。定義の形から $\|f\|_{\theta,q}$ は $K_{\theta,q}(L^{p_0}, L^{p_1})$ 上のノルムになることがわかる。

---

*本講演は茨城大学理学部・中井英一氏との共同研究を基にしたものであり、科学研究費補助金　基盤研究 (C), No. 24540159 (代表：中井英一) の補助による。

[1] 実補間空間にはこの K 関数を用いる方法の他にいくつかのものが知られ、またそれらの相互関係なども研究されている。またこのような「加重平均」ではなく, ベクトル値解析関数を用いて定義された複素補間空間と呼ばれるものも良く知られている。本稿ではこの K 実補間空間を単に補間空間と呼ぶことがある。

1.2 補間空間の特徴付け

このようにして定義された補間空間 $K_{\theta,q}(L^{p_0}, L^{p_1})$ が具体的にどういう空間になっているのかが次の問題となる。ここでは特に $p_0 = 1$, $p_1 = \infty$ のケースを考える。

命題 1.2. $f \in L^1 + L^\infty$ および $t > 0$ に対して,

$$K(t, f : L^1, L^\infty) = \int_0^t f^*(s) ds \tag{1.4}$$

である。ここで

$$f^*(s) = \inf\{\lambda > 0 : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}) \le s\} \tag{1.5}$$

であり、f の非増加並べ替え *non-increasing rearrangement* と呼ばれる。

Proof. 方針のみを記す。K 関数の定義は最後に下限を取るので, f の分解は

$$f = f_0 + f_1, \quad f_1(x) = \begin{cases} f(x) & (|f(x)| \le \lambda) \\ \lambda \dfrac{f(x)}{|f(x)|} & (|f(x)| > \lambda) \end{cases}, \qquad \lambda > 0 \tag{1.6}$$

という形にするべきである。このとき

$$\|f_0\|_{L^1} + t\|f_1\|_{L^\infty} = \int_{\{s:\, f^*(s) > \lambda\}} (f^*(s) - \lambda)\, ds + \int_0^t \lambda ds \tag{1.7}$$

となる。λ を $\lambda = f^*(t)$ となるように取るとこの下限が達成されることがわかる。 □

これを用いると実補間空間 $K_{\theta,q}(L^1, L^\infty)$ が次のように特徴付けられる。

定理 1.3. $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{1} + \dfrac{\theta}{\infty}$ とする。このとき

$$\|f\|_{K_{\theta,q}(L^1, L^\infty)} \approx \left[\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q} \tag{1.8}$$

である。特に $p = q$ のとき, ノルム同値の意味で $K_{\theta,p}(L^1, L^\infty) = L^p(\Omega, \mu)$ とわかる。

Proof. $f^*(t)$ が t について非増加関数であることから, $tf^*(t) \le K(t, f)$ である。これを用いて $K_{\theta,p}(L^1, L^\infty) \subset L^p(\Omega, \mu)$ を得る。逆向きは, Hardy 作用素 $\phi \longrightarrow \frac{1}{t}\int_0^t \phi(s) ds$ の L^q 有界性を用いる ([2] Chapter III Lemma 3.9)。 □

この結果を受けて次の関数空間を定義する。

定義 1.4. $1 \le p, q \le \infty$ とする。測度空間 (Ω, μ) 上の可測関数で

$$\begin{aligned} &\left[\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q} < \infty \quad (q < \infty) \\ &\sup_{0<t<\infty} (t^{1/p} f^*(t) < \infty \quad (q = \infty) \end{aligned} \tag{1.9}$$

を満たすもの全体を $L^{p,q}(\Omega, \mu)$ と表し, *Lorentz* 空間と呼ぶ。

(1.9) の左辺の値は $1 \le q \le p < \infty$ および $p = q = \infty$ のとき Lorentz 空間 $L^{p,q}$ のノルムを定める。それ以外のケースでも同値なノルムが存在し, それは完備になることが知られている。

Lorentz 空間の pair に対して補間空間が特徴づけられる [2]。

定理 1.5. $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1, q \le$, $p_0 \ne p_1$ とする。$0 < \theta < 1$ に対して $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$ のときノルム同値の意味で

$$K_{\theta,q}(L^{p_0,q_0}, L^{p_1,q_1}) = L^{p,q} \tag{1.10}$$

である。

特に $p_0 = q_0 = 1$, $p_1 = q_1 = \infty$ とおけば定理 1.3 を得る。

ここで特筆すべきは次の性質である。

注意 1. この補間空間は q_0, q_1 の値によらずに決まる。

L^p および Lorentz 空間以外にも、Sobolev 空間, Besov 空間など色々な関数空間の pair に対してその実補間空間の具体的な特徴付けが知られている ([3] 定理 6.4.5.[3])。

1.3 補間空間における有界性定理

そもそもこのような補間空間を考える目的は, 次の有界性定理である。

定理 1.6. (A_0, A_1) と (B_0, B_1) をそれぞれノルム空間の *pair* とする。線形作用素 T が $A_i \longrightarrow B_i$ 有界 $(i = 0, 1)$ であるならば T は $K_{\theta,q}(A_0, A_1) \longrightarrow K_{\theta,q}(B_0, B_1)$ 有界である

Proof. T の $A_i \longrightarrow B_i$ の作用素ノルムをそれぞれ M_i $(i = 0, 1)$ とする。$a \in K_{\theta,q}(A_0, A_1) \subset A_0 + A_1$ が $a = a_0 + a_1$, $a_i \in A_i$, $(i = 0, 1)$ という分解に対して T の線形性から, Ta の 1 つの分解 $Ta = T(a_0 + a_1) = Ta_0 + Ta_1 \in B_0 + B_1$ が得られる。すると

$$\begin{aligned} K(t, Ta : B_0, B_1) &\le \|Ta_0\|_{B_0} + t\|Ta_1\|_{B_1} \\ &\le M_0\|a_0\|_{A_0} + tM_1\|a_1\|_{A_1} \le \max(M_0, M_1)\left(\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}\right) \end{aligned}$$

となる。$a = a_0 + a_1$ の分割は任意なので, 右辺で下限を取れば

$$K(t, Ta : B_0, B_1) \le CK(t, a : A_0, A_1)$$

を得る。両辺を q 乗して積分することによって結論を得る。 □

補間理論による有界性定理は、作用素の知られている有界性から新しい有界性を導き出す定理であり、非常に強力なツールであるといえる。応用例を 2 つ挙げる

[2] 本来は「両立対」という概念を導入すべきであるが, 煩雑になるので本稿では pair という表現をすることとする。

[3] この本はずいぶん古く, 長らく絶版であったが, 現在は Springer のサイトから入手できる。未だにこれを超える簡潔なテキストは見当たらない

例 1.7. *Fourier*変換は$L^1 \longrightarrow L^\infty$ 有界かつ L^2 有界である。これを補間すれば, $L^{1.5} \longrightarrow L^3$ を得る。実際, 定理 *1.3* から

$$(L^1, L^2)_{\frac{2}{3},\frac{3}{2}} = (L^{1,1}, L^{2,2})_{\frac{2}{3},\frac{3}{2}} = L^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}} = L^{1.5}$$
$$(L^\infty, L^2)_{\frac{2}{3},\frac{3}{2}} = (L^{\infty,\infty}, L^{2,2})_{\frac{2}{3},\frac{3}{2}} = L^{3,\frac{3}{2}} \subset L^{3,3} = L^3$$

となり, 定理 *1.6* を適用すればよい。

例 1.8. *Hardy-Littlewood* の極大作用素

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \tag{1.11}$$

は $L^1 \longrightarrow L^{1,\infty}$ 有界 *(*いわゆる弱 $(1,1)$ 型*)* かつ L^∞ 有界である。これを補間すれば L^p 有界性 $(1 < p \leq \infty)$ を得る。

注意 2. *Hardy-Littlewood* の極大作用素は加法的ではなくそれより弱い劣加法性

$$|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)| \tag{1.12}$$

だけをもつ。実際にはこれだけ仮定して定理 *1.6* を証明するのは困難である。そこで我々は, 作用素 T にさらに次の条件をつけ加えて有界性定理を証明した *([14])* [4]。

$$|Tf(x) - Tg(x)| \leq C|T(f-g)(x)| \quad (C > 0 \text{ は } f,\, g \text{ に依らない定数}) \tag{1.13}$$

実函数論で扱う多くの劣線形作用素, 特に §*5* で扱う作用素はこの性質を満たす。

2 Morrey 空間と Campanato 空間

2.1 Morrey 空間・Campanato 空間の定義

まずよく知られた Morrey 空間の定義を見直すことにする。

定義 2.1. $= \mathbb{R}^n$ 上, $Q(x,r)$ を中心 x，半径 r の球（*or* 立方体）とするとき

$$\sup_{r>0,\, x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{r^\lambda} \left(\frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y)|^p\, dy \right)^{1/p} < \infty \tag{2.1}$$

を満たす関数 f の全体を *Morrey* 空間 $L_{p,\lambda}$ とよぶ。

このノルムの定義を丁寧に見直してみると

1. 関数 f の値の大きさをローカルに $(Q(x,r)$ という範囲で$)L^p$ ノルムで測る
2. 関数の値の様子を知ることが目的なので, $Q(x,r)$ の大きさに依らないようにその測度 $|Q(x,r)|$ で割って標準化した L^p ノルムにする

[4] このことは良く知られたことのようであるが, なかなかきちんと書いた文献が見当たらない。たとえば山崎昌男：2010 年度調和解析セミナー報告集 ([13]) に述べられている。

3. $Q(x,r)$ の半径 r が小さければ、よりローカルな性質を詳しく見ることになる。そこで r の冪で割る。その冪が大きければ, 中心 x の近辺での f の挙動を細かく見ることになる。

4. 半径の取り方, 中心の取り方のすべての場合を考慮する (上限を取る)

という構造になっていることがわかる。ここでは最初に関数 f を L^p ノルムで局所的に測っているが, それを次のように弱 L^p(セミ) ノルムに変えたものも考えられる。

定義 2.2. 関数 f で

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}(U)} = \sup_{Q(x,s)\subset U} \frac{1}{s^\lambda} \left(\frac{1}{|Q(x,s)|} \sup_{t>0} t^p \left| \{y \in Q(x,s) : |f(y)| > t\} \right| \right)^{1/p} < \infty \tag{2.2}$$

を満たすもの全体を, 弱 *Morrey* 空間 $WL_{p,\lambda}$ とよぶ。

これらは, 局所的に関数の値の発散の様子を調べ、それを全体でまとめていることになるが、振動するような関数の変動の様子を知るためには次のような見方の方が相応しいとも言える。

定義 2.3. 関数 f で

$$\sup_{r>0,\, x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{r^\lambda} \left(\frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y) - f_Q|^p \, dy \right)^{1/p} < \infty \tag{2.3}$$

を満たすもの全体を, *Campanato* 空間 $\mathfrak{L}_{p,\lambda}$ とよぶ。ただし,

$$f_Q = \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} f(y)\, dy$$

である。

これも Morrey 空間と同様に見直してみると

1. “ 平均 ” f_Q に対して “ 偏差 ” $|f(y) - f_Q|$ を考え,

2. その “ 分散 ” (もしくは p 次モーメント, $p = 2$ のときが確率論や統計学で言う分散に相当する) をとり

3. Morrey 空間と同様に球の半径の冪で割って, 全体で見る

となっている。なおこの量は、関数に定数を加えても値が変わらず, セミノルムとなる。

Morrey 空間と Campanato 空間については次の性質がよく知られている。

$$\begin{array}{ll}
\lambda = -n/p \text{ のとき} & L_{p,\lambda} = L^p \\
-n/p \le \lambda < 0 \text{ のとき} & \mathfrak{L}_{p,\lambda}/\mathfrak{C} = L_{p,\lambda} \\
\lambda = 0 \text{ のとき} & \mathfrak{L}_{p,\lambda} = \mathrm{BMO} \\
0 < \lambda \le 1 \text{ のとき} & \mathfrak{L}_{p,\lambda} = \mathrm{Lip}(\lambda)
\end{array}$$

2.2 Morrey 空間の非補間定理

Morrey 空間は， 関数の局所的な性質と大域的な性質を組み合わせて考えるという意味で, たとえば Sobolev 空間に取って代わるようなものとして偏微分方程式論などで多くの応用が考えられている。2 つの指数を持つ関数空間であるから, Sobolev 空間と同様の補間定理が成り立つことが期待されるが、20 世紀末に次の否定的な結果が知られている ([5])。

定理 2.4. $1 < p_0 < p_1 < \infty$, $\lambda = \dfrac{1}{p_1}$, とする。このとき, ある $1 < q_0 < q_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$ に対して線形作用素 T で, $L_{p_i,\lambda} \longrightarrow L^{q_i} \quad (i = 0, 1)$ で有界であるが,

$$L_{p,\lambda} \longrightarrow L^q, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}\frac{1-\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0}\frac{1-\theta}{q_1}, \tag{2.4}$$

の有界性を持たないものが存在する。

補間定理の本来の目的は有界性定理である。それが成り立たないということは, 補間理論が成立しないということを意味する。Morrey 空間の 2 番目の指数 λ は単なるウェイトのようであるから，それを固定すればおよそ L^p のようなものと思われ, 当然補間定理が成り立つものと思われたが, この結果は当時予想外のものであった。近年, この問題に対して様々なアプローチによってその全貌が明らかになってきた [5]。

本稿は中井英一と筆者によるその 1 つのアプローチについての報告である。

3 原点の周りの関数の挙動と Morrey-Campanato 型空間

前節で見たように, Morrey ノルムや Campanato セミノルムは局所的に関数の様子を調べ, 空間全体でそれを見る」という形になっている。歴史的にはこれとは別に、またこれに関連して、原点中心に限定した形で Morrey-Campanato 型の色々な関数空間が考えられている。

3.1 Beurling algebra A^p の dual B^p

Beurling が一般調和解析 (Wiener 変換の解析) のために導入した関数環 A^p の双対空間 B^p は次のようなノルムを持つ空間であるとみることができる ([4])。

$$\|f\|_{B^p} = \sup_{r \geq 1} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{3.1}$$

ここで $Q_r = Q(0, r)$ である。

[4]非補間定理という訳語は決して良い訳語ではない。原語は Non-interpolation in Morrey spaces である ([5])。

[5]筆者らによるこの研究が進展するのとほとんど同じ時期に, P. Lemarie-Rieusset が Morrey 空間において複素補間定理が成り立つための必要十分条件を求めている ([11])。また, V.Burenkov のグループは我々の研究と同じような形で、しかし少し違った方向で Morrey 空間を一般化して補間理論を構築している ([7] ほか)。

球の半径が 1 以上であることはそれほど本質的でないが, これと類似の Homogeneous type のノルム

$$\|f\|_{\dot{B}^p} = \sup_{r>0} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{3.2}$$

はまた新しい関数空間をもたらす。これは Morrey ノルムの定義において, 球の中心 x を原点に固定, $\lambda = 0$ としたものとみなすことが出来る。当然, $\lambda > 0$ に対応する

$$\|f\|_{B^{p,\lambda}} = \sup_{r\geq 1} \frac{1}{r^\lambda} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

$$\|f\|_{\dot{B}^{p,\lambda}} = \sup_{r>0} \frac{1}{r^\lambda} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

も考えら, その性質が研究されている ([1])。

3.2 CMO^p, CBMO^p

Campanato セミノルムを同じように原点中心で見直したのが次のセミノルムである

$$\|f\|_{\mathrm{CMO}^p} = \sup_{r\geq 1} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(x) - f_{Q_r}|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{3.3}$$

これに対応する Homogeneous type セミノルムが

$$\|f\|_{\mathrm{CBMO}^p} = \sup_{r>0} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(x) - f_{Q_r}|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{3.4}$$

さらに $\lambda > 0$ に対して,

$$\|f\|_{\mathrm{CMO}^{p,\lambda}} = \sup_{r\geq 1} \frac{1}{r^\lambda} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(x) - f_{Q_r}|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{3.5}$$

$$\|f\|_{\mathrm{CBMO}^{p,\lambda}} = \sup_{r>0} \frac{1}{r^\lambda} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(x) - f_{Q_r}|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{3.6}$$

といったノルム・セミノルムによる空間も研究されている ([8], [1]) 。

3.3 関数空間 $B_\sigma(E)$

前 2 節で挙げた関数空間のノルムは, その歴史的な経緯などから, 積分領域 Q_r の測度を明示しているが, ルベーグ測度空間を考えているのでこれを r^n で置き換えても同値である。 すなわち

$$\|f\|_{B^{p,\lambda}} = \sup_{r\geq 1} \frac{1}{r^\lambda} \left(\frac{1}{|Q_r|} \int_{Q_r} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \approx \sup_{r\geq 1} \frac{1}{r^{n/p+\lambda}} \|f\|_{L^p(Q_r)}$$

と置き直すことができる。これを $B_{n/p+\lambda}(L^p)$ ノルムと呼ぶこととする。一般に $B_\sigma(L^p)$ 空間が考えられる。また $\dot{B}_\sigma(L^p)$ ノルムも同様に定められる。

同じように $\mathrm{CMO}^{p,\lambda}$ や $\mathrm{CBMO}^{p,\lambda}$ のセミノルムは, $\|f-f_{Q_r}\|_{L^p(Q_r)}$ を $L^p/\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{C}$ は定数関数全体の集合) という空間のセミノルムと見なすことによって

$$\|f\|_{\mathrm{CMO}^{p,\lambda}} = \sup_{r\geq 1} \frac{1}{r^{n/p+\lambda}}\|f-f_{Q_r}\|_{L^p(Q_r)} \quad \cdots\ B_{n/p+\lambda}(L^p/\mathfrak{C})\ \text{セミノルム}$$

$$\|f\|_{\mathrm{CBMO}^{p,\lambda}} = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n/p+\lambda}}\|f-f_{Q_r}\|_{L^p(Q_r)} \quad \cdots\ \dot{B}_{n/p+\lambda}(L^p/\mathfrak{C})\ \text{セミノルム}$$

とみることも出来る。このように最初に局所的に関数の状況を見る尺度 (ノルムまたはセミノルム E ）を変えてやることによって, さらに一般に $B_\sigma(E)$ という枠組みで多くの関数空間を捉えることが出来る。(古谷-松岡-中井-澤野 [10])

3.4 関数空間 $B^u_w(E)$

前節の $B_\sigma(E)$ の (セミ) ノルムは, 最後に r を動かして上限を取っている。それを L^∞ ノルムを取ったと見なし, さらに一般化して L^u ノルムを取る [6] ことにする。そしてウェイト $r^{-\sigma}$ を一般的な形で $w(r)$ としてやれば, 次の空間を得る。

定義 3.1 ($B^u_w(E)$ spaces)**.** E を $\mathbb{R}^n$ 上の関数に対する（何らかの条件を満たす）セミノルム空間とする。このとき関数空間 $B^u_w(E)$ および $\dot{B}^u_w(E)$ を, $1 \leq u\infty$ に対してそれぞれ

$$\|f\|_{B^u_w(E)} = \Big\| w(r)\|f\|_{E(Q_r)} \Big\|_{L^u([1,\infty),\frac{dr}{r})} = \left[\int_1^\infty \big(w(r)\|f\|_{E(Q_r)}\big)^u \frac{dr}{r}\right]^{1/u} < \infty, \tag{3.7}$$

$$\|f\|_{\dot{B}^u_w(E)} = \Big\| w(r)\|f\|_{E(Q_r)} \Big\|_{L^u((0,\infty),\frac{dr}{r})} = \left[\int_0^\infty \big(w(r)\|f\|_{E(Q_r)}\big)^u \frac{dr}{r}\right]^{1/u} < \infty \tag{3.8}$$

また $u=\infty$ の場合として

$$\|f\|_{B^\infty_w(E)} = \Big\| w(r)\|f\|_{E(Q_r)} \Big\|_{L^\infty[1,\infty)} = \sup_{1\leq u<\infty} \big(w(r)\|f\|_{E(Q_r)}\big) < \infty, \tag{3.9}$$

$$\|f\|_{\dot{B}^\infty_w(E)} = \Big\| w(r)\|f\|_{E(Q_r)} \Big\|_{L^\infty(0,\infty)} = \sup_{0<u<\infty} \big(w(r)\|f\|_{E(Q_r)}\big) < \infty \tag{3.10}$$

を満たす関数 f 全体のなす空間と定める。

この定義自体には特に必要はないが, 今後扱う上でセミノルム空間 E についてつぎの条件を仮定することとする.

$$f|_{Q_r} \in E(Q_r), \quad 0<t<r<\infty \Longrightarrow f|_{Q_t} \in E(Q_t), \quad \|f\|_{E(Q_t)} \leq C_E\|f\|_{E(Q_r)} \tag{3.11}$$

大まかに言って L^p のような「広い領域で測れば, ノルムは大きくなる」 という性質である。ここではこれを「制限条件」と呼ぶことにする。実際に E の例としては L^p, Orlicz 空間, Lorentz 空間, Morrey 空間, Weak-Morrey 空間, Campanato 空間, Lipschitz 空間などがある。

後に補間定理を証明するのに必要となるので weight w についての条件も検討しておく。

$$w(r) \leq Cw(s) \quad (w(r) \geq Cw(s)) \quad \text{for} \quad r \leq s. \tag{3.12}$$

[6] Burenkov and Guliyev は $E = L^p$ のケースでこの形の空間を考えている。([6])

これらは増加関数/減少関数の一般化であることから, almost increasing/decreasing property と呼ぶ。またよく知られた doubling condition も仮定しておく。

$$C^{-1} \leq \frac{w(r)}{w(s)} \leq C \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} \leq \frac{r}{s} \leq 2. \tag{3.13}$$

このとき, ウェイト w のクラスとして

$$\mathcal{W}^u = \left\{ w : \text{almost decreasing, doubling, } \int_1^\infty w(r)^u \frac{dr}{r} < \infty \right\}$$
$$\mathcal{W}^* = \left\{ w : \text{almost decreasing, doubling, } \int_r^\infty w(t) \frac{dt}{t} \approx w(r) \right\}$$

を考える。これらは

$$u_1 \leq u_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{W}^* \subset \mathcal{W}^{u_1} \subset \mathcal{W}^{u_2} \subset \mathcal{W}^\infty. \tag{3.14}$$

を満たすことがわかる。

4 $B^u_w(E)$-空間の補間定理

前節で定めた $B^u_w(E)$ は、原点中心の見方に限定したうえで大きく一般化したものである。我々は次のような実補間空間を考える。

定理 4.1 ($B^u_w(E)$-空間の補間定理)**.** $u_0, u_1, u \in (0, \infty]$, $w_0, w_1 \in \mathcal{W}^\infty$, $\min(u_i, u) < \infty$ ならば $w_i \in \mathcal{W}^*$ とする。また, ある $(\epsilon > 0)$ に対して $\dfrac{w_0(r)}{w_1(r)} r^{-\epsilon}$ または $\dfrac{w_1(r)}{w_0(r)} r^{-\epsilon}$ が *almost increasing* であるとする。$\theta \in (0,1)$ に対して

$$w = w_0^{(1-\theta)} w_1^\theta.$$

と定める。このとき

$$(\dot{B}^{u_0}_{w_0}(E)(\mathbb{R}^n), \dot{B}^{u_1}_{w_1}(E)(\mathbb{R}^n))_{\theta, u, (0,\infty)} = \dot{B}^u_w(E)(\mathbb{R}^n) \tag{4.1}$$
$$(B^{u_0}_{w_0}(E)(\mathbb{R}^n), B^{u_1}_{w_1}(E)(\mathbb{R}^n))_{\theta, u, [1,\infty)} = B^u_w(E)(\mathbb{R}^n). \tag{4.2}$$

が成り立つ。

$B^u_w(E)$ および $\dot{B}^u_w(E)$ のノルムは, Lorentz 空間のノルムと同じ形をしているため, その補間空間の証明は似たようなものになることが期待されるが, Lorentz 空間の場合には K 関数が具体的に計算されるものの, 我々の場合にはもっと一般的な形でもあり, その手法は使えない。今回我々は, K 関数の定義に戻り,

$$\begin{aligned} K(t, f; (A_0, A_1)) &= \inf_{f = f_0 + f_1} (\|f_0\|_{A_0} + t\|f_1\|_{A_1}) \\ &\sim \left(\int_0^\infty \left(w_0(r) \|f_0\|_{E(Q)} \right)^{u_0} \frac{dr}{r} \right)^{1/u_0} + t \left(\int_0^\infty \left(w_1(r) \|f_1\|_{E(Q)} \right)^{u_1} \frac{dr}{r} \right)^{1/u_1} \end{aligned} \tag{4.3}$$

を直接計算で評価した ([9] の手法)。それ自体には大きな問題はないのだが, その段階で大きな問題点が浮上した。

問題点 4.2. 任意の *(または充分たくさんの)* $f \in \dot{B}^u_w(E)(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$f = f_0 + f_1, \quad f_i \in \dot{B}^{u_i}_{w_i}(E)(\mathbb{R}^n), \quad (i = 0, 1)$$

と分解できるか？言い換えれば

$$\dot{B}^u_w(E)(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^{u_0}_{w_0}(E)(\mathbb{R}^n) + \dot{B}^{u_1}_{w_1}(E)(\mathbb{R}^n) \quad \text{が成り立つか？}$$

我々はセミノルム空間 E に次の条件を仮定すればこの問題が解決することを示し, その条件下で定理 4.1 が成り立つことを証明した。

命題 4.3 (分解条件)**.** 任意の $t > 0$ に対して f の Q_t への制限が $E(Q_t)$ に属するような f および $r > 0$ に対し, $f = f_0^r + f_1^r$ という分解で

$$\|f_0^r\|_{E(Q_t)} \le \begin{cases} C_E \|f\|_{E(Q_t)} & (0 < t < r), \\ C_E \|f\|_{E(Q_{ar})} & (r \le t < \infty), \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\|f_1^r\|_{E(Q_t)} \le \begin{cases} 0 & (0 < t < cr), \\ C_E \|f\|_{E(Q_{bt})} & (cr \le t < \infty), \end{cases} \tag{4.5}$$

（C_E, a, b, c は r, t, f に無関係）となるものが常にとれるならば, $f \in \dot{B}^u_w(E)(\mathbb{R}^n)$ に対し

$$f = f_0 + f_1, \quad f_i \in \dot{B}^{u_0}_{w_0}(E)(\mathbb{R}^n)$$

と分解できる。すなわち $\dot{B}^u_w(E)(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^{u_0}_{w_0}(E)(\mathbb{R}^n) + \dot{B}^{u_0}_{w_0}(E)(\mathbb{R}^n)$ となる。非斉次の場合も同様である。

多くのケース, たとえば Lattice 条件を持つようなセミノルム空間 (L^p, Orlicz, Lorentz, Morrey 空間), また Lattice ではないが Campanato 空間 $\mathfrak{L}_{p,\lambda}$ でもこの分解条件が成り立つことがわかる。

5 応用例

我々の補間定理によって新しく得られた評価を挙げる。

例 5.1. *Hardy-Littlewood / Fractional Maximal Operators*

$$M_\alpha f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{1-\alpha/n}} \int_Q |f(y)|\, dy \quad (\alpha \in [0, n))$$

は $\mu = \lambda + \alpha$, $q \le (\lambda/\mu)p$, $\sigma + \lambda + \alpha \le 0$ のとき

$$B_\sigma(L_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B_\sigma(L_{q,\mu})(\mathbb{R}^n) \qquad B_\sigma(L_{1,\lambda})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B_\sigma(WL_{q,\mu})(\mathbb{R}^n)$$

$(1 < p < \infty)$ という有界性を持つ *([10])*。これに我々の補間定理を適用すると $p, q \in [1, \infty)$, $\lambda \in [-n/p, 0)$, $\mu \in [-n/q, 0)$, $u \in (0, \infty]$ のときに

$$B^u_w(L_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B^u_w(L_{q,\mu})(\mathbb{R}^n) \qquad B^u_w(L_{1,\lambda})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B^u_w(WL_{q,\mu})(\mathbb{R}^n)$$

$(1 < p < \infty)$ という有界性を得る。

例 **5.2.** *Singular / Fractional Integral Operators*

$$T_\Omega f(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y)\, dy \quad \textit{(Calderón Zygmund 作用素)}$$

$$I_{\Omega,\alpha} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y)\, dy \quad \textit{(rough kernel)}$$

に対して同様に 古谷らの評価 *([10])* をこの定理で補間することによって

$$B_w^u(L_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B_w^u(L_{q,\mu})(\mathbb{R}^n) \qquad B_w^u(L_{1,\lambda})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B_w^u(WL_{q,\mu})(\mathbb{R}^n)$$

$(1 < p < \infty)$ という有界性を得る。

特に, $\lambda = -n/p$ とおけば, これらの作用素に対する Local Morrey type spaces における有界性 $LM_{pu,\tilde{w}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow LM_{qu,\tilde{w}}(\mathbb{R}^n)$ を得る。

例 **5.3** (Singular integral operators with cancellation property)**.**

$$Tf(x) = \lim_{\eta \to 0} \int_{|x-y| \geq \eta} K(x,y) f(y)\, dy$$

$$|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n} \qquad \int_{r \leq |x-y| < R} K(x,y)\, dy = \int_{r \leq |x-y| < R} K(y,x)\, dy = 0$$

(Kernel についての条件は省略）の形の作用素についても同様な議論で

$$B_w^u(\mathcal{L}_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B_w^u(\mathcal{L}_{q,\mu})(\mathbb{R}^n) \qquad \dot{B}_w^u(\mathcal{L}_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \dot{B}_w^u(\mathcal{L}_{q,\mu})(\mathbb{R}^n)$$

という形の有界性を得る。

例 **5.4.** *Modified fractional integral operators*

$$\tilde{I}_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} x - \frac{1-\chi_1(y)}{|y|^{n-\alpha}} \right) dy, \quad \alpha \in (0,n)$$

についても, 松岡-中井 *[12]* の結果を補間することによって

$$B_w^u(\mathcal{L}_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B_w^u(\mathcal{L}_{q,\mu})(\mathbb{R}^n) \qquad \dot{B}_w^u(\mathcal{L}_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \dot{B}_w^u(\mathcal{L}_{q,\mu})(\mathbb{R}^n) \tag{5.1}$$

その特殊なケースとして

$$B_w^u(\mathrm{BMO})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow B_w^u(\mathrm{Lip}_\alpha)(\mathbb{R}^n) \qquad \dot{B}_w^u(\mathrm{Lip}_\beta)(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \dot{B}_w^u(\mathrm{Lip}_\gamma)(\mathbb{R}^n) \tag{5.2}$$

という有界性を得る。

参考文献

[1] J. Alvarez, M. Guzmán-Partida and J. Lakey, Spaces of bounded λ-central mean oscillation, Morrey spaces, and λ-central Carleson measures, Collect. Math., 51 (2000), 1–47.

[2] C. Bennett and R. Sharpley, Interpolation of operators, Academic Press (1988).

[3] J. Bergh and J. Löfström, Interpolation spaces. An introduction, Springer-Verlag (1976) .

[4] A. Beurling, Construction and analysis of some convolution algebra, Ann. Inst. Fourier, 14 (1964), 1–32.

[5] O. Blasco, A. Ruiz and L. Vega, Non-interpolation in Morrey-Campanato and block spaces, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 28 (1999), no. 1, 31-40.

[6] V. I. Burenkov and H. V. Guliyev, Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in local Morrey-type spaces, Studia Math. 163 (2) (2004), 157–176.

[7] V. I. Burenkov and E. D. Nursultanov, Description of interpolation spaces for local Morrey-type spaces. (Russian) Tr. Mat. Inst. Steklova 269 (2010), Teoriya Funktsii i Differentsialnye Uravneniya, 52–62; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 269 (2010), no. 1, 46–56.

[8] J. García-Cuerva and M.J. L. Herrero, A theory of Hardy spaces assosiated to the Herz spaces, Proc. London Math. Soc., 69 (1994), 605–628.

[9] J. Gustavsson and J. Peetre, Interpolation of Orlicz spaces, Studia Math. 60 (1977), 33–59.

[10] Y. Komori-Furuya, K. Matsuoka, E. Nakai and Y. Sawano, Integral operators on B_σ-Morrey-Campanato spaces, Rev. Mat. Complut., 26 (2013), Issue 1, 1–32.

[11] P. Lemarie-Rieusset, Multipliers and Morrey spaces, Potential Anal. 38(2013) 741-752 / 41(2014) 1359-1362.

[12] K. Matsuoka and E. Nakai, Fractional integral operators on $B^{p,\lambda}$ with Morrey-Campanato norms, In: Function Spaces IX, Banach Center Publ., 92, 249–264, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2011.

[13] M.Yamazaki, Real interpolation, Lorentz spaces and the Navier-Stokes equation, 調和解析セミナー Vol.26, p.1–25 (2010 年 12 月 25 日〜27 日, 日本大学経済学部)

[14] E. Nakai and T. Sobukawa, B_w^u-function spaces and their interpolation, preprint, http://arxiv.org/abs/1410.6327

逆正弦法則と直交多項式の漸近挙動

西郷甲矢人　長浜バイオ大学
酒匂宏樹 *　新潟大学

Abstract

本講演の題材は $\mathbb{R}$ 上のモーメント有限な確率測度 μ と, それに付随する直交多項式 P_n の漸近挙動である. 直交多項式の二乗は新たな測度の列 $\{P_n^2\mu\}$ を与える. 列 $\{P_n^2\mu\}$ の具体例を観察することから本稿の議論を始めよう. 様々な確率測度 μ において列 $\{P_n^2\mu\}$ が同じような振る舞いをすることがわかるだろう. 自然数 n が大きいとき, 確率測度 $P_n^2\mu$ の密度は端に行くほどせりあがっていくのだが, あるところを境に急に小さくなる. この現象はかなり広汎に見られるので, 背後に何らかの概念的な理由が隠れていると推定できる. ここでは代数的確率論の立場からその現象を解明したい.

1　直交多項式の漸近的な振る舞い

エルミート多項式やラゲール多項式, チェビシェフ多項式といった種々の直交多項式は古くから関心が寄せられている. これらは純粋な数学的対象としても興味深いが, 量子力学と深く関係しており数学と物理学とのつながりを考えるときにも重要だ.

実数直線 $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ のうち, モーメント

$$M_k = \int_{\mathbb{R}} x^k \mu(dx)$$

がすべて有限であるようなものを考えよう. このとき多項式の列 $1, x, x^2, \cdots$ は内積空間 $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ の元であるが, この順番で正規直交化を施すことにより, 正規化された直交多項式

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \frac{x - (\mu\text{の平均})}{\sqrt{(\mu\text{の分散})}}, \quad P_2, \quad P_3, \quad \cdots$$

をえる. 直交多項式は次数が増えていくので, 軸との交点はどんどん増えていく. また実数直線の端のほうで絶対値が大きくなる.

直交多項式の二乗を用いると, 新しい確率測度の列

$$P_1^2\mu, \quad P_2^2\mu, \quad P_3^2\mu, \quad \cdots$$

*2015 年 9 月 2 日実函数論函数解析学合同シンポジウムで講演

をえる．もちろんこの列は元の確率測度 μ に依存している．しかし, 代表的な確率測度で具体的に考えると, 漸近的な振る舞いは似通っている．自然数 n が大きいとき, 確率測度 $P_n^2\mu$ の密度関数は激しく振動しながら, 端に行くほどせりあがっていく．しかしながらある境界を越えるとその外側ではほとんど 0 になってしまうのだ.

この現象はすべての確率測度 μ についておきるわけではないのだが, 例えばガウス分布 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$, 半円分布や指数分布といった代表的な実数直線上の分布はみなこの現象を引き起こす.

ガウス分布とエルミート多項式　まずは最も重要なガウス分布の場合を見てみよう．その確率密度関数はご存じのように次のような山型である.

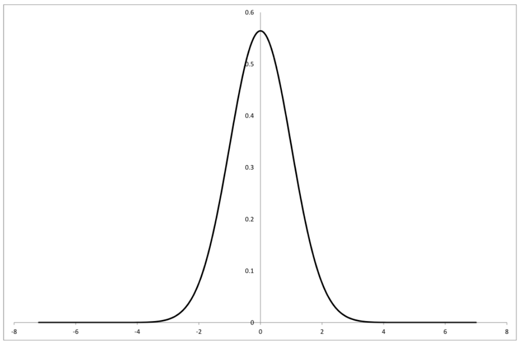


Figure 1: 正規分布の確率密度関数

この直交多項式はエルミート多項式であり, その正規化 $P_1, P_2, \cdots$ の二乗を上の確率密度関数に掛け合わせると次のような列が得られる:

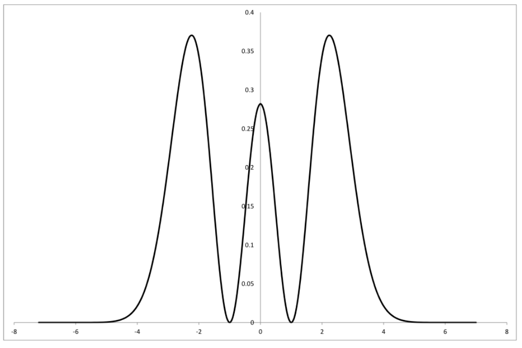


Figure 2: 正規分布の確率密度関数と P_2^2 の積

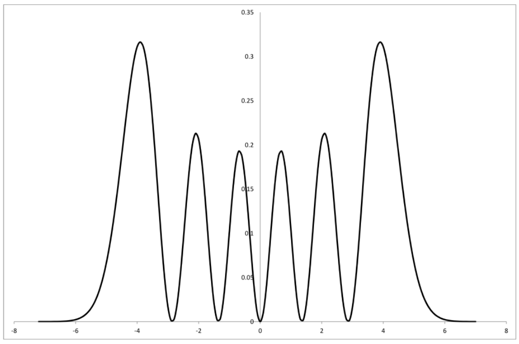


Figure 3: 正規分布の確率密度関数と P_5^2 の積

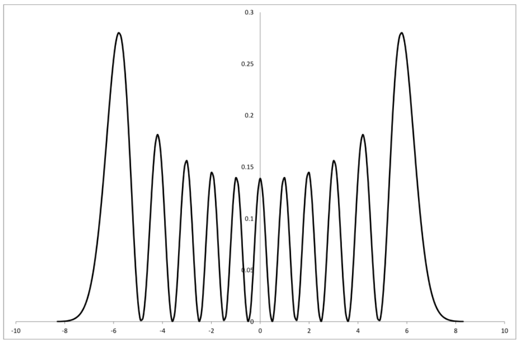


Figure 4: 正規分布の確率密度関数と P_{10}^2 の積

両脇はせり上がっている. 振動の中心を線で結ぶとお椀のような形を作るが, ある程度までせりあがるとすとんと落ちて 0 に近づいてしまう.

ウィグナーの半円分布と第二種チェビシェフ多項式　ウィグナーの半円分布 $\frac{\sqrt{4-x^2}dx}{2\pi}$ の場合を見てみよう. サイズがとても大きいランダム行列の固有値分布に現れる確率測度だ. 直交多項式は第二種チェビシェフ多項式であり, その正規化 $P_1, P_2, \cdots$ の二乗を上の確率密度関数に掛け合わせると次のような列が得られる:

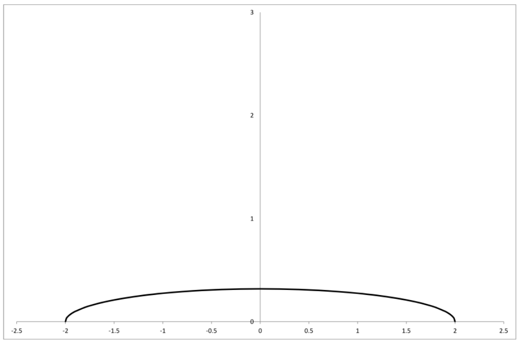


Figure 5: 半円分布の確率密度関数

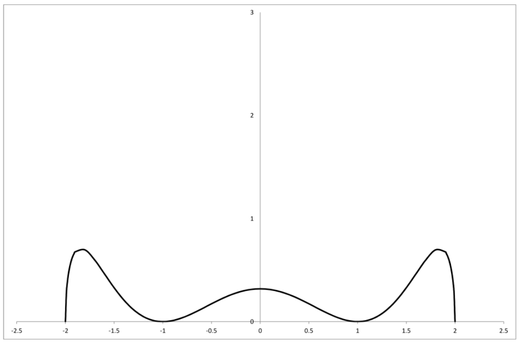


Figure 6: 半円分布の確率密度関数と P_2^2 の積

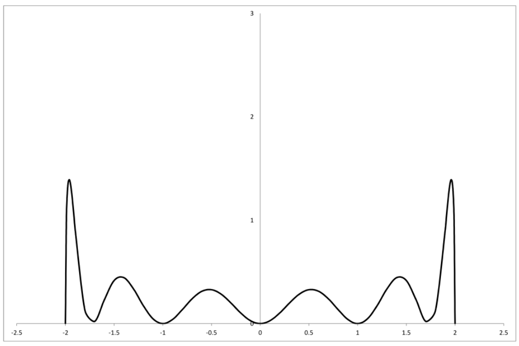


Figure 7: 半円分布の確率密度関数と P_5^2 の積

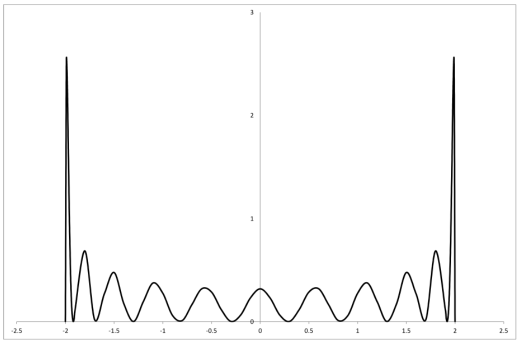


Figure 8: 半円分布の確率密度関数と P_{10}^2 の積

ご覧のように両脇がせりあがってすとんと落ちるという振る舞いをする.

指数分布とラゲール多項式　非対称的な分布の代表例として指数分布 $e^{-x}dx$ $(x \geq 0)$ を考えてみよう. 直交多項式はラゲール多項式である. 直交多項式の二乗を上の確率密度関数に掛け合わせると次のような列が得られる. 始めのうちは左だけが高いが, 番号があがるにつれて右側もせり上がり, お椀の形を作る.

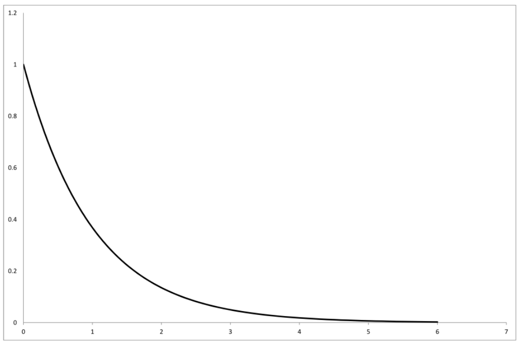


Figure 9: 指数分布の確率密度関数

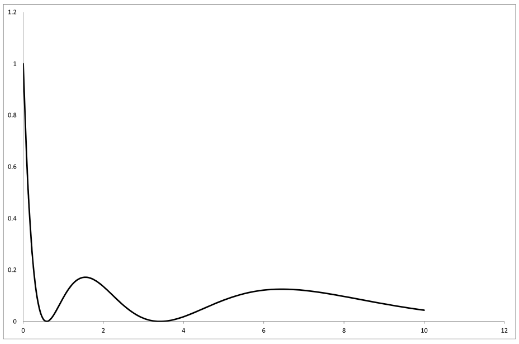


Figure 10: 指数分布の確率密度関数と P_2^2 の積

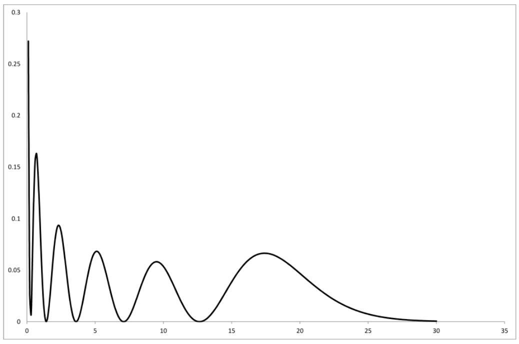


Figure 11: 指数分布の確率密度関数と P_5^2 の積

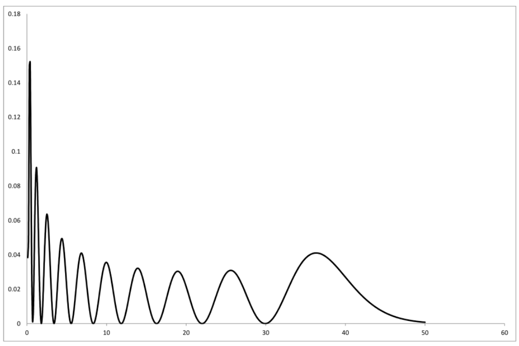


Figure 12: 指数分布の確率密度関数と P_{10}^2 の積

2 逆正弦法則

自然数 n をさらに大きくした場合, 確率測度 $P_n^2\mu$ はどのような分布に近づくのだろうか. 実は, かなり広範な μ について確率測度 $P_n^2\mu$ の正規化は逆正弦法則に弱収束する. 逆正弦法則とは次の区間 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ 上の確率測度である:

$$\nu([a,b]) = \frac{1}{\pi}\left(\arcsin\frac{b}{\sqrt{2}} - \arcsin\frac{a}{\sqrt{2}}\right), \quad -\sqrt{2} \le a < b \le \sqrt{2}.$$

確率密度関数の言葉では次のように表記される:

$$\nu(dx) = \frac{1}{\pi\sqrt{2-x^2}}dx, \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

x が $\pm\sqrt{2}$ に内側から近づくとき確率密度関数はどんどん大きくなる. しかし境界 $\pm\sqrt{2}$ を超えると 0 になってしまう.

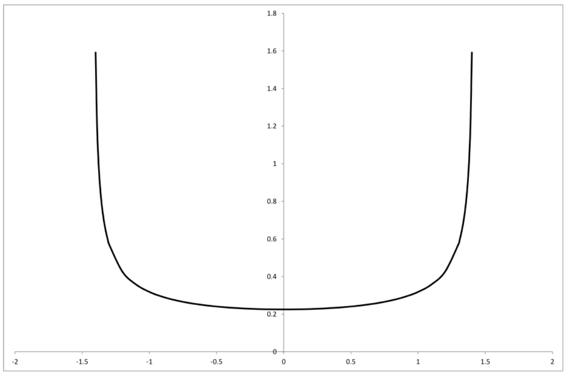


Figure 13: 逆正弦則の確率密度関数

直交多項式はなぜこれほどまでに逆正弦法則が好きなのか. その概念的な理由は代数的確率論に求めることができる.

古典力学と逆正弦法則　逆正弦法則という確率分布にピンとこない方もいるかもしれない. 逆正弦法則は振動現象に現れる確率分布でもある. ばねに重りを吊り下げて, 振幅を $\sqrt{2}$ とする振動を起こしたとしよう. 振動するおもりをランダムな時間に観察し, その位置を記録する. そんな実験を繰り返すと, 横軸が重りの位置, 縦軸が頻度を表すヒストグラムが現れる. そのヒストグラムは平均すると上のようなくぼんだ形になる. つまり逆正弦則に従うのだ.

3 代数的確率論からのアプローチ

直交多項式の振る舞いを観察するときに, 逆正弦法則が現れてくるということを前節までに観察した. この現象がどれほど広範に表れるものなのか, そしてその理由が何なのかを探るために, 代数的確率論を使う.

代数的確率論の主役は確率変数である．こういうと, “なんだ普通の確率論ではないか” 思われるかもしれない．しかし代数的確率論では確率変数を関数として基礎付けしなくてもよい．確率変数は, 複素行列でもよいし, ヒルベルト空間に作用する線形作用素としてもよい．さらにいえば, 抽象的 $*$-複素代数の元であるとしてよいのである．このように確率変数をとらえる自由度が圧倒的に大きくなる．もっとも注目すべき点は確率変数同士が可換でなくてもいいということである．つまり確率変数 XY と YX が等しいとは限らない．

定義 3.1.

- 複素代数 $\mathcal{A}$ が $*$-代数であるとは involution と呼ばれる写像 $*\colon \mathcal{A}\to\mathcal{A}$: $x\mapsto x^*$ が定まっていて次を満たすことである:
$$(\alpha X)^* = \overline{\alpha}X^*,\quad (X^*)^* = X,\quad X\in\mathcal{A},\alpha\in\mathbb{C}.$$
$$(X+Y)^* = X^*+Y^*, (XY)^* = Y^*X^*,\quad X,Y\in\mathcal{A}.$$
- 1 もつ $*$-代数 $\mathcal{A}$ 上に定められた線形写像 $\varphi:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ が $\mathcal{A}$ の状態であるとは次を満たすことを言う:
$$\varphi(1)=1,\quad \varphi(X^*X)\geq 0,\quad X\in\mathcal{A}.$$
- 1 もつ $*$-代数とその状態のペア $(\mathcal{A},\varphi)$ を代数的確率空間と言う．
- 代数的確率空間 $\mathcal{A}$ の元を代数的確率変数と言う．

代数的確率変数のうち $X^*=X$ が成り立つものを自己共役な代数的確率変数と呼ぶ．実数として結果が得られるようなランダムな事象と自己共役な代数的確率変数が対応する．自己共役な代数的確率変数にも確率分布の概念が定められる．

記号 3.2. 状態 $\varphi:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$, 自己共役な代数的確率変数 $X\in\mathcal{A}$ そして実数直線上の確率変数 μ について考えよう．全ての自然数 m に対して $\varphi(X^m)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^m\mu(dx)$ が成り立つとき, $X\sim_\varphi \mu$ と書くことにする．

実はすべての自己共役代数的確率変数 X と状態 φ に対して $X\sim_\varphi\mu$ を満たす実数直線上の確率測度 μ は存在する．続いて自己共役代数的確率変数と状態の例を少し見てみよう:

例 3.3. 2 次正方行列を $\mathcal{A}$ とおく．複素共役転置が involution を与える．状態 $\varphi:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ を
$$\varphi\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x_{11}+x_{22}).$$
で定めるとする．これはすなわち二つの固有値の平均を与える写像である．確率変数 X を $\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ で定める．このモーメント列は
$$\varphi(X)=0,\varphi(X^2)=1,\varphi(X^3)=0,\varphi(X^4)=1,\cdots$$
と 0 と 1 を繰り返す．このモーメント列は $\{-1,1\}$ に台を持ち, $\mu(\{-1\})=\dfrac{1}{2}=\mu(\{1\})$ を満たす確率測度のモーメント列と一致する．つまり $X\sim_\varphi\mu$ である．またほかの確率変数 $\begin{pmatrix} 0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ も同じ確率分布 μ を与える．

このほか自己共役行列はすべて自己共役確率変数とみなせる．より一般に C*-環の自己共役元も確率変数とみなせる．この場合対応する確率分布はコンパクト台を持つ．Kolmogorov の確率空間も代数的確率空間に取り込んで議論することは可能である．

例 3.4. Ω を集合とし, $\mathcal{F}$ をその σ-代数とし, P を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率変数とする．三つ組み $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ は古典的な確率空間である．ここで

$$\mathcal{A} = \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$$

とおく．ヘルダーの不等式よりこの空間は積で閉じている．Involution を複素共役で定めて, 状態 $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ を確率測度 P による平均で定めることにより $\mathcal{A}$ は代数的確率空間になる．

わざわざ古典的確率空間の枠組みを脱ぎ捨てて, 代数的確率空間で議論することにはどんな意義があるのだろうか. それは量子物理学から動機づけられている.

代数的確率論の歴史的経緯　量子的現象が発見される以前は, “初期条件が正確に得られれば, 物理現象の結果が決定できるはずである,” というとらえ方が支配的であった．これは決定論的な自然観と呼ばれるものである．量子力学が発見される前にも確率論は研究されていたが, 確率的現象は観察者の初期条件に対する無知によってもたらされる見せかけのものと思われていた.

20 世紀前半の物理学は本質的な意味で偶然に従う現象を発見した．位置や運動量といった量を一つ一つ測定するとき, 特定の結果が得られる必然性はないということが判明したのである．量子力学の発見によって決定論的世界観が覆されて, 非決定論的な現象が発見されたのだ．しかし非決定性は法則性の欠如を意味しない．測定結果にばらつきがあったとしても, データを集積することで, そのばらつき方には統計的な法則性があるとわかったからだ．自然を理解するためにも現象の確率論的性質を理解することが必要である.

量子力学がもたらした転換はそれだけではない．ミクロの世界では位置と運動量がともに決定された値をとることはない．いわいる不確定性原理が成り立っているのである．ここに新しい確率論を作り上げるための動機がある．古典確率論では二つの確率変数はともに関数として基礎づけられている．全事象の空間の元が与えられれば, 二つの確率変数の値はともに決定されてしまう．このような確率論は量子論を記述するためには不完全である．二つの物理量のうち, 片方の値が決まればもう片方の値は決まらないという状況も記述できるような確率論のみが量子論の要求に応えられるのだ.

代数的確率論の新たな展開　代数的確率論の主な動機は以上のとおりであるが, 本研究では新しい視点から確率論に一石を投じたい．直交多項式を使って定義された確率測度の列は, 多くの場合, 逆正弦法則に収束していくのである．これはもちろん, 従来の確率論の言葉づかいで説明できるような現象だ.

その一方で, ミクロの世界を理解するための直感がここで役に立つ．エルミート多項式の番号をどんどん大きく取り替えていくという操作は,粒子のエネルギーをどんどん大きくしていくような操作と対応しているからである．量子数を大きくする

操作として理解できるのだ. 古典確率論の言葉で述べられる不思議な現象を, 代数的確率論の枠組みで説明する. そんな新たな可能性を感じさせる.

代数的確率空間が代数と状態のペアからなる理由　さて, 古典確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ を考えるとき, Ω と P をバラバラにして考えることはあまりなかった. しかし, 代数的確率空間 $(\mathcal{A}, \varphi)$ を考えるとき, 状態 φ を取り換えられるということは重要である. なぜならば対象となるミクロ系 $\mathcal{A}$ がほとんど同じであっても, どのような状況設定 φ において測定を行うかは変更可能だからだ.

4　量子分解

直交多項式から作られる作用素　再び $\mathbb{R}$ 上のモーメント有限確率測度 μ に話をもどそう. 確率測度 μ についての正規化された直交多項式を $P_0, P_1, P_2, \cdots$ とおく. 直交多項式に注目するすることにより, $(\mathbb{R}, \{\text{Borel sets}\}, \mu)$ 上の可測関数 $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を三つの代数的確率変数に分解できる. いったい何を言っているのか意味不明かもしれない. ゆっくり解説する.

直交多項式の間にはつぎの三項間漸化式が成り立つ:

$$xP_n = \sqrt{\omega_{n+1/2}}P_{n+1} + \alpha_n P_n + \sqrt{\omega_{n-1/2}}P_{n-1}.$$

これは左辺の x による掛け算が次の三つの作用素に分解されることを意味する:

$$\begin{aligned}
&\text{生成 } C\colon P_n \mapsto \sqrt{\omega_{n+1/2}}P_{n+1},\\
&\text{維持 } B\colon P_n \mapsto \alpha_n P_n \qquad\quad ,\\
&\text{消滅 } A\colon P_n \mapsto \sqrt{\omega_{n-1/2}}P_{n-1}.
\end{aligned}$$

多項式の列 $P_\cdot$ の番号が増える項が生成作用素 C, 変化しないのが維持作用素 B, 減るのが消滅作用素 A である. 多項式の空間に作用する作用素として (x による掛け算) $= A + B + C$ が成り立つ. 左辺を右辺で分解することを量子分解という. これらの作用素 A, B, C は互いに可換ではないので代数的な確率変数と見ることとする.

(x による掛け算) を X とおく. 量子分解によると, X を次の三重対角行列として表現できる. 行列と言っても右や下の方向には無限に広がっている.

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\omega_{1/2}} & 0 & \cdots \\ \sqrt{\omega_{1/2}} & \alpha_1 & \sqrt{\omega_{3/2}} & \ddots \\ 0 & \sqrt{\omega_{3/2}} & \alpha_2 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

この行列はヤコビ行列と呼ばれる. k 列目や k 行目は正規化された k 個目の直交多項式に対応している. 対角要素だけを残して他を 0 としたものが B, 対角要素の一つ下を残して他を 0 としたものが C, 対角要素の右隣りを残して他を 0 としたものが A である.

まず注目したい代数的確率空間 $(\mathcal{A}, \varphi_0)$ は

- A, B, C が生成する $*$-代数 $\mathcal{A}$,

- 線形汎関数 $\varphi_0(\,\cdot\,) = \langle\,\cdot\,P_0, P_0\rangle$

から成る. この線形汎関数は行列の言葉で言えば, 一番左, 一番上の行列要素を取り出す写像である. この代数的確率空間に着目することによって, 古典的確率分布 μ について調べることが可能になる.

補題 4.1. 代数的確率空間 $(\mathcal{A}, \varphi_0)$ における確率変数 X と古典確率空間 $(\mathbb{R}, \{\text{Borel sets}\}, \mu)$ における確率変数 x の各モーメントは等しい. つまり

$$\varphi_0(X^m) = \int_{\mathbb{R}} x^m \mu(dx), \quad m \in \mathbb{N}.$$

上で紹介した記号でいえば $X \sim_{\varphi_0} \mu$.

証明は直交多項式について成り立つ三項間漸化式に着目することで与えられる.

直交多項式から与えられる確率測度　直交多項式から与えられる確率測度の列

$$\mu, P_1^2\mu, P_2^2\mu, \cdots, P_k^2\mu, \cdots$$

を調べるための代数的確率空間 $(\mathcal{A}, \varphi_k)$ は A, B, C が生成する $*$-代数 $\mathcal{A}$ と

- 線形汎関数 $\varphi_k(\,\cdot\,) = \langle\,\cdot\,P_k, P_k\rangle$

によって構成される. 代数系を変えずに状態だけを取り換えればよい. この線形汎関数は行列の言葉で言えば, 一番左を 0 列目と数えたときの k 列目, 一番上を 0 行目と数えたときの k 行目の行列要素を取り出す写像である.

補題 4.2. 代数的確率空間 $(\mathcal{A}, \varphi_k)$ における確率変数 X と古典確率空間 $(\mathbb{R}, \{\text{Borel sets}\}, P_k^2\mu)$ における確率変数 x の各モーメントは等しい. つまり

$$\varphi_k(X^m) = \int_{\mathbb{R}} x^m P_k^2\mu(dx), \quad m \in \mathbb{N}.$$

前節で紹介した記号でいえば $X \sim_{\varphi_k} P_k^2\mu$.

証明はさほど難しくない. 確率測度 $P_k^2\mu$ を調べることと, 代数的確率空間 $(\mathcal{A}, \varphi_k)$ における代数的確率変数 X を調べることは対応しているのである. 確率測度 $P_k^2\mu$ を調べるために代数的確率空間に注目するのが私たちの方針である.

相互作用 Fock 空間　相互作用 Fock 空間とは生成, 維持, 消滅の作用が定まっているような無限次元内積空間のことである. これは直交多項式で説明したことの抽象化である. 通常の記号の使い方と異なっているが, 本質的な違いはない.

定義 4.3 (相互作用 Fock 空間)**.** 数列 $\{\omega_{n+1/2} | n = 0, 1, 2, \cdots\}$ は正の数からなるとし, 数列 $\{\alpha_n | 1, 2, 3, \cdots\}$ は実数からなるとする. 相互作用 Fock 空間 $\Gamma_{\omega,\alpha}$ とは次を満たす四つ組 $(\Gamma(\mathbb{C}), A, B, C)$ である:

- $\Gamma(\mathbb{C})$ は内積空間 $\Gamma(\mathbb{C}) := \oplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}\Phi_n$ である. 内積は $\langle\Phi_n, \Phi_m\rangle = \delta_{n,m}$ で定められる.

- A は消滅作用素で $A\Phi_0 = 0$, $A\Phi_n = \sqrt{\omega_{n-1/2}}\,\Phi_{n-1}$.
- B は維持作用素で $B\Phi_n = \alpha_n\Phi_n$.
- C は生成作用素で $C\Phi_n = \sqrt{\omega_{n+1/2}}\,\Phi_{n+1}$.

直交多項式の議論ではベクトル Φ_n は直交多項式 P_n で与えられていた.

4.1 両側無限相互作用 Fock 空間

さて私たちは直交多項式 $P_k = \Phi_k$ の番号 k を大きくする極限を考えている. これは相互作用 Fock 空間の基準点を取り換えるような操作である. 後で主定理を証明するときに使うのは相互作用 Fock 空間の基準点を取り換えていく極限, つまり両側無限相互作用 Fock 空間である.

定義 4.4 (両側無限相互作用 Fock 空間)**.** 次のような両側無限数列が与えられているとする:

$$
\begin{aligned}
\omega &= \left\{\omega_m \geq 0 \;\middle|\; m = \cdots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots\right\}, \\
\alpha &= \{\alpha_n \in \mathbb{R} \mid n = \cdots, -2, -1, 0, 1, \cdots\}.
\end{aligned}
$$

両側無限 Fock 空間 $\Gamma_{\omega,\alpha}$ とは次のような四つ組 $(\Gamma(\mathbb{C}), A, B, C)$ である:

- 式 $\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle = \delta_{n,m}$ で内積が与えられる内積空間 $\Gamma(\mathbb{C}) = \oplus_{n=-\infty}^{\infty}\mathbb{C}\Phi_n$,
- A は消滅作用素で $A\Phi_n = \sqrt{\omega_{n-1/2}}\,\Phi_{n-1}$.
- B は維持作用素で $B\Phi_n = \alpha_n\Phi_n$.
- C は生成作用素で $C\Phi_n = \sqrt{\omega_{n+1/2}}\,\Phi_{n+1}$.

定義 4.5. ヤコビ行列とは和 $X = A + B + C$ で与えられる作用素である. 次の式で表されるような行列 $X = [X_{m,n}]_{m,n\in\mathbb{Z}}$ として表現される:

$$
X_{m,n} = \begin{cases} \sqrt{\omega_{n-1/2}}, & m = n-1, \\ \alpha_n, & m = n, \\ \sqrt{\omega_{n+1/2}}, & m = n+1, \\ 0, & |m-n| \geq 2. \end{cases}
$$

ヤコビ行列 X も代数的確率変数で, 状態 $\langle \cdot\Phi_0, \Phi_0 \rangle$ についてのモーメント列は行列要素の多項式で次のように表される:

$$
\begin{aligned}
\left\langle X^1\Phi_0, \Phi_0 \right\rangle &= \alpha_0, \\
\left\langle X^2\Phi_0, \Phi_0 \right\rangle &= \omega_{-1/2} + \alpha_0^2 + \omega_{-1/2}, \\
\left\langle X^3\Phi_0, \Phi_0 \right\rangle &= \omega_{-1/2}\alpha_{-1} + 2\omega_{-1/2}\alpha_0 + \alpha_0^3 + 2\omega_{1/2}\alpha_0 + \omega_{1/2}\alpha_1, \\
&\cdots .
\end{aligned}
$$

モーメント列が行列要素の多項式で記述されることは数学的帰納法で証明できる. そこから次の補題が導かれる.

補題 4.6. 両側無限相互作用 Fock 空間の列 $\Gamma_{\{\omega^{(k)},\alpha^{(k)}\}}$ と両側無限相互作用 Fock 空間 $\Gamma_{\{\omega,\alpha\}}$ が与えられているとする. $X^{(k)}$ と X を $\oplus_{n=-\infty}^{\infty}\mathbb{C}\Phi_n$ に作用する両側無限ヤコビ行列とする. もし $\lim_{k\to\infty}\omega_{n+1/2}^{(k)}=\omega_{n+1/2}$ と $\lim_{k\to\infty}\alpha_n^{(k)}=\alpha_n$ が全ての整数 n に対して成り立つとすると, 次のモーメント列の収束を得る: $\lim\limits_{k\to\infty}\left\langle\left(X^{(k)}\right)^m\Phi_0,\Phi_0\right\rangle=\langle X^m\Phi_0,\Phi_0\rangle$.

5 漸近的可換性

量子分解は元の確率測度 μ がガウス分布 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)dx$ である場合に非常にシンプルである. この場合は B が 0 であり, A, C については交換関係 $AC-CA=I$ が成り立つからだ. 生成作用素と消滅作用素の交換子が恒等作用素になるというこの関係式は正準交換関係と呼ばれ, 量子論で重要な意味を持つ.

ガウス分布をはじめ広汎な確率測度 μ に対して交換子と分散の比が漸近的に小さくなるということが計算よりわかる. これを漸近的可換性と呼ぶ. 漸近的可換性は P_n^2 を正規化するという作業に対して, A, B, C の非可換性がどんどん消滅していくということを意味する. 私たちは, この条件の下で $P_k^2\mu$ の正規化が逆正弦法則に弱収束するということが証明できた.

5.1 漸近的可換性 (RAC1)

まず相互作用 Fock 空間の漸近的可換性 (RAC1) を定式化しよう.

定義 5.1. 相互作用 Fock 空間 $\Gamma_{\omega,\alpha}$ が漸近的可換性 (RAC1) を満たすとは, 二つの可換子 $[A, C]$ と $[A, B]$ が以下を満たすことである:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{AC-CA}{\omega_{n+1/2}+\omega_{n-1/2}}\Phi_n=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{AB-BA}{\omega_{n+1/2}+\omega_{n-1/2}}\Phi_n=0.$$

定数 $\omega_{n+1/2}+\omega_{n-1/2}$ は代数的確率変数 $X=A+B+C$ の状態 $\varphi_n(\cdot)=\langle\,\cdot\,\Phi_n,\Phi_n\rangle$. についての分散である. つまり

$$\omega_{n+1/2}+\omega_{n-1/2}=\varphi_n(X^2)-\varphi_n(X)^2.$$

補題 5.2. 漸近的可換性 (RAC1) は次の条件と同値である*:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_{n+1/2}}{\omega_{n-1/2}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{\sqrt{\omega_{n+1/2}+\omega_{n-1/2}}}=0.$$

Proof. 可換子 $[A, C]$ と $[A, B]$ は次を満たす:

$$\begin{aligned}\frac{AC-CA}{\omega_{n+1/2}+\omega_{n-1/2}}\Phi_n &= \frac{\omega_{n+1/2}-\omega_{n-1/2}}{\omega_{n+1/2}+\omega_{n-1/2}}\Phi_n,\\ \frac{AB-BA}{\omega_{n+1/2}+\omega_{n-1/2}}\Phi_k &= \frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{\omega_{n+1/2}+\omega_{n-1/2}}\sqrt{\omega_{n-1/2}}\Phi_{n-1}.\end{aligned}$$

補題の条件が成り立つときに, 以上二つのベクトルが 0 に収束することを示すのはさほど難しくない.

逆に条件 (RAC1) が成り立ったと仮定しよう. このとき次を得る

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_{n+1/2}-\omega_{n-1/2}}{\omega_{n+1/2}+\omega_{n-1/2}}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{\omega_{n+1/2}+\omega_{n-1/2}}\sqrt{\omega_{n-1/2}}=0.$$

等式

$$\frac{2}{1-\dfrac{\omega_{n+1/2}-\omega_{n-1/2}}{\omega_{n+1/2}+\omega_{n-1/2}}}-1=\frac{\omega_{n+1/2}}{\omega_{n-1/2}},$$

に注目すると, 条件 (RAC1) が次を導くことがわかる:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega_{n+1/2}}{\omega_{n-1/2}}=\frac{2}{1-0}-1=1.$$

漸近的可換性 (RAC1) の二番目の条件は次を導く:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{\sqrt{\omega_{n+1/2}+\omega_{n-1/2}}}\\
=\ &\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{\omega_{n+1/2}+\omega_{n-1/2}}\sqrt{\omega_{n-1/2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\omega_{n+1/2}+\omega_{n-1/2}}{\omega_{n-1/2}}}\\
=\ &0\,\sqrt{2}=0.
\end{aligned}$$

このようにして (RAC1) から補題の条件が導かれる. □

正規分布や半円分布, 指数分布の場合に対応する相互作用 Fock 空間は計算されている. それらはみな補題の条件を満たしている.

定理 5.3. 相互作用 *Fock* 空間 $\Gamma_{\omega,\alpha}:=(\Gamma(\mathbb{C}),A,B,C)$ が漸近的可換性 (RAC1) を満たしていると仮定する. 代数的確率変数の列 $\dfrac{X-\alpha_k}{\sqrt{\omega_{k-1/2}+\omega_{k+1/2}}}$ の状態 $\varphi_k(\cdot)=\langle\cdot\Phi_k,\Phi_k\rangle$ に関する分布は逆正弦法則 $\dfrac{dx}{\pi\sqrt{2-x^2}}$ にモーメント収束する. すなわち

$$\lim_{k\to\infty}\left\langle\left(\frac{X-\alpha_k}{\sqrt{\omega_{k-1/2}+\omega_{k+1/2}}}\right)^m\Phi_k,\Phi_k\right\rangle=\int_{\mathbb{R}}x^m\frac{dx}{\pi\sqrt{2-x^2}}.$$

ここで確率変数 X に小細工を施して $\dfrac{X-\alpha_k}{\sqrt{\omega_{k-1/2}+\omega_{k+1/2}}}$ としているのは平均を 0 分散を 1 とするためである.

Proof. 数列のペア $(\{\omega_{n+1/2}\},\{\alpha_n\})$ を相互作用 Fock 空間を定める係数とする. 漸近的可換性 (RAC1) が成り立つと仮定しよう. 第 k 個目の状態 $\varphi_k(\cdot)=\langle\,\cdot\,\Phi_k,\Phi_k\rangle$ と正規化された代数的確率変数

$$X^{(k)}=\frac{X-\alpha_k}{\sqrt{\omega_{k+1/2}+\omega_{k-1/2}}}$$

について考えてみよう．これらは内積空間 $\oplus_{n=0}^{\infty}\mathbb{C}\Phi_n$ に作用する．代数的確率変数 $X^{(k)}$ の行列要素は

$$X^{(k)}_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{\omega_{n-1/2}}{\sqrt{\omega_{k+1/2}+\omega_{k-1/2}}}, & m=n-1, \\ \dfrac{\alpha_n-\alpha_k}{\sqrt{\omega_{k+1/2}+\omega_{k-1/2}}}, & m=n, \\ \dfrac{\omega_{n+1/2}}{\sqrt{\omega_{k+1/2}+\omega_{k-1/2}}}, & m=n+1, \\ 0, & |m-n|\geq 2 \end{cases}$$

と記述される．代数的確率変数 $X^{(k)}$ を調べるために, 相互作用 Fock 空間の番号を $m,n=0,1,\cdots,k,\cdots$ から $m,n=-k,-k+1,\cdots,0,\cdots$ に変化させよう．つまり考えている状態が $\langle\cdot\Phi_0,\Phi_0\rangle$ になるように番号を変える．相互作用 Fock 空間は $\Gamma^{(k)}=\oplus_{n=-k}^{\infty}\mathbb{C}\Phi_n$ と記述される両側相互作用 Fock 空間になる．考える代数的確率変数は番号の取り換えによって次で定義されるような $\widetilde{X^{(k)}}$ にかわる:

$$\widetilde{X^{(k)}}_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{\omega_{n+k-1/2}}{\sqrt{\omega_{k+1/2}+\omega_{k-1/2}}}, & m=n-1, \\ \dfrac{\alpha_{n+k}-\alpha_k}{\sqrt{\omega_{k+1/2}+\omega_{k-1/2}}}, & m=n, \\ \dfrac{\omega_{n+k+1/2}}{\sqrt{\omega_{k+1/2}+\omega_{k-1/2}}}, & m=n+1, \\ 0, & |m-n|\geq 2. \end{cases}$$

補題 5.2 の一番目の条件は, 係数 $\{\omega_{n+k+1/2}\}_{n=-k}^{\infty}$ の隣どうしの比がどんどん 1 に近づくことを意味する．つまり固定された整数 n ごとに,

$$\lim_{k\to\infty}\widetilde{X^{(k)}}_{n-1,n}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\lim_{k\to\infty}\widetilde{X^{(k)}}_{n+1,n}.$$

補題 5.2 の二番目の条件は, $\lim_{k\to\infty}\dfrac{\alpha_k-\alpha_{k-1}}{\sqrt{\omega_{k+1/2}+\omega_{k-1/2}}}=0$ を意味する．

ここで補題 4.6 をここで用いてみよう．代数的確率変数 $\widetilde{X}$ を次の両側無限行列で定める:

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & \\ \ddots & 0 & 1/\sqrt{2} & & \\ & 1/\sqrt{2} & \mathbf{0} & 1/\sqrt{2} & \\ & & 1/\sqrt{2} & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

これはヒルベルト空間 $\ell_2(\mathbb{Z})$ に作用する．太文字の $\mathbf{0}$ は状態 $\langle\cdot\Phi_0,\Phi_0\rangle$ に対応する行列要素である．補題 4.6 より, 次の収束をえる:

$$\lim_{k\to\infty}\left\langle\left(X^{(k)}\right)^m\Phi_k,\Phi_k\right\rangle=\lim_{k\to\infty}\left\langle\left(\widetilde{X^{(k)}}\right)^m\Phi_0,\Phi_0\right\rangle=\left\langle\left(\widetilde{X}\right)^m\Phi_0,\Phi_0\right\rangle.$$

フーリエ変換 $\ell^2(\mathbb{Z}) \cong L^2(\{e^{it}\})$, により Φ_0 は単位円 $\mathbb{T} = \{e^{it}\}$ 上の定数関数 1 に同一視される. また代数的確率変数 $\widetilde{X}$ は可測関数として書かれる確率変数

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{it} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-it} = \sqrt{2}\cos t.$$

と同一視される. この同一視を使うと次のように計算できる:

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\widetilde{X}\right)^m \Phi_0, \Phi_0 \right\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} &= \left\langle \left(\sqrt{2}\cos t\right)^m 1, 1 \right\rangle_{L^2(\{e^{it}\})} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2}\cos t\right)^m \frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_\pi^{2\pi} \left(\sqrt{2}\cos t\right)^m \frac{dt}{\pi}.
\end{aligned}$$

変数変換 $\sqrt{2}\cos t = x$ により目的の等式

$$\lim_{k\to\infty} \left\langle \left(X^{(k)}\right)^m \Phi_k, \Phi_k \right\rangle = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^m \frac{dx}{\pi\sqrt{2-x^2}}$$

を得る. □

注意 5.4. この主定理のおかげで, 直交多項式から定められる確率測度が逆正弦法則に収束していくという現象が広範にみられることが判明する. 主要な確率測度について漸近的可換性 (RAC1) が成り立つことが次のようにしてわかるからだ.

(1) 一様測度 $\dfrac{\chi_{[-1,1]}dx}{2}$ に対応する相互作用 Fock 空間の係数は

$$\omega_{n+1/2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}, \quad \alpha_n = 0$$

で与えられる.

(2) 指数分布 $\chi_{[0,\infty)}e^{-x}dx$ に対応する相互作用 Fock 空間の係数は

$$\omega_{n+1/2} = (n+1)^2, \quad \alpha_n = 2n+1$$

である.

(3) q-ガウス分布 $(-1 < q \leq 1)$ に対応する係数は

$$\omega_{n+1/2} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n, \quad \alpha_n = 0.$$

定数 q が 1 の場合は通常の正規分布に対応する. 定数 q が 0 の場合は半円則 $\dfrac{\sqrt{4-x^2}\ dx}{2\pi}$ に対応する.

補題 5.2 によって漸近的可換性 (RAC1) の成立が確かめられる.

注意 5.5. 逆正弦法則はコンパクト台を持つのでモーメント収束は弱収束を導く.

定理 5.3 は次のような直交多項式についての系を導く.

系 5.6. 実数直線上の確率測度 μ の正規化された直交多項式を P_n とおく. 直交多項式の三項間漸化式の係数 $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ に漸近的可換性 (RAC1) が成り立つと仮定しよう. 等式

$$\mu_k(dx) := \left|P_k\left(\sqrt{\omega_{k+1/2}+\omega_{k-1/2}}x\right)\right|^2 \mu\left(\sqrt{\omega_{k+1/2}+\omega_{k-1/2}}dx\right)$$

で定義される確率測度 μ_n は逆正弦法則 $\dfrac{dx}{\pi\sqrt{2-x^2}}$ に弱収束する.

直交多項式から定められる確率測度の列

$$\mu, P_1^2\mu, P_2^2\mu, P_3^2\mu, \cdots$$

が逆正弦法則に収束するケースが多いのはなぜか. その理由を与えることができた. 通常の確率変数の背後には, 生成, 維持, 消滅のプロセスが隠れている. それらに漸近的な可換性が成り立つとき, 定理 5.3 に示されているような逆正弦法則への収束を得るのである.

References

[1] L. Accardi and M. Bożejko, Interacting Fock spaces and Gaussianization of probability measures, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **1** (1998), 663-670.

[2] N. I. Akhiezer, The classical moment problem and some related questions in analysis, Translated by N. Kemmer, Hafner Publishing Co., New York, 1965,

[3] K. L. Chung, *A Course in Probability Theory*, Harcourt, Brace & World, Inc., 1968.

[4] 江沢洋, 漸近解析入門, 岩波書店, 2013.

[5] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications* **2** (*2nd edn.*), John Wiley & Sons, New York, 1971.

[6] Y. Hashimoto, Quantum decomposition in discrete groups and interacting *Fock space*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab.

[7] A. Hora and N. Obata, *Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs*, Theoretical and Mathematical Physics, Springer, Berlin Heiderberg, 2007.

[8] S. V. Kerov, *Asymptotic separation of roots of orthogonal polynomials*, Algebra i Analiz **5**, no. 5 (1993), 68-86; English transl., St. Petersburg Math. J. **5** (1994), 925-941.

[9] H. Saigo, *A new look at the Arcsine law and "Quantum-Classical Correspondence"*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **15**, no. 3 (2012), 1250021.

単位的C*-環の正凸錐上のジャイロ構造とその応用

新潟大学工学部　阿部敏一

1　概要

ニュートン力学では速度全体は3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ とみなすことができ、和について群構造をなしています。一方、Einstein による特殊相対性理論における速度全体は真空中での光の速さを c とすると、$\mathbb{R}^3_c = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{u}\| < c\}$ とみなすことができ、速度 $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の和は

$$\boldsymbol{u} \oplus_E \boldsymbol{v} = \frac{1}{1 + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle / c} \left\{ \boldsymbol{u} + \frac{1}{\gamma_u} \boldsymbol{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_u}{1 + \gamma_u} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{u} \right\} \tag{1}$$

によって与えられます。ここで、$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^3$ のユークリッド内積を意味し、γ_u は速度 $\boldsymbol{u}$ のローレンツ因子

$$\gamma_u = (1 - \|\boldsymbol{u}\|^2 / c^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

を意味します。この速度の和の演算について調べてみると結合法則を満たさず、また可換でもないことが確認できます。したがって、特殊相対論では速度全体は（可換）群としての構造を持っていません。しかしながら、この $(\mathbb{R}^3, \oplus_E)$ は可換群に近い性質を持っています。この $(\mathbb{R}^3, \oplus_E)$ の性質を抽象化した概念が A. A. Ungar によって定義された (gyrocommutative) gyrogroup です。(Gyrocommutative) gyrogroup は（可換）群の一般化になるように定義されています。ここで $(\mathbb{R}^3, \oplus_E)$ のことを the Einstein gyrogroup と呼ぶことにします。（可換）群と the Einstein gyrogroup 以外の (gyrocommutative) gyrogroup の代表的な例として Möbius gyrogroup と呼ばれているものがあります。Möbius gyrogroup $(\mathbb{D}, \oplus_M)$ は複素平面上の単位開円盤 $\mathbb{D}$ 上の演算 $\oplus_M$ を

$$a \oplus_M b = \frac{a + b}{1 + \bar{a} b} \tag{3}$$

によって与えたものです。

ニュートン力学での速度全体は3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ とみなすことができるので群構造だけでなく、内積空間としての構造を持っています。内積空間は和について可換群であることを要求しているため特殊相対論の速度全体 $\mathbb{R}^3_c$ は内積空間にはなりません。しかし、Ungar によって定義された gyrovector space としての構造を持っています。Gyrovector space は和について (gyrocomuutative) gyrogroup である（和について結合法則や可換則を必ずしも要求しない）”内積空間” に類似した対象を扱うための概念です。Gyrovector space は（通常の意味での）内積空間の一般化になっており、the Einstein gyrogroup $(\mathbb{R}^3_c, \oplus_E)$ や Möbius gyrogroup $(\mathbb{D}, \oplus_M)$ は自然に gyrovector space としての構造を持ちます。The Einstein gyrogroup、Möbius gyrogroup に gyrovector space として

の構造を考えたものをそれぞれthe Einstein gyrovector space、Möbius gyrovector spaceと呼びます。内積空間がユークリッド幾何学に対応しているのに対し、gyrovector spaceは双曲幾何に対応していると Ungar は主張しています。実際、the Einstein gyrovecor space は相対論の速度のなす双曲幾何構造と、Möbius gyrovector space はポアンカレ円盤の双曲幾何構造と相性が良いことが確認できます。

単位的 C^*- 環 $\mathscr{A}$ の正値可逆元全体 $\mathscr{A}_+^{-1}$ は (gyrocommutative) gyrogroup としての構造を持つことが知られています。しかしながら、gyrovector space としての構造を持っていません。そこで、新潟大学の羽鳥理先生との共同研究で新たに generalized gyrovector space (以下 GGV) という概念を定義することにしました。Gyrovector space が実内積空間の一般化であるのに対して、GGV は実ノルム空間の一般化になっています。単位的 C^*- 環の正値可逆元全体 $\mathscr{A}_+^{-1}$ はこの GGV としての構造を持つことが確認できます。我々はさらに、ノルム空間についての定理である Mazur-Ulam の定理を GGV 上に拡張しました。

本講演では

1.(Gyrocommutative) gyrogroup、gyrovector space の定義と例

2.GGV の定義と GGV 上で定義される各種概念の定義

3.GGV の構造と単位的 C^*- 環 $\mathscr{A}$ の正値可逆元全体 $\mathscr{A}_+^{-1}$

4.GGV に対する Mazur-Ulam の定理とその応用

についてお話させていただきます。

2 Gyrogroups

二項演算が与えあられた集合を magma と呼びます。Magma $(X, \circ)$ に対して、写像 $\varphi : X \to X$ が全単射で演算を保存するとき、すなわち

$$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \circ \varphi(b) \quad (\forall a, b \in X)$$

を満たすとき、φ は magma$(X, \circ)$ 上の自己同型写像であるといいます。Magma $(X, \circ)$ 上の自己同型写像全体を $\mathrm{Aut}(X, \circ)$ と書くことにします。

Definition 1 (gyrogroup)**.** A magma $(G, \oplus)$ is a gyrogroup if it satisfies the following axioms.

(G1) $\exists \boldsymbol{e} \in G$ s.t. $\forall \boldsymbol{a} \in G$, $\boldsymbol{e} \oplus \boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}$.

(G2) $\forall \boldsymbol{a} \in G$, $\exists \ominus \boldsymbol{a}$ s.t. $\ominus \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}$.

(G3) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in G$, $\exists!\, \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\boldsymbol{c} \in G$ s.t. $\boldsymbol{a} \oplus (\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \oplus \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}$.

(G4) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$, $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \in \mathrm{Aut}(G, \oplus)$.

(G5) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$, $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}] = \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

ここで、(G4)、(G5) で表れる $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ は G から G への写像 $\boldsymbol{z} \mapsto \mathrm{gyr}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]\boldsymbol{z}$ を表しています。この写像 $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ から生成される gyration と呼びます。(G1) では左側単位元の存在を、(G2) ではその左側単位元に対する左側逆元の存在を要求しています。これらは他の公理と組み合

わせることで通常の意味での単位元・逆元になることが確認できます。(G3)、(G4)、(G5) は全てあわせて結合法則よりも弱い条件となっています。したがって gyrogroup は群よりも一般的な対象を表す概念となっています。実際、Magma が「任意の gyration が G 上の恒等写像である」gyrogroup であることと群であることは同値です。

Definition 2 (gyrocommutative)**.** A gyrogroup $(G, \oplus)$ is gyrocommutative if it satisfies

(G6) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$, $\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} = \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](\boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{a})$.

群とは「任意の gyration が G 上の恒等写像である」gyrogroup のことなので、群では gyrocommutativity と可換性は同値になります。したがって、gyrocommutative gyrogroup は可換群の自然な一般化になっています。以下に群ではない gyrocommutative gyrogroup の例を 3 つ挙げます。

Example 3. Let $c > 0$ and $\mathbb{R}^3_c = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{u}\| < c\}$. Define the binary operation $\oplus_E$ on $\mathbb{R}^3_c$ by

$$\boldsymbol{u} \oplus_E \boldsymbol{v} = \frac{1}{1 + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle / c} \left\{ \boldsymbol{u} + \frac{1}{\gamma_u} \boldsymbol{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma_u}{1 + \gamma_u} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{u} \right\},$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the Euclidean inner product on $\mathbb{R}^3$ and $\gamma_u = (1 - \|\boldsymbol{u}\|^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$. Then $(\mathbb{R}^3_c, \oplus_E)$ is a gyrocommutative gyrogroup. It is called the Einstein gyrogroup.

Example 4. Let $\mathbb{D}$ be the open unit disc on $\mathbb{C}$. Define the binary operation $\oplus_M$ on $\mathbb{D}$ by

$$a \oplus_M b = \frac{a + b}{1 + \bar{a} b}.$$

Then $(\mathbb{D}, \oplus_M)$ is a gyrocommutative gyrogroup. It is called Möbius gyrogroup.

Example 5. Let $\mathscr{A}$ be a unital C^*-algebra and $\mathscr{A}_+^{-1}$ be the positive invertible elements of $\mathscr{A}$. Let t be a positive real number. Define the binary operation $\oplus_t$ on $\mathscr{A}_+^{-1}$ by

$$a \oplus_t b = (a^{\frac{t}{2}} b^t a^{\frac{t}{2}})^{\frac{1}{t}}.$$

Then $(\mathscr{A}_+^{-1})$ is a gyrocommutative gyrogroup.

この講演では特に 3 つ目の例に注目します。簡単のため、以降では単位的 C^*- 環 $\mathscr{A}$ として n 次正方行列全体 M_n に作用素ノルム $\|\cdot\|$ を考えたもの、また $t = 1$ とします。したがって、$\mathscr{A}_+^{-1}$ は n 次の正値可逆行列全体 $\mathbb{P}_n$ になります。また二項演算 $\oplus_1$ を $\oplus_p$ と書くことにします。

Example 6. Let $\mathbb{P}_n$ be the $n \times n$ positive definite matrices. Put

$$a \oplus_p b = a^{\frac{1}{2}} b a^{\frac{1}{2}}$$

then $(\mathbb{P}_n, \oplus_p)$ is a gyrocommutative gyrogroup. The identiy element e of the gyrogroup $(\mathbb{P}_n, \oplus_p)$ is the identiy matrix. The inverse element $\ominus_p a$ of a is the inverse matrix a^{-1} of a. The gyration generated by a and b is give by

$$\mathrm{gyr}[a, b]c = X c X^* \quad (\forall c \in \mathbb{P}_n),$$

where X is a unitary matrix give by $X = (a^{\frac{1}{2}} b a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$.

Gyrogroup $(G, \oplus)$ について調べる上で coaddition と呼ばれる新たな演算 $\boxplus$ を考えると便利です。

Definition 7. Let $(G, \oplus)$ be a gyrogroup. The gyrogroup coaddition is a second binary operation $\boxplus$ on G given by

$$a \boxplus b = a \oplus \mathrm{gyr}[a, \ominus b]b.$$

Coaddition $\boxplus$ ともともとの演算 $\oplus$ には密接な関係があります。例えば、gyrogroup $(G, \oplus)$ が gyrocommutative であることと $(G, \boxplus)$ が可換であることは同値です。また一般に

$$\mathrm{Aut}(G, \oplus) = \mathrm{Aut}(G, \boxplus)$$

であることがわかります。特別な場合として、$(G, \oplus)$ が群の場合は $\oplus = \boxplus$ となり、二つの演算は区別されません。

Example 8. The coaddition $\boxplus_p$ of the gyrogroup $(\mathbb{P}_n, \oplus_p)$ is given by

$$a \boxplus b = \{a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}\}^2.$$

3 Gyrovector spaces

内積空間に似た構造を持つ gyrogroup を扱うための概念として gyrovector space が定義されます。

Definition 9 (Gyrovector spaces)**.** Let G be a subset of a real inner product space $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ and $\|\cdot\|$ denotes the norm induced by $\langle\cdot,\cdot\rangle$. $(G, \oplus, \otimes)$ is a gyrovector space if a gyrocommutative gyrogroup $(G, \oplus)$ with the map $\otimes : \mathbb{R} \times G \to G$ satisfies the following axioms.

(GV0) $\langle \mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{a}, \mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{b}\rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$

(GV1) $1 \otimes \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

(GV2) $(r_1 + r_2) \otimes \boldsymbol{a} = (r_1 \otimes \boldsymbol{a}) \oplus (r_2 \otimes \boldsymbol{a})$

(GV3) $(r_1 r_2) \otimes \boldsymbol{a} = r_1 \otimes (r_2 \otimes \boldsymbol{a})$

(GV4) $(|r| \otimes \boldsymbol{a})/\|r \otimes \boldsymbol{a}\| = \boldsymbol{a}/\|\boldsymbol{a}\| \quad (r \neq 0, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{e})$

(GV5) $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](r \otimes \boldsymbol{a}) = r \otimes \mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{a}$

(GV6) $\mathrm{gyr}[r_1 \otimes \boldsymbol{v}, r_2 \otimes \boldsymbol{v}] = id_G$

(GVV) $\exists(\pm\|G\|, \oplus', \otimes')$: a real one-dimensional vector space, where $\pm\|G\| = \{\pm\|\boldsymbol{a}\| : \boldsymbol{a} \in G\}$.

(GV7) $\|r \otimes \boldsymbol{a}\| = |r| \otimes' \|\boldsymbol{a}\|$

(GV8) $\|\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| \oplus' \|\boldsymbol{b}\|$

実内積空間 $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ はそれ自身の和 $+$ とスカラー積 $\cdot$ を考えることで $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ は gyrovector space になります。gyrovectot space は実内積空間の一般化になっています。実内積空間ではない gyrovector space の例としては以下の 2 つが代表的です。

Example 10. Let $(\mathbb{R}^3_c, \oplus_E)$ be the Einstein gyrogroup. Define the Einstein scalar multiplication $\otimes_E$ on $(\mathbb{R}^3_c, \oplus_E)$ by

$$r \otimes_E \boldsymbol{u} = \begin{cases} c \tanh(r \tanh^{-1} \frac{\|\boldsymbol{u}\|}{c}) \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} & (\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3_c \setminus \{\boldsymbol{0}\}) \\ \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}) \end{cases}$$

for any $r \in \mathbb{R}$. Then $(\mathbb{R}^3_c, \oplus_E, \otimes_E)$ is a gyrovector space. It is called the Einstein gyrovector space.

Example 11. Let $(\mathbb{D}, \oplus_M)$ be the Möbius gyrogroup. Define the Möbius scalar multiplication $\otimes_M$ on $(\mathbb{D}, \oplus_M)$ by

$$r \otimes_M a = \begin{cases} \tanh(r \tanh^{-1} |a|) \frac{a}{|a|} & (a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}) \\ 0 & (a = 0) \end{cases}$$

for any $r \in \mathbb{R}$. Then $(\mathbb{D}, \oplus_M, \otimes_M)$ is a gyrovector space. It is called the Möbius gyrovector space.

4 GGV

Gyrovector space は内積空間に似た構造を持つ対象を扱うための概念でした。一般的に実内積空間は gyrovecor space ですが、実ノルム空間は gyrovector space であるとは限りません。そこで、実ノルム空間と gyrovector space の両方の一般化になるように新たに GGV という概念を定義します。

Definition 12 (Generalized gyrovector spaces)**.** Let $(G, \oplus)$ be a gyrocommutative gyrogroup with the map $\otimes : \mathbb{R} \times G \to G$. Let ϕ be a injection from G into a real normed space $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$. $(G, \oplus, \otimes, \phi)$ is a generalized gyrovector space (GGV) if the following axioms are fulfilled.

(GGV0) $\|\phi(\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{a})\| = \|\phi(\boldsymbol{a})\|$

(GGV1) $1 \otimes \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

(GGV2) $(r_1 + r_2) \otimes \boldsymbol{a} = (r_1 \otimes \boldsymbol{a}) \oplus (r_2 \otimes \boldsymbol{a})$

(GGV3) $(r_1 r_2) \otimes \boldsymbol{a} = r_1 \otimes (r_2 \otimes \boldsymbol{a})$

(GGV4) $(\phi(|r| \otimes \boldsymbol{a}))/\|\phi(r \otimes \boldsymbol{a})\| = \phi(\boldsymbol{a})/\|\phi(\boldsymbol{a})\| \quad (r \neq 0, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{e})$

(GGV5) $\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}](r \otimes \boldsymbol{a}) = r \otimes \mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{a}$

(GGV6) $\mathrm{gyr}[r_1 \otimes \boldsymbol{v}, r_2 \otimes \boldsymbol{v}] = id_G$

(GGVV) $(\pm\|\phi(G)\|, \oplus', \otimes')$: a real one-dimensional vector space, where $\pm\|\phi(G)\| = \{\pm\|\phi(\boldsymbol{a})\| : \boldsymbol{a} \in G\}$.

(GGV7) $\|\phi(r \otimes \boldsymbol{a})\| = |r| \otimes' \|\phi(\boldsymbol{a})\|$

(GGV8) $\|\phi(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b})\| \leq \|\phi(\boldsymbol{a})\| \oplus' \|\phi(\boldsymbol{b})\|$

Gyrovector space は実内積空間の部分集合上で定義しているのに対して、GGV は実ノルム空間に埋め込むことを考えています。これは正値可逆行列全体を扱えるようにするためです。埋め込みの写像 ϕ として恒等写像を考えることで gyrovector space は全て GGV であることがわかります。また、和 $+$ とスカラー積 $\cdot$ を持つノルム空間は ϕ として恒等写像、$\oplus = +$,$\otimes = \cdot$ を考えることによりそれ自身が GGV になります。

Example 13. Define
$$r \otimes_p a = a^r$$
for any $r \in \mathbb{R}$ and $a \in \mathbb{P}_n$. Consider the map
$$\phi = \log : \mathbb{P}_n \to (M_n, \|\cdot\|),$$
where $\|\cdot\|$ is the operator norm on M_n. Then $(\mathbb{P}, \oplus_p, \otimes_p, \log)$ is a GGV. An one dimensional vector space $(\pm\|\log(\mathbb{P}_n)\|, \oplus'_p, \otimes'_p) = (\mathbb{R}, +, \times)$ is the usual 1 dimensional real vector space of the real line.

5 GGV 上で定義される概念

GGV は gyrovector space の一般化になっていました。Gyrovector space 上で定義されている概念のうち一部は GGV 上でも自然に定義することができます。

Definition 14 (gyrometric)**.** Let $(G, \oplus, \otimes, \phi)$ be a GGV. The gyrometric ϱ on $(G, \oplus, \otimes, \phi)$ is given by
$$\varrho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \|\phi(\boldsymbol{a} \ominus \boldsymbol{b})\|.$$

Proposition 15. *Let ϱ be the gyrometric on a GGV $(G, \oplus, \otimes, \phi)$ then*

- $\|\phi(\boldsymbol{a})\| = \varrho(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a})$;
- $\varrho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$;
- $\varrho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \varrho(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \varrho(\ominus\boldsymbol{a}, \ominus\boldsymbol{b})$;
- $\varrho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \leq \varrho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \oplus' \varrho(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})$;
- $\varrho(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b}) = \varrho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$;
- $\varrho(\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{a}, \mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{b}) = \varrho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Definition 16 (cogyrometric)**.** Let $(G, \oplus, \otimes, \phi)$ be a GGV. The cogyrometric ρ on $(G, \oplus, \otimes, \phi)$ is given by
$$\rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \|\phi(\boldsymbol{a} \boxminus \boldsymbol{b})\|$$

Proposition 17. *Let rho be the cogyrometric on a GGV* $(G, \oplus, \otimes, \phi)$ *then*

- $\|\boldsymbol{a}\| = \rho(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a})$
- $\rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$
- $\rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \rho(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$
- $\rho(\boldsymbol{a}, \mathrm{gyr}[\boldsymbol{a} \boxminus \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \boxminus \boldsymbol{c}]\boldsymbol{c}) \leq \rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \oplus' \rho(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$
- $\rho(\mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{a}, \mathrm{gyr}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]\boldsymbol{b}) = \rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

特に GGV として実ノルム空間を考えた場合、($\oplus = \boxplus = +$, ϕ は恒等写像であるので）その上の gyrometric と cogyrometric は区別されずノルムから導かれる距離になります。

Example 18. Let ϱ_p be the gyrometric on $(\mathbb{P}_n, \oplus_p, \otimes_p, \log)$ and ρ_p be the cogyrometric on $(\mathbb{P}_n, \oplus_p, \otimes_p, \log)$. Then

$$\varrho_p(a, b) = \|\log(a \ominus_p b)\| = \|\log a^{\frac{1}{2}} b^{-1} a^{\frac{1}{2}}\|$$

and

$$\rho_p(a, b) = \|\log(a \ominus_p b)\| = 2\|\log a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}} b a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}\|.$$

Definition 19. Let $(G, \oplus, \otimes, \phi)$ be a GGV. Put

$$L[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](t) := \boldsymbol{a} \oplus t \otimes (\ominus \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}).$$

$L[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](\mathbb{R})$ is called the gyroline in G that passes through $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$. $L[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]([0, 1])$ is called the gyrosegment $\boldsymbol{ab}$. $L[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](\frac{1}{2})$ is called the gyromidpoint of $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$.

Proposition 20. *Let* $(G, \oplus, \otimes, \phi)$ *be a GGV. Then*

- $L[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](0) = \boldsymbol{a}$;
- $L[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](1) = \boldsymbol{b}$;
- $L[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \otimes (\boldsymbol{a} \boxplus \boldsymbol{b})$;
- $L[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](1 - t) = L[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}](t)$.

Definition 21. Let $(G, \oplus, \otimes, \phi)$ be a GGV. Put

$$L_c[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](t) := t \otimes (\boldsymbol{b} \boxminus \boldsymbol{a}) \oplus \boldsymbol{a}.$$

$L_c[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](\mathbb{R})$ is called the cogyroline in G that passes through $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$. $L_c[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]([0, 1])$ is called the cogyrosegment $\boldsymbol{ab}$. $L_c[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](\frac{1}{2})$ is called the cogyromidpoint of $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$.

Proposition 22. *Let* $(G, \oplus, \otimes, \phi)$ *be a GGV. Then*

- $L_c[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](0) = \boldsymbol{a}$;

○ $L_c[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}](1)=\boldsymbol{b}$;

○ $L[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}](1-t)=L[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}](t)$.

Put $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\boxminus\boldsymbol{a}$ *then* $L_c[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}](t)=t\otimes\boldsymbol{c}\oplus\boldsymbol{a}$.

特に GGV として実ノルム空間を考えた場合、($\oplus=\boxplus=+$, $\otimes=\cdot$ であるので)

$$L[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}](t)=L_c[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}](t)=\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

となり L と L_c は区別されず、$L[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]([0,1])=L_c[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]([0,1])$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を短点とする線分を、$L[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}](\mathbb{R})=L_c[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}](\mathbb{R})$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を通る直線を、$L[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}](\frac{1}{2})=L_c[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}](\frac{1}{2})=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}$ は線形空間としての中点を表します。したがって、(co)gyroline は直線、(co)gyrosegment は線分、(co)gyromidpoint は中点の概念に対応した概念になっています。また、一般的に「$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の (co)gyromidpoint」と「$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ の (co)gyromidpoint」はそれぞれ一致しています。

Example 23. Let $(G,\oplus,\otimes,\phi)=(\mathbb{P}_n,\oplus_p,\otimes_p,\log)$. Then

$$L[a,b](t)=a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}})^{-t}a^{\frac{1}{2}}$$

and

$$L_c[a,b](t)=\{b^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}}ab^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\}^t a\{b^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}}ab^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\}^t.$$

The gyromidpoint of a and b is

$$L[a,b](\frac{1}{2})=a^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}b^{-1}a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}.$$

The cogyromidpoint of a and b is

$$L_c[a,b](\frac{1}{2})=\{b^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}}ab^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}a\{b^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}}ab^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}.$$

6 GGV に対する Mazur-Ulam の定理とその応用

オリジナルの Mazur-Ulam の定理はノルム空間に関するものです。T をノルム空間 $\mathbb{V}$ からノルム空間 $\mathbb{W}$ への全射等距離写像とします。ここで $\mathbb{V}$ と $\mathbb{W}$ の距離はそれぞれノルムから導かれる距離を考えています。すなわち、T は $\|Ta-Tb\|_{\mathbb{W}}=\|a-b\|_{\mathbb{V}}$ を任意の $a,b\in\mathbb{V}$ で満たす全射です。Mazur-Ulam の定理が主張しているのは、このとき $T_0=T-T(0)$ とすると T_0 は $\mathbb{V}$ から $\mathbb{W}$ への線形写像になるということです。すなわち、全射等距離写像 T は線形写像 + 平行移動の形でかけることになります。この定理を GGV 上の定理として一般化することができます。

Theorem 24. *Let* $(G_1,\oplus_1,\otimes_1,\phi_1)$ *and* $(G_2,\oplus_2,\otimes_2,\phi_2)$ *be GGV's. Let* $T:G_1\to G_2$ *be a surjective gyrometric preserving map, that is,*

$$\varrho_2(T\boldsymbol{a},T\boldsymbol{b})=\varrho_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

for any $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G_1$*, where* ϱ_i *is the gyrometric on* G_i $(i = 1, 2)$*. Then* T *is of the form* $T = T(\boldsymbol{e}) \oplus_2 T_0$*, where* T_0 *satisfies*

$$T_0(\boldsymbol{a} \oplus_1 \boldsymbol{b}) = T_0(\boldsymbol{a}) \oplus_2 T_0(\boldsymbol{b});$$

$$T_0(\alpha \otimes_1 \boldsymbol{a}) = \alpha \otimes_2 T_0(\boldsymbol{a});$$

$$\varrho(T_0\boldsymbol{a}, T_0\boldsymbol{b}) = \varrho_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

for every $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G_1$ *and* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

この定理は GGV の間の全射が距離構造（gyrometric）を保存すれば GGV としての構造を全て保存することを示しています。例えば $T(L[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](t)) = L[T\boldsymbol{a}, T\boldsymbol{b}](t)$ などが成立することも簡単に確認できます。

ここまでは簡単のため $\mathscr{A} = M_n$、$t = 1$ の場合についてみてきましたが、同様に一般の単位的 C^*- 環 $\mathscr{A}$ に対して、$(\mathscr{A}_+^{-1}, \oplus_t, \oplus, \log)$ を

$$a \oplus_t b = (a^{\frac{t}{2}} b^t a^{\frac{t}{2}})^{\frac{1}{t}},$$

$$r \otimes a = a^r,$$

$$\log : \mathscr{A}_+^{-1} \to (\mathscr{A}, \|\cdot\|)$$

と定めると GGV であることが確認できます。ここで、$\|\cdot\|$ は C^*- 環 $\mathscr{A}$ のノルムです。また、log の値域 $\log A_+^{-1}$ は $\mathscr{A}$ の self-adjoint 元全体のなす $\mathscr{A}$ の部分空間 $\mathscr{A}_S$ になっています。Gyrometric は

$$\varrho(a, b) = \|\log(a^{-\frac{t}{2}} b^t a^{-\frac{t}{2}})^{\frac{1}{t}}\|$$

で与えられます。

次の定理は Honma and Nogawa[4] によって示されています。特に、$t = 1$ の場合については Hatori and Molnár[3] によって示されています。上記の GGV に対する Mazur-Ulam の定理を用いることでこの定理に簡単な証明を与えることができます。

Theorem 25. *Let* $\mathscr{A}$ *and* $\mathscr{B}$ *be unital* C^**-algebras and* t *a positive real number. Put*

$$d_{\mathscr{A}}(a, b) (\textit{resp. } d_{\mathscr{B}}(a, b)) = \|\log(a^{-\frac{t}{2}} b^t a^{-\frac{t}{2}})^{\frac{1}{t}}\|, a, b \in \mathscr{A}_+^{-1} (\textit{resp. } \mathscr{B}_+^{-1}).$$

Suppose that $T : \mathscr{A}_+^{-1} \to \mathscr{B}_+^{-1}$ *is a surjective isometry, that is,*

$$\|\log(a^{-\frac{t}{2}} b^t a^{-\frac{t}{2}})^{\frac{1}{t}}\| = \|\log(T(a)^{-\frac{t}{2}} T(b)^t T(a)^{-\frac{t}{2}})^{\frac{1}{t}}\|, \quad a, b \in \mathscr{A}_+^{-1}.$$

*Then there exists a Jordan *-isomorphism and a central projection* $p \in \mathscr{B}$ *such that* T *has the form*

$$T(a) = (T(e)^{\frac{t}{2}} (pJ(a) + (e - p)J(a^{-1}))^t T(e)^{\frac{t}{2}})^{\frac{1}{t}}, \quad a \in \mathscr{A}_+^{-1}.$$

Proof. T はGGV$\mathscr{A}_+^{-1}$ から $\mathscr{B}_+^{-1}$ への gyrometric を保存する全射なのでGGV に対する Mazur-Ulam の定理より、$T = T(\boldsymbol{e}) \oplus T_0$ と表すことができます。ここで $\boldsymbol{e}$ は単位的 C^*- 環 $\mathscr{A}$ の単位元を表し、T_0 は

$$T_0((a^{\frac{1}{2}}b^ta^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{t}}) = (T_0(a)^{\frac{1}{2}}T_0(b)^tT_0(a)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{t}},$$

$$T_0(a^r) = T_0(a)^r,$$

$$\|\log(a^{-\frac{t}{2}}b^ta^{-\frac{t}{2}})^{\frac{1}{t}}\| = \|\log(T_0(a)^{-\frac{t}{2}}T_0(b)^tT_0(a)^{-\frac{t}{2}})^{\frac{1}{t}}\|$$

を満たします。ここから先は、[3] で与えられた証明と同様に行えます。$\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ の self-adjoint 元全体のなす部分空間 $\mathscr{A}_S$、$\mathscr{B}_S$ の間の写像 S_0 を

$$S_0(x) = \log T_0(\exp x) \quad (\forall x \in \mathscr{A}_S)$$

で定めます。S_0 は $\mathscr{A}_S$ から $\mathscr{B}_S$ への全単射です。任意の $a \in \mathscr{A}_+^{-1}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して、$T_0(a^{\frac{1}{n}}) = T_0(a)^{\frac{1}{n}}$ であるので、

$$S_0(\frac{x}{n}) = \frac{S_0(x)}{n}$$

が成り立ちます。

$$d_{\mathscr{A}}(\exp\frac{x}{n}, \exp\frac{y}{n}) = d_{\mathscr{B}}(T_0(\exp\frac{x}{n}), T_0(\exp\frac{y}{n})) = d_{\mathscr{B}}(\exp\frac{S_0(x)}{n}, \exp\frac{S_0(y)}{n})$$

より

$$nd_{\mathscr{A}}(\exp\frac{x}{n}, \exp\frac{y}{n}) = nd_{\mathscr{B}}(\exp\frac{S_0(x)}{n}, \exp\frac{S_0(y)}{n})$$

に対して $n \to \infty$ の極限をとれば

$$\|y - x\| = \|S_0(y) - S_0(x)\|$$

が得られます。これは S_0 がノルム空間 $\mathscr{A}_S$ から $\mathscr{B}_S$ への等距離写像であることを示しています。また、$S_0(0) = 0$ であるのでオリジナルの Mazur-Ulam の定理及び Kadison の結果 [?] より、central projection $p \in \mathscr{B}$ と $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ への Jordan$*$-isomorphism J が存在して、

$$S_0(e) = 2p - e,$$

$$S_0(x) = S_0(e)J(x) \quad (\forall x \in \mathscr{A}_S)$$

とできます。S_0 の定め方より、

$$T_0(\exp x) = pJ(\exp x) + (e-p)J(\exp(-x)), \quad x \in \mathscr{A}_S$$

となり、$T = T(\boldsymbol{e}) \oplus T_0$ より

$$T(a) = (T(e)^{\frac{t}{2}}(pJ(a) + (e-p)J(a^{-1}))^tT(e)^{\frac{t}{2}})^{\frac{1}{t}} \qquad \forall a \in \mathscr{A}_+^{-1}.$$

□

7 K-loop

Gyrocommutative gyrogroup と同値な概念として K-loop があります。K-loop の定義は見かけ上は gyrocommutative gyrogroup の定義と異なりますが、実際には同じものであることが知られています [6]。ここで、単位元を持つ magma を groupoid と呼びます。

Definition 26. Let $(X, \circ)$ be a groupoid.

- X is a left loop if the equation $a \circ x = b$ has a unique solution x in X for all $a, b \in X$.
- X is a right loop if the equation $y \circ a = b$ has a unique solution y in X for all $a, b \in X$.
- X is Bol if
$$a \circ (b \circ (a \circ c)) = (a \circ (b \circ a)) \circ c, \quad \forall a, b, c \in X.$$
- X satisfies the automorphic inverse property if any element of X has the inverse, and
$$(a \circ b)^{-1} = (a^{-1}) \circ (b^{-1}), \quad \forall a, b \in X.$$
- X is a loop if it is a left and right loop.
- X is a K-loop if it is a Bol loop which satisfies the automorphic inverse property.

参考文献

[1] T. Abe and O. Hatori, *Generalized Gyrovector Spaces and a Mazur-Ulam theorem*, to appear in Pub. Math. Debrecen

[2] R. Beneduci and L. Molnár, *On the standard K-loop structures of positive invertible elements in a C^*-algebra* J. Math. Anal. Appl., **420** (2014), 551–562

[3] O. Hatori and L. Molnár, *Isometries of the unitary groups and Thompson isometries of the spaces of invertible positiv elements in C^*-algebras*, J. Math. Anal. Appl., **409** (2014), 158–167

[4] S. Honma and T. Nogawa, *Isometries of the geodesic distances for the space of invertible positive operators and matrices*, Linear Algebra Appl., **444** (2014), 152–164

[5] H. Kiechle, *Theory of K-loops*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1778, Springer, Berlin, Heidelberg, 2002 **29(4)** (1998), 304-308

[6] L. V. Sabinin, L. L. Sabinina and L. V. Sbitneva, *On the notion of gyrogroup*, Aequations Math., **56** (1998), 11–17

[7] A. A. Ungar, *Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity*, World Scientific, (2008)

[8] J. Väisälä, *A Proof of the Mazur-Ulam Theorem*, Amer. Math. Monthly, **110** (2003), 633–635

[9] A. Vogt, *Maps which preserve equality of distance*, Studia Math., **45** (1973), 43–48

弱空間に於けるマルチンゲール不等式

菊池 万里
富山大学大学院 理工学研究部

1　導入

$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ を確率空間とし，$\mathcal{A}$ を Σ の部分 σ–代数とする．$x \in L_1$ とするとき，すべての $A \in \mathcal{A}$ に対して

$$\int_A x \, d\mathbb{P} = \int_A y \, d\mathbb{P}$$

となるような $\mathcal{A}$–可測確率変数 y が一意に存在する．この y を $\mathbb{E}[x|\mathcal{A}]$ と書き，x の $\mathcal{A}$ に関する**条件付平均値**と呼ぶ.

$n \in \mathbb{Z}_+$ に関して広義単調増加な Σ の部分 σ–代数の列 $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ に対し，Ω 上の確率変数列 (離散時径数の確率過程) $f = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ が $\mathscr{F}$–**マルチンゲール**であるとは, 次の 2 条件を満たすことである:

(i) 各 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して $f_n \in L_1(\Omega, \mathscr{F}_n, \mathbb{P})$.

(ii) 各 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して $\mathbb{E}[f_{n+1}|\mathscr{F}_n] = f_n$.

条件 (ii) は,

(ii′) 各 $n \in \mathbb{Z}_+$ と各 $A \in \mathscr{F}_n$ に対して $\displaystyle\int_A f_{n+1} \, d\mathbb{P} = \int_A f_n \, d\mathbb{P}$

という条件に置き換えることができる．(ii′) は「$f_{n+1} - f_n$ が任意の $x \in L_\infty(\Omega, \mathscr{F}_n, \mathbb{P})$ と直行する」ということを意味する．このように解釈すれば,「マルチンゲールの概念は, 確率論的というより，むしろ解析学的な概念である」と理解する方が自然であることがわかる．例えば, $\mathbb{E}[x_k] = 0$ である独立な確率変数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ の第 n 部分和を f_n とすれば，$f = (f_n)$ はマルチンゲールになる.

L_1 でノルム有界なマルチンゲールは概収束する．マルチンゲール $f = (f_n)$ が概収束するとき，その極限を f_∞ と書く.

確率変数の族 $\mathcal{H}$ が**一様可積分**であるとは,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{x\in\mathcal{H}}\mathbb{E}\left[|x|\,\mathbb{1}_{\{|x|>\lambda\}}\right]=0$$

となることである．$\mathcal{H}$ が一様可積分であれば L_1 でノルム有界であるが，その逆は成立しない．一方，$1<p\leq\infty$ のとき，$\mathcal{H}$ が L_p でノルム有界であれば $\mathcal{H}$ は一様可積分になる．$\mathscr{F}$–マルチンゲール $f=(f_n)$ が一様可積分である為の必要十分条件は，ある確率変数 x を用いて

$$f_n=\mathbb{E}\left[x|\mathscr{F}_n\right],\quad n\in\mathbb{Z}_+,$$

のように表現されることである．x が $\bigvee_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n:=\sigma(\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n)$ に関して可測であれば，$f=(f_n)$ は x に概収束する．すなわち，$x=f_\infty$ a.s. となる．

本講演を通して，広義単調増加な Σ の部分 σ–代数の列 (filtration) の全体を $\mathbb{F}$ で表し，$\mathscr{F}=(\mathscr{F}_n)\in\mathbb{F}$ と $\mathbb{P}$ に関するマルチンゲールの全体を $\mathscr{M}(\mathscr{F})$ で表す．また，一様可積分な $f=(f_n)\in\mathscr{M}(\mathscr{F})$ の全体を $\mathscr{M}_u(\mathscr{F})$ と記す．更に，$\mathscr{M}=\bigcup_{\mathscr{F}\in\mathbb{F}}\mathscr{M}(\mathscr{F})$, $\mathscr{M}_u=\bigcup_{\mathscr{F}\in\mathbb{F}}\mathscr{M}_u(\mathscr{F})$ と置く．すなわち，$\mathscr{M}$ は $(\Omega,\Sigma,\mathbb{P})$ 上のマルチンゲールの全体，$\mathscr{M}_u$ は $(\Omega,\Sigma,\mathbb{P})$ 上で一様可積分なマルチンゲールの全体を表す.

$f=(f_n)\in\mathscr{M}$ に対し,

$$Mf:=\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|f_n|,\qquad Sf:=\left[\sum_{n=1}^{\infty}(\Delta_n f)^2+f_0^2\right]^{1/2}$$

と置いて，それぞれ $f=(f_n)$ の**極大関数**，**2 次変分**と呼ぶ．ここに，$\Delta_n f$ は $f=(f_n)$ の差分を表す．すなわち，$\Delta_n f=f_n-f_{n-1}$ とする．D. G. Austin が 1966 年に発表した,「L_1 でノルム有界な $f=(f_n)\in\mathscr{M}$ に対して $Sf<\infty$ となる」という結果が，1970 年代以降のマルチンゲール理論の発展に大きな影響を与えた．現代のマルチンゲール理論に於いては，極大関数と 2 次変分は理論の中核を成す概念となっている．

本講演では，極大関数，2 次変分に加え，平均振動に関する不等式を考察する．各 $f=(f_n)\in\mathscr{M}_u(\mathscr{F})$ に対し,

$$\theta_{\mathscr{F}}f:=\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\mathbb{E}\left[|f_m-f_{n-1}||\mathscr{F}_n\right]$$

と置いて，これを $f=(f_n)$ の**（極大）平均振動**と呼ぶ．$\theta_{\mathscr{F}}f\in L_\infty$ であるような $f=(f_n)\in\mathscr{M}(\mathscr{F})$ は，BMO–マルチンゲールと呼ばれ，これもまたマルチンゲール理論を支える重要な概念となっている．

$1<p\leq\infty$ のとき，L_p でノルム有界な $f=(f_n)\in\mathscr{M}_u$ に対し，不等式

$$\|Mf\|_{L_p}\leq C_p\|f_\infty\|_{L_p}$$

が成り立つことは，よく知られている (Doob の極大不等式: [4] 参照)．但し，C_p は p のみに依存する定数を表す.

Doob の不等式は様々に拡張されている: X を確率空間 $([0,1],\mathfrak{M},\mu)$ 上の再配列不変な Banach 関数空間とする（定義 2.1，定義 2.3 参照）．但し，$\mathfrak{M}$ は $[0,1]$ 上の Lebesgue 可測集合の全体，μ は Lebesgue 測度を表す．Antipa [1] と Novikov [15] は，$([0,1],\mathfrak{M},\mu)$ 上のマルチンゲールに対する Doob 型の不等式

$$\|Mf\|_X \leq C_X \|f_\infty\|_X \tag{1.1}$$

がすべての $f=(f_n)\in\mathscr{M}_u$ に対して成立することと，$\beta_X<1$ となることが同値であることを，それぞれ独立に証明した．ここに，β_X は X の上 Boyd 指数[*1]を表し，C_X は X のみに依存する定数を表す．他方，Antipa [1], Johnson–Schechtman [7], Novikov [15] は，Burkholder–Davis–Gundy 型の不等式

$$C_X^{-1}\|Mf\|_X \leq \|Sf\|_X \leq C_X \|Mf\|_X \tag{1.2}$$

がすべての $f=(f_n)\in\mathscr{M}$ に対して成立することと，$\alpha_X>0$ となることが同値であることを，それぞれ独立に証明した．ここに，α_X は X の下 Boyd 指数[*1]を表す．これらの結果から，Burkholder 型の不等式

$$C_X^{-1}\|f_\infty\| \leq \|Sf\|_X \leq C_X \|f_\infty\|_X \tag{1.3}$$

がすべての $f=(f_n)\in\mathscr{M}_u$ に対して成立することと，$\alpha_X>0$ かつ $\beta_X<1$ となることが同値であることが導かれる.

より一般的に，X がアトムを持たない確率空間 $(\Omega,\Sigma,\mathbb{P})$ 上の再配列不変性をもつとは限らない Banach 関数空間とする．このとき，不等式 (1.1), (1.2), (1.3) のいずれかがすべての $f=(f_n)\in\mathscr{M}_u$ に対して成立すれば,「同値的にノルムを付け替えることにより，X は再配列不変になる」ことが後に証明され，これらの不等式が成立する Banach 関数空間の完全な特徴づけが得られた ([8], [9], [10]).

更に，X をアトムを持たない確率空間 $(\Omega,\Sigma,\mathbb{P})$ 上の Banach 関数空間とするとき，平均振動に関する不等式

$$C_X^{-1}\|f_\infty\|_X \leq \|\theta_{\mathscr{F}} f\|_X \leq C_X \|f_\infty\|_X$$

[*1] 本講演で紹介する結果の証明には Boyd 指数の概念を利用する必要があるが，結果を述べる為には Boyd 指数について言及する必要はない．従って Boyd 指数の詳細については省略する．[2] などを参照されたい.

が成り立つ為の必要十分条件は，「同値的にノルムを付け替えることにより，X は再配列不変になり，$\alpha_X > 0$ かつ $\beta_X < 1$ となる」ことであることが証明された ([9]).

本講演では上記の結果を更に発展させ，X の弱空間 w-X に於いて，Doob 型，Burkholder 型の不等式，及び，平均振動に関する不等式が成立する為の条件を考察する．ここに，弱空間 w-X は，次節に定義する通り，X から自然に導かれる空間であり，$X = L_p$ の場合，w-X は Lorentz 空間 $L_{p,\infty}$ と一致するような空間である．

2 準備

本講演を通して，$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ はアトムを持たない確率空間とする．Ω 上の実数値確率変数の全体を L_0 で表し，L_0 には確率収束 (測度収束) の位相が与えらているものとする．

線形空間 X 上の**準ノルム** $\|\cdot\|_X$ は，三角不等式の代わりに，不等式

$$\|x + y\|_X \le K(\|x\|_X + \|y\|_X)$$

を満たすということ以外は，通常のノルムと同様に定義される．但し，K は x, y に依存しない定数を表す．準ノルムが定義された空間を**準ノルム空間**と呼ぶ．X が準ノルム空間であれば，X 上の距離関数 d を

$$\|x_n - x\| \to 0 \ (n \to \infty) \iff d(x_n, x) \to 0 \ (n \to \infty)$$

となるように定義することことができる．斯くして，準ノルム空間は線形位相空間になる．距離空間 (X, d) が完備であるとき，X を**準 Banach 空間**と呼ぶ.

X, Y を Ω 上の確率変数から成る線形位相空間とするとき，$X \hookrightarrow Y$ と書いて，X が Y に連続的に埋め込まれるていること，すなわち，$X \subset Y$ であり，包含写像が連続であることを表す．特に，X, Y が (準) Banach 空間であれば，$X \hookrightarrow Y$ である為の必要十分条件は，すべての $x \in X$ に対して，$\|x\|_Y \le c\,\|x\|_X$ であるような定数 $c > 0$ が存在することである．

Definition 2.1. (a) 確率変数の Banach 空間 X が **Banach 関数空間**であるとは，X が次の 3 条件を満たすことである:

(B1) $L_\infty \hookrightarrow X \hookrightarrow L_1$.

(B2) $|y| \le |x|$ a.s. かつ $x \in X$ であれば，$y \in X$ かつ $\|y\|_X \le \|x\|_X$.

(B3) $x_n \in X$, $0 \le x_n \uparrow x$ a.s., $\sup_n \|x_n\|_X < \infty$ であれば，$x \in X$ かつ $\|x\|_X = \sup_n \|x_n\|_X$.

(b) 確率変数の準 Banach 空間 X が，**準 Banach 関数空間**であるとは，X が上記の (B2), (B3) に加え，次の条件を満たすことである:

(Q1) $L_1 \hookrightarrow X \hookrightarrow L_0$.

(準) Banach 関数空間 X に対し，$x \notin X$ であれば，便宜上 $\|x\|_X = \infty$ と約束する.

例えば，Lebesgue 空間，Orlicz 空間，Lorentz 空間などは，Banach 関数空間である. また，(ある種の可積分性を持つ荷重を備えた) 荷重 Lebesgue 空間や変動指数の Lebesgue 空間なども Banach 関数空間になる.

Definition 2.2. X を Banach 関数空間とするとき，各 $x \in L_0$ に対して，

$$\|x\|_{X'} := \sup\left\{\mathbb{E}\left[|xy|\right] : y \in X,\ \|y\|_X \le 1\right\}$$

と置き，L_0 の線形部分空間 X' を

$$X' := \{x \in L_0 \colon \|x\|_{X'} < \infty\}$$

のように定義する. X' を X の**提携空間**と呼ぶ.

例えば，$1 \le p \le \infty$ のとき，$(L_p)' = L_{p'}$ となる. 但し，p' は p の共役指数を表す.

Banach 関数空間 X の提携空間 X' は Banach 関数空間になる. 多くの場合，提携空間は双対空間と一致する. 但し，$(L_\infty)' = L_1$ となることに注意すればわかるように，一般に提携空間と双対空間は一致しない[*2].

Ω 上の確率変数 x と y が同じ分布を持つとき，すなわち，すべての $\mathbb{R}$ の Borel 部分集合 B に対して $\mathbb{P}\{x \in B\} = \mathbb{P}\{y \in B\}$ であるとき，$x \simeq_d y$ と書く.

Definition 2.3. Banach 関数空間 X は，次の条件を満たすとき，**再配列不変**であるといわれる:

(RI) $x \simeq_d y$ かつ $x \in X$ であれば，$y \in X$ であり，$\|x\|_X = \|y\|_Y$.

勿論，Lebesgue 空間や Orlicz 空間は再配列不変であるが，一般に荷重 Lebesgue 空間や変動指数を持つ Lebesgue 空間は再配列不変ではない.

今後，Ω 若しくは $[0,1]$ の可測部分集合 A に対し，その**指示関数（特性関数）**を $\mathbb{1}_A$ で表す.

[*2] Banach 関数空間 X の提携空間と双対空間が一致する為の必要十分条件は，X が絶対連続なノルムを持つこと，すなわち，$x \in X$, $A_n \in \Sigma$, $A_n \downarrow A$ であれば $\|x\mathbb{1}_{A_n}\|_X \downarrow \|x\mathbb{1}_A\|_X$ となることである ([2, Chapter 1] 参照).

Definition 2.4. X を Banach 関数空間とするとき，各 $x \in L_0$ に対し，

$$\|x\|_{\text{w-}X} := \sup_{\lambda>0} \lambda \left\| \mathbb{1}_{\{|x|>\lambda\}} \right\|_X$$

と置き，X の弱空間 weak-X を

$$\text{weak-}X := \{x \in L_0 \colon \|x\|_{\text{w-}X} < \infty\}$$

のように定義する．weak-X を簡単に w-X と書く．

Banach 関数空間 X の弱空間 w-X は，準 Banach 関数空間であり，一般に Banach 空間にはならない．実際，$\|\cdot\|_{\text{w-}X}$ は，三角不等式の代わりに，不等式

$$\|x+y\|_{\text{w-}X} \le 2(\|x\|_{\text{w-}X} + \|y\|_{\text{w-}X})$$

を満たす．

例えば，$1 \le p < \infty$ のとき，w-L_p は

$$\|x\|_{\text{w-}L_p} = \sup_{\lambda>0} \lambda \mathbb{P}\{|x| > \lambda\}^{1/p}$$

であるような $x \in L_0$ の全体となるが，これは Lorentz 空間 $L_{p,\infty}$ に他ならない．特に $1 < p < \infty$ のとき，$\|\cdot\|_{\text{w-}L_p}$ は $L_{p,\infty}$ のノルム $\|\cdot\|_{L_{p,\infty}}$ と同値になり，結果的に w-L_p は Banach 関数空間とみなすことができる．これに対し，$p = \infty$ のときは，w-L_∞ は L_∞ と一致し，$\|\cdot\|_{\text{w-}L_\infty} = \|\cdot\|_{L_\infty}$ となる．

確率空間 $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ は，アトムを持たないことを仮定しているので，各 $t \in [0,1]$ に対し，$\mathbb{P}(A) = t$ なる $A \in \Sigma$ が存在する．このような A の全体を $\Sigma(t)$ と置き，与えられた Banach 関数空間 X に対し，2 つの関数 $\overline{\varphi}_X \colon [0,1] \to \mathbb{R}$，$\underline{\varphi}_X \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$\overline{\varphi}_X(t) := \sup_{A \in \Sigma(t)} \|\mathbb{1}_A\|_X, \qquad \underline{\varphi}_X(t) := \inf_{A \in \Sigma(t)} \|\mathbb{1}_A\|_X$$

のように定義する．特に X が再配列不変のとき，$A, B \in \Sigma(t)$ に対し $\mathbb{1}_A$ と $\mathbb{1}_B$ は同分布になるので，$\|\mathbb{1}_A\|_X = \|\mathbb{1}_B\|_X$ である．よって，

$$\overline{\varphi}_X(t) = \underline{\varphi}_X(t) = \|\mathbb{1}_A\|_X \qquad (A \in \Sigma(t))$$

となる．このとき，$\overline{\varphi}_X(t)$ を $\varphi_X(t)$ と書いて，X の**基本関数**と呼ぶ．すなわち，

$$\varphi_X(t) = \|\mathbb{1}_A\|_X \qquad (A \in \Sigma(t)).$$

例えば，$1 \le p < \infty$ のとき，$\varphi_{L_p}(t) = t^{1/p}$ となり，$p = \infty$ のとき，$\varphi_{L_\infty}(t) = \mathbb{1}_{(0,1]}(t)$ となる．

本講演で紹介する結果を述べる上で，Marcinkiewicz 空間の概念は欠かせない．その定義を述べる為に，確率変数の再配列を定義することから始める．$x \in L_0$ とするとき，区間 $(0,1]$ 上の関数 x^* を

$$x^*(t) := \inf\bigl\{\lambda > 0\colon \mathbb{P}\{|x| > \lambda\} \le t\bigr\}, \qquad t \in (0,1],$$

のように定義し，これを x の**減少再配列**と呼ぶ．但し，上記の右辺に於いて (また本稿を通して)，$\inf\emptyset = \infty$ と約束する．x^* は (Lebesgue 測度) μ に関して $|x|$ と同じ分布を持つ，すなわち，$[0,\infty)$ の任意の Borel 部分集合 B に対して

$$\mu\{x^* \in B\} = \mathbb{P}\{|x| \in B\}$$

となるような $[0,1]$ 上の広義単調減少関数として特徴づけられる．

関数 $\varphi\colon [0,1] \to [0,\infty)$ は，次の 3 条件を満たすとき，準凹関数と呼ばれる:

- ∘ $\varphi(t) = 0 \iff t = 0$.
- ∘ $\varphi(t)$ は $[0,1]$ 上で広義単調増加.
- ∘ $\varphi(t)/t$ は $(0,1]$ 上で広義単調減少.

$\varphi(t) = 0$ であるような広義単調増加凹関数 φ は準凹関数である．準凹関数 φ が与えられたとき，各 $x \in L_0$ に対し

$$\|x\|_{M^*(\varphi)} := \sup_{0<t\le 1}\bigl[\varphi(t)x^*(t)\bigr], \qquad \|x\|_{M(\varphi)} := \sup_{0<t\le 1}\frac{\varphi(t)}{t}\int_0^t x^*(s)\,ds$$

と置き，L_0 の線形部分空間 $M^*(\varphi)$, $M(\varphi)$ を

$$M^*(\varphi) := \bigl\{x \in L_0\colon \|x\|_{M^*(\varphi)} < \infty\bigr\}, \qquad M(\varphi) := \bigl\{x \in L_0\colon \|x\|_{M(\varphi)} < \infty\bigr\}$$

のように定義する．このとき，$M^*(\varphi)$ は準 Banach 関数空間になり，$M(\varphi)$ は Banach 関数空間になる．これらは，いずれも **Marcinkiewicz 空間**と呼ばれる．簡単な計算から，w-$M(\varphi) = M^*(\varphi)$ となることが確かめられる．例えば，$1 < p < \infty$ のとき，

$$M^*(\varphi_{L_p}) = M(\varphi_{L_p}) = L_{p,\infty}\ (= \text{w-}L_p)$$

となり，$p = 1$ のときは,

$$M^*(\varphi_{L_1}) = \text{w-}L_1, \qquad M(\varphi_{L_1}) = L_1$$

となる．

X が Banach 関数空間のとき，$\overline{\varphi}_X(t)$ は準凹関数になる ([11])．従って，各 Banach 関数空間 X に対し，Marcinkiewicz 空間 $M^*(\overline{\varphi}_X)$ と $M(\overline{\varphi}_X)$ を対応させることができる．

再び $\varphi\colon [0,1] \to [0,\infty)$ を一般の準凹関数とする．関数 $m_\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$m_\varphi(s) := \sup_{0<t\leq(1/s)\wedge 1} \frac{\varphi(st)}{\varphi(t)} = \sup_{0<t\leq s\wedge 1} \frac{\varphi(t)}{\varphi(t/s)}$$

のように定義し，

$$p_\varphi := \sup_{0<s<1} \frac{\log m_\varphi(s)}{\log s}, \qquad q_\varphi := \inf_{1<s<\infty} \frac{\log m_\varphi(s)}{\log s}$$

と置く．このとき，

$$p_\varphi = \lim_{s\to 0+} \frac{\log m_\varphi(s)}{\log s}, \qquad q_\varphi = \lim_{s\to\infty} \frac{\log m_\varphi(s)}{\log s}$$

かつ

$$0 \leq p_\varphi \leq q_\varphi \leq 1$$

となる．ここでは詳細を省略するが，前述の通り再配列不変空間 X の Boyd 指数を α_X，β_X で表すことにすれば，

$$p_\varphi = \alpha_{M(\varphi)}, \qquad q_\varphi = \beta_{M(\varphi)}$$

となることを示すことができる ([12])．例えば，$p_{\varphi_{L_p}} = q_{\varphi_{L_p}} = 1/p$ となる．

3 条件付平均作用素の有界性と Doob 型不等式

マルチンゲール不等式の中で，最もよく知られた不等式は Doob の不等式であろう．マルチンゲールの概念を導入し，その理論の基本的な部分を一人で確立した Doob は，「マルチンゲール」との用語が用いられる前から，$1 < p \leq \infty$ のときに，すべての $f = (f_n) \in \mathscr{M}_u$ に対して不等式

$$\|Mf\|_{L_p} \leq C_p \|f_\infty\|_{L_p}$$

が成り立つことを証明した．C_p は p のみに依存する定数であるが，具体的には $C_p = p/(p-1)$ とできる．更に，$p = 1$ のときには，不等式

$$\sup_{\lambda>\lambda} \lambda \mathbb{P}\{|Mf| > \lambda\} \leq \|f_\infty\|_{L_1}$$

がすべての $f=(f_n)\in\mathscr{M}_u$ に対して成り立つことを [5] の中で述べている．それらの証明には，条件付平均作用素が L_p から L_p への作用素として有界であることが用いられる．以下に，Banach 関数空間 X の弱空間に於ける，条件付平均作用素の一様有界性と Doob 型の不等式について述べる．

線形作用素 $T\colon L_1\to L_1$ は，それ自体が有界作用素で $\|T\|_{B(L_1)}\le 1$ であり，更に L_∞ への制限 $T|_{L_\infty}$ が L_∞ から L_∞ への有界作用素で $\|T|_{L_\infty}\|_{B(L_\infty)}\le 1$ となるとき，$\boldsymbol{L_1}$**–**$\boldsymbol{L_\infty}$**-contraction** と呼ばれる．但し，$\|T\|_{B(L_1)}$, $\|T|_{L_\infty}\|_{B(L_\infty)}$ は作用素ノルムを表す．例えば，条件付平均作用素 $\mathbb{E}[\,\cdot\,|\,\mathcal{A}]$ は L_1–L_∞-contraction である．

Theorem 3.1 ([11])**.** X を Banach 関数空間とするとき，次の各条件は互いに同値である:

(i) すべての $x\in X$ とすべての L_1–L_∞-contraction に対して

$$\|Tx\|_{\text{w-}X}\le C\,\|x\|_X$$

であるような定数 $C>0$ が存在する．

(ii) すべての $x\in X$ と Σ のすべての部分 σ–代数 $\mathcal{A}$ に対して

$$\|\mathbb{E}\,[x|\,\mathcal{A}]\|_{\text{w-}X}\le C\,\|x\|_X$$

であるような定数 $C>0$ が存在する．

(iii) すべての $t\in[0,1]$ に対し，

$$\overline{\varphi}_X(t)\overline{\varphi}_{X'}(t)\le Ct$$

であるような定数 $C>0$ が存在する．

(iv) $X\hookrightarrow M(\overline{\varphi}_X)$.

上記の条件が成立するとき，w-$X=M^*(\overline{\varphi}_X)$ となり，これらの空間の準ノルムは互いに同値である．

Banach 関数空間 X が再配列不変であれば，すべての $t\in[0,1]$ に対して

$$\overline{\varphi}_X(t)\overline{\varphi}_{X'}(t)=\varphi_X(t)\varphi_{X'}(t)=t$$

となることが知られている ([2, p. 66])．従ってこの場合，定理 3.1 の条件 (i)–(iv) が成立する．

Remark. X' の提携空間 $X'' := (X')'$ は X と一致する．従って，定理 3.1 の条件 (iii) の不等式は，

$$\overline{\varphi}_{X''}(t)\overline{\varphi}_{X'}(t) \leq Ct$$

と書き換えられる．このことは，定理 3.1 の条件が成り立つとき，それらの条件は X を X' に置き換えても成り立つことを意味する．

更に，次の定理が示すように，定理 3.1 の各条件はマルチンゲールの極大関数に関する弱不等式 (Doob 型の弱不等式) と同値である．

Theorem 3.2 ([11])**.** X を Banach 関数空間とするとき，次の各条件は互いに同値である:

(i) すべての $f = (f_n) \in \mathscr{M}_u$ に対して，

$$\|Mf\|_{\text{w-}X} \leq C\|f_\infty\|_X \tag{3.1}$$

であるような定数 $C > 0$ が存在する．

(ii) すべての $f = (f_n) \in \mathscr{M}_u$ に対して，

$$\|Mf\|_{\text{w-}X'} \leq C\|f_\infty\|_{X'} \tag{3.2}$$

であるような定数 $C > 0$ が存在する．

(iii) 定理 3.1 の条件 (i)–(iv) が成立する．

不等式 (3.1) に於いて，$\|f_\infty\|_X$ を $\varliminf_{n\to\infty}\|f_n\|_X$，或いは，$\varlimsup_{n\to\infty}\|f_n\|_X$，に置き換えてもよい．その場合，$f = (f_n)$ は一様可積分でなくてもよい．(3.2) に関しても同様である．

上記の条件が成立するとき，w-$X = M^*(\overline{\varphi}_X)$ となり，これらの空間の準ノルムは互いに同値である．

既に指摘した通り，Banach 関数空間 X が再配列不変であれば，定理 3.1 の条件 (i)–(iv) が成立し，従って (3.1) 及び (3.2) が成立する．特に $X = L_p$ とすれば，(3.1) は

$$\sup_{\lambda>0}\lambda\mathbb{P}\{Mf > \lambda\}^{1/p} \leq C\|f_\infty\|_{L_p}$$

と書き換えられる．これは，$1 < p < \infty$ の場合には，Doob の不等式から容易に導かれる不等式であり，$p = 1$ の場合も，Doob 型の弱不等式としてよく知られたものである．

不等式 (3.1) は，$\|Mf\|_{\text{w-}X}$ を $\|f_\infty\|_X$ で評価する不等式であるが，$\|Mf\|_{\text{w-}X}$ を $\|f_\infty\|_{\text{w-}X}$ で評価する不等式については，どのような結果になるであろうか．次の定理は，この疑問に答える．

Theorem 3.3 ([13])**.** X を Banach 関数空間とするとき，次の各条件は互いに同値である:

(i) すべての $x \in X$ と Σ のすべての部分 σ–代数 $\mathcal{A}$ に対して

$$\|\mathbb{E}[x|\mathcal{A}]\|_{\text{w-}X} \le C\,\|x\|_{\text{w-}X}$$

であるような定数 $C > 0$ が存在する．

(ii) すべての $f = (f_n) \in \mathscr{M}_u$ に対して，

$$\|Mf\|_{\text{w-}X} \le C\,\|f_\infty\|_{\text{w-}X} \tag{3.3}$$

であるような定数 $C > 0$ が存在する．

(iii) すべての $t \in [0,1]$ に対して

$$\overline{\varphi}_X(t) \le C\underline{\varphi}_X(t) \tag{3.4}$$

であるような定数 $C > 0$ が存在し，$q_{\overline{\varphi}_X} < 1$.

(iv) すべての $t \in [0,1]$ に対して (3.4) が成り立つような定数 $C > 0$ が存在し，

$$\varlimsup_{t\to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} < A \tag{3.5}$$

であるような定数 $A > 1$ が存在する．

不等式 (3.4) は，不等式 “$\overline{\varphi}_X(t)\overline{\varphi}_{X'}(t) \le Ct$” に置き換えることができる．

上記の条件が成立するとき，w-$X = M^*(\overline{\varphi}_X) = M(\overline{\varphi}_X)$ となり，これらの空間の (準) ノルムは，どの 2 つも互いに同値である．

すべての $t \in [0,1]$ に対して，$\varphi_{L_p}(t)\varphi_{L_{p'}}(t) = t$ であり，$p_{\varphi_{L_p}} = q_{\varphi_{L_p}} = 1/p$ であるから，上記の定理から不等式

$$\sup_{\lambda>0} \lambda\mathbb{P}\{Mf > \lambda\}^{1/p} = \|Mf\|_{\text{w-}L_p} \le C_p\,\|f_\infty\|_{\text{w-}L_p} = C_p \sup_{\lambda>0} \lambda\mathbb{P}\{|f_\infty| > \lambda\}^{1/p}$$

がすべての $f = (f_n) \in \mathscr{M}_u$ に対して成り立つ為の必要十分条件は，$1 < p \le \infty$ となることであることがわかる．但し，$p = \infty$ のときは，(3.3) は次のような自明な不等式になる（実際，$C_\infty = 1$ とできる）．

$$\|Mf\|_{L_\infty} \le C_\infty\,\|f_\infty\|_{L_\infty}$$

Remark. X が一般の Banach 関数空間のとき，$\overline{\varphi}_X(t)$ は準凹関数であるが，必ずしも凹関数とは限らない．$X = L_p$ の場合は，$\overline{\varphi}_X(t) = \varphi_{L_p}(t) = t^{1/p}$ となり，これは凹関数である．

$\overline{\varphi}_X(t)$ が凹関数であるとき，不等式 (3.5) がある $A > 1$ に対して成立すれば，すべての $A > 1$ に対して成立する．特に，「$A = 2$ の場合に (3.5) が成り立つ」という条件は，Lorentz の論文 [14] などで既に考察されている．

他方，$\overline{\varphi}_X(t)$ が凹関数でないとき，(3.5) は $A > 1$ は大きいほど成立しやすいが，すべての $A > 1$ に対しては成立するとは限らない（下記付録参照）．

4　Burkholder 型の不等式

Doob 型の（極大）不等式と同様に，よく知られたマルチンゲール不等式として，Burkholder の不等式がある．Burkholder は彼の有名な論文 [3] の中で，$1 < p < \infty$ のとき，不等式

$$C_p^{-1} \|f_\infty\|_{L_p} \le \|Sf\|_{L_p} \le C_p \|f_\infty\|_{L_p}$$

が成り立つことを証明した．同様の不等式が Banach 関数空間 X の弱空間 w-X に於いて成立する為の条件を以下に述べる．

Theorem 4.1 ([13])**.** X を Banach 関数空間とするとき，次の各条件は互いに同値である:

(i) すべての $f = (f_n) \in \mathscr{M}_u$ に対して，

$$C^{-1} \|f_\infty\|_{\text{w-}X} \le \|Sf\|_{\text{w-}X} \le C \|f_\infty\|_{\text{w-}X}$$

であるような定数 $C > 0$ が存在する．

(ii) すべての $t \in [0, 1]$ に対して

$$\overline{\varphi}_X(t) \le C \underline{\varphi}_X(t) \tag{4.1}$$

であるような定数 $C > 0$ が存在し，$0 < p_{\overline{\varphi}_X}$ かつ $q_{\overline{\varphi}_X} < 1$.

(iii) すべての $t \in [0, 1]$ に対して (4.1) が成り立つような定数 $C > 0$ が存在し，

$$1 < \varliminf_{t \to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} \quad \text{かつ} \quad \varlimsup_{t \to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} < A \tag{4.2}$$

であるような定数 $A > 1$ が存在する．

不等式 (4.1) は，不等式 “ $\overline{\varphi}_X(t)\overline{\varphi}_{X'}(t) \le Ct$” に置き換えることができる．

上記の条件が成立するとき，w-$X = M^*(\overline{\varphi}_X) = M(\overline{\varphi}_X)$ となり，これらの空間の (準) ノルムは，どの 2 つも互いに同値である．

上記の定理から，

$$C_p^{-1}\,\|f_\infty\|_{\text{w-}L_p} \le \|Sf\|_{\text{w-}L_p} \le C_p\,\|f_\infty\|_{\text{w-}L_p}$$

がすべての $f = (f_n) \in \mathscr{M}_u$ に対して成り立つ為の必要十分条件は，$1 < p < \infty$ となることであることがわかる．上記の不等式は次のように書き換えられる．

$$C_p^{-1}\sup_{\lambda>0}\lambda\mathbb{P}\{|f_\infty| > \lambda\}^{1/p} \le \sup_{\lambda>0}\lambda\mathbb{P}\{|Sf| > \lambda\}^{1/p} \le C_p\sup_{\lambda>0}\lambda\mathbb{P}\{|f_\infty| > \lambda\}^{1/p}.$$

Remark. $\overline{\varphi}_X(t)$ が凹関数であるとき，不等式 (4.2) がある $A > 1$ に対して成立すれば，すべての $A > 1$ に対して成立する．他方，$\overline{\varphi}_X(t)$ が凹関数でないとき，(4.2) は $A > 1$ が大きいほど成立しやすいが，すべての $A > 1$ に対して成立するとは限らない (下記付録参照)．

5　平均振動に関する不等式

L_2 でノルム有界な各 $f = (f_n) \in \mathscr{M}_u(\mathscr{F})$ に対し，

$$\Gamma_p(f:\mathscr{F}) := \left\{\gamma \in L_p\colon \mathbb{E}\left[(f_\infty - f_{n-1})^2\middle|\mathscr{F}_n\right] \le \mathbb{E}\left[\gamma^2\middle|\mathscr{F}_n\right]\ (n = 0,1,2,\ldots)\right\}$$

と置き，

$$\|f\|_{\mathcal{K}_p} := \inf\left\{\|\gamma\|_{L_p} : \gamma \in \Gamma_p(f:\mathscr{F})\right\},$$
$$\mathcal{K}_p(\mathscr{F}) := \left\{f = (f_n) \in \mathscr{M}_u\colon \Gamma_p(f:\mathscr{F}) \ne \emptyset\right\}$$

と定義すれば，$\mathcal{K}_p(\mathscr{F})$ は Banach 空間になる．Garsia [6] は，マルチンゲールの Hardy 空間

$$\mathbb{H}_p(\mathscr{F}) := \{f = (f_n) \in \mathscr{M}(\mathscr{F})\colon Mf \in L_p\} \quad (1 \le p \le 2)$$

の双対空間 $(\mathbb{H}_p(\mathscr{F}))'$ を求める為，上記の空間 $\mathcal{K}_p(\mathscr{F})$ を導入し，$(\mathbb{H}_p(\mathscr{F}))' = \mathcal{K}_{p'}(\mathscr{F})$ $(1 \le p \le 2)$ となることを証明した．ここに，p' は p の共役指数を表す．特に $p = \infty$ の場合には，$\mathcal{K}_p(\mathscr{F}) \equiv K_\infty(\mathscr{F}) = BMO(\mathscr{F})$ であるので

$$(\mathbb{H}_1(\mathscr{F}))' = BMO(\mathscr{F})$$

となる (Fefferman の双対定理)．また，$1 < p < \infty$ の場合には，$\mathcal{K}_p(\mathscr{F}) = \mathbb{H}_p(\mathscr{F})$ となることも Garsia によって証明された．すなわち，

$$(\mathbb{H}_p(\mathscr{F}))' = \mathbb{H}_{p'}(\mathscr{F})$$

となる．

$\mathcal{K}_p(\mathscr{F})$ はマルチンゲールの平均振動を評価する空間であるが，$1 < p < \infty$ の場合には，$\mathcal{K}_p(\mathscr{F})$ の定義を少々簡素化できる．実際，

$$\theta_{\mathscr{F}} f := \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{E}\left[|f_\infty - f_{n-1}| \,|\, \mathscr{F}_n\right],$$
$$\mathbb{K}_p(\mathscr{F}) := \{f = (f_n) \in \mathscr{M}_u(\mathscr{F}) \colon \theta_{\mathscr{F}} f \in L_p\}$$

と置けば，$\mathbb{K}_p(\mathscr{F}) = \mathbb{H}_p(\mathscr{F}) = \mathcal{K}_p(\mathscr{F})$ となる．換言すれば，不等式

$$C_p^{-1} \|Mf\|_{L_p} \le \|\theta_{\mathscr{F}} f\|_{L_p} \le C_p \|Mf\|_{L_p}$$

が成り立つ．既に述べた通り，L_p を Banach 関数空間 X に置き換えたとき，同様の不等式が成り立つような X の特徴づけが得られている ([9])．以下に，X の弱空間 w-X に於ける同様の不等式について述べる．

Theorem 5.1 ([12]: 弱不等式)**.** X を Banach 関数空間とするとき，次の各条件は互いに同値である:

(i) すべての $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n) \in \mathbb{F}$ とすべての $f = (f_n) \in \mathscr{M}_u(\mathscr{F})$ に対して，

$$\|\theta_{\mathscr{F}} f\|_{\text{w-}X} \le C \|Mf\|_X \tag{5.1}$$

であるような定数 $C > 0$ が存在する．

(ii) すべての $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n) \in \mathbb{F}$ とすべての $f = (f_n) \in \mathscr{M}_u(\mathscr{F})$ に対して，

$$\|\theta_{\mathscr{F}} f\|_{\text{w-}X'} \le C \|Mf\|_{X'}$$

であるような定数 $C > 0$ が存在する．

(iii) すべての $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n) \in \mathbb{F}$ とすべての $f = (f_n) \in \mathscr{M}_u(\mathscr{F})$ に対して，

$$\|\theta_{\mathscr{F}} f\|_{\text{w-}X} \le C \|f_\infty\|_X \tag{5.2}$$

であるような定数 $C > 0$ が存在する．

(iv) すべての $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n) \in \mathbb{F}$ とすべての $f = (f_n) \in \mathscr{M}_u(\mathscr{F})$ に対して，

$$\|\theta_{\mathscr{F}} f\|_{\text{w-}X'} \leq C \|f_\infty\|_{X'}$$

であるような定数 $C > 0$ が存在する．

(v) すべての $t \in [0,1]$ に対して，

$$\overline{\varphi}_X(t)\overline{\varphi}_{X'}(t) \leq Ct$$

であるような定数 $C > 0$ が存在する．

上記の条件が成立するとき，w-$X = M^*(\overline{\varphi}_X)$ となり，これらの空間の (準) ノルムは互いに同値である．

次の定理は，不等式 (5.1), (5.2) の右辺を w-X の準ノルムに置き換えた不等式が成り立つ為の必要十分条件を与える．

Theorem 5.2 ([12]: 片側不等式)**.** X を Banach 関数空間とするとき，次の各条件は互いに同値である:

(i) すべての $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n) \in \mathbb{F}$ とすべての $f = (f_n) \in \mathscr{M}_u(\mathscr{F})$ に対して，

$$\|\theta_{\mathscr{F}} f\|_{\text{w-}X} \leq C \|Mf\|_{\text{w-}X} \tag{5.3}$$

であるような定数 $C > 0$ が存在する．

(ii) すべての $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n) \in \mathbb{F}$ とすべての $f = (f_n) \in \mathscr{M}_u(\mathscr{F})$ に対して，

$$\|\theta_{\mathscr{F}} f\|_{\text{w-}X} \leq C \|f_\infty\|_{\text{w-}X} \tag{5.4}$$

であるような定数 $C > 0$ が存在する．

(iii) すべての $t \in [0,1]$ に対して

$$\overline{\varphi}_X(t) \leq C\underline{\varphi}_X(t) \tag{5.5}$$

であるような定数 $C > 0$ が存在し，$q_{\overline{\varphi}_X} < 1$.

(iv) すべての $t \in [0,1]$ に対して (5.5) が成り立つような定数 $C > 0$ が存在し，

$$\varlimsup_{t\to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} < A$$

であるような定数 $A > 1$ が存在する．

不等式 (5.5) は，不等式 “$\overline{\varphi}_X(t)\overline{\varphi}_{X'}(t) \le Ct$” に置き換えることができる．

上記の条件が成立するとき，w-$X = M^*(\overline{\varphi}_X) = M(\overline{\varphi}_X)$ となり，これらの空間の (準) ノルムは，どの 2 つも互いに同値である．

更に，(5.3) 及び (5.4) と逆向きの不等式も同時に成り立つ為の必要十分条件も得られている．

Theorem 5.3 ([12]: 両側不等式)**.** X を Banach 関数空間とするとき，次の各条件は互いに同値である:

(i) すべての $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n) \in \mathbb{F}$ とすべての $f = (f_n) \in \mathscr{M}_u(\mathscr{F})$ に対して，

$$C^{-1}\,\|Mf\|_{\text{w-}X} \le \|\theta_{\mathscr{F}} f\|_{\text{w-}X} \le C\,\|Mf\|_{\text{w-}X}$$

であるような定数 $C > 0$ が存在する．

(ii) すべての $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n) \in \mathbb{F}$ とすべての $f = (f_n) \in \mathscr{M}_u(\mathscr{F})$ に対して，

$$C^{-1}\,\|f_\infty\|_{\text{w-}X} \le \|\theta_{\mathscr{F}} f\|_{\text{w-}X} \le C\,\|f_\infty\|_{\text{w-}X}$$

であるような定数 $C > 0$ が存在する．

(iii) すべての $t \in [0,1]$ に対して

$$\overline{\varphi}_X(t) \le C\underline{\varphi}_X(t) \tag{5.6}$$

であるような定数 $C > 0$ が存在し，$0 < p_{\overline{\varphi}_X}$ かつ $q_{\overline{\varphi}_X} < 1$.

(iv) すべての $t \in [0,1]$ に対して (5.6) が成り立つような定数 $C > 0$ が存在し，

$$1 < \varliminf_{t\to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} \quad \text{かつ} \quad \varlimsup_{t\to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} < A$$

であるような定数 $A > 1$ が存在する．

不等式 (5.6) は，不等式 “$\overline{\varphi}_X(t)\overline{\varphi}_{X'}(t) \le Ct$” に置き換えることができる．

上記の条件が成立するとき，w-$X = M^*(\overline{\varphi}_X) = M(\overline{\varphi}_X)$ となり，これらの空間の (準) ノルムは，どの 2 つも互いに同値である．

付録

$\varphi\colon [0,1] \to [0,\infty)$ を準凹関数とする．このとき，

$$B > A > 1,\ \varliminf_{t\to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} > 1 \implies \varliminf_{t\to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(Bt)}{\overline{\varphi}_X(t)} > 1$$

であることは明らかである．更に，

$$B > A > 1,\ \varlimsup_{t\to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} < A \implies \varliminf_{t\to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(Bt)}{\overline{\varphi}_X(t)} < B$$

も成立する．実際，$\varphi(t)/t$ が $(0,1]$ で広義単調減少であることから，

$$\frac{\varphi(Bt)}{t} \le \frac{B}{A} \cdot \frac{\varphi(At)}{t}$$

となるので，

$$\varlimsup_{t\to 0+} \frac{\varphi(Bt)}{t} \le \frac{B}{A} \cdot \varlimsup_{t\to 0+} \frac{\varphi(At)}{t} < B$$

を得る．

Proposition. 準凹関数 $\varphi\colon [0,1] \to [0,\infty)$ は，本当の凹関数であるとする．このとき，ある $A > 1$ に対して，

$$\varlimsup_{t\to 0+} \frac{\varphi(At)}{\varphi(t)} < A \tag{a1}$$

であれば，すべての $A > 1$ に対して同様の不等式が成り立つ．また，ある $A > 1$ に対して

$$\varliminf_{t\to 0+} \frac{\varphi(At)}{\varphi(t)} > 1 \tag{a2}$$

であれば，すべての $A > 1$ に対して同様の不等式が成り立つ．

ある $A > 1$ に対して (a1) が成立すれば，すべての $A > 1$ に対して (a1) が成立することを以下に示そう．$A > B > 1$ と仮定し，A を B に置き換えても (a1) が成立することを示せばよい．(a1) が成立しない，すなわち，

$$\varlimsup_{t\to 0+} \frac{\varphi(Bt)}{\varphi(t)} \ge B$$

であると仮定する．$\varphi(Bt)/(Bt) \le \varphi(t)/t$ であるから，上記の不等式は，

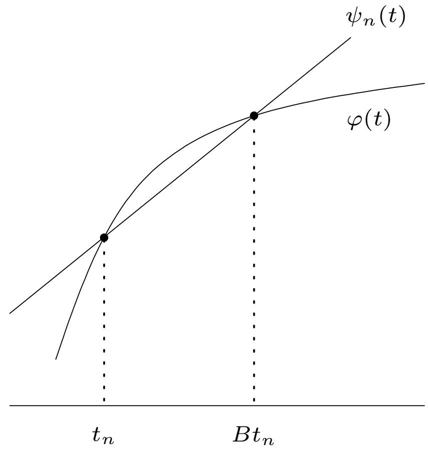
$$\varlimsup_{t\to 0+} \frac{\varphi(Bt)}{\varphi(t)} = B$$

であることを意味する．それ故，

$$\frac{\varphi(Bt_n)}{\varphi(t_n)} \to B \quad (n \to \infty)$$

であるような $(0, 1/B]$ の数列 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\psi_n(t)$ をそのグラフが 2 点 $\bigl(t_n, \varphi(t_n)\bigr)$, $\bigl(Bt_n, \varphi(Bt_n)\bigr)$ を通る直線であるような関数とする．すなわち，

$$\psi_n(t) = \frac{\varphi(Bt_n) - \varphi(t_n)}{(B-1)t_n}\, t + \frac{B\varphi(t_n) - \varphi(Bt_n)}{B-1}$$



とする．$\varphi(t)$ は凹関数であるから，$t \in (0, t_n]$ に対して $\psi_n(t) \geq \varphi(t)$ となる．特に，$\psi_n(t_n/A) \geq \varphi(t_n/A)$ である．故に，

$$\begin{aligned}\sup_{0<t\leq t_n/A} \frac{\varphi(At)}{\varphi(t)} &\geq \frac{\varphi(t_n)}{\varphi(t_n/A)} \geq \frac{\varphi(t_n)}{\psi_n(t_n/A)} \\ &= \frac{A(B-1)\varphi(t_n)}{(1-A)\varphi(Bt_n) + (AB-1)\varphi(t_n)}.\end{aligned}$$

この不等式に於いて $n \to \infty$ とするとき，$\varphi(Bt_n)/\varphi(t_n)$ は B に収束するから，右辺は A に収束する．従って

$$\varlimsup_{t\to 0+} \frac{\varphi(At)}{\varphi(t)} \geq A.$$

これは (a1) が成立すると仮定したことに反する．斯くして，ある $A > 1$ に対して (a1) が成立すれば，すべての $A > 1$ に対して (a1) が成立することが示された．

ある $A > 1$ に対して (a2) が成立すれば，すべての $A > 1$ に対して (a2) が成立することも同様に示される．

他方，次の例が示す通り，$\varphi\colon [0,1] \to [0,\infty)$ が一般の準凹関数のときには，ある $A > 1$ に対して (a1) が成立しても，すべての $A > 1$ に対して (a1) が成立するとは限らない．(a2) に関しても同様である．

Example. 関数 $\varphi\colon [0,1] \to [0,\infty)$ を

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2^{n-1}t & \text{if } \ 2\cdot 10^{-n} < t \leq 10^{-n+1} \\ 5^{-n} & \text{if } \ 10^{-n} < t \leq 2\cdot 10^{-n} \\ 0 & \text{if } \ t = 0 \end{cases}$$

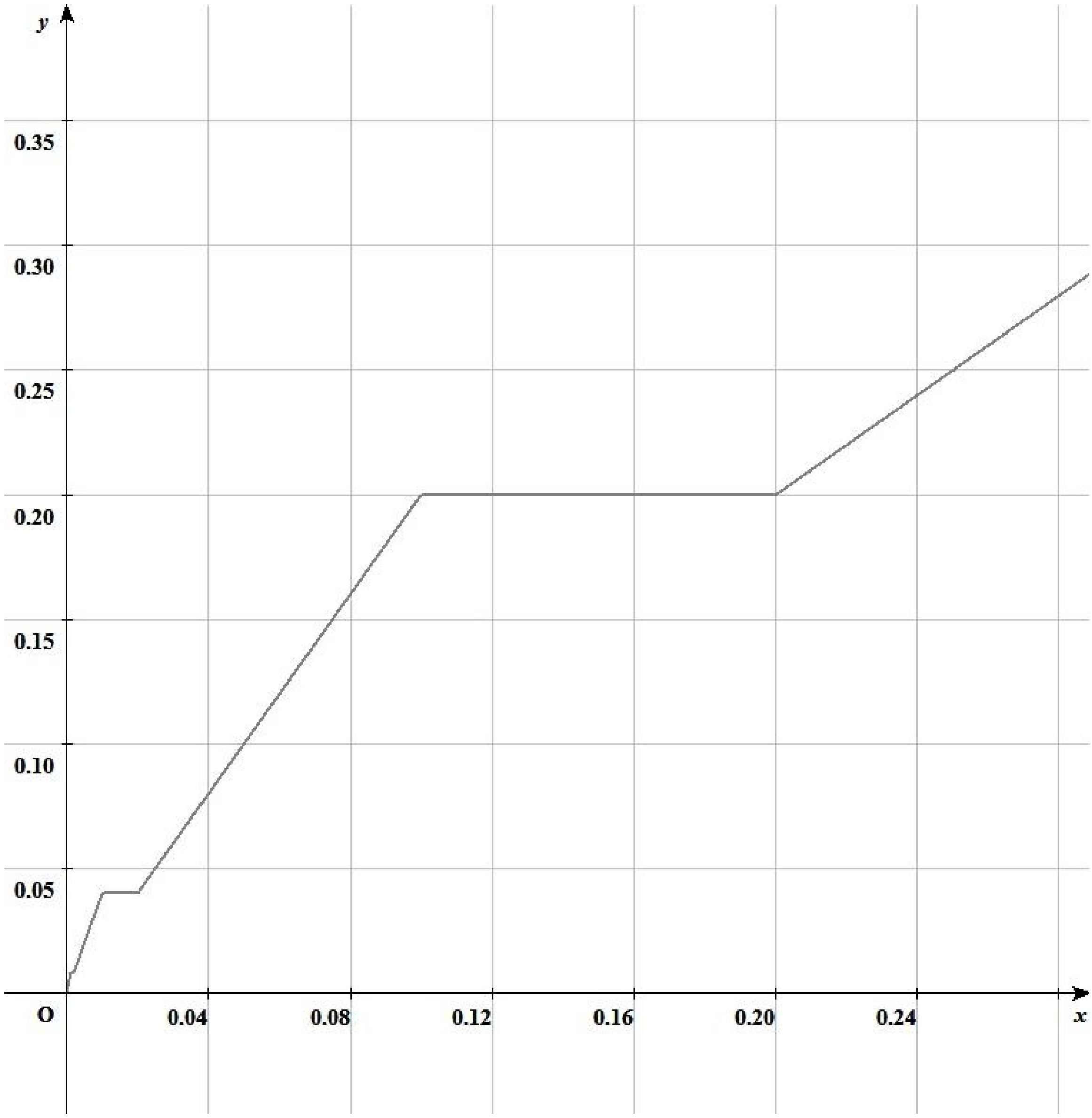
のように定義すれば，$\varphi(t)$ は準凹関数であり，

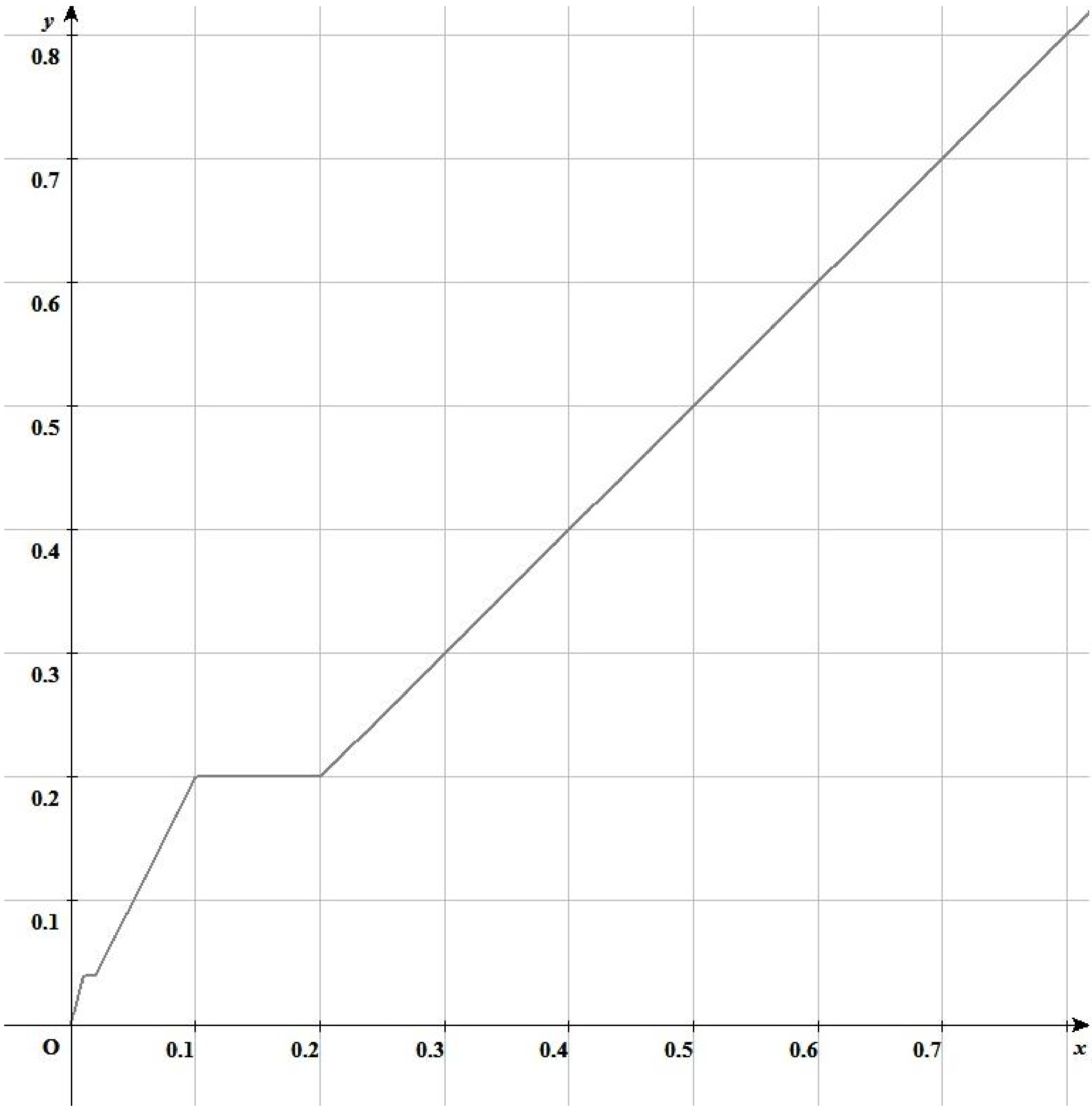
$$1 < 5 = \varliminf_{t\to 0+} \frac{\varphi(10t)}{\varphi(t)} \quad \text{かつ} \quad \varlimsup_{t\to 0+} \frac{\varphi(10t)}{\varphi(t)} = 5 < 10$$

であるにも拘わらず,

$$\varliminf_{t\to 0+} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} = 1 \quad \text{かつ} \quad \varlimsup_{t\to 0+} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} = 2$$

となる．尚，$\varphi(t)$ のグラフの概形は次の図のようになる．





参考文献

[1] A. Antipa, *Doob's inequality for rearrangement-invariant function spaces*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **35** (1990), 101–108.

[2] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Pure and Applied Mathematics 129. Academic Press, Boston, 1988.

[3] D. L. Burkholder, *Martingale transforms*, Ann. Math. Statist. **37** (1966), 1494–

1504.

[4] D. L. Burkholder, *Distribution function inequalities for martingales*, Ann. Probability **1** (1973), 19–42.

[5] J. L. Doob, *Stochastic processes*, Wiley, New York (1953).

[6] A. M. Garsia, *Martingale inequalities: Seminar notes on recent progress*, Mathematics Lecture Notes Series, Benjamin, Inc., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1973.

[7] W. B. Johnson and G. Schechtman, *Martingale inequalities in rearrangement invariant function spaces*, Israel J. Math. **64** (1988), 267–275.

[8] M. Kikuchi, *Characterization of Banach function spaces that preserve the Burkholder square-function inequality*, Illinois J. Math. **47** (2003), 867–882.

[9] M. Kikuchi, *On some mean oscillation inequalities for martingales*, Publ. Mat. **50** (2006), 167–189.

[10] M. Kikuchi, *On the Davis inequality in Banach function spaces*, Math. Nachr. **281** (2008), 697–709.

[11] M. Kikuchi, *Uniform boundedness of conditional expectation operators on a Banach function space*, Math. Inequal. Appl. **16** (2013), 483–499.

[12] M. Kikuchi, *On some martingale inequalities for mean oscillations in weak spaces*, Ricerche di Mat. **64** (2015), 137–165.

[13] M. Kikuchi, *On Doob's inequality and Burkholder's inequality in weak spaces*, submitted.

[14] G. G. Lorentz, *Majorants in spaces of integrable functions*, Amer. J. Math. **77** (1955), 484–492.

[15] I. Ya. Novikov, *Martingale inequalities in symmetric spaces*, Siberian Math. J. **34** (1993), 99–105.

Fock空間の微分作用による特徴付けと積分作用素

植木　誠一郎　(茨城大学 工学部)*

概　要

N 次元複素空間 $\mathbb{C}^N$ 上の整関数からなる Fock 空間 $\mathcal{F}_\alpha^\infty$ $(\alpha > 0)$ は 2 種類の高階微分によって特徴付けられること, また, それらの導関数の局所的な積分平均によっても特徴付けられることを示す. 特に, 高階微分作用による特徴付けの条件は $\mathcal{F}_\alpha^\infty$ に同値なノルムを導入し, その応用として, ある種の積分作用素の有界性とコンパクト性を調べられることを述べる.

1. Fock 空間

$0 < p < \infty$, $\alpha > 0$ に対して, $\mathbb{C}^N$ 上の整関数からなる関数空間である Fock 空間は次のように定義される：

$$f \in \mathcal{F}_\alpha^p \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \|f\|_{p,\alpha}^p := \left(\frac{p\alpha}{2\pi}\right)^N \int_{\mathbb{C}^N} |f(z)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2}\, dV(z) < \infty,$$

$$f \in \mathcal{F}_\alpha^\infty \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \|f\|_{\infty,\alpha} := \sup_{z\in\mathbb{C}^N} |f(z)|e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} < \infty,$$

$$f \in \mathcal{F}_{\alpha,0}^\infty \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{|z|\to\infty} |f(z)|e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} = 0.$$

ただし, $z = (z_1, \cdots, z_N), w \in \mathbb{C}^N$ に対して,

$$\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^N z_j\overline{w_j}, \quad |z| = \sqrt{\langle z, z\rangle},$$

であり, dV は $\mathbb{C}^N$ 上の Lebesgue 測度を表す. 不等式：$|f(z)| \le e^{\frac{\alpha}{2}|z|^2}\|f\|_{p,\alpha}$ により, 各点 z における Point evaluation $\delta_z : f \mapsto f(z)$ は $\mathcal{F}_\alpha^p$ $(1 \le p \le \infty)$ 上の有界な線形汎関数となる. 特に, $p = 2$ のとき $\mathcal{F}_\alpha^2$ は内積：

$$\langle f, g\rangle_\alpha = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^N \int_{\mathbb{C}^N} f(z)\overline{g(z)}e^{-\alpha|z|^2}\, dV(z)$$

に関して Functional Hilbert 空間となる. $\mathcal{F}_\alpha^2$ の正規直交基底は,

$$e_\gamma(z) = \sqrt{\frac{\alpha^{|\gamma|}}{\gamma!}}z^\gamma, \quad \gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_N) \quad (\gamma_j\text{：非負整数})$$

で与えられるので, その再生核関数 $K(z, w)$ は $K(z, w) = \exp(\alpha\langle z, w\rangle)$ となる. この再生核関数を自分自身の大きさで正規化した関数 $k_w(z) := \exp(\alpha\langle z, w\rangle - \frac{\alpha}{2}|w|^2)$ は

本研究は科研費 (若手研究 (B) 課題番号:26800050) の助成を受けて得られた結果である.

* 〒 316-8511 茨城県日立市中成沢町 4-12-1
e-mail: sei-ueki@mx.ibaraki.ac.jp

$\|k_w\|_{p,\alpha} = 1$ $(1 \le p < \infty)$ を満たし, $|w| \to \infty$ とするとき $\mathcal{F}^p_\alpha$ の弱位相で $k_w \to 0$ となるので, $\mathcal{F}^p_\alpha$ 上の線形作用素の性質を解析する際の試験関数として利用される. Fock 空間の関数空間としての基本的な性質は, Janson-Peetre-Rochberg の論文 [5] の中で述べられており, この論文は Fock 空間の研究に非常に有用なサーベイであると思われる. ここで, 本稿で必要となる基本的な性質を [5] より引用しておく.

Proposition 1.1.（Bergman Projection）$\alpha > 0$ に対して,

$$P_\alpha f(z) := \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^N \int_{\mathbb{C}^N} f(w) \exp(\alpha\langle z, w\rangle - \alpha|w|^2)\, dV(w)$$

と定める. $1 \le p \le \infty$ のとき, $P_\alpha : \mathcal{L}^p_\alpha \overset{\text{onto}}{\to} \mathcal{F}^p_\alpha$ は有界かつ自己共役 (self-adjoint) な射影である. したがって, 各 $f \in \mathcal{F}^p_\alpha$ に対して,

$$f(z) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^N \int_{\mathbb{C}^N} f(w) \exp(\alpha\langle z, w\rangle - \alpha|w|^2)\, dV(w)$$

である.

Proposition 1.2.（包含関係）$1 < p < q < \infty$ に対して,

$$\mathcal{F}^1_\alpha \subsetneq \mathcal{F}^p_\alpha \subsetneq \mathcal{F}^q_\alpha \subsetneq \mathcal{F}^\infty_{\alpha,0} \subsetneq \mathcal{F}^\infty_\alpha$$

が成り立つ.

Proposition 1.3.（Duality）$1 \le p < \infty$ のとき, $(\mathcal{F}^p_\alpha)^* \cong \mathcal{F}^q_\alpha$ が成り立つ. ただし, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. また, $(\mathcal{F}^\infty_{\alpha,0})^* \cong \mathcal{F}^1_\alpha$ である. したがって, $1 < p < \infty$ の場合には, $\mathcal{F}^p_\alpha$ は反射的 Banach 空間となる.

Fock 空間に関する研究は 1980 年代頃より Toeplitz 作用素, Hankel 作用素の解析, Fock 空間に属する個々の関数については Sampling sequence と Interpolation sequence の特徴付け, 零点集合の特徴付けなどが行われており, Toeplitz 作用素は現在でも継続して研究がなされている. 最近では, 2003 年に Carswell-MacCluer-Schuster ([1]) が $\mathcal{F}^2_\alpha$ 上の合成作用素の特徴付けをし, それ以降, 関数の Taylor 係数評価, Carleson 測度などの解析的研究や Fock 空間上の荷重合成作用素などの作用素論的研究がなされている.

2. 微分作用素による特徴付け

N 個の非負な整数の組：$\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_N)$ (multi-index, 多重指数) に対して,

$$|\gamma| := \gamma_1 + \cdots + \gamma_N, \quad \gamma! := \gamma_1! \cdots \gamma_N!, \quad z^\gamma := z_1^{\gamma_1} \cdots z_N^{\gamma_N}$$

とする. 整関数 $f(z)$ に対して,

$$\frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial z^\gamma} = \frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial z_1^{\gamma_1} \cdots \partial z_N^{\gamma_N}}, \qquad \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

であり, 自然数 m に対して,

$$\mathcal{R}f(z) := \sum_{j=1}^{N} z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z), \qquad \mathcal{R}^m f = \mathcal{R}[\mathcal{R}^{m-1} f]$$

と定める.

前節の Proposition 1.1 $\sim$ 1.3 を眺めると, 有界領域（例えば $\mathbb{C}^N$ の単位球 $\mathbb{B}$）上の Bergman 空間 A^p と Bloch 空間 $\mathcal{B}$ との関係が想起される. 単位球 $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C}^N : |z| < 1\}$ 上の正則関数 f に対して,

$$\begin{aligned}
& f \in A^p \ (0 < p < \infty) \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \int_{\mathbb{B}} |f(z)|^p \, dV(z) < \infty, \\
& f \in \mathcal{B} \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \sup_{z \in \mathbb{C}^N} (1 - |z|^2) |\mathcal{R}f(z)| < \infty, \\
& f \in \mathcal{B}_0 \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{|z| \to 1} (1 - |z|^2) |\mathcal{R}f(z)| = 0.
\end{aligned}$$

とそれぞれ定義され, 例えば, $(A^p)^* \cong A^q \ (1 \le p < \infty)$, $(\mathcal{B}_0)^* \cong A^1$ が成り立つことが知られているので, $\mathcal{F}^p_\alpha$ が Bergman 空間 A^p, $\mathcal{F}^\infty_\alpha$ が Bloch 空間 $\mathcal{B}$ に対応している形となる. しかしながら, $\mathcal{F}^\infty_\alpha$ および $\mathcal{F}^\infty_{\alpha,0}$ の定義には微分作用が現れていないことに注意したい. それゆえ, Fock 空間を微分作用素もしくは高階微分作用素を使って特徴付けることは可能かという問題が自然に提起される. 実際, $N = 1$（１変数）の場合であるが, O. Constantin [2] が Fock 空間 $\mathcal{F}^p_1 \ (0 < p < \infty)$ に作用する積分作用素の研究の過程において, 次の結果を得ている：

定理 A (Constantin [2]). 複素平面上の整関数 f に対して,

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \exp\left(-\frac{p}{2}|z|^2\right) dA(z) \approx |f(0)|^p + \int_{\mathbb{C}} \frac{|f'(z)|^p}{(1+|z|)^p} \exp\left(-\frac{p}{2}|z|^2\right) dA(z)$$

が成立する.

ここで, 定理 A において $\alpha = 1$ となっているのは本質的な問題ではなく, Fock 空間の定義の違いだけであることを注意しておく. Constantin は Fock-Sobolev 空間の性質を利用したかなり技巧的な証明を与えている. もちろん $p = \infty$ (すなわち, $\mathcal{F}^\infty_\alpha$) の場合は考察されていない. Fock 空間と対応する Bergman 空間 A^p や Bloch 空間 $\mathcal{B}$ についての研究を省みると, Bergman 射影の有界性などを用いたより直接的な証明が可能ではないかと考えられる. 例えば, Bergman 射影から得られる f に対する積分表示公式を積分記号下で微分することを考えれば, f の導関数をもとの f の挙動で上から評価する不等式が得られる. f 自身をその導関数により上から評価するには, f の slice function $f_\zeta(\lambda) = f(\lambda\zeta) \ (\lambda \in \mathbb{C}, \zeta \in \mathbb{C}^N, |\zeta| = 1)$ を利用すれば,

$$f(z) - f(0) = f_\zeta(r) - f_\zeta(0) = \int_0^1 r(f_\zeta)'(rt) \, dt$$

が得られるので, この関係から評価不等式が導出される. このアプローチ（厳密には帰納法による）により, $\mathcal{F}_\alpha^\infty$ および $\mathcal{F}_{\alpha,0}^\infty$ の高階微分作用素による特徴付けが, 1変数の場合が [16], N 変数の場合が [17] で順次得られた.

Theorem 2.1 (Ueki [16, 17]). 整関数 f, 自然数 m に対して, 次の3条件は同値である：

(a) $f \in \mathcal{F}_\alpha^\infty$,

(b) $\displaystyle \max_{|\gamma|=m} \sup_{z\in\mathbb{C}^N} \left|\frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial z^\gamma}(z)\right| \frac{\exp(-\frac{\alpha}{2}|z|^2)}{(1+|z|)^m} < \infty$,

(c) $\displaystyle \sup_{z\in\mathbb{C}^N} \frac{|\mathcal{R}^m f(z)|}{(1+|z|)^{2m}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}|z|^2\right) < \infty.$

さらに, 次の不等式が成立する：

$$\begin{aligned}\|f\|_{\infty,\alpha} &\approx \sum_{|\gamma|\le m-1} \left|\frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial z^\gamma}(0)\right| + \max_{|\gamma|=m} \sup_{z\in\mathbb{C}^N} \left|\frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial z^\gamma}(z)\right| \frac{\exp(-\frac{\alpha}{2}|z|^2)}{(1+|z|)^m} \\ &\approx |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{C}^N} \frac{|\mathcal{R}^m f(z)|}{(1+|z|)^{2m}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}|z|^2\right).\end{aligned}$$

Remark. N 変数の場合の $\mathcal{F}_\alpha^p$ $(0 < p < \infty)$ の特徴付けは Hu [4] によって証明されている. 1変数の場合は, $f \in \mathcal{F}_\alpha^\infty$ であることと,

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f^{(n)}(z)|}{(1+|z|)^n} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}|z|^2\right) < \infty$$

が同値になる（[16]）.

このタイプの高階微分作用素による特徴付けは, やはり Bloch 空間でも知られている. K. Stroethoff [9] は, さらに, 高階導関数の局所的積分平均の挙動を考慮する Besov 型条件による Bloch 空間の特徴付けを与えている. ここで考察している Fock 空間 $\mathcal{F}_\alpha^\infty$ においても対応する特徴付けが可能であることが, Theorem 2.1 から直ちにわかる：

Corollary 2.2. 整関数 f, 自然数 m, $0 < p < \infty$, $R > 0$ に対して, 次の3条件は同値である：

(a) $f \in \mathcal{F}_\alpha^\infty$,

(b) $\displaystyle \max_{|\gamma|=m} \sup_{z\in\mathbb{C}^N} \frac{1}{|B(z,R)|} \int_{B(z,R)} \left|\frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial w^\gamma}(w)\right|^p \frac{\exp(-\frac{p\alpha}{2}|w|^2)}{(1+|w|)^{mp}}\, dV(w) < \infty$,

(c) $\displaystyle \sup_{z\in\mathbb{C}^N} \frac{1}{|B(z,R)|} \int_{B(z,R)} \frac{|\mathcal{R}^m f(w)|^p}{(1+|w|)^{2mp}} \exp\left(-\frac{p\alpha}{2}|w|^2\right) dV(w) < \infty.$

ただし, $B(z,R)=\{w\in\mathbb{C}^N : |w-z|<R\}$であり, $|B(z,R)|$は$\mathbb{C}^N$における超球の体積を表す. もちろん, 条件(b), (c)に現れる積分平均は, fのノルム$\|f\|_{\infty,\alpha}$とそれぞれ比較可能である.

次に, $\mathcal{F}^\infty_{\alpha,0}$の特徴付けを考える. この$\mathcal{F}^\infty_{\alpha,0}$と$\mathcal{F}^\infty_{\alpha}$との大きな違いは, $\mathcal{F}^\infty_{\alpha,0}$が正則な多項式の集合の閉包となっていることである. したがって, $\mathcal{F}^\infty_{\alpha,0}$は可分なBanach空間である. $\mathcal{F}^\infty_{\alpha,0}$における多項式の稠密性をみる為に, 次の2つの補題を準備する：

Lemma 2.3. 多重指数γ, 整関数$f(z)=\sum a_\gamma z^\gamma$に対して,

$$\|a_\gamma z^\gamma\|_{\infty,\alpha}\lesssim\prod_{j=1}^N\left(\frac{\gamma_j}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{\infty,\alpha}$$

が成り立つ.

Lemma 2.3は, N変数（重積分）の場合のCauchyの積分公式を利用して, 同次多項式展開の係数a_γに対して,

$$|a_\gamma|\le\prod_{j=1}^N\left(\frac{\alpha\, e}{\gamma_j}\right)^{\frac{\gamma_j}{2}}\|f\|_{\infty,\alpha}$$

という評価が得られので, この係数評価とStirlingの公式から得られる

$$\|z^\gamma\|_{\infty,\alpha}\lesssim\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{|\gamma|}{2}}\prod_{j=1}^N\left(\frac{\gamma_j}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\gamma_j}{2e}\right)^{\frac{\gamma_j}{2}}$$

により導かれる.

Lemma 2.4. $f\in\mathcal{F}^\infty_\alpha$, $0<r<1$に対して, 多項式列$\{P_k^{(r)}\}_{k\ge1}$が存在して,

$$\lim_{k\to\infty}\|f_r-P_k^{(r)}\|_{\infty,\alpha}=0$$

である. ただし, $f_r(z)=f(rz)$である.

Lemma 2.4より直ちに, $f\in\mathcal{F}^\infty_\alpha$が$\|f-f_r\|_{\infty,\alpha}\to0$ as $r\to1$を満たすならば, $f\in\mathcal{F}^\infty_{\alpha,0}$であることが従うが, 実際は逆も正しい. すなわち, $\|f-f_r\|_{\infty,\alpha}\to0$ as $r\to1$は$\mathcal{F}^\infty_{\alpha,0}$に対する特徴付けでもある. また, fの同次多項式展開：

$$f(z)=\sum_\gamma a_\gamma z^\gamma$$

より,

$$f_r(z)=\sum_{j=0}^\infty\sum_{|\gamma|=j}r^{|\gamma|}a_\gamma z^\gamma$$

であるから, Lemma 2.4で現れる多項式$P_k^{(r)}$は,

$$P_k^{(r)}(z) := \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\gamma|=j} r^{|\gamma|} a_\gamma z^\gamma$$

によって構成される. これらの事実から, $\mathcal{F}_{\alpha,0}^\infty$ における多項式の稠密性が示される.

正則な多項式Pは

$$\lim_{|z|\to\infty} \left| \frac{\partial^{|\gamma|} P}{\partial z^\gamma}(z) \right| \frac{\exp(-\frac{\alpha}{2}|z|^2)}{(1+|z|)^m} = 0 \quad または \quad \lim_{|z|\to\infty} \frac{|\mathcal{R}^m P(z)|}{(1+|z|)^{2m}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}|z|^2\right) = 0$$

を満たすから, 多項式の稠密性を利用すれば$\mathcal{F}_{\alpha,0}^\infty$ の高階微分作用による特徴付けが得られることになる.

Theorem 2.5 (Ueki [16, 17]. $f \in \mathcal{F}_\alpha^\infty$, 自然数$m$に対して, 次の4条件は同値である：

(a) $f \in \mathcal{F}_{\alpha,0}^\infty$,

(b) $\lim_{r\to 1} \|f - f_r\|_{\infty,\alpha} = 0$,

(c) $\max_{|\gamma|=m} \left| \frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial z^\gamma}(z) \right| \frac{\exp(-\frac{\alpha}{2}|z|^2)}{(1+|z|)^m} \to 0 \text{ as } |z| \to \infty$,

(d) $\frac{|\mathcal{R}^m f(z)|}{(1+|z|)^{2m}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}|z|^2\right) \to 0 \text{ as } |z| \to \infty$.

Corollary 2.2と同様に, $\mathcal{F}_{\alpha,0}^\infty$は高階導関数の局所的$p$-乗積分平均の無限遠点での消滅性によって特徴付けられることがわかる：

Corollary 2.6. $f \in \mathcal{F}_\alpha^\infty$, 自然数$m$, $0 < p < \infty$, $R > 0$に対して, 次の3条件は同値である：

(a) $f \in \mathcal{F}_{\alpha,0}^\infty$,

(b) $\max_{|\gamma|=m} \frac{1}{|B(z,R)|} \int_{B(z,R)} \left| \frac{\partial^{|\gamma|} f}{\partial w^\gamma}(w) \right|^p \frac{\exp(-\frac{p\alpha}{2}|w|^2)}{(1+|w|)^{mp}} \, dV(w) \to 0 \text{ as } |z| \to \infty$,

(c) $\frac{1}{|B(z,R)|} \int_{B(z,R)} \frac{|\mathcal{R}^m f(w)|^p}{(1+|w|)^{2mp}} \exp\left(-\frac{p\alpha}{2}|w|^2\right) dV(w) \to 0 \text{ as } |z| \to \infty$.

3. 積分作用素への応用

整関数gに対して,

$$T_g f(z) := \int_0^1 f(tz) \mathcal{R} g(tz) \, \frac{dt}{t} \qquad (f：整関数,\ z \in \mathbb{C}^N)$$

と定義される線形作用素はCesaro型積分作用素と呼ばれる．このタイプの積分作用素は C. Pommerenke により導入されて以来, 関数 g の持つ函数論的性質で T_g の解析関数空間上での性質を特徴付ける問題が研究されてきた．$N = 1$（１変数）の場合には,

$$T_g f(z) = \int_0^z f(\zeta) g'(\zeta)\, d\zeta$$

であり, この場合はConstantin [2] が $\mathcal{F}_1^p$ $(1 \le p < \infty)$ に作用する T_g の特徴付けを次のように与えている：

定理 B (Constantin [2]). $1 \le p < \infty$ とする．$T_g : \mathcal{F}_1^p \to \mathcal{F}_1^p$ が有界作用素であるための必要十分条件は, g は高々２次の多項式であること．また, T_g がコンパクト作用素となるのは g が高々１次の多項式の場合に限る.

微分作用素 $\mathcal{R}$ を利用すると,

$$\mathcal{R}[T_g(f)](z) = f(z)\mathcal{R}g(z)$$

であるので, $T_g(f)$ のノルム $\|T_g(f)\|_{\infty,\alpha}$ を同値なノルム $\|\mathcal{R}[T_g(f)]\|_{\infty,\alpha}$ で置き換えることは, 積分作用素の性質を解析するうえで非常に有効な方法である．この方法により, Theorem 2.1 および Theorem 2.5 の応用として, T_g が有界作用素であるための, またはコンパクト作用素であるための g の満たすべき条件について考察する.

まず, Theorem 2.1 と $\mathcal{F}_\alpha^2$ の再生核関数から構成される試験関数 $k_z(w)$ を利用すると, T_g の作用素ノルム $\|T_g\|$ に対する評価不等式：

$$\|T_g\| \approx \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|\mathcal{R}g(z)|}{(1+|z|)^2}$$

が得られる．したがって, T_g の有界性は

$$\sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|\mathcal{R}g(z)|}{(1+|z|)^2} < \infty$$

によって特徴付けられる．$\mathcal{R}g$ は整関数であるから, 一般化されたLiouvilleの定理によって, この条件は $\mathcal{R}g$, すなわち g が高々2次の正則な同次多項式であることと同値となる. したがって, T_g の有界性について次のような結果が得られる.

Theorem 3.1 (Ueki [16, 17]). 整関数 g に対して, 次の３条件は同値である：

(a) $T_g : \mathcal{F}_\alpha^\infty \to \mathcal{F}_\alpha^\infty$ は有界作用素である,

(b) $T_g : \mathcal{F}_{\alpha,0}^\infty \to \mathcal{F}_{\alpha,0}^\infty$ は有界作用素である,

(c) g は高々2次の正則な同次多項式である；

$$g(z) = \sum_{|\gamma| \le 2} a_\gamma z^\gamma.$$

また, T_g の作用素ノルム $\|T_g\|$ に対して,

$$\|T_g\| \approx \sup_{z\in\mathbb{C}^N} \frac{|\mathcal{R}g(z)|}{(1+|z|)^2}$$

が成立する.

次に, T_g のコンパクト性を考える. 一般にコンパクト作用素は, 弱収束列を強収束列に写すものであるが, 多くの解析関数空間の場合, 関数列 $\{f_j\}$ が 0 に弱収束することと, $\{f_j\}$ が有界列でかつ広義一様に 0 に収束することは同値であるので, 解析関数空間上のコンパクト作用素の判定法として, 有界かつ広義一様に 0 に収束する関数列 $\{f_j\}$ に対して, $\|T_g f_j\|_{\infty,\alpha} \to 0$ が成立するという結果が広く利用されている. 一方で, 積分作用素 T_g が $\mathcal{F}^\infty_\alpha$ 上でコンパクト作用素であるかどうかは, その本質ノルム $\|T_g\|_e$ を評価してもよい.

$$\|T_g\|_e := \inf\{\|T_g - \mathcal{C}\| : \mathcal{C} \text{ is compact on } \mathcal{F}^\infty_\alpha\}$$

であるから, T_g がコンパクト作用素であることと $\|T_g\|_e = 0$ は同値である.

他方, $\mathcal{F}^\infty_{\alpha,0}$ に作用する場合のコンパクト性の判定法は単純ではない. Theorem 2.5 で得られた $f \in \mathcal{F}^\infty_{\alpha,0}$ に対する同値条件を利用すれば, $\mathcal{F}^\infty_{\alpha,0}$ の閉集合 K がコンパクト集合であるための必要十分条件が次のように得られる.

Lemma 3.2. $\mathcal{F}^\infty_{\alpha,0}$ の閉集合 K に対して, K がコンパクト集合であることと,

$$\lim_{|z|\to\infty} \sup_{f\in K} \frac{|\mathcal{R}f(z)|}{(1+|z|)^2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}|z|^2\right) = 0$$

は同値である.

この Lemma 3.2 により, $\mathcal{F}^\infty_{\alpha,0}$ 上の有界線形作用素 V のコンパクト性を調べるには, $\mathcal{F}^\infty_{\alpha,0}$ における単位閉球

$$\mathbb{B}_{\mathcal{F}^\infty_{\alpha,0}} := \{f \in \mathcal{F}^\infty_{\alpha,0} : \|f\|_{\infty,\alpha} \le 1\}$$

の V による像 $V(\mathbb{B}_{\mathcal{F}^\infty_{\alpha,0}})$ が Lemma 3.2 の条件を満たすかどうかを調べればよい.

Theorem 3.3 (Ueki [16, 17]). T_g が $\mathcal{F}^\infty_\alpha$ 上の有界作用素であるとき, T_g の本質ノルム $\|T_g\|_e$ に対して,

$$\|T_g\|_e \approx \limsup_{|z|\to\infty} \frac{|\mathcal{R}g(z)|}{(1+|z|)^2}$$

が成立する. したがって, 整関数 g に対して, 次の 3 条件は同値である：

(a) $T_g : \mathcal{F}^\infty_\alpha \to \mathcal{F}^\infty_\alpha$ はコンパクト作用素である,

(b) $T_g : \mathcal{F}^\infty_{\alpha,0} \to \mathcal{F}^\infty_{\alpha,0}$ はコンパクト作用素である,

(c) g は高々1次の正則な同次多項式である；

$$g(z) = \sum_{|\gamma| \le 1} a_\gamma z^\gamma.$$

Remark. Theorem 3.1 および 3.3 において, 多項式 g の形を決定するのに Fock 空間 $\mathcal{F}_\alpha^\infty$ に現れるパラメーター $\alpha(>0)$ は関係していない. したがって, ここで得られた結果は Constantin が考察しなかった場合を補うものである. さらに, Fock 空間 $\mathcal{F}_\alpha^p$ に作用する Cesaro 型積分作用素は, $1 \le p \le \infty$ に依らず, 有界作用素は2次以下の多項式, コンパクト作用素は1次以下の多項式によってのみ定義される結果が得られたこととなった. 積分作用素を構成する因子の（関数空間に依らない）共通性は, Fock 空間に作用する合成作用素を構成する因子にも見られる特徴である（[1, 3, 14] を参照）.

参考文献

[1] B.J. Carswell, B.D. MacCluer and A. Schuster, Composition operators on the Fock space, Acta Sci. Math. (Szeged), **69** (2003), 871–887.

[2] O. Constantin, A Volterra-type integration operator on Fock spaces, Proc. Amer. Math. Soc., **140** (2012), 4247-4257.

[3] K. Guo and K. Izuchi, Composition operators on Fock type spaces, Acta Sci. Math. (Szeged), **74** (2008), 807–828.

[4] Z. Hu, Equivalent norms on Fock spaces with some application to extended Cesaro operators, Proc. Amer. Math. Soc., **141** (2013), 2829–2840.

[5] S. Janson, J. Peetre and R. Rochberg, Hankel forms and the Fock space, Rev. Mat. Iberoam., **3** (1987), 61–129.

[6] T. Mengestie, Volterra type and weighted composition operators on weighted Fock spaces, Integral Equations Operator Theory, **76** (2013), 81–94.

[7] T. Mengestie, Product of Volterra type integral and composition operators on weighted Fock spaces, J. Geom Anal., online available 2012, DOI 10.1007/s12220-012-9353-x.

[8] S. Stević, Weighted composition operators between Fock-type spaces in $\mathbb{C}^N$, Appl. Math. Comput., **215** (2009), 2750–2760.

[9] K. Stroethoff, Besov-type characterizations for the Bloch space, Bull. Austral. Math. Soc., **39** (1989), 405–420.

[10] J. Tung, Taylor coefficients of functions in Fock spaces, J. Math. Anal. Appl., **318** (2006), 397–409.

[11] S. Ueki, Weighted composition operator on the Fock space, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), 1450–1410.

[12] S. Ueki, Hilbert-Schmidt weighted composition operator on the Fock space, Int. Journal of Math. Analysis, **1** (2007), 769–774.

[13] S. Ueki, Weighted composition operators on the Bargmann-Fock spaces, Int. J. Mod. Math., **3** (2008), 231–243.

[14] S. Ueki, Weighted composition operators on some function spaces of entire functions, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **17** (2010), 343–353.

[15] S. Ueki, Composition operators on the Fock space of vector-valued analytic functions, Ars. Combinatoria, **100** (2011), 161–167.

[16] S. Ueki, Characterization for Fock type space via higher order derivatives and its application, Complex Anal. Oper. Theory, **8** (2014), 1475–1486.

[17] S. Ueki, Higher order derivative characterization for Fock-type spaces, To appear in Integral Equations Operator Theory, DOI 10.1007/s00020-015-2246-1.

非可換代数を用いた暗号系と擬似乱数生成アルゴリズムについて

入山聖史
東京理科大学

Abstract

We introduce the cryptosystem which is based on non-commutative algebra, and show its implementation. This cryptosystem contains a public key agreement and symmetric encryption. A sender and a receiver share a secret key, and the sender encrypts the plain text by session keys generated by a pseudo random number generator. The key generation algorithm is described by the dynamical system which holds the discrete type Ergodic property. We also discuss on attacks and its computational complexity.

1 Introduction

A modern cryptosystem was originated by the Diffie-Hellman key agreement protocol [1] and One-time pad symmetric encryption[2]. The combination of key exchange and generating a key stream from a secret shared key has been a grobal standard of practical cryptography for many years. There are many implementations of encryption receipes however no mathematical theory how to construct the cryptosystem holding perfect secrecy. According to the Shannon's theory for secrecy, the session key must be choosen randomly, namely, one has to generate a key stream as a random number sequence. Many practical methods generating a pseudo-random number sequences are developped simultaneously. In 1992, Accardl et al. showed that there exist a method to generate pseudo-random sequences based on elgodic theory of periodic orbits[3]. They discussed not only mathematics, but also how to treat the method in a computer. Moreover, they showed results of some statistical tests for the pseudo-random number sequences generated by its computer program. After some years, Accardi and Ohya proposed a way to construct a symmetric encryption algorithm based on non-commutative algebra and ergodic theory, so called QP-DYN[4]. They proposed a concrete algorithm, and discussed on a frexibility of algorithms such that one can choose another dynamical laws on their demand which are speed, security, and hardware limitation. They also considered some attack algorithms, and estimated the complexity[4]. In 2010, M. Gäbler et al. reported results of statistical tests comparing with the other PRNGs [5].

A key exchange using public network is one of important technologies in cryptosystem since session key streams are generated by a shared key. The D-H key agreement protocol is widely used in several environments however the key length is forced to be longer year by year. Because the eavesdropper has more powerful computational power and more effective algorithms than before, users have to prepare a longer key to prevent attacks. Therefore the cost to key exchange becomes higher. Accardi et. al. developed the new algorihtm of key exchange, so called QP-KEX which is based on non-commutative algebra, and show its implementations on mobile environment. In the paper [7], the authors show that the QP-KEX is effective even in small devices. In this study, we review the algorithm of QP-DYN and QP-KEX following the paper[3, 4, 7], and show results of statistical tests and discuss its mathematical property.

2 QP-DYN

2.1 Notations

Here we introduce our notations. Let d be a positive integer, called a *dimension* of the algorithm. Let $M(d, \mathbb{N})$ be a $d \times d$ matrics with natural integer coefficients $M_{i,j}$. Note that we can use $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$ with a large prime number p instead of a set of natural integers $\mathbb{N}$. Let $v = (v_i) \in \mathbb{N}^d$ be a d dimensional vector, and the components v_i are always written in the following binary form

$$v_i = \underbrace{0 \cdots 01}_{A} u_i$$

where A represents the bits from top to the first appeared 1 in v_i. For any $v_i \in \mathbb{N}$, let us define a function $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ by

$$\begin{aligned} \gamma(v_i) &= u_i \\ &= v_i - 2^{[\log_2 v_i]} \end{aligned}$$

where $[\cdot]$ means Gussian function, and a function $\Gamma : \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}$ as

$$\Gamma(v) = \gamma(v_1)\gamma(v_2) \cdots \gamma(v_d)$$

The function Γ produces a bit sequence from the components of v. In order to expand the orbit created by a given dynamical law and an initial vector, we use the following *jump function* $J : \mathbb{Z}_p^d \to \mathbb{Z}_p^d$ such that for $v \in \mathbb{Z}_p^d$

$$J(v) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_p^d$$

We denote the bit length of number $x \in \mathbb{N}$ as $|x| = [\log_2 x] + 1$, and $\oplus$ as a bitwize XOR.

2.2 Framework of algorithm

In this section, we review the very simple case of QP-DYN algorithm following the paper [3, 4]. The general description is also given in the papers. Here we give the QP-DYN by $(d, M, p_1, p_2, G, v_0, J)$ to create N bit sequence with

- a positive integer $d \geq 2$
- a dynamical law(private key) $M \in M(d, \mathbb{N})$
- two prime numbers p_1 and p_2
- a method G to create two dynamical laws using M
- an initial vector $v_0 \in \mathbb{N}^d$
- a jump function $J : \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}^d$

Note that the public information are d, p_1, p_2, G, v_0 and J, and the private key is M. First, the algorithm prepares two dynamical laws M_1 and M_2 using the method G.

$$G(M, p_1, p_2) = (M_1, M_2) \in M(d, \mathbb{Z}_{p_1}) \times M(d, \mathbb{Z}_{p_2})$$

where M_1 and M_2 satisfies

$$\det M_1 =< p_1 >, \quad \det M_2 =< p_2 >$$

where $< p_i >$ $(i = 1, 2)$ means a generator of $\mathbb{Z}_{p_i}$. The algorithm starts with the initial vector at Step 0. Step k, $(k = 1, 2 \cdots)$ is given by the following five steps:
Step k-(1) Compute two vectors $v_k = M_1 v_{k-1}(\mod p_1)$ and $v'_k = M_2 v'_{k-1}(\mod p_2)$ where $v'_0 = v_0$.
Step k-(2) If $v_k = v_0$ $(v'_k = v_0)$ happens, go back to Step k-(1) with $v_{k-1} \equiv J(v_0)$ $(v'_{k-1} \equiv J(v_0))$, respectively.
Step k-(3) Compute $w_k = v_k \oplus v'_k = (v_{k,i} \oplus v'_{k,i})$
Step k-(4) Compute

$$z_k = \Gamma(w_k) = \gamma(w_{k,1}) \cdots \gamma(w_{k,d})$$

Remark that the algorithm allows the case of $|z_k| = 0$.
Step k-(5) If $|z_1 \cdots z_k| \geq N + 4([\log_2 p])$, the algorithm halts, and outputs

$$z_{(4[\log_2 p])+1} \cdots z_{(4[\log_2 p])+1+N}$$

as a result, else it goes to Step $k + 1$ with $z_1, \cdots, z_k$, v_k and v'_k.

2.3 Implementation and results of tests

In this section, we show some results of statistical tests and throughput of QP-DYN reffering to [4]. The statistical tests were TestU01[8] package and DIEHARD[9], and these tests were done for several times with randomly chosen initial vectors.

In order to compare effective speed of QP-DYN, we measured throuput using OpenVPN which is the virtual private network software equipped with OpenSSL as an encryption protocol.

The TestU01 contains three test suites which are SmallCrush, Cruch and BigCrush, and the DIEHARD has 126 statistical tests. Compared PRNGs were the following four: RC4, AES-OFB, CAMELLIA-OFB and MT19937[10]. We calculated an average number of non-passing tests for randomly chosen initial vectors(table 1). The numbers of trials were 100 times for SmallCrush and DIEHARD and 10 times for Crush and BigCrush.

The table 1 shows that all batteries passed SmallCrush with high accuracy, and MT19937 was less than the others in Crush, BigCrush and DIEHARD. QP-DYN was the best in Crush and DIEHARD, and better than AES in BigCrush.

	SmallCrush	Crush	BigCrush	DIEHARD
QP-DYN	0.04	0.2	0.2	0.22
RC4	0.02	0.7	0.1	0.28
AES	0.03	0.2	0.6	0.28
CAMELLIA	0.03	0.3	0.5	0.26
MT19937	0.01	2.2	2.2	1.17

Table 1: average number of non-passing tests for one trial

We first implemented QP-DYN into OpenSSL, then fixed OpenVPN to support stream cipher. The experiment evironment is showen in the table 2. We provided two PCs with a gigabit ethernet router to run OpenVPN. We measured average throughput(Mbps) between two PCs of 12 trials excluding maximum and minimum results. The measureing method was `iperf` which is the TCP/UDP bandwidth measurement tool. The experiment was done for 12 generators: QP-DYN, RC4, AES, CAMELLIA, CAST5, Blowfish, SEED, IDEA, DES, DESX, RC2 and 3DES. The key lengths were 56bit in DES, 120 bit in DESX, 168bit in 3DES and 128bit in the others. The block ciphers ran in the CBC mode.

The table 3 shows the result of tests with the case of no encryption. The QP-DYN was faster than AES, and slower than RC4.

3 QP-KEX

In public key agreement (PKA) algorithms two interlocutors a sender(A) and a receiver(B) produce a secret shared key (SSK) by exchanging public information and combining it with private one. Such cryptographic algorithms are called *asymmetric* because the

	PC1	PC2
OS	Mac OS X 10.9.1	Mac OS X 10.8.5
CPU	Intel Core i5 1.7GHz	Intel Core i5 1.3GHz
MEM	4GB	4GB
Interface	Gigabit Ethernet	Gigabit Ethernet

Table 2: environment

generator	throughput (Mbps)
QP-DYN	153.3
RC4	171.8
AES	150.1
CAMELLIA	147.0
CAST5	128.3
Blowfish	128.2
SEED	121.6
IDEA	117.1
DES	112.9
DESX	112.7
RC2	92.8
3DES	74.5
No encryption	217.7

Table 3: result of speed test

private informations possessed by A and B are different and not shared. However the operations performed by A and B, to construct the secret shared key (SSK), are quite similar. The QP-KEX key agreement protocol is described in this framework.

In this paper a new method to construct PKA algorithms is discussed in which this residual form of symmetry is eliminated, hence the name: *strongly asymmetric PKA algorithms*. Rather than a new class of PKA algorithms, the method yields *a machine to produce PKA algorithms*.

The main new features of this new class of PKA algorithms are the following:

- Recipient public keys are distinguished from sender public keys
- B has more than one public key (*multiple public keys*)
- The unique public key used by A depends on those of the recipient.

The splitting of the public information into multiple public keys implies levels of security, flexibility and variety of concrete realizations which cannot be found in the standard PKA algorithms. The construction of these algorithms does not depend on sophisticated mathematical structures, e.g. groups associated to elliptic curves or complex theorems of number theory. This implies a drastic decrease in implementation complexity and increase in velocity.

3.1 Notations and Public Ingredients

Let $\mathbb{N}$ be the natural integers, $\mathcal{P}$, a semigroup (noted multiplicatively, with 1) and $\alpha \in \mathcal{P}$, an element of $\mathcal{P}$ which is the (commutative) semigroup generated by α: $\mathcal{P}_0(\alpha) \equiv \mathcal{P}_0(\alpha) := \{\alpha^n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}$

3.2 Frameworks of the algorithm

Step (0; preparation) B constructs the following maps:

$$N_{B,1} : \mathcal{P} \to \mathcal{P} \quad \text{easily invertible map}$$

$$N_{B,3} : \mathcal{P} \to \mathcal{P} \text{ easily invertible map}$$

$$\hat{x}_{B,1} \ , \ \hat{x}_{B,2} \ , \ \hat{x}_{B,3} \ , \ \hat{x}_{B,4} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$

arbitrary functions satisfying the *compatibility conditions*

$$\hat{x}_{B,1}\hat{x}_{B,2}|_{\mathcal{P}_0} = \hat{x}_{B,3}\hat{x}_{B,4}|_{\mathcal{P}_0}$$

$$N_{B,1}\hat{x}_{B,2}|_{\mathcal{P}_0} \text{ is an homomorphism} : \mathcal{P}_0 \to \mathcal{P}$$

Step (1) Using the functions constructed in Step (0), B constructs:
(i) *The Secret Key of* B, i.e. the function:

$$\hat{x}_B \equiv \hat{x}_{B,3}N_{B,3}$$

(ii) *The Public Keys of* B, i.e. the functions:

$$\hat{x}_{B,1}N_{B,1}^{-1}$$

$$N_{B,3}^{-1}\hat{x}_{B,4}$$

and the element of $\mathcal{P}$

$$N_{B,1}\hat{x}_{B,2}(\alpha)$$

Step (2) B sends his public keys to A
Step (3A) A chooses her *Secret Key*: a natural integer $x_A \in \mathbb{N}$.
Step (3B) using α, x_A and the public key $N_{B,3}^{-1}\hat{x}_{B,4}$ of B, A computes her public key: $y_A \equiv N_{B,3}^{-1}\hat{x}_{B,4}(\alpha^{x_A})$
Step (4): A sends her public key y_A to B.
Step (5): *Computation of the SSK*: $\kappa = x_{B,1}x_{B,2}(\alpha^{x_A}) = x_{B,3}x_{B,4}(\alpha^{x_A})$
Step (5A): A computes:

$$\begin{aligned} x_{B,1}N_{B,1}^{-1}[N_{B,1}x_{B,2}(\alpha)]^{x_A} &= x_{B,1}N_{B,1}^{-1}[N_{B,1}x_{B,2}(\alpha^{x_A})] \\ &= x_{B,1}x_{B,2}(\alpha^{x_A}) \\ &= \kappa \end{aligned}$$

Notice that, in order to calculate κ, A uses public keys of B different from the one used to produce y_A.
Step (5B): B computes

$$\begin{aligned} \hat{x}_B(y_A) &= x_{B,3}N_{B,3}(y_A) \\ &= x_{B,3}N_{B,3}(N_{B,3}^{-1}x_{B,4})(\alpha^{x_A}) \\ &= x_{B,3}x_{B,4}(\alpha^{x_A}) \\ &= \kappa \end{aligned}$$

3.3 Scalar toy model

In this section, we show a scalar toy model and its attacks. Any field $\mathbb{F}$ in which, for each $x \in \mathbb{F}$, the computation of x^{-1} is efficient. A typical choice is $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$. **Step (0): Definition of the functions**
Fix $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{F}$ and define:

$$\hat{x}_{B,2}(y) \equiv y^{x_2}$$

$$\hat{x}_{B,1}(y) \equiv y^{x_1}$$

$$\hat{x}_{B,3}(y) \equiv y^{x_3}$$

$$\hat{x}_{B,4}(y) \equiv y^{x_4}$$

$$N_{B,1} \equiv id$$

$$N_{B,3} \equiv id$$

1–**st Compatibility condition**:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{B,1}\hat{x}_{B,2}(y) &= \hat{x}_{B,1}(y^{x_2}) \\ &= (y^{x_2})^{x_1} \\ &= y^{x_2 x_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{B,3}\hat{x}_{B,4}(y) &= \hat{x}_{B,3}(y^{x_4}) \\ &= (y^{x_4})^{x_3} \\ &= y^{x_4 x_3}\end{aligned}$$

This gives the easily satisfiable condition:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{B,1}\hat{x}_{B,2} &= \hat{x}_{B,3}\hat{x}_{B,4} \Leftrightarrow \\ x_1 x_2 &= x_3 x_4 =: \bar{x}\end{aligned}$$

2–**d Compatibility condition**:

$$\begin{aligned}N_{B,1}\hat{x}_{B,2}(A^n) &= \hat{x}_{B,2}(A^n) \\ &= (A^n)^{x_2} \\ &= A^{n x_2} \\ &= (A^{x_2})^n \\ &= (x_{B,2}(A))^n \\ &= N_{B,1}\hat{x}_{B,2}(A)^n\end{aligned}$$

Thus $N_{B,1}\hat{x}_{B,2}|_{\mathcal{P}_0}$ is an homomorphism, as required.
Public Keys of B:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{B,1}N_{B,1}^{-1}(y) &= \hat{x}_{B,1}(y) \\ &= y^{x_1} \\ N_{B,3}^{-1}\hat{x}_{B,4}(y) &= N_{B,3}^{-1}(y^{x_4}) \\ &= y^{x_4} \\ N_{B,1}\hat{x}_{B,2}(A) &= \hat{x}_{B,2}(A) \\ &= A^{x_2}\end{aligned}$$

Secret Key of B:

$$\hat{x}_B(y) = \hat{x}_{B,3}N_{B,3}(y) = y^{x_3}$$

Thus to give the function $\hat{x}_B$ is equivalent to give the number x_3.
Secret Key of A:

$$x_A \in \mathbb{N}$$

Public Key of A:

$$y_A = N_{B,3}^{-1}\hat{x}_{B,4}(A^{x_A}) = A^{x_A x_4}$$

A constructs the SSK:

$$\begin{aligned} x_{B,1} N_{B,1}^{-1} [N_{B,1} x_{B,2}(A)]^{x_A} &= x_{B,1} [x_{B,2}(A)]^{x_A} \\ &= x_{B,1} x_{B,2}(A^{x_A}) \\ &= A^{x_A x_1 x_2} \\ &= \kappa \end{aligned}$$

B constructs the SSK:

$$\begin{aligned} \hat{x}_B(y_A) &= \hat{x}_B(A^{x_A x_4}) \\ &= A^{x_A x_4 x_3} \\ &= \kappa \end{aligned}$$

The SSK is the same because of the compatibility condition $x_1 x_2 = x_4 x_3$.

3.4 Breaking complexity

The eavesdropper, called Eve (E) knows the public parameters and the public keys:

$$A \in \mathbb{F} \ ; \ x_1 \in \mathbb{F} \ ; \ x_4 \in \mathbb{F} \ ; \ A^{x_2} \in \mathbb{F} \ ; \ y_A = A^{x_A x_4} \in \mathbb{F}$$

If E can compute the logarithm in $\mathbb{F}$, then she can recover $x_A x_4 = lg_A y_A$. Since E knows x_4, she recovers x_A knowing A^{x_2}, x_1, x_A, she can compute the SSK

$$(A^{x_2})^{x_A x_1} = A^{x_A x_1 x_2} = \kappa$$

Thus the breaking complexity of this algorithm is equivalent to the logarithm in $\mathbb{F}$. This means that the above toy realization does not bring a real gain with respect to the standard PKA algorithms.

3.5 A strongly asymmetric version of the Diffie–Hellman algorithm

The public keys of B are

$$y_{B,1} \equiv a\alpha^{x_B}$$

$$y_{B,2} \equiv a^{x_B^{-1}} \alpha$$

The secret key of A is $x_A \in \mathbb{N}$, and the public key of A is $y_A := y_{B,2}^{x_A}$. Finally the SSK κ is $\kappa := a^{x_A} \alpha^{x_A x_B}$. A computes the SSK using $y_{B,1}$ as $y_{B,1}^{x_A} = (a\alpha^{x_B})^{x_A} = a^{x_A} \alpha^{x_A x_B}$, and B computes the SSK using y_A as $y_A^{x_B} = (a^{x_A x_B^{-1}} \alpha^{x_A})^{x_B} = a^{x_A} \alpha^{x_A x_B} = \kappa$.

3.6 The Diffie–Hellman algorithm

The Diffie–Hellman algorithm is recovered by choosing $a = 1$, which gives

$$y_{B,1} = y_B \equiv \alpha^{x_B}$$

$$y_{B,2} = \alpha$$

$$y_A = \alpha^{x_A}$$

$$\kappa = \alpha^{x_A x_B}$$

3.7 Beyond the discrete logarithm: a simple example

B fixes the following functions:

- A polynomial of degree n

$$Q_n(y) = \sum_{j=0}^{n} a_j y^j \ ; \ a_j \in \mathbb{F} \ , \ j \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

- A polynomial of degree 1

$$P_2(y) := a_2 y + b_2 \ ; \ a_2, b_2 \in \mathbb{F}$$

- Two natural integers and a scalar

$$N_{B,3} \ , \ n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$x_{B,3} \in \mathbb{F}$$

With these ingredients B constructs:

$$\hat{x}_{B,2}(y) = P_2(y^{n_2}) = a_2 y^{n_2} + b_2$$

$$\hat{x}_{B,3}(z) = z^{x_{B,3}}$$

$$\hat{x}_{B,4}(y) = c^{Q_n(y)} = c^{\sum_{j=0}^{n} a_j y^j}$$

$$\hat{N}_{B,3}(z) = z^{N_{B,3}}$$

$$\hat{N}_{B,1} = P_2^{-1} \Leftrightarrow \hat{N}_{B,1}^{-1} = P_2$$

$$\hat{x}_{B,1}(z) = c^{x_{B,3} Q_n(\left(\frac{z}{a_2} - \frac{b_2}{a_2}\right)^{n_2^{-1}})}$$

This choice satisfies the compatibility conditions:

$$\hat{x}_{B,3}\hat{x}_{B,4}(y) = c^{x_{B,3}Q_n(y)} = \hat{x}_{B,1}\hat{x}_{B,2}(y)$$

$$\hat{x}_{B,1}\hat{x}_{B,2} = \hat{x}_{B,3}\hat{x}_{B,4}$$

Public Keys of B is the public parameter α and

$$\hat{N}_{B,1}\hat{x}_{B,2}(\alpha) = P_2^{-1} P_2(\alpha^{n_2}) = \alpha^{n_2}$$

$$\hat{N}_{B,3}^{-1}\hat{x}_{B,4}(y) = \prod_{j=0}^{n} (c^{N_{B,3}^{-1} a_j})^{y^j}$$

B sends to A the $n+1$ numbers: $\hat{N}_{B,3}^{-1}\hat{x}_{B,4} \equiv (c^{N_{B,3}^{-1}a_n}\ ,\ \dots\ ,\ c^{N_{B,3}^{-1}a_0})$.

$$\begin{aligned}\hat{x}_{B,1}\hat{N}_{B,1}^{-1}(y) &= \prod_{j=0}^{n}(c^{x_{B,3}a_j})^{y^{jn_2^{-1}}} \Leftrightarrow \\ \hat{x}_{B,1}\hat{N}_{B,1}^{-1} &\equiv (c^{N_{B,3}^{-1}a_n}\ ,\ \dots\ ,\ c^{N_{B,3}^{-1}a_0}\ ,\ n_2)\end{aligned}$$

Public Key of A is

$$y_A = \hat{N}_{B,3}^{-1}\hat{x}_{B,4}(\alpha^{x_A}) = \prod_{j=0}^{n}(c^{N_{B,3}^{-1}a_j})^{(\alpha^{x_A})^j}$$

Therefore the SSK becomes

$$\kappa = \hat{x}_{B,1}\hat{x}_{B,2}(\alpha^{x_A}) = \hat{x}_{B,3}\hat{x}_{B,4}(\alpha^{x_A}) = c^{x_{B,3}Q_n(\alpha^{x_A})}$$

Taking the following $n+2$ logarithms

$$\log\alpha\ ,\ \log c^{N_{B,3}^{-1}a_n}\ ,\ \dots\ ,\ \log c^{N_{B,3}^{-1}a_0}$$

E(eavesdropper) reduces the problem to the algebraic equation

$$\log y_A = \sum_{j=0}^{n}(\log c^{N_{B,3}^{-1}a_j})(\alpha^{x_A})^j$$

of degree n in the unknown $y = \alpha^{x_A}$. E knows:

- the coefficients of the equation
- at least one solution in the field $\mathbb{F}$ exists.

Therefore E has to:

- find all solutions of this equation in $\mathbb{F}$
- for each of them (at most n) compute the logarithm $\log\alpha^{x_A}$.

From this E deduces a possible candidate for x_A:

$$x_A = \frac{\log\alpha^{x_A}}{\log\alpha}$$

After that, she proceeds by exhaustive search.
Supposing zero cost for the logarithms and the exhaustive search, then the breaking complexity is equivalent to find all the roots in the finite field $\mathbb{F}$ of the algebraic equation of degree n with coefficients in $\mathbb{F}$. No general solution method is known for $n \geq 5$.

4 Conclusions

In this study, we explained the simple version of QP-DYN and showed the results of statistical tests and speed test. Our implementation passed the statistical tests with high accuracy, and was faster than AES-128-CBC on OpenVPN. For PKA, many non toy realizations of the general scheme have been constructed. They are structurally different: not variants of each other. The emphasis of this study is on the unlimited potentiality of realizations which are apparent already from the scalar models. The non scalar models are much richer in structures and possibilities and for some of them the breaking complexity is at the moment unknown.

References

[1] W. Diffie and M. E. Hellman, New Directions in Cryptography, IEEE Transactions on Information Theory, vol.IT-22, No.6, pp.644-654, Nov, 1976

[2] C.Shannon, Communication Theory of Secrecy Systems, Bell System Technical Journal, vol. 28(4), pp. 656 - 715, 1949

[3] M. Abundo, L. Accardi, A. Auricchio, Hyperbolic Automorphisms of Tori and Pseudo-Random Sequences, Calcolo 29(3-4), 213-240, 1992, http://www.cryptalarm.it/ca/uploads/file/ACABAU.pdf

[4] L. Accardi, M. Regoli and M. Ohya, The QP-DYN Algorithms, QP-PQ Quantum Probability and White Noise Analysis, 28, World Sci., 1- 16, 2010

[5] M. Gäbler, L. Accardi, Statistical Analysis of Random Number Generators, QP-PQ Quantum Probability and White Noise Analysis, 28, World Sci., 117-128, 2010

[6] S.Iriyama, T.Hara, Y.Tanaka, M.Ohya, On a PRNG based on non-commutative algebra and its applications, ICECE Technical Report, Vol. 114, No. 115, 89-91, 2014

[7] Ottaviani, Vittorio, Alberto Zanoni, and Massimo Regoli. "Conjugation as public key agreement protocol in mobile cryptography." Security and Cryptography (SECRYPT), Proceedings of the 2010 International Conference on. IEEE, 2010.

[8] P. L'ecuter, R. Simard, Universite de Montreal. TestU01: A C Library for Empirical Testing of Random Number Generators, 2007.

[9] G. Marsaglia, The Marsaglia Random Number CDROM including the Diehard Battery of Tests of Randomness, http://www.stat.fsu.edu/pub/diehard/

[10] M. Matsumoto,T. Nishimura. Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator, ACM Trans. on Modeling and Comp. Sim. Vol. 8, No. 1, January pp.3-30, 1998.

On the unique solvability and the reversibility of coupling equations

岡田靖則 (千葉大) *

(Reinhard Schäfke 氏 (Strasbourg 大), 田原秀敏 氏 (上智大) との共同研究)

1 Introduction

■田原の coupling 理論 2007 年, 田原 [3] は Coupling 方程式の概念を導入し, 複素領域の非線形偏微分方程式の変換理論について議論した．そこでは, $F(t,x,u_0,u_1)$ を $\mathbb{C}^4_{(t,x,u_0,u_1)}$ の原点の近傍における正則関数として, 変数 t に関して正規形の 1 階偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x}), \tag{F}$$

が扱われ, 方程式 (F) は自明な方程式

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

と “couple” され, 解の延長などいくつかの応用が与えられた．さらに田原 [4], [5] においては, 次の Briot-Bouquet 型方程式

$$t\frac{\partial u}{\partial t} = F(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x}),$$

が扱われた．ここで, $F(t,x,u_0,u_1)$ は $\mathbb{C}^4$ の原点の近傍の正則関数で, さらに $F(0,x,0,0)=0$, $\frac{\partial F}{\partial u_1}(0,x,0,0) = 0$ をみたすものである．Briot-Bouquet 型方程式の特性指数と呼ばれる関数 $\lambda(x) := \frac{\partial F}{\partial u_0}(0,x,0,0)$ に関するさらなる仮定 $\lambda(0) \notin (-\infty,0] \cup \{1,2,\dots\}$ あるいは $\lambda(0) = K \in \{1,2,\dots\}$ の下で, 上記の方程式は次の形の方程式

$$t\frac{\partial w}{\partial t} = \lambda(x)w, \quad \text{または}, \quad t\frac{\partial w}{\partial t} = \lambda(x)w + \gamma(x)t^K,$$

と “couple” された．

正規形方程式の coupling 理論をもう少し詳しく振り返ろう．複素領域の 2 つの正規形偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x}) \quad \text{(F)}, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = G(t,x,w,\frac{\partial w}{\partial x}) \quad \text{(G)},$$

* 千葉大学大学院理学研究科, 〒263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33, okada@math.s.chiba-u.ac.jp

と, $u(t,x)$ と $w(t,x)$ の間の対応

$$\begin{aligned}
&\Phi : u \mapsto w, \quad w(t,x) = \phi(t,x,u(t,x),\frac{\partial u}{\partial x}(t,x),\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),\dots),\\
&\Psi : w \mapsto u, \quad u(t,x) = \psi(t,x,w(t,x),\frac{\partial w}{\partial x}(t,x),\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x),\dots),
\end{aligned}$$

を考える．ここで $\phi(t,x,u_0,u_1,\dots)$ および $\psi(t,x,w_0,w_1,\dots)$ は, 形式的に "無限変数の正則関数" とみなしている．Φ, Ψ が (F), (G) の解の間の変換を与えるためには, ϕ, ψ は関係式

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{m\ge 0} D^m[F](t,x,u_0,\dots,u_{m+1})\frac{\partial \phi}{\partial u_m} = G(t,x,\phi,D[\phi]), \tag{Φ}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{m\ge 0} D^m[G](t,x,w_0,\dots,w_{m+1})\frac{\partial \psi}{\partial w_m} = F(t,x,\psi,D[\psi]). \tag{Ψ}$$

をみたすべきと考えられる．ここで, D は

$$D := \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{m\ge 0} u_{m+1}\frac{\partial}{\partial u_m}, \quad \Bigl(\text{or} \quad D := \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{m\ge 0} w_{m+1}\frac{\partial}{\partial w_m}\Bigr).$$

で与えられる無限変数の形式ベクトル場である．この関係式 (Φ) と (Ψ) を coupling 方程式という．これらを, 初期条件 $\phi|_{t=0} = u_0$ および $\psi|_{t=0} = w_0$ の下で解きたい.

田原 [3] では, ϕ (および ψ) は,

$$\phi = u_0 + \sum_{k\ge 1}\phi_k(x,u_0,\dots,u_k)t^k \in \sum_{k\ge 0}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\{|x|\le R\})[[u_0,\dots,u_k]]t^k,$$

という形の形式ベキ級数として扱われた．なお, 初項が u_0 であることは, 初期条件 $\phi|_{t=0} = u_0$ に対応している．そして, $G\equiv 0$ の場合 (すなわち, $\frac{\partial u}{\partial t} = F$ および $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ の間 coupling の場合) に,

- 方程式 (Φ) の上記の形をした形式ベキ級数解 ϕ の一意存在.
- $w = \phi(t,x,u,\partial u/\partial x,\dots)$ が意味を持つための ϕ の評価.
- 方程式 (Ψ) とその形式ベキ級数解 ψ に対する同様の結果.
- ϕ と ψ の "reversibility", (すなわち, ϕ と ψ の定める変換 Φ および Ψ が互いに逆変換であること).

が示された．もちろん, u, w の属するいくつかの関数空間を考えて, Φ 等に意味を与える際や reversibility の議論においては, それら関数空間毎に議論をする必要があった.

[4], [5] での Briot-Bouquet 型方程式に対する coupling 理論も, coupling 方程式の形や形式ベキ級数の形に若干変更があるが, 大筋は同様であった.

■動機　このように, Coupling 理論は複素領域の非線形偏微分方程式に関する変換理論であるが, 変換 Φ と Ψ の議論が非対称であることが必要かどうか, あるいはより広いクラスの方程式に適用できないかなどの疑問も沸く．これらの疑問のいくつかには,

(1) 登場する形式級数を無限変数の正則性の観点から見直す.

(2) Coupling 方程式をより関数解析的な視点から議論する.

ことで答えられそうに思える.

以下, 無限変数の正則性について 2 節で準備した後, coupling 方程式の一意可解性について 3 節で, また変換の合成と reversibility について 4 節で述べる.

2 数列空間における正則性, admissibility, 連鎖律

元の coupling 理論では ϕ や ψ は変数 $(t, x, u_0, u_1, \dots)$ あるいは $(t, x, w_0, w_1, \dots)$ を持つ関数 (実際には級数) であった. ここでは, どちらも (t, x, z), ただし $z = (z_0, z_1, \dots)$ という変数を持つ関数とみなし, とくに本節では主として z 変数に関する正則性等について議論する.

■数列空間と位相 複素数列のなす空間

$$\mathbb{C}^{\mathbb{N}} := \{z = (z_i)_{i\in\mathbb{N}} = (z_0, z_1, \dots) \mid z_i \in \mathbb{C}\},$$

に直積位相を入れ, その部分空間

$$\mathbb{C}^{(\mathbb{N})} := \{z = (z_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \text{有限個の } i \text{ を除いて } z_i = 0\},$$

には $\mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ たちの帰納極限としての位相を入れると, どちらも局所凸位相になることが知られている. Coupling 理論に登場する “無限変数の関数” $\phi(t, x, z) = \phi(t, x, z_0, z_1, \dots)$ を $\mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_z^{\mathbb{N}}$ のある部分集合上の関数として扱うため, $\mathbb{C}_z^{(\mathbb{N})} \hookrightarrow X \hookrightarrow \mathbb{C}_z^{\mathbb{N}}$ のように連続に埋め込まれる局所凸空間 X を考える. 実際には局所凸空間 X への線形写像 $\mathbb{C}_z^{(\mathbb{N})} \to X$ は常に連続であるから, 右側の包含写像 $X \hookrightarrow \mathbb{C}_z^{\mathbb{N}}$ の連続性のみが問題となる.

このような X の例として, 重み付きの ℓ^1 空間が挙げられる.

例 2.1 (weighted ℓ^1 spaces)**.** 正数列 $c = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を重み列と呼び, 重み c の ℓ^1 空間を

$$\ell^1(c) := \{z = (z_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \|z\|_{\ell^1(c)} := \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i|z_i| < +\infty\},$$

で定める. $\ell^1(c)$ は Banach 空間になり, $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \hookrightarrow \ell^1(c) \hookrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ と連続に埋め込まれる.

特に, 重み列 $\sigma(r) := (r^i/i!)_{i\in\mathbb{N}}$, $(r > 0)$ を考え, 対応する重み付き ℓ^1 空間 $\ell^1(\sigma(r))$ の r に関する帰納極限をとると, 収束ベキ級数のなす空間が得られる.

例 2.2 (spaces of convergent power series)**.** 対応 $(z_i)_i \mapsto \sum_i z_i x^i/i!$ によって, 次の同型が得られる.

$$X[\eta] := \varinjlim_{r>\eta} \ell^1(\sigma(r)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\{|x| \le \eta\}), \quad \text{for } \eta \ge 0,$$

なお, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\{|x| \le \eta\})$ は $\mathbb{C}$ の閉円板 $\{|x| \le \eta\}$ の近傍で正則な関数の空間である. $X[\eta]$ は, DFS 空間と呼ばれる種類の局所凸空間で, $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \hookrightarrow X[\eta] \hookrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ と連続に埋め込まれる.

■Admissibility と正則性

定義 2.3 (locally admissible functions)**.** $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \hookrightarrow X \hookrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ を局所凸空間の連続埋め込み, $W \subset X$ を開集合, $f : W \to \mathbb{C}$ を W 上の複素数値関数とする.

(1) f が W 上 admissible であるとは, ある有限変数の正則関数の列の大域的一様極限であることを言う. 詳しくは, 各 $k \in \mathbb{N}$ について, 自然数 $n_k \in \mathbb{N}$ と, 標準射影 $X \hookrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{n_k}$ (開写像) による W の像の上で正則な関数 $f_k(z_0, z_1, \dots, z_{n_k-1})$ が存在して, 次をみたすことと定める.
$$f(z) = \lim_{k\to\infty} f_k(z_0, z_1, \dots, z_{n_k-1}), \quad \text{uniformly on } W.$$

(2) f が W 上局所 admissible であるとは, 任意の点 $\dot{z} \in W$ に対して, 近傍 $U \subset W$ が存在して, f が U 上 admissible になることを言う.

局所 admissible な関数 $f(z)$ は変数毎正則である. すなわち, 各 $i \in \mathbb{N}$ について, z_i 以外の変数 $(z_j)_{j\neq i}$ を固定すると, 1 変数関数 $z_i \mapsto f(\dots, z_i, \dots)$ は正則になる. また, (局所) admissibility の概念は通常の有限変数の正則性に近いので, 微積分や複素解析の様々な公式がそのまま使えると期待できる. 例えば, admissible な関数と正則関数たちの合成は, well-defined ならば正則になる.

補題 2.4 (composition)**.** *$\mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \hookrightarrow X \hookrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ を局所凸空間の連続埋め込み, $W \subset X$ を開集合とする. $f : W \to \mathbb{C}$ を admissible な関数, $u_i(t)$ $(i \in \mathbb{N})$ を $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数で, すべての $t \in \Omega$ に対して $u(t) := (u_i(t))_i \in W$ をみたすとすると,*
$$g(t) := f(u(t)) = f(u_0(t), u_1(t), u_2(t), \dots)$$
は Ω 上で正則になる.

しかし, admissibility の概念には欠点もある.

- Admissibility は偏微分で安定でない.
- ベクトル値関数の (局所) admissibility を定義したとして, それが合成で安定かどうかはわからない.

一方, 無限変数の正則性としては, 局所凸空間上の正則性の概念がよく知られている. (例えば Dineen [1] を参照のこと.)

X, Y を局所凸空間, $W \subset X$ を開集合とする.

定義 2.5 (Gâteaux holomorphy)**.** 写像 $f : W \to Y$ が Gâteaux 正則あるいは G-正則であるとは, 任意の $x_0 \in W$, $x_1 \in X$, $\eta \in Y'$ に対して, $t = 0$ の近傍で定義された 1 変数の複素数値関数
$$t \mapsto \eta(f(x_0 + x_1 t)) \in \mathbb{C}$$
が正則であることと定める.

なお, Gâteaux 正則性の概念は X の位相とは無関係に定まり, また定義域 W が X の開集合である必要もないが, ここでは詳細は省く.

定義 2.6 (holomorphy)**.** 写像 $f : W \to Y$ が正則とは, G-正則かつ連続であることと定める.

このとき,

- 正則性は X の位相に関して局所的な概念である.
- 正則性は合成に関して安定である. (Gâteaux 正則性はそうでない.)

これらいくつかの正則性の間には, 次のような関係がある.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\text{admissibility}} & \Longrightarrow & \boxed{\text{局所 admissibility}} & \Longrightarrow & \boxed{\text{変数毎正則性}} \\ & & \Downarrow & & \Uparrow \\ & & \boxed{\text{正則性}} & \Longrightarrow & \boxed{\text{G-正則性}} \end{array}$$

- 局所 admissible な関数は正則である.
- $\ell^1(c)$ 上では, 正則だが局所 admissible でない関数が存在する.

一方,

定理 2.7. $X[\eta]$ 上では, 正則性から局所 *admissibility* が従う. したがって, 局所 *admissibility* と正則性は同値になる.

一意接続性に関しては次の点に注意が必要である.

定理 2.8 (unique continuation)**.** X を局所凸空間, $W \subset X$ を連結開集合, f を W 上の正則関数, $U \subset W$ を空でない開部分集合とする. このとき, $f|_U \equiv 0$ ならば W 上 $f \equiv 0$.

事実. $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \hookrightarrow X \hookrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ を局所凸空間の連続埋め込み, $W \subset X$ を原点の連結な開近傍とする.

(1) 一般に, W 上の正則関数 f について,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^{k+1}, \partial_{z_0}^{\alpha_0} \cdots \partial_{z_k}^{\alpha_k} f(0) = 0 \not\Rightarrow f \equiv 0.$$

(2) W 上の局所 admissible な関数 f について,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^{k+1}, \partial_{z_0}^{\alpha_0} \cdots \partial_{z_k}^{\alpha_k} f(0) = 0 \Rightarrow f \equiv 0.$$

■連鎖律とベクトル場 D

定義 2.9 (vector field D)**.** 無限個の変数 $(x, z) = (x, z_0, z_1, \ldots)$ に関する形式ベクトル場 D を

$$D = \partial_x + \sum_{i \in \mathbb{N}} z_{i+1} \partial_{z_i}$$

で定める.

$\mathbb{C}_z^{(\mathbb{N})} \hookrightarrow X \hookrightarrow \mathbb{C}_z^{\mathbb{N}}$ を局所凸空間の連続埋め込みとする．開集合 $U \subset \mathbb{C}_x \times X$ 上の正則関数 $f(x,z)$ に対して形式和

$$D[f](x,z) = \partial_x f(x,z) + \sum_{i\in\mathbb{N}} z_{i+1}\partial_{z_i} f(x,z)$$

を考え, もし級数が収束すれば $D[f]$ を U 上の関数とみなす.

まず, 有限変数の場合を考えよう．つまり, $U \subset \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}^{k+1}_{(z_0,\dots,z_k)}$ 上の正則関数 $f(x,z_0,\dots,z_k)$ に対しては,

$$D[f] = (\partial_x f + \sum_{i=0}^{k} z_{i+1}\partial_{z_i})f$$

は有限和で, $U \times \mathbb{C}_{z_{k+1}} \subset \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}^{k+2}_{(z_0,\dots,z_{k+1})}$ 上で定義された正則関数を定める．このとき,

事実 (chain rule for $f(x,z_0,\dots,z_k)$)**.** $u(x)$ は $\Omega \subset \mathbb{C}_x$ 上 $(x,u(x),\partial_x u(x),\dots,\partial_x^k u(x)) \in U$ をみたす正則関数とする．すると合成 $g(x) := f(x,u(x),\partial_x u(x),\dots,\partial_x^k u(x))$ も Ω 上正則で,

$$\partial_x g(x) = D[f](x,u(x),\partial_x u(x),\dots,\partial_x^{k+1}u(x)),$$

をみたす. 繰り返せば,

$$\partial_x^m g(x) = D^m[f](x,u(x),\partial_x u(x),\dots,\partial_x^{k+m}u(x)), \quad m \in \mathbb{N}.$$

となる.

無限変数の場合でも, $\mathbb{C}_x \times X[\eta]$ 上では, $D[f]$ の定義の適切性と連鎖律が成り立つ.

定理 2.10 (chain rule on $\mathbb{C}_x \times X[\eta]$)**.** $f(x,z)$ を開集合 $U \subset \mathbb{C}_x \times X[\eta]$ 上の正則関数とする.

(1) $D[f](x,z)$ は局所一様に絶対収束して U 上の正則関数を定める.

(2) $u(x)$ は $\Omega \subset \mathbb{C}_x$ 上で $(x,(\partial_x^i u(x))_{i\in\mathbb{N}}) \in U$ をみたす正則関数とすると, 合成

$$g(x) := f(x,(\partial_x^i u(x))_{i\in\mathbb{N}})$$

も Ω 上正則で, その導関数は

$$\partial_x^m g(x) = D^m[f](x,(\partial_x^i u(x))_{i\in\mathbb{N}}), \quad m \in \mathbb{N},\, x \in \Omega$$

と書ける.

定理 2.11 (chain rule on $\mathbb{C}_x \times X[\eta]$, II)**.** $f(x,z)$ は開集合 $U \subset \mathbb{C}_x \times X[\eta]$ 上の正則関数とする． $\phi_0(x,z)$ を開集合 $V \subset \mathbb{C}_x \times X[\eta']$ 上の正則関数で, 任意の $(x,z) \in V$ に対して $\phi(x,z) := (x,(D^i\phi_0(x,z))_{i\in\mathbb{N}}) \in U$ をみたし, ϕ は V から $\mathbb{C}_x \times X[\eta]$ への写像として局所有界であるとする．このとき, 合成

$$g(x,z) := f\circ\phi(x,z) = f(x,(D^i\phi_0(x,z))_{i\in\mathbb{N}})$$

も V 上正則で, 次をみたす.

$$D^m g(x,z) = (D^m f)\circ\phi(x,z), \quad m \in \mathbb{N},\, (x,z) \in V.$$

3 Coupling 方程式の可解性

オリジナルの coupling 理論において, 元の偏微分方程式や coupling 方程式の変数 t は複素変数であった. ここでは, 変数 t は, 実の 0 の近傍を動く場合, 実で非負の値をとる場合, 複素の 0 の近傍を動く場合, 複素の角領域を動く場合とが並行して議論できる. 本講演では実の非負の値をとる場合を中心に考える.

■正規形方程式の coupling 方程式 対応 $\Phi : u \mapsto w$, $w = \phi(t, x, u, \partial_x u, \dots)$ が, 方程式

$$\partial_t u = F(t, x, u, \partial_x u) \quad (\mathsf{F}), \qquad \partial_t w = G(t, x, u, \partial_x w) \quad (\mathsf{G}).$$

の解 u から解 w への変換を与えるための, 未知関数 $\phi(t, x, z)$ に関する coupling 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t \phi + \sum_{m \in \mathbb{N}} D^m[F](t, x, z_0, z_1, \dots, z_{m+1}) \partial_{z_m} \phi = G(t, x, \phi, D[\phi]), \\ \phi(0, x, z) = z_0, \end{cases}$$

を解きたいのであった. なお, t が実の非負の値を取る場合は, $\phi(0, x, z)$ は $\phi(+0, x, z)$ と解釈する.

正定数 r_0, R_0, ρ_0 をとり, コンパクト集合 $K_0 \subset \mathbb{C}^3$, $\hat{K}_0^+ \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^3$ を

$$\begin{aligned} K_0 &:= \{(x, z_0, z_1) \in \mathbb{C}^3 \mid |x| \le R_0, |z_0| \le \rho_0, |z_1| \le \rho_0\}, \\ \hat{K}_0^+ &:= [0, r_0] \times K_0, \end{aligned}$$

で定め, 関数

$$F(t, x, z_0, z_1),\ G(t, x, z_0, z_1) \in C^0\mathcal{O}(\hat{K}_0^+) := C^0([0, r_0]; \mathcal{O}(K_0))$$

をとる.

■領域と重み関数 F と G に応じて, 正定数 r $(< r_0)$, ρ $(< \rho_0/2)$ と $\mathbb{C}_x$ 上の 1-Lipschitz 連続関数 $d(x)$ を

$$0 < d_{\max} := \sup_{x \in \mathbb{C}} d(x) \le 1, \quad d(x) > 0 \Rightarrow |x| < R_0,$$

のようにとり, 集合 $\Omega_{d,c,+0} \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_z^{\mathbb{N}}$ と重み関数 $\omega_{d,c,0}(t, x, z)$, $(c \ge 1)$ を下記のように定義する.

$$\begin{aligned} \xi_j(z, y) &:= \sum_{i \ge 0} z_{j+i} \cdot y^i / i!, \quad j \in \mathbb{N}, \\ \mu(z, y) &:= \rho^{-1} \sum_{0 \le j \le 2} \xi_j(|z|, y), \quad |z| = (|z_i|)_{i \in \mathbb{N}}. \\ \omega_{d,c,\varepsilon}(t, x, z) &:= d(x) - (ct/r + \varepsilon) - \mu(z, ct/r + \varepsilon), \\ \Big(\omega_{d,c,0}(t, x, z) &= d(x) - ct/r - \mu(z, ct/r)\Big), \\ \Omega_{d,c,\varepsilon} &:= \{(t, x, z) \in \mathbb{R}_{\ge 0} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \omega_{d,c,\varepsilon}(t, x, z) > 0\}, \\ \Omega_{d,c,+0} &:= \bigcup_{\varepsilon > 0} \Omega_{d,c,\varepsilon} \quad \Big(\subsetneq \Omega_{d,c,0}\Big). \end{aligned}$$

事実. $\mathbb{R}_t \times \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_z^{\mathbb{N}}$ の部分集合 $\Omega_{d,c,+0}$ は

$$\Omega_{d,c,+0} = \bigcup_{0<s\leq r} [0,s) \times V_{d,cs/r+0}$$

と表される．ここで $V_{d,cs/r+0} := \{(x,z) \mid (s,x,z) \in \Omega_{d,c,+0}\}$ は $\mathbb{C}_x \times X[cs/r]$ の開集合である．

$\Omega_{d,c,+0}$ 上の関数に対する連続性と (x,z) 変数に関する正則性の概念が, 各 $[0,s) \times V_{d,cs/r+0}$ 上への制限に対する対応する概念 (位相は $\mathbb{R}_t \times \mathbb{C}_x \times X[cs/r]$ からの誘導位相による) を用いて定義される．

定義 3.1. $\Omega_{d,c,+0}$ 上の (x,z)-正則な連続関数全体の空間を $C^0\mathcal{O}(\Omega_{d,c,+0})$ と書く．

さらに, 重み関数 $\omega_{d,c,0}(t,x,z)$ を用いて, $\Omega_{d,c,+0}$ 上の関数の空間 $\mathscr{X}_{d,c}$ を導入しよう．関数 $\phi(t,x,z) \in C^0\mathcal{O}(\Omega_{d,c,+0})$ が $\mathscr{X}_{d,c}$ に属するとは, 定数 C が存在して, $(t,x,z) \in \Omega_{d,c,+0}$ and $m \in \mathbb{N}$ について以下の不等式

$$|\phi| \leq C\rho, \quad |D[\phi]| \leq C\rho, \quad |D^2[\phi]| \leq \frac{C\rho}{\omega_{d,c,0}^{1/2}},$$
$$|\partial_{z_m}\phi| \leq \frac{C}{\omega_{d,c,0}^{1/2}} \cdot \frac{(c|t|/r)^m}{m!}, \quad |\partial_{z_m} D[\phi]| \leq \frac{C}{\omega_{d,c,0}^{1/2}} \sum_{i=0}^{\min\{m,1\}} \frac{(c|t|/r)^{m-i}}{(m-i)!}.$$

をみたすことと定める．これら 5 つの不等式は 5 つのセミノルム $\|\phi\|_{d,c,1}, \|\phi\|_{d,c,2}, \ldots, \|\phi\|_{d,c,5}$ を定め, $\mathscr{X}_{d,c}$ は

$$\|\phi\|_{d,c,\mathrm{A}} := \max\{\|\phi\|_{d,c,1}, \|\phi\|_{d,c,2}, \|\phi\|_{d,c,3}, \|\phi\|_{d,c,4}, \|\phi\|_{d,c,5}\}$$

について Banach 空間となる．さらに,

$$\|\phi\|_{d,c,\text{1-3}} := \max\{\|\phi\|_{d,c,1}, \|\phi\|_{d,c,2}, \|\phi\|_{d,c,3}\},$$
$$\|\phi\|_{d,c,45} := \max\{\|\phi\|_{d,c,4}, \|\phi\|_{d,c,5}\},$$

とし, 正定数 α, β について

$$\mathscr{X}_{d,c}(\alpha,\beta) := \{\phi \in \mathscr{X}_{d,c} \mid \|\phi\|_{d,c,\text{1-3}} \leq \alpha,\ \|\phi\|_{d,c,45} \leq \beta\}$$

と定めると, $\mathscr{X}_{d,c}(\alpha,\beta)$ は Banach 空間の閉部分集合として完備距離空間となる．なお, 3 番目, 4 番目, 5 番目の不等式に現れる因子 $\omega_{d,c,0}(t,x,z)^{-1/2}$ は, $\mathscr{X}_{d,c}^{\mathbb{C}}$ の関数の偏導関数の南雲型評価の際に用いられる．このタイプの評価に関しては, 南雲 [2] および Walter [6] を参照されたい．

■coupling 方程式の一意可解性　α, β を適切に選ぶと, $\phi \in \mathscr{X}_{d,c}(\alpha,\beta)$ に対する初期値問題

$$\partial_t\phi + \sum_{m\in\mathbb{N}} D^m[F] \cdot \partial_{z_m}\phi = G(t,x,\phi,D[\phi]), \quad \phi|_{t=0} = z_0,$$

と積分方程式

$$\phi = T[\phi] := z_0 - R_F[\phi] + S_G[\phi],$$

が同値になることが示せる. ただし, R_F および S_G は

$$R_F[\phi] := \int_0^t \sum_{m\in\mathbb{N}} D^m[F]\cdot\partial_{z_m}\phi\Big|_{t=\tau} d\tau, \quad S_G[\phi] := \int_0^t G(t,x,\phi,D[\phi])\Big|_{t=\tau} d\tau,$$

で与えられる. そして, 縮小写像の原理により, 次の一意可解性定理を示すことができる.

定理 3.2 (unique solvability)**.** *F, G に応じて定数 A が定まり, 以下が成立する: α, β, $c \geq 1$ を*

$$d_{\max} < \alpha \leq 2, \quad \beta \geq 2, \quad c > \frac{rA\beta}{\alpha - d_{\max}},$$

のようにとると, T は $\mathscr{X}_{d,c}(\alpha,\beta)$ から自分自身への, 距離関数 $\operatorname{dist}(\phi,\phi') := \|\phi-\phi'\|_{d,c,\mathrm{A}}$ に関する縮小写像になる. 結果として, coupling 方程式の初期値問題は $\mathscr{X}_{d,c}(\alpha,\beta)$ に一意解を持つ. その解は $C^1\mathcal{O}(\Omega_{d,c,+0})$ に属する.

ただし, $C^1\mathcal{O}(\Omega_{d,c,+0})$ は

$$C^1\mathcal{O}(\Omega_{d,c,+0}) = \{\phi \in C^0\mathcal{O}(\Omega_{d,c,+0}) \mid \partial_t\phi \in C^0\mathcal{O}(\Omega_{d,c,+0})\}$$

で定義される空間である.

4 coupling の合成と可逆性

■合成とは Coupling による変換の合成を考えるため, 発見的な形式計算を行なってみよう. $\phi(t,x,z)$ に付随する変換 $\Phi : u(t,x) \mapsto v(t,x)$ とは, 形式的に

$$v(t,x) = \Phi[u](t,x) = \phi(t,x,(\partial_x^i u(t,x))_{i\in\mathbb{N}}) = \phi\circ\vec{u}(t,x),$$

と書ける. ここで, $\vec{u}(t,x) := (t,x,(\partial_x^i u(t,x))_{i\in\mathbb{N}})$ という記法を用いた. 連鎖律によれば,

$$\begin{aligned}\partial_x^i v(t,x) &= \partial_x^i\{\phi(t,x,(\partial_x^j u(t,x))_{j\in\mathbb{N}})\} \\ &= D^i[\phi](t,x,(\partial_x^j u(t,x))_{j\in\mathbb{N}}) = D^i[\phi]\circ\vec{u}(t,x),\end{aligned}$$

あるいは, $\vec{\phi}(t,x,z) := (t,x,(D^i[\phi](t,x,z))_{i\in\mathbb{N}})$ も用いて

$$\vec{v} = \overrightarrow{\Phi[u]} = \vec{\phi}\circ\vec{u}$$

となる.

$\psi(t,x,z)$ に付随する変換 $\Psi : v \mapsto w$ も考えると,

$$w = \Psi[\Phi[u]] = \psi\circ\vec{\phi}\circ\vec{u}, \text{ あるいは } \vec{w} = \overrightarrow{\Psi[\Phi[u]]} = \vec{\psi}\circ\vec{\phi}\circ\vec{u},$$

と表すことができ, 図式

$$\begin{array}{ccccc} u & \xmapsto{\Phi} & v = \Phi[u] & \xmapsto{\Psi} & w = \Psi\circ\Phi[u] \\ \vec{\bullet}\big\downarrow & & \vec{\bullet}\big\downarrow & & \vec{\bullet}\big\downarrow \\ \vec{u} & \xmapsto{\vec{\phi}\circ\bullet} & \vec{v} = \vec{\phi}\circ\vec{u} & \xmapsto{\vec{\psi}\circ\bullet} & \vec{w} = \vec{\psi}\circ\vec{\phi}\circ\vec{u} \end{array}$$

における 1 行目を議論するために, 2 行目を考えることが有効であろうと思われる.

問題. “写像” $\vec{\phi}$, $\vec{\psi}$ の合成の可能性を調べよ. 言い換えると, $\vec{\phi}$ を評価し, $\vec{\phi}$ がある $\Omega_{d,c,+0}$ を別の $\Omega_{d_1,c_1,+0}$ の中に写すか確認せよ.

■coupling 写像の合成　$D^i\phi$ と $\omega\circ\phi$ の評価については, 以下を示すことができる.

命題 4.1. *$d_j(x)$, $d(x)$ は値が 1 以下の 1-Lipschitz 関数, c_j, c, δ_j, α_2 は下をみたす正定数とする $(j=1,2)$:*

$$d(x)+\delta_j\le d_j(x),\quad c>c_1+c_2,\quad \delta_1\ge\frac{c-c_2}{c-c_1-c_2}\cdot\alpha_2(2+\delta_2^{-1/2}).$$

$\Omega_{d_2,c_2,+0}$ 上の (x,z)-正則な関数 $\phi(t,x,z)$ が $\|\phi\|_{d_2,c_2,\text{1-3}}\le\alpha_2$ をみたせば, $\vec{\phi}=(t,x,(D^i\phi)_{i\in\mathbb{N}})$ は次をみたす.

$$\vec{\phi}(\Omega_{d,c,+0})\subset\Omega_{d_1,c_1,+0},$$
$$\omega_{d_1,c_1,0}\circ\vec{\phi}(t,x,z)\ge\omega_{d,c,0}(t,x,z)\quad \textit{on}\ \Omega_{d,c,+0}.$$

この評価より, 以下の定理を得る.

定理 4.2 (compositions of coupling maps)**.** *$d_j(x)$, $d(x)$, c_j, c, δ_j, α_2 は前の通りとする $(j=1,2)$. $\psi\in\mathscr{X}_{d_1,c_1}$, $\phi\in\mathscr{X}_{d_2,c_2}$ (ただし $\|\phi\|_{d_2,c_2,\text{1-3}}\le\alpha_2$) に対して, 合成 $\psi\circ\vec{\phi}$ が $\Omega_{d,c,+0}$ 上の関数として well-defined で $\mathscr{X}_{d,c}$ に属し, 以下をみたす.*

$$\|\psi\circ\vec{\phi}\|_{d,c,\text{1-3}}\le\|\psi\|_{d_1,c_1,\text{1-3}},$$
$$\|\psi\circ\vec{\phi}\|_{d,c,4}\le\frac{(c-c_2)\delta_2^{-1/2}}{c-c_1-c_2}\cdot\|\psi\|_{d_1,c_1,4}\cdot\|\phi\|_{d_2,c_2,4},$$
$$\|\psi\circ\vec{\phi}\|_{d,c,5}\le\frac{c(c-c_2)\delta_2^{-1/2}}{(c-c_1-c_2)^2}\cdot\|\psi\|_{d_1,c_1,4}(\|\phi\|_{d_2,c_2,4}+\|\phi\|_{d_2,c_2,5}).$$

ここで, 次の問題を考えてみよう.

問題. $d_1(x)$ $(d_1(0)>0)$ と c_1 が与えられているとする. $\phi,\psi\in\mathscr{X}_{d_1,c_1}$ を合成して, 別の $d(x)$ $(d(0)>0)$ と c について $\psi\circ\vec{\phi}\in\mathscr{X}_{d,c}$ とできるか?

直前の定理によれば次の解答が考えられる.

> $d(x)$ を $d_1(x)$ より小さく, c を十分大きく, α_2 を十分小さくとる. すると $\|\phi\|_{d_1,c_1,\text{1-3}}\le\alpha_2$ という仮定の下で, 合成 $\psi\circ\vec{\phi}\in\mathscr{X}_{d,c}$ が適切に定義され, ある定数 C について
>
> $$\|\psi\circ\vec{\phi}\|_{d,c,\text{1-3}}\le\|\psi\|_{d_1,c_1,\text{1-3}},$$
> $$\|\psi\circ\vec{\phi}\|_{d,c,45}\le C\|\psi\|_{d_1,c_1,45}\|\phi\|_{d_1,c_1,45}$$
>
> が成立する.

Coupling 方程式の解 ϕ, ψ を合成したいときは, $\|\phi\|_{d_1,c_1,\text{1-3}} \le \alpha_2$ がみたされるかどうかわからないので, この解答にはあまり満足できない.

そこで, まず, ϕ をより小さな領域 $\Omega_{d_2,c_2,+0}$ に制限し, 次に, coupling 方程式の初期値問題の解の一意性を用いて評価 $\|\phi\|_{d_2,c_2,\text{1-3}} \le \alpha_2$ を示し, 最後に, さらに小さな領域 $\Omega_{d,c,+0}$ 上での合成 $\psi \circ \vec{\phi}$ を作る, という方針で, この困難を回避できる.

■coupling 方程式の合成と reversibility　ここでは,

$$\begin{cases} \partial_t \phi + \sum_{m\in\mathbb{N}} D^m[F] \cdot \partial_{z_m}\phi = G \circ \vec{\phi}, \\ \phi|_{t=0} = z_0, \end{cases}$$

を **初期値問題** (F, G) と言い, (F, G) と (G, H) の組を *composable pair*, (F, H) をその *composed problem* という. また, (G, F) を (F, G) の *reversed problem* という.

Composable pair (F, G), (G, H) の合成を考えよう.

$$\begin{cases} \partial_t \phi + \sum_{m\in\mathbb{N}} D^m[F] \cdot \partial_{z_m}\phi = G \circ \vec{\phi}, \\ \phi|_{t=0} = z_0, \end{cases} \tag{F, G}$$

$$\begin{cases} \partial_t \phi + \sum_{m\in\mathbb{N}} D^m[G] \cdot \partial_{z_m}\phi = H \circ \vec{\phi}, \\ \phi|_{t=0} = z_0. \end{cases} \tag{G, H}$$

1-Lipschitz 関数 $d_1(x)$ をとると, 一意可解性定理より定数 c_1, α_1, β_1 があって, (F, G) と (G, H) の解 $\phi, \psi \in \mathscr{Z}_{d_1,c_1}(\alpha_1, \beta_1)$ が一意に得られる. このとき,

定理 4.3 (composition of solutions)**.** *1-Lipschitz 関数 $d(x)$ と定数 c, α, β が存在し, 解 ϕ と ψ の合成は composed problem (F, H) の一意解 $\psi \circ \vec{\phi} \in \mathscr{Z}_{d,c}(\alpha, \beta)$ になる.*

(F, G) とその reversed problem (G, F) の reversibility を考えよう.

$$\begin{cases} \partial_t \phi + \sum_{m\in\mathbb{N}} D^m[F] \cdot \partial_{z_m}\phi = G \circ \vec{\phi}, \\ \phi|_{t=0} = z_0, \end{cases} \tag{F, G}$$

$$\begin{cases} \partial_t \phi + \sum_{m\in\mathbb{N}} D^m[G] \cdot \partial_{z_m}\phi = F \circ \vec{\phi}, \\ \phi|_{t=0} = z_0, \end{cases} \tag{G, F}$$

1-Lipschitz 関数 $d_1(x)$ に対して正定数 c_1, α_1, β_1 があって, (F, G), (G, F) それぞれの一意解 $\phi, \psi \in \mathscr{Z}_{d_1,c_1}(\alpha_1, \beta_1)$ が存在する. このとき,

系 4.4. *1-Lipschitz 関数 $d(x)$ と正定数 c, α, β をうまく選ぶと, 合成 $\psi \circ \vec{\phi}$, $\phi \circ \vec{\psi}$ が $\mathscr{Z}_{d,c}(\alpha, \beta)$ 内で well-defined で,*

$$\psi \circ \vec{\phi}(t, x, z) = \phi \circ \vec{\psi}(t, x, z) = z_0$$

をみたす. すなわち $\vec{\psi} \circ \vec{\phi} = \vec{\phi} \circ \vec{\psi} = \mathrm{id}$ となる.

参考文献

[1] S. Dineen. *Complex analysis on infinite-dimensional spaces.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London Ltd., London, 1999.

[2] M. Nagumo. Über das Anfangswertproblem partieller Differentialgleichungen. *Japan. J. Math.*, 18:41–47, 1941.

[3] H. Tahara. Coupling of two partial differential equations and its application. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 43(3):535–583, 2007.

[4] H. Tahara. Coupling of two partial differential equations and its application. II. The case of Briot-Bouquet type PDEs. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 45(2):393–449, 2009.

[5] H. Tahara. On a reduction of nonlinear partial differential equations of Briot-Bouquet type. *Tokyo J. Math.*, 36(2):539–570, 2013.

[6] W. Walter. An elementary proof of the Cauchy-Kowalevsky theorem. *Amer. Math. Monthly*, 92(2):115–126, 1985.

波束変換による波面集合の特徴付けについて*

伊藤真吾（北里大学一般教育部）†

1　序

本講演では, 波束変換を用いた波面集合の特徴付けおよびその応用を紹介する.

関数 $u(x)$ が $x_0 \in \mathbb{R}^n$ で C^∞ 級であるための必要十分条件は，x_0 の近傍で 1 である C_0^∞ 級関数 $\chi(x)$ が存在し，χu のフーリエ変換の絶対値が ξ のどんな負の冪よりも早く減衰することであるという事実はよく知られている．より正確に述べれば，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，ある定数 $C_N > 0$ が存在して，

$$|\mathcal{F}[\chi u](\xi)| \le C_N(1+|\xi|)^{-N} \tag{1.1}$$

が成り立つことである．ここで，$\mathcal{F}[u](\xi)$ は u のフーリエ変換を表し，

$$\mathcal{F}[u](\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx$$

である．波面集合はこのことを方向別に精密化したもので，特異性がある点と，(フーリエ像の空間内での) 特異性の要因となる方向 (つまり，(1.1) が成立しない方向) をペアにした集合である．このようなアイディアは，1970 年頃 M. Sato, J. Bros, D. Iagolnitzer らや L. Hörmander によって，それぞれ独立に紹介されたもので超局所解析の基本的なアイディアとなっている (Sato-Kawai-Kashiwara [10], Hörmander[5], [6], Trèves [11] などを参照)．ここでは, Hörmander に従って波面集合を導入する．以下において，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ はシュワルツの急減少関数空間，つまり

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \text{任意の}\alpha,\beta\text{に対して} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial_x^\alpha \phi(x)| < \infty \right\}$$

とする (α, β は多重指数を表す)．また，$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の緩増加超関数の空間，つまり，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の双対空間を表す.

定義 1.1. (波面集合 $WF(u)$)　$(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とするとき, u が (x_0, ξ_0) で超局所的に C^∞ 級であるとは，x_0 の近傍で $\chi \equiv 1$ を満たす関数 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在し, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し，ある定数 $C_N > 0$ が存在して

$$|\mathcal{F}[\chi u](\xi)| \le C_N(1+|\xi|)^{-N} \quad (\xi \in \Gamma) \tag{1.2}$$

*本講演は東京理科大学の加藤圭一氏, 北海道大学の小林政晴氏との共同研究に基づく.

†singoito@kitasato-u.ac.jp

が成り立つことである．この条件が成り立たない点 (x_0,ξ_0) の集合を波面集合と呼び $WF(u)$ と表す．(ここで $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$ が錐集合であるとは，「$\xi\in\Gamma\Longrightarrow\lambda\xi\in\Gamma\ (\lambda>0)$」が成り立つときをいい，ある点の近傍が錐集合となるとき，その集合を錐近傍と呼ぶ．)

定義 1.1 の波面集合を特に C^∞ 型波面集合と呼び $WF_{C^\infty}(u)$ と書くこともある．また，考える滑らかさの尺度を C^∞ から，解析的，ソボレフの H^s 級，ジェヴレイの G^s 級などに変えた波面集合 $WF_{\mathcal{A}}(u)$, $WF_{H^s}(u)$, $WF_{G^s}(u)$ も同様に定義される．

注意 1.1. 定義から $WF(u)$ は閉集合であって，ξ については錐集合となる．

注意 1.2. $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ の特異台 $\operatorname{sing\,supp} u=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,u$ は x のある近傍で C^∞級$\}$ と波面集合の関係は

$$\operatorname{sing\,supp} u=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\text{ある}\,\xi\,\text{について}\,(x,\xi)\in WF(u)\}$$

で与えられる．つまり，u が x で C^∞ 級であるとは，その点において全ての方向に超局所的に滑らかであるということである．

一方, 波束変換とは Córdoba-Fefferman [1] によって導入された変換で, $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ とするとき, f の波束変換 $W_\phi f(x,\xi)$ を

$$W_\phi f(x,\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\phi(y-x)}f(y)e^{-iy\cdot\xi}dy.$$

と定義する．ここで ϕ を窓関数と呼ぶ．波束変換は，短時間フーリエ変換や窓フーリエ変換などと呼ばれることもある．また，$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上の関数 F に対して，

$$W_\phi^*F(x)=(2\pi)^{-n}\iint_{\mathbb{R}^{2n}}F(y,\xi)\phi(x-y)e^{ix\cdot\xi}dyd\xi$$

とすると，$\langle\psi,\phi\rangle\neq 0$ なる $\phi,\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\frac{1}{\langle\psi,\phi\rangle}W_\psi^*W_\phi f=f,\quad f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$$

が成り立つことが知られている [4, Corollary 11.2.7] (この変換の詳しい性質などは [4] を参照).

波束変換を用いて波面集合を特徴付ける試みは，C^∞ 型波面集合の枠組みにおいて，G. B. Folland [2] によって始められた．[2] で与えられた特徴づけにおいては，窓関数 $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ が偶関数のときのみに限定されていたが，T. Ōkaji [9, Theorem 2.2] によってその条件は取り除かれ，ある多重指数 α について $\int x^\alpha\phi dx\neq 0$ を満たしてさえいればよいことが示された．その特徴付けとは次で与えられる．

定理 1.3. *(G. B. Folland [2, Theorem 3.22], T. Ōkaji [9, Theorem 2.2]).*
$(x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする．また，$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ はある多重指数 α に対して $\int_{\mathbb{R}^n}x^\alpha\phi(x)dx\neq 0$ を満たすとし，$\lambda\geq 1$ に対して $\phi_\lambda(x)=\lambda^{n/4}\phi(\lambda^{1/2}x)$ とおく．このとき，$(x_0,\xi_0)\notin WF(u)$ であるための必要十分条件は，ある x_0 の近傍 K とある ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して，任意の $N\in\mathbb{N}$ と任意の $a\geq 1$ に対して $C_{N,a}>0$ があって

$$|W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)|\leq C_{N,a}\lambda^{-N}\quad(\lambda\geq 1,\ x\in K,\ \xi\in\Gamma\cap\{\xi\in\mathbb{R}^n\,|\,a^{-1}\leq|\xi|\leq a\})$$

を満たすことである．

次に，H^s 型波面集合の定義を与える ．よく知られているように，$u(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ が $x_0 \in \mathbb{R}^n$ でソボレフ H^s 級であるための必要十分条件は，x_0 の近傍で 1 である C_0^∞ 級関数 $\chi(x)$ が存在し，

$$\|\langle\xi\rangle^s \mathcal{F}[\chi u](\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle\xi\rangle^s \mathcal{F}[\chi u](\xi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{1.3}$$

が成り立つことである．ここで，$\langle\xi\rangle = \sqrt{1+|\xi|^2}$ である．これを方向別に考えたものが，H^s 型波面集合である．

定義 1.2. (H^s 型波面集合) $s \in \mathbb{R}$, $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とするとき，u が (x_0, ξ_0) で超局所的に H^s 級であるとは，x_0 の近傍で $\chi \equiv 1$ を満たす関数 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して

$$\|\langle\xi\rangle^s \mathcal{F}[\chi u](\xi)\|_{L^2(\Gamma)} < \infty \tag{1.4}$$

が成り立つことである．この条件が成り立たない点 (x_0, ξ_0) の集合を H^s 型波面集合といい $WF_{H^s}(u)$ と表す．

T. Ōkaji [9] では H^s 型波面集合についても扱っており，波束変換を用いて (x_0, ξ_0) が H^s 型波面集合に属するための必要条件および十分条件を与えている．

定理 1.4. *(T. Ōkaji [9, Theorem 2.4])* $s \in \mathbb{R}$, $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする．また，$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \neq 0$ を満たすとし，$\lambda \geq 1$ に対して $\phi_\lambda(x) = \lambda^{n/4}\phi(\lambda^{1/2}x)$ とおく．このとき, ある x_0 の近傍 K と ξ_0 の近傍 V が存在して,

$$\int_1^\infty \lambda^{n-1+2s} \int_V \int_K |W_{\phi_\lambda} u(x, \lambda\xi)|^2 dx d\xi d\lambda < \infty \tag{1.5}$$

を満たすならば $(x_0, \xi_0) \notin WF_{H^s}(u)$ である. 逆に $(x_0, \xi_0) \notin WF_{H^s}(u)$ ならば，ある x_0 の近傍 K と ξ_0 の近傍 V があって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\int_1^\infty \lambda^{n-1+2s-\varepsilon} \int_V \int_K |W_{\phi_\lambda} u(x, \lambda\xi)|^2 dx d\xi d\lambda < \infty \tag{1.6}$$

が成立する.

注意 1.5. (1.5) と (1.6) では λ のオーダーが ε だけずれているが，P. Gérard [3, Proposition 1.1] において，$\phi(x)$ がガウス関数ならば $\varepsilon = 0$ でも (1.6) が成立することが示されている.

本講演での主定理は以下の 2 つである.

定理 1.6. *($WF_{C^\infty}(u)$ の特徴付け)* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して，次の *(i), (ii), (iii)* は同値.

(i) $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$

(ii) ある $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$, x_0 の近傍 K, ξ_0 の錐近傍 Γ があって, 任意の $N \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$ に対し, ある定数 $C_{N,a}$ があって,

$$|W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)| \leq C_{N,a}\lambda^{-N} \quad (\lambda \geq 1,\ x \in K,\ \xi \in \Gamma \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid a^{-1} \leq |\xi| \leq a\}).$$

(iii) ある x_0 の近傍 K, ξ_0 の錐近傍 Γ があって, 任意の $N \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ に対し, ある定数 $C_{N,a,\phi}$ があって,

$$|W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)| \leq C_{N,a,\phi}\lambda^{-N} \quad (\lambda \geq 1,\ x \in K,\ \xi \in \Gamma \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid a^{-1} \leq |\xi| \leq a\}).$$

注意 1.7. 定理 1.3 における ϕ の条件,「ある多重指数 α に対して $\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \phi(x)dx \neq 0$」を取り除いている.

定理 1.8. *($WF_{H^s}(u)$ の特徴付け)* $s \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して，次の *(i), (ii), (iii)* は同値.

(i) $(x_0,\xi_0) \notin WF_{H^s}(u)$

(ii) ある $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$, x_0 の近傍 K, ξ_0 の近傍 V があって,

$$\int_1^\infty \lambda^{n-1+2s} \int_V \int_K |W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)|^2 dxd\xi d\lambda < \infty. \tag{1.7}$$

(iii) ある x_0 の近傍 K, ξ_0 の近傍 V があって, 任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ に対して

$$\int_1^\infty \lambda^{n-1+2s} \int_V \int_K |W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)|^2 dxd\xi d\lambda < \infty. \tag{1.8}$$

注意 1.9. 定理 1.4 における ϕ の条件「$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \neq 0$」および ε のずれを取り除いている.

2 主定理の証明のための準備

2.1 記号

$x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ に対して, $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y-x| < r\}$ とする．$A \subset \mathbb{R}^n$ に対して, A^c は A の補集合, A° は A の内点全体の集合, $\overline{A}$ は A の閉包を表すとする．また, $\mathbf{1}_A$ は A の特性関数, つまり $x \in A$ のときは, $\mathbf{1}_A(x) = 1$, $x \in A^c$ のときは $\mathbf{1}_A(x) = 0$ であるとする．以下では, C, C_i, C', C'_i $(i = 1,2,3,\ldots)$ などは正の定数を表すものとする．また, C_ϕ などと書いたときは, ϕ に依存する正の定数を表すこととする.

2.2 Key Proposition and Lemmas

まずは, 主定理の証明に必要となる命題・補題を準備する. 命題 2.1 は第 4 節で定理 1.6 を示す際に用いる. 命題 2.2 と補題 2.3〜補題 2.6 は第 3 節で定理 1.8 を示す際に用いる. 命題 2.1, 命題 2.2 と補題 2.3 は, 標準的な方法で容易に証明できるので, 本節では証明を省略する.

命題 2.1. $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とし, $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は x_0 の近傍で $\chi \equiv 1$ を満たすとする. このとき, 次の *(i), (ii)* は同値.

(i) ξ_0 の錐近傍 Γ で, 次を満たすものがある：
任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し, ある $C_N > 0$ が存在し,

$$|\mathcal{F}[\chi u](\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N} \quad (\xi \in \Gamma).$$

(ii) ξ_0 の近傍 V で, 次を満たすものがある：
任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し, ある $C_N > 0$ が存在し,

$$|\mathcal{F}[\chi u](\lambda\xi)| \leq C_N(1+\lambda|\xi|)^{-N} \quad (\xi \in V,\ \lambda \geq 1).$$

命題 2.2. $s \in \mathbb{R}$, $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする. $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は x_0 の近傍で $\chi \equiv 1$ を満たすとする. このとき, 次の *(i), (ii)* は同値である.

(i) ξ_0 の錐近傍で, 次を満たすものがある：

$$\|\langle\xi\rangle^s \mathcal{F}[\chi u](\xi)\|_{L^2(\Gamma)} < \infty. \tag{2.1}$$

(ii) ξ_0 の近傍 V で, 次を満たすものがある*:*

$$\int_1^\infty \lambda^{n-1+2s} \|\mathcal{F}[\chi u](\lambda\xi)\|_{L^2(V)}^2 d\lambda < \infty. \tag{2.2}$$

補題 2.3. $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は x_0 の近傍で $\chi \equiv 1$ を満たすとする. また, V と V' は ξ_0 の近傍で, $\overline{V'} \subset V$ かつ $\lambda \geq 1$ に対して $\|\mathcal{F}[\chi u](\lambda\xi)\|_{L^2(V)} < \infty$ を満たすとする. このとき, 任意の $\zeta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して, ある $C_{N,\zeta} > 0$ が存在して,

$$\int_{V'} |\mathcal{F}[\zeta\chi u](\lambda\xi)|^2 d\xi \leq C_{N,\zeta}\left(\int_V |\mathcal{F}[\chi u](\lambda\xi)|^2 d\xi + \lambda^{-N}\right). \tag{2.3}$$

を満たす.

補題 2.4. $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とし, $\lambda \geq 1$ に対して $\phi_\lambda(x) = \lambda^{n/4}\phi(\lambda^{1/2}x)$ とおく. また, $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は x_0 の近傍で $\chi \equiv 1$ を満たすとし, K は x_0 の近傍で $\overline{K} \subset \{x \in \mathbb{R}^n | \chi(x) = 1\}^\circ$ を満たすとする. このとき, ある定数 $m \in \mathbb{N}$ があって次を満たす：

任意の $\mu \in \mathbb{R}$ に対して, ある定数 $C_\mu > 0$ があって,

$$\mathbf{1}_K(x)\,|W_{\phi_\lambda}[(1-\chi)u](x, \lambda\xi)| \leq C_\mu \lambda^{-\mu}\langle\xi\rangle^m \tag{2.4}$$

を満たす.

証明. $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ なので, $\mathcal{S}'$ の構造定理により (例えば [8, Theorem 2.14] を参照) ある定数 $l, m \in \mathbb{N}$ と関数 $f_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n)$ があって,

$$u(y) = \langle y \rangle^l \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha(y)$$

と書ける. $g(x,y) = \overline{\phi_\lambda(y-x)}\{1-\chi(y)\}\langle y \rangle^l$ とおき, $4N \geq 2m+n+1$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ をとる. シュワルツの不等式と $(1-\Delta_y)^N e^{-iy\cdot(\lambda\xi-\eta)} = \langle \lambda\xi - \eta \rangle^{2N} e^{-iy\cdot(\lambda\xi-\eta)}$ を用いて部分積分することにより,

$$\begin{aligned}
&\left| W_{\phi_\lambda}[(1-\chi)u](x,\lambda\xi) \right| \\
&\qquad \leq \sum_{|\alpha|\leq m} \|\mathcal{F}[f_\alpha]\|_{L^2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \eta^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} g(x,y) e^{-iy\cdot(\lambda\xi-\eta)} dy \right|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \leq \sum_{|\alpha|\leq m} \|f_\alpha\|_{L^2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\eta|^{2|\alpha|} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(1-\Delta_y)^N g(x,y)|}{\langle \lambda\xi-\eta \rangle^{2N}} dy \right)^2 d\eta \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \leq \sum_{|\alpha|\leq m} \|f_\alpha\|_{L^2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\eta|^{2|\alpha|}}{\langle \lambda\xi-\eta \rangle^{4N}} d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |(1-\Delta_y)^N g(x,y)| dy \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

を得る. いま, $|\eta| \leq |\eta - \lambda\xi| + |\lambda\xi|$ であるから, 少なくとも $\frac{|\eta|}{2} \leq |\eta-\lambda\xi|$, $\frac{|\eta|}{2} \leq |\lambda\xi|$ のどちらかは必ず成立ので,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\eta|^{2|\alpha|}}{\langle \lambda\xi-\eta \rangle^{4N}} d\eta \leq \int_{\mathbb{R}^n} \langle \lambda\xi \rangle^{2m} \frac{|\eta|^{2m}}{\langle \lambda\xi \rangle^{2m} \langle \lambda\xi-\eta \rangle^{4N}} d\eta \leq C_1 \lambda^{2m} \langle \xi \rangle^{2m}. \qquad (2.6)$$

一方,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |(1-\Delta_y)^N g(x,y)| dy \\
&\qquad \leq \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|\leq 2N} C_{\beta_1,\beta_2,\beta_3} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_y^{\beta_1} \phi_\lambda(y-x) \cdot \partial_y^{\beta_2}\{1-\chi(y)\} \cdot \partial_y^{\beta_3} \langle y \rangle^l| dy \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

と書ける. $x \in K$, $y \in \mathrm{supp}\{\partial_y^{\beta_2}(1-\chi(y))\}$ のとき $|y-x| \geq C_2$ により $|y-x| \geq C_2' \langle y-x \rangle$ が成立. これにより $M \geq l$ に対して

$$|\partial_y^{\beta_3} \langle y \rangle^l| \leq C_3 \langle y \rangle^l \leq C_3' \langle y-x \rangle^M \langle x \rangle^l = C_M |y-x|^M \langle x \rangle^l$$

が成立. よって,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}_K(x) \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_y^{\beta_1} \phi_\lambda(y-x) \cdot \partial_y^{\beta_2}\{1-\chi(y)\} \cdot \partial_y^{\beta_3} \langle y \rangle^l| dy \\
&\leq C_M' \, \mathbf{1}_K(x) \lambda^{\frac{1}{2}(n+|\beta_1|-M)} \int_{\mathbb{R}^n} |(\partial_y^{\beta_1}\phi)(\lambda^{\frac{1}{2}}(y-x))| \, (\lambda^{\frac{1}{2}}|y-x|)^M \langle x \rangle^l dy \\
&\leq C_M'' \lambda^{N-\frac{M}{2}}. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

したがって, (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) により

$$\mathbf{1}_K(x)\,|W_{\phi_\lambda}[(1-\chi)u](x,\lambda\xi)| \le C'''_M \lambda^{m+N-\frac{M}{2}} \langle\xi\rangle^m. \tag{2.9}$$

となるので, M を十分大きくとれば (2.4) を得る. □

補題 2.5. $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \ge 1$, $\delta > 0$, $k > 0$ とし, $A = \{\eta \in \mathbb{R}^n \mid |\eta| \ge \delta\lambda^{3/4}\}$ とおく. このとき, 任意の $q > 0$ に対しある定数 $C > 0$ があって,

$$\int_A \left| \langle\lambda\eta\rangle^k \mathcal{F}[\phi](\lambda^{-\frac{1}{2}}\eta) \right|^2 d\eta \le C\lambda^{-q} \quad (\lambda \ge 1) \tag{2.10}$$

が成り立つ.

証明. $\eta \in A$ とすると, $|\lambda^{-\frac{1}{2}}\eta| \ge \delta\lambda^{\frac{1}{4}}$ なので

$$|\mathcal{F}[\phi](\lambda^{-1/2}\eta)| \le \frac{|\lambda^{-\frac{1}{2}}\eta|^p |\mathcal{F}[\phi](\lambda^{-\frac{1}{2}}\eta)|}{\delta^p \lambda^{\frac{p}{4}}} \quad (p > 0)$$

が成り立つ. $\langle\lambda\eta\rangle^2 \le \lambda^3 \langle\lambda^{-\frac{1}{2}}\eta\rangle^2$ であるから, 変数変換により

$$\begin{aligned}\int_A \left| \langle\lambda\eta\rangle^k \mathcal{F}[\phi](\lambda^{-\frac{1}{2}}\eta) \right|^2 d\eta &\le \int_A \lambda^{3k} \langle\lambda^{-\frac{1}{2}}\eta\rangle^{2k} \frac{|\lambda^{-\frac{1}{2}}\eta|^{2p} |\mathcal{F}[\phi](\lambda^{-\frac{1}{2}}\eta)|^2}{\delta^{2p}\lambda^{\frac{p}{2}}} d\eta \\ &= \lambda^{3k-\frac{p}{2}+\frac{n}{2}} \delta^{-2p} \| \langle\cdot\rangle^{2k} |\cdot|^{2p} \mathcal{F}[\phi] \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

よって, p を十分大きくすれば (2.10) を得る. □

補題 2.6. $k \in \mathbb{N}$, $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ とし, f の全ての偏導関数は有界であるとする. また, $\psi_\lambda(x) = \lambda^{n/4}\psi(\lambda^{1/2}x)$ とおき, 多重指数 α, β に対して

$$F_{\alpha,\beta}(\eta,\xi) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \chi(y) \partial_x^\alpha f(x,y) \partial_x^\beta (\psi_\lambda(y-x)) e^{-ix\cdot\eta - iy\cdot\xi} dxdy \tag{2.11}$$

とおく. このとき,

$$\| \langle\xi'\rangle^k F_{\alpha,\beta}(\eta, \lambda\xi - \xi') \|^2_{L^2_{\xi'}(\mathbb{R}^n)} \le C\lambda^{\frac{5n}{2}+6k+|\beta|+3} \langle\xi\rangle^{2k+n+1} \tag{2.12}$$

が成り立つ.

証明. $N=2k+n+1$ とする．$(1-\Delta_y)^N e^{-iy\cdot(\lambda\xi-\xi')}=\langle\lambda\xi-\xi'\rangle^{2N}e^{-iy\cdot(\lambda\xi-\xi')}$ であるから, 部分積分により

$$
\begin{aligned}
&|F_{\alpha,\beta}(\eta,\lambda\xi-\xi')|\\
&\le \frac{1}{\langle\lambda\xi-\xi'\rangle^{2N}}\iint_{\mathbb{R}^{2n}}\left|(1-\Delta_y)^N\{\chi(y)\partial_x^\alpha f(x,y)\partial_x^\beta(\psi_\lambda(y-x))\}\right|dxdy\\
&\le \frac{C}{\langle\lambda\xi-\xi'\rangle^{2N}}\sum_{|\gamma_1|+|\gamma_2|+|\gamma_3|\le 2N}\iint_{\mathbb{R}^{2n}}\left|\partial_y^{\gamma_1}\chi(y)\cdot\partial_y^{\gamma_2}\partial_x^\alpha f(x,y)\cdot\partial_y^{\gamma_3}\partial_x^\beta(\psi_\lambda(y-x))\right|dxdy\\
&\le \frac{C'}{\langle\lambda\xi-\xi'\rangle^{2N}}\sum_{|\gamma_1|+|\gamma_3|\le 2N}\lambda^{\frac{n}{4}+\frac{|\gamma_3|}{2}+\frac{|\beta|}{2}}\iint_{\mathbb{R}^{2n}}|\partial_y^{\gamma_1}\chi(y)\cdot(\partial^{\gamma_3+\beta}\psi)(\lambda^{\frac12}(y-x))|dxdy\\
&= \frac{C'}{\langle\lambda\xi-\xi'\rangle^{2N}}\sum_{|\gamma_1|+|\gamma_3|\le 2N}\lambda^{-\frac{n}{4}+\frac{|\gamma_3|}{2}+\frac{|\beta|}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}|\partial_y^{\gamma_1}\chi(y)|dy\int_{\mathbb{R}^n}|\partial^{\gamma_3+\beta}\psi(x)|dx\\
&\le \frac{C''}{\langle\lambda\xi-\xi'\rangle^{2N}}\lambda^{-\frac{n}{4}+N+\frac{|\beta|}{2}}.
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
\|\langle\xi'\rangle^k F_{\alpha,\beta}(\eta,\lambda\xi-\xi')\|^2_{L^2_{\xi'}(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}\langle\xi'\rangle^{2k}|F_{\alpha,\beta}(\eta,\lambda\xi-\xi')|^2d\xi'\\
&\le C\lambda^{-\frac{n}{2}+2N+|\beta|}\langle\lambda\xi\rangle^N\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\langle\xi'\rangle^{2k}}{\langle\lambda\xi-\xi'\rangle^{4N}\langle\lambda\xi\rangle^N}d\xi'
\end{aligned}
$$

となるが, $\lambda\ge 1$ に対して $\langle\xi'\rangle^{2k}\langle\lambda\xi-\xi'\rangle^{-4N}\langle\lambda\xi\rangle^{-N}\le C\langle\xi'\rangle^{-n-1}$ かつ $\langle\lambda\xi\rangle^N\le\lambda^N\langle\xi\rangle^N$ なので, (2.12) を得る． □

3　定理 1.8 の証明

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) は明らかなので, (i) $\Longrightarrow$ (iii), (ii) $\Longrightarrow$ (i) を示せばよい．

命題 3.1. 定理 *1.8* と同じ仮定のもとで, *(i)* $\Longrightarrow$ *(iii)*.

証明. (i) と命題 2.2 により, ある ξ_0 の近傍 V_1 と x_0 の近傍で $\chi\equiv 1$ を満たすある $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ があって,

$$\int_1^\infty \lambda^{n-1+2s}\|\mathcal{F}[\chi u](\lambda\xi)\|^2_{L^2(V_1)}d\lambda<\infty$$

が成立．補題 2.3 により, $\overline{B(\xi_0,2d)}\subset V_1$ なる $d>0$ で, 任意の $N\in\mathbb{N}$ と任意の $\zeta\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$\|\mathcal{F}[\zeta\chi u](\lambda\xi)\|^2_{L^2(B(\xi_0,2d))}\le C_{N,\zeta}\left(\|\mathcal{F}[\chi u](\lambda\xi)\|^2_{L^2(V_1)}+\lambda^{-N}\right)\tag{3.1}$$

を満たすものが存在する．$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$, $V=B(\xi_0,d)$ とし, K は x_0 の近傍で $\overline{K}\subset\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\chi(x)=1\}^\circ$ を満たすとする．このとき, 任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して, ある $C_N>0$ があって,

$$\int_V\int_K|W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)|^2dxd\xi\le C_N\left(\|\mathcal{F}[\chi u](\lambda\xi)\|^2_{L^2(V_1)}+\lambda^{-N}\right)\quad(\lambda\ge 1)\tag{3.2}$$

を示せばよい．実際, $N=n+[2s]+1$ とすれば,

$$\int_1^\infty \lambda^{n-1+2s}\int_V\int_K |W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)|^2 dxd\xi d\lambda \le C\int_1^\infty \lambda^{n-1+2s}\Big(\|\mathcal{F}[\chi u](\lambda\xi)\|^2_{L^2(V_1)}+\lambda^{-n-[2s]-1}\Big)d\lambda<\infty$$

となるからである．(3.2) を示すために, $W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)$ を 2 つに分ける:

$$W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)=W_{\phi_\lambda}[\chi^2u](x,\lambda\xi)+W_{\phi_\lambda}[(1-\chi^2)u](x,\lambda\xi).$$

補題 2.4 により, 任意の $N\in\mathbb{N}$ に対し, ある $C_N>0$ があって

$$\int_V\int_K |W_{\phi_\lambda}[(1-\chi^2)u](x,\lambda\xi)|^2 dxd\xi \le C_N\lambda^{-N} \tag{3.3}$$

が成立．

$\widetilde{\chi}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は K 上で $\widetilde{\chi}\equiv 1$ を満たし, かつ, $\operatorname{supp}\widetilde{\chi}\subset\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\chi(x)=1\}^\circ$ を満たすとする．$\widetilde{\chi}(x)$ にテイラーの定理を適用して,

$$\widetilde{\chi}(x)=\widetilde{\chi}(y)+\sum_{1\le|\alpha|\le L}\frac{\partial_x^\alpha\widetilde{\chi}(y)}{\alpha!}(x-y)^\alpha+\sum_{|\alpha|=L+1}(x-y)^\alpha R_\alpha(x,y). \tag{3.4}$$

ただし,

$$R_\alpha(x,y)=\frac{L+1}{\alpha!}\int_0^1 \partial_x^\alpha\widetilde{\chi}(y+\theta(x-y))(1-\theta)^L d\theta$$

である．プランシュレルの定理と (3.4) により,

$$\begin{aligned}\int_V\int_K |W_{\phi_\lambda}[\chi^2u](x,\lambda\xi)|^2dxd\xi &\le \int_V\int_{\mathbb{R}^n}|\widetilde{\chi}(x)W_{\phi_\lambda}[\chi^2u](x,\lambda\xi)|^2dxd\xi\\ &=\int_V\int_{\mathbb{R}^n}\Big|\mathcal{F}_{x\to\eta}\Big[\widetilde{\chi}(x)W_{\phi_\lambda}[\chi^2u](x,\lambda\xi)\Big](\eta)\Big|^2d\eta d\xi\\ &\le C\sum_{j=1}^3\int_V\int_{\mathbb{R}^n}|I_j|^2d\eta d\xi.\end{aligned}$$

ここで,

$$I_1=\iint_{\mathbb{R}^{2n}}\widetilde{\chi}(y)\overline{\phi_\lambda(y-x)}\{\chi(y)\}^2u(y)e^{-i\lambda y\cdot\xi-ix\cdot\eta}dydx, \tag{3.5}$$

$$I_2=\sum_{1\le|\alpha|\le L}\iint_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{\partial_x^\alpha\widetilde{\chi}(y)}{\alpha!}(x-y)^\alpha\overline{\phi_\lambda(y-x)}\{\chi(y)\}^2u(y)e^{-i\lambda y\cdot\xi-ix\cdot\eta}dydx, \tag{3.6}$$

$$I_3=\sum_{|\alpha|=L+1}\iint_{\mathbb{R}^{2n}}R_\alpha(x,y)(x-y)^\alpha\overline{\phi_\lambda(y-x)}\{\chi(y)\}^2u(y)e^{-i\lambda y\cdot\xi-ix\cdot\eta}dydx \tag{3.7}$$

である．

まず I_1 を考える．フビニの定理と変数変換により，

$$I_1 = \lambda^{-\frac{n}{4}} \overline{\mathcal{F}[\phi](\lambda^{-\frac{1}{2}}\eta)} \mathcal{F}[\widetilde{\chi}\chi^2 u](\eta + \lambda\xi)$$

と書ける．$\eta \in B = B(0, d\lambda^{3/4})$, $\xi \in V$, $\eta + \lambda\xi = \lambda\xi'$ とするとき, $\xi' \in B(\xi_0, 2d)$ となるので, (3.1) より,

$$\begin{aligned}\int_V \int_B |I_1|^2 d\eta d\xi &= \int_B \int_V |\lambda^{-\frac{n}{4}} \mathcal{F}[\phi](\lambda^{-\frac{1}{2}}\eta)|^2 |\mathcal{F}[\widetilde{\chi}\chi^2 u](\eta + \lambda\xi)|^2 d\xi d\eta \\ &\le \int_B |\lambda^{-\frac{n}{4}} \mathcal{F}[\phi](\lambda^{-\frac{1}{2}}\eta)|^2 d\eta \int_{B(\xi_0, 2d)} |\mathcal{F}[\widetilde{\chi}\chi^2 u](\lambda\xi')|^2 d\xi' \\ &\le C_N \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} (\|\mathcal{F}[\chi u](\lambda\xi)\|^2_{L^2(V_1)} + \lambda^{-N}) \end{aligned} \tag{3.8}$$

が任意の $N \in \mathbb{N}$ について成立．一方，$\eta \in B^c, \xi \in V$ とするとき, $\langle \eta + \lambda\xi \rangle \le C\langle \lambda\eta \rangle$ であり，また $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ なので, ある $k \in \mathbb{N}$ があって任意の $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して, $\langle \xi \rangle^{-k} \mathcal{F}[\psi u](\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．したがって, 補題 2.5 より, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して, ある $C_N > 0$ があって,

$$\begin{aligned}\int_V \int_{B^c} |I_1|^2 d\eta d\xi &\le C \int_{B^c} \int_V \frac{\langle \lambda\eta \rangle^{2k}}{\langle \eta + \lambda\xi \rangle^{2k}} \left| \lambda^{-\frac{n}{4}} \mathcal{F}[\phi](\lambda^{-\frac{1}{2}}\eta) \mathcal{F}[\widetilde{\chi}\chi^2 u](\eta + \lambda\xi) \right|^2 d\xi d\eta \\ &\le C\lambda^{-\frac{3n}{2}} \int_{B^c} |\langle \lambda\eta \rangle^k \mathcal{F}[\phi](\lambda^{-\frac{1}{2}}\eta)|^2 d\eta \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\mathcal{F}[\widetilde{\chi}\chi^2 u](\xi)}{\langle \xi \rangle^k} \right|^2 d\xi \\ &\le C_N \lambda^{-N} \end{aligned} \tag{3.9}$$

である．

次に, I_2 を考える．フビニの定理と変数変換により,

$$I_2 = \sum_{1 \le |\alpha| \le L} \frac{\lambda^{-\frac{|\alpha|}{2} - \frac{n}{4}}}{\alpha!} \overline{\mathcal{F}[(-y)^\alpha \phi(y)](\lambda^{-\frac{1}{2}}\eta)} \mathcal{F}[(\partial^\alpha \widetilde{\chi})\chi^2 u](\eta + \lambda\xi)$$

が成り立つ．したがって, 上と同様の計算により, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して, ある $C_N > 0$, $C'_N > 0$ があって,

$$\int_V \int_{\mathbb{R}^n} |I_2|^2 d\eta d\xi$$

$$\le C_N \sum_{1 \le |\alpha| \le L} \frac{\lambda^{-\frac{|\alpha|}{2}}}{\alpha!} \left\{ \|\mathcal{F}[(\partial^\alpha \widetilde{\chi})\chi^2 u](\lambda\xi)\|^2_{L^2(B(\xi_0, 2d))} + \lambda^{-N} \right\} \tag{3.10}$$

$$\le C'_N (\|\mathcal{F}[\chi u](\lambda\xi)\|^2_{L^2(V_1)} + \lambda^{-N}) \tag{3.11}$$

が成立する．

最後に I_3 を考える．$4M > n + 1$ を満たす $M \in \mathbb{N}$ をとる．$(1 - \Delta_x)^M e^{-ix\cdot\eta} = \langle \eta \rangle^{2M} e^{-ix\cdot\eta}$

であるから, 部分積分とシュワルツの不等式により,

$$
\begin{aligned}
|I_3| &\le \sum_{|\alpha|=L+1} \left| \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{(1-\Delta_x)^M \{R_\alpha(x,y)(x-y)^\alpha \overline{\phi_\lambda(y-x)}\}}{\langle\eta\rangle^{2M}} \{\chi(y)\}^2 u(y) e^{-ix\cdot\eta - i\lambda y\cdot\xi} dydx \right| \\
&\le \frac{1}{\langle\eta\rangle^{2M}} \sum_{|\alpha|=L+1} \int_{\mathbb{R}^n} |G_\alpha(\eta, \lambda\xi - \xi')\mathcal{F}[\chi u](\xi')| d\xi' \\
&\le \frac{1}{\langle\eta\rangle^{2M}} \left\| \frac{\mathcal{F}[\chi u]}{\langle\cdot\rangle^k} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \sum_{|\alpha|=L+1} \|\langle\xi'\rangle^k G_\alpha(\eta, \lambda\xi-\xi')\|_{L^2_{\xi'}(\mathbb{R}^n)}. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
G_\alpha(\eta,\xi) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \chi(y)(1-\Delta_x)^M \{R_\alpha(x,y)(x-y)^\alpha \overline{\phi_\lambda(y-x)}\} e^{-ix\cdot\eta - iy\cdot\xi} dxdy
$$

である. $g(x) = (-x)^\alpha \overline{\phi(x)}$, $g_\lambda(x) = \lambda^{\frac{n}{4}} g(\lambda^{\frac{1}{2}} x)$ とおく.

$$
\begin{aligned}
|G_\alpha(\eta,\xi)| &= \lambda^{-\frac{|\alpha|}{2}} \left| \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \chi(y)(1-\Delta_x)^M \{R_\alpha(x,y) g_\lambda(y-x)\} e^{-ix\cdot\eta - iy\cdot\xi} dxdy \right| \\
&\le \lambda^{-\frac{L+1}{2}} \sum_{|\beta|+|\gamma|\le 2M} C_{\beta,\gamma} \left| \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \chi(y) \partial_x^\beta R_\alpha(x,y) \partial_x^\gamma (g_\lambda(y-x)) e^{-ix\cdot\eta - iy\cdot\xi} dxdy \right|
\end{aligned}
$$

であるから, 補題 2.6 より

$$
\|\langle\xi'\rangle^k G_\alpha(\eta, \lambda\xi - \xi')\|^2_{L^2_{\xi'}(\mathbb{R}^n)} \le C\langle\xi\rangle^{2k+n+1} \lambda^{-(L+1)+\frac{5n}{2}+6k+2M+3}. \qquad (3.13)
$$

L は任意にとれるので, (3.12) と (3.13) から任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して, ある $C_N > 0$ があって

$$
\int_V \int_{\mathbb{R}^n} |I_3|^2 d\eta d\xi \le C_N \lambda^{-N} \qquad (3.14)
$$

が成立. よって, (3.3), (3.8), (3.9), (3.11), (3.14) を合わせて, (3.2) を得る. □

命題 3.2. 定理 *1.8* と同じ仮定のもとで, *(ii)* $\Longrightarrow$ *(i)*.

証明. (ii) より, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, x_0 の近傍 K, ξ_0 の近傍 V_1 で

$$
\int_1^\infty \lambda^{n-1+2s} \int_{V_1} \int_K |W_{\phi_\lambda} u(x, \lambda\xi)|^2 dx d\xi d\lambda < \infty \qquad (3.15)
$$

を満たすものが存在する. また, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ であるから, ある $k \in \mathbb{N}$ があって, 任意の $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対し $\|\langle\xi\rangle^{-k}\mathcal{F}[\psi u](\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty$ が成り立つ. これにより, ξ_0 の近傍 V_2 で,

$$
\lambda^{n-2k} \int_{V_2} |\mathcal{F}[\psi u](\lambda\xi)|^2 d\xi < \infty \qquad (3.16)
$$

を満たすものが存在することがわかる. $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は K 上で $\chi \equiv 1$ を満たすとする. また, $\widetilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は x_0 の近傍で $\widetilde{\chi} \equiv 1$, $\operatorname{supp}\widetilde{\chi} \subset K^\circ$, $0 \le \widetilde{\chi} \le 1$ を満たすとする. さらに, $d > 0$

は $B(\xi_0, d) \subset V_1 \cap V_2$ を満たすとする．命題 2.2 と (3.15) により, ある $\lambda_0 \geq 1$ と ξ_0 の近傍 V があって, $\lambda \geq \lambda_0$ と $M > n + 2s$ に対して,

$$\int_V |\mathcal{F}[\widetilde{\chi}\chi^2 u](\lambda\xi)|^2 d\xi \leq C \int_{B(\xi_0,d)} \int_K |W_{\phi_\lambda} u(x, \lambda\xi)|^2 dx d\xi + C'\lambda^{-M} \tag{3.17}$$

を示せば十分である．$V' = B(\xi_0, \frac{d}{2})$ とおく．$A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{R}$ に対して, $(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)^2 \leq 4(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2)$ であるから, (3.4) とプランシュレルの定理より,

$$\begin{aligned}
&\int_{V'} \int_K |W_{\phi_\lambda} u(x, \lambda\xi)|^2 dx d\xi \\
&\quad \geq \int_{V'} \int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{\chi}(x) W_{\phi_\lambda} u(x, \lambda\xi)|^2 dx d\xi \\
&\quad = \int_{V'} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \mathcal{F}_{x\to\eta}\Big[\widetilde{\chi}(x) W_{\phi_\lambda}[\chi^2 u](x, \lambda\xi) + \widetilde{\chi}(x) W_{\phi_\lambda}[(1-\chi^2)u](x, \lambda\xi)\Big](\eta) \right|^2 d\eta d\xi \\
&\quad = \int_{V'} \int_{\mathbb{R}^n} |I_1 + I_2 + I_3 + I_4|^2 d\eta d\xi \\
&\quad \geq \int_{V'} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{4}|I_1|^2 - |I_2|^2 - |I_3|^2 - |I_4|^2 \right) d\eta d\xi
\end{aligned}$$

を得る．ここで, I_1, I_2, I_3 はそれぞれ (3.5), (3.6), (3.7) であり,

$$I_4 = \mathcal{F}_{x\to\eta}\big[\widetilde{\chi}(x) W_{\phi_\lambda}[(1-\chi^2)u](x, \lambda\xi)\big](\eta)$$

である．したがって,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \int_{V'} \int_{\mathbb{R}^n} |I_1|^2 d\eta d\xi \leq \int_{V'} \int_K |W_{\phi_\lambda} u(x, \lambda\xi)|^2 dx d\xi + \int_{V'} \int_{\mathbb{R}^n} |I_2|^2 d\eta d\xi \\
+ \int_{V'} \int_{\mathbb{R}^n} |I_3|^2 d\eta d\xi + \int_{V'} \int_{\mathbb{R}^n} |I_4|^2 d\eta d\xi
\end{aligned} \tag{3.18}$$

と書ける．$N \in \mathbb{N}$ は $N > 4s + 4k$ を満たすとし, $\delta = \frac{d}{2(2N-1)}$ とする．

$$I_1 = \mathcal{F}[\phi_\lambda](\eta) \mathcal{F}[\widetilde{\chi}\chi^2 u](\eta + \lambda\xi)$$

であるから, 変数変換とフビニの定理により,

$$\begin{aligned}
\int_{V'} \int_{\mathbb{R}^n} |I_1|^2 d\eta d\xi &\geq \int_{V'} \int_{B(0,\delta\lambda^{3/4})} |I_1|^2 d\eta d\xi \\
&= \int_{B(0,\delta\lambda^{3/4})} |\mathcal{F}[\phi_\lambda](\eta)|^2 \int_{V'} |\mathcal{F}[\widetilde{\chi}\chi^2 u](\eta + \lambda\xi)|^2 d\xi d\eta \\
&= \int_{B(0,\delta\lambda^{3/4})} |\mathcal{F}[\phi_\lambda](\eta)|^2 \int_{\Omega_{\lambda,\eta,\xi}} |\mathcal{F}[\widetilde{\chi}\chi^2 u](\lambda\xi)|^2 d\xi d\eta \\
&\geq \int_{B(0,\delta\lambda^{3/4})} |\mathcal{F}[\phi_\lambda](\eta)|^2 \int_{B(\xi_0, \frac{d}{2} - \delta)} |\mathcal{F}[\widetilde{\chi}\chi^2 u](\lambda\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

が成立．ただし, $\Omega_{\lambda,\eta,\xi}=\{\xi+\frac{\eta}{\lambda}\,|\,\xi\in V'\}$ である．ここで, $\xi\in V'$, $\eta\in B(0,\delta\lambda^{3/4})$, $\lambda\geq 1$ ならば $B(\xi_0,\frac{d}{2}-\delta)\subset\Omega_{\lambda,\eta}$ であることに注意しておく．いま, $\lambda\to\infty$ とするとき

$$\int_{B(0,\delta\lambda^{3/4})}|\mathcal{F}[\phi_\lambda](\eta)|^2d\eta\longrightarrow\|\phi\|_{L^2}^2$$

であるから, ある $\lambda_0\geq 1$ があって,

$$\int_{B(0,\delta\lambda^{3/4})}|\mathcal{F}[\phi_\lambda](\eta)|^2d\eta\geq\frac{1}{2}\|\phi\|_{L^2}^2>0\quad(\lambda\geq\lambda_0)$$

が成り立つ．したがって, $\lambda\geq\lambda_0$ に対し

$$\frac{1}{2}\|\phi\|_{L^2}^2\int_{B(\xi_0,\frac{d}{2}-\delta)}|\mathcal{F}[\widetilde{\chi}\chi^2u](\lambda\xi)|^2d\xi\leq\int_{V'}\int_{\mathbb{R}^n}|I_1|^2d\eta d\xi \tag{3.19}$$

を得る．$M>n+2s$ とする．(3.10), (3.3) と同様の計算により

$$\int_{V'}\int_{\mathbb{R}^n}|I_2|^2d\eta d\xi\leq C\biggl(\lambda^{-\frac{1}{2}}\sum_{1\leq|\alpha|\leq L}\|\mathcal{F}[(\partial^\alpha\widetilde{\chi})\chi^2u](\lambda\xi)\|_{L^2(B(\xi_0,\frac{d}{2}+\delta))}^2+\lambda^{-M}\biggr), \tag{3.20}$$

$$\int_{V'}\int_{\mathbb{R}^n}|I_4|^2d\eta d\xi\leq C\lambda^{-M} \tag{3.21}$$

を得る．また, L を十分大きく取れば, (3.14) と同様の計算により,

$$\int_{V'}\int_{\mathbb{R}^n}|I_3|^2d\eta d\xi\leq C\lambda^{-M} \tag{3.22}$$

を得る．したがって, (3.18), (3.19), (3.20), (3.21), (3.22) により,

$$\begin{aligned}\int_{B(\xi_0,\frac{d}{2}-\delta)}|\mathcal{F}[\widetilde{\chi}\chi^2u](\lambda\xi)|^2d\xi\leq C\biggl(&\int_{B(\xi_0,\frac{d}{2})}\int_K|W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)|^2dxd\xi\\&+\lambda^{-\frac{1}{2}}\sum_{1\leq|\alpha|\leq L}\int_{B(\xi_0,\frac{d}{2}+\delta)}|\mathcal{F}[(\partial^\alpha\widetilde{\chi})\chi^2u](\lambda\xi)|^2d\xi+\lambda^{-M}\biggr).\end{aligned} \tag{3.23}$$

この不等式の左辺において, $|\mathcal{F}[(\partial^\alpha\widetilde{\chi})\chi^2u](\lambda\xi)|$,$B(\xi_0,\frac{d}{2}+\delta)$ をそれぞれ $|\mathcal{F}[\widetilde{\chi}\chi^2u](\lambda\xi)|$, $B(\xi_0,\frac{d}{2}-\delta)$ に変えれば

$$\begin{aligned}\int_{B(\xi_0,\frac{d}{2}+\delta)}|\mathcal{F}[(\partial^\alpha\widetilde{\chi})\chi^2u](\lambda\xi)|^2d\xi\leq C\biggl(&\int_{B(\xi_0,\frac{d}{2}+2\delta)}\int_K|W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)|^2dxd\xi\\&+\lambda^{-\frac{1}{2}}\sum_{1\leq|\alpha_2|\leq L}\int_{B(\xi_0,\frac{d}{2}+3\delta)}|\mathcal{F}[(\partial^{\alpha+\alpha_2}\widetilde{\chi})\chi^2u](\lambda\xi)|^2d\xi+\lambda^{-M}\biggr)\end{aligned} \tag{3.24}$$

となる．ここで, (3.23) と (3.24) を組み合わせることで,

$$\int_{B(\xi_0,\frac{d}{2}-\delta)} |\mathcal{F}[\widetilde{\chi}\chi^2 u](\lambda\xi)|^2 d\xi \le C\Bigg(\int_{B(\xi_0,\frac{d}{2}+2\delta)}\int_K |W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)|^2 dxd\xi + \lambda^{-1}\sum_{\substack{1\le|\alpha_1|\le L\\ 1\le|\alpha_2|\le L}}\int_{B(\xi_0,\frac{d}{2}+3\delta)} |\mathcal{F}[(\partial^{\alpha_1+\alpha_2}\widetilde{\chi})\chi^2 u](\lambda\xi)|^2 d\xi + \lambda^{-M}\Bigg) \quad (3.25)$$

を得る．この手順を繰り返すことにより,

$$\begin{aligned}&\int_{B(\xi_0,\frac{d}{2}-\delta)} |\mathcal{F}[\widetilde{\chi}\chi^2 u](\lambda\xi)|^2 d\xi \\ &\le C\Bigg(\int_{B(\xi_0,\frac{d}{2}+N\delta)}\int_K |W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)|^2 dxd\xi \\ &\quad + \lambda^{-\frac{N}{2}}\sum_{\substack{1\le|\alpha_j|\le L\\ 1\le j\le N}}\int_{B(\xi_0,\frac{d}{2}+(2N-1)\delta)} |\mathcal{F}[(\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_N}\widetilde{\chi})\chi^2 u](\lambda\xi)|^2 d\xi + \lambda^{-M}\Bigg)\end{aligned}$$

を得る．いま, $B(\xi_0,\frac{d}{2}+N\delta)\subset B(\xi_0,\frac{d}{2}+(2N-1)\delta)\subset B(\xi_0,d)$, $M>n+2s$, $N>4s+4k$ であるから, (3.16) で $V=B(\xi_0,\frac{d}{2}-\delta)$ として, (3.17) を得る． □

4　定理 1.6 の証明

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) は明らかなので, (i) $\Longrightarrow$ (iii), (ii) $\Longrightarrow$ (i) を示せば良い.

命題 4.1. 定理 *1.6* と同じ仮定のもとで, *(i)* $\Longrightarrow$ *(iii)*.

証明. (i) より, x_0 の近傍で $\chi\equiv 1$ なる $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と ξ_0 の錐近傍 Γ で
任意の $N\in\mathbb{N}$ に対し, $C_N>0$ があって

$$|\mathcal{F}[\chi u](\xi)|\le C_N(1+|\xi|)^{-N}\quad(\xi\in\Gamma) \tag{4.1}$$

を満たすものが存在する．したがって, 任意の $N\in\mathbb{N}$ と任意の $a\ge 1$ に対して, $C_{N,a}>0$ があって

$$|\mathcal{F}[\chi u](\lambda\xi)|\le C_N(1+\lambda|\xi|)^{-N}\le C_{N,a}\lambda^{-N}\quad(\lambda\ge 1,\xi\in V=\{\xi\in\Gamma\,|\,\frac{1}{3a}\le|\xi|\le 3a\}) \tag{4.2}$$

が成り立つ．K_1, K_2 は x_0 の近傍で $\overline{K_1}\subset\{x\in\mathbb{R}^n|\chi(x)=1\}^\circ$, $\overline{K_2}\subset K_1$ を満たすとし, Γ_1, Γ_2 は ξ_0 の錐近傍で $\overline{\Gamma_1}\subset\Gamma$, $\overline{\Gamma_2}\subset\Gamma_1$ を満たすとする．また, $V_1=\{\xi\in\Gamma_1\,|\,(2a)^{-1}\le|\xi|\le 2a\}$, $V_2=\{\xi\in\Gamma_2\,|\,a^{-1}\le|\xi|\le a\}$ とおき, $\chi_1\in C_0^\infty(K_1)$ は K_2 上で $\chi_1\equiv 1$ を満たし, $\chi_2\in C_0^\infty(V_1)$

は V_2 上で $\chi_2 \equiv 1$ を満たすとする．このとき, 微分積分学の基本定理により

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{1}_{K_2}(x)\mathbf{1}_{V_2}(\xi)W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)| \\
&\le \left|\int_{-\infty}^{\xi_n}\cdots\int_{-\infty}^{\xi_1}\int_{-\infty}^{x_n}\cdots\int_{-\infty}^{x_1}\partial_\xi^\tau\partial_x^\tau\Big\{\chi_1(x)\chi_2(\xi)W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)\Big\}dx_1\cdots dx_n d\xi_1\cdots d\xi_n\right| \\
&\le \iint_{\mathbb{R}^{2n}}\Big|\partial_\xi^\tau\partial_x^\tau\{\chi_1(x)\chi_2(\xi)W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)\}\Big|dxd\xi \\
&\le \sum_{0\le\alpha\le\tau}\sum_{0\le\beta\le\tau}C_{\alpha,\beta}\int_{V_1}\int_{K_1}|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta[W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)]|dxd\xi
\end{aligned}
$$

を得る．ただし, $\tau = (1,1,\dots,1)\in\mathbb{R}^n$ である．したがって,

$$
\partial_{x_j}(W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)) = \lambda^{\frac{1}{2}}W_{(\partial_{x_j}\phi)_\lambda}u(x,\lambda\xi), \quad \partial_{\xi_j}(W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)) = -i\lambda W_{\phi_\lambda}[y_j u](x,\lambda\xi)
$$

とシュワルツの不等式により,

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{1}_{K_2}(x)\mathbf{1}_{V_2}(\xi)W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)| \\
&\qquad\le \sum_{0\le\alpha\le\tau}\sum_{0\le\beta\le\tau}C_{\alpha,\beta}\lambda^{\frac{|\alpha|}{2}+|\beta|}\left(\int_{V_1}\int_{K_1}|W_{(\partial_x^\alpha\phi)_\lambda}[y^\beta u](x,\lambda\xi)|^2dxd\xi\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

を得る．(3.2) の導出と同様の計算により, 任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して $C_N>0$ があって

$$
\int_{V_1}\int_{K_1}|W_{(\partial_x^\alpha\phi)_\lambda}[y^\beta u](x,\lambda\xi)|^2dxd\xi \le C_N\left(\int_V|\mathcal{F}[\chi u](\lambda\xi)|^2d\xi + \lambda^{-N}\right) \tag{4.4}
$$

が成立．(4.2), (4.3), (4.4) により結論を得る． □

命題 4.2. 定理 *1.6* と同じ仮定のもとで, *(ii)* $\Longrightarrow$ *(i)*.

証明. (ii) より, $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$, x_0 の近傍 K, ξ_0 の錐近傍 Γ で

任意の $N\in\mathbb{N}$ と任意の $a\ge 1$ に対し $C_{N,a}>0$ があって

$$
|W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)| \le C_{N,a}\lambda^{-N} \quad (\lambda\ge 1, x\in K, \xi\in\Gamma\cap\{\xi\in\mathbb{R}^n\,|\,a^{-1}\le|\xi|\le a\}) \tag{4.5}
$$

を満たすものが存在する．$\xi_0\in\{\xi\in\Gamma\,|\,b^{-1}\le|\xi|\le b\}$ を満たす $b>1$ をとり, $V_1=\{\xi\in\Gamma\,|\,b^{-1}\le|\xi|\le b\}$ とおく．(3.17) の導出と同様の計算により, ある ξ_0 の近傍 V_2 と $\mathrm{supp}\chi\subset K^\circ$ かつ x_0 の近傍で $\chi\equiv 1$ を満たす $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ があって, 任意の $N\in\mathbb{N}$ に対し

$$
\int_{V_2}|\mathcal{F}[\chi u](\lambda\xi)|^2d\xi \le C_N\left(\int_{V_1}\int_K|W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)|^2dxd\xi + \lambda^{-N}\right). \tag{4.6}
$$

を満たすことが言える．したがって, (4.5) より

$$
\int_{V_2}|\mathcal{F}[\chi u](\lambda\xi)|^2d\xi \le C_N\lambda^{-N} \tag{4.7}
$$

が成立．V_3 と V_4 は ξ_0 の近傍で $\overline{V_3} \subset V_2$, $\overline{V_4} \subset V_3$ を満たすとし, V_4 上で $\chi_1 \equiv 1$ を満たす $\chi_1 \in C_0^\infty(V_3)$ をとる．このとき, 微分積分学の基本定理とシュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}
|\mathbf{1}_{V_4}(\xi)\mathcal{F}[\chi^2 u](\lambda\xi)| &\le \left| \int_{-\infty}^{\xi_n} \cdots \int_{-\infty}^{\xi_1} \partial_\xi^\tau \Big\{ \chi_1(\xi)\mathcal{F}[\chi^2 u](\lambda\xi) \Big\} d\xi_1 \cdots d\xi_n \right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \partial_\xi^\tau \{ \chi_1(\xi)\mathcal{F}[\chi^2 u](\lambda\xi) \} \Big| d\xi \\
&\le \sum_{0\le\alpha\le\tau} C_\alpha \int_{V_3} |\partial_\xi^\alpha \{ \mathcal{F}[\chi^2 u](\lambda\xi) \}| d\xi \\
&\le \sum_{0\le\alpha\le\tau} C'_\alpha \left(\int_{V_3} |\partial_\xi^\alpha \{ \mathcal{F}[\chi^2 u](\lambda\xi) \}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

を得る．ただし, $\tau = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ である．$\partial_{\xi_j}\{\mathcal{F}[\chi^2 u](\lambda\xi)\} = -i\lambda\mathcal{F}[y_j\chi^2 u](\lambda\xi)$ であるから補題 2.3 と (4.7) より, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}
|\mathbf{1}_{V_4}(\xi)\mathcal{F}[\chi^2 u](\lambda\xi)| &\le \sum_{0\le\alpha\le\tau} C_\alpha \lambda^{|\alpha|} \left(\int_{V_3} |\mathcal{F}[y^\alpha \chi^2 u](\lambda\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \sum_{0\le\alpha\le\tau} C'_{\alpha,N} \lambda^{|\alpha|} \left(\int_{V_2} |\mathcal{F}[\chi u](\lambda\xi)|^2 d\xi + \lambda^{-N} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C_N \lambda^{n-\frac{N}{2}}.
\end{aligned}$$

$\xi \in V_4$, $\lambda \ge 1$ のとき $\lambda^{-N} \le C_N(1+\lambda|\xi|)^{-N}$ が成り立つので,

$$|\mathcal{F}[\chi^2 u](\lambda\xi)| \le C_N(1+\lambda|\xi|)^{-N} \quad (\xi \in V_4)$$

が言える．したがって, 命題 2.1 より結論を得る． □

5 応用

本節では，波束変換を用いた波面集合の特徴付けの応用を紹介する．(詳しくは K.Kato and S.Ito [7] を参照). 次のような，ポテンシャル $V(t,x)$ がついたシュレディンガー方程式を考える．

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\triangle u - V(t,x)u = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{5.1}$$

ここで，$i = \sqrt{-1}$, $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $\triangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ である．$V(t,x)$ は $C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ の実数値関数で，$0 \le \rho < 2$ を満たすある ρ に対して，次を満たすとする：

任意の多重指数 α に対して，ある C_α が存在して，

$$|\partial_x^\alpha V(t,x)| \le C_\alpha (1+|x|)^{\rho-|\alpha|}, \qquad ((t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n).$$

$\varphi_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とし，$\varphi(t,x) = U(t)\varphi_0(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[e^{-it|\xi|^2/2}\mathcal{F}\varphi_0(\xi)](x)$ とおく．このとき，部分積分により

$$W_{\varphi(t,\cdot)}\left[i\partial_t u(t,\cdot) + \frac{1}{2}\triangle u(t,\cdot)\right](x,\xi) = \left(i\partial_t + i\xi\cdot\nabla_x - \frac{1}{2}|\xi|^2\right) W_{\varphi(t,\cdot)}[u(t,\cdot)](x,\xi) + W_{i\partial_t\varphi(t,\cdot)+\frac{1}{2}\triangle\varphi(t,\cdot)}[u(t,\cdot)](x,\xi) \quad (5.2)$$

となるが，$i\partial_t\varphi(t,x) + \frac{1}{2}\triangle\varphi(t,x) = 0$ であることにより，(5.1) は次のような 1 階の偏微分方程式に変換される．

$$\begin{cases} \left(i\partial_t + i\xi\cdot\nabla_x - i\nabla_x V(t,x)\cdot\nabla_\xi - \frac{1}{2}|\xi|^2 - \widetilde{V}(t,x)\right) \\ \qquad\qquad \times W_{\varphi(t,\cdot)}[u(t,\cdot)](x,\xi) = R[\varphi,u](t,x,\xi), \\ W_{\varphi(0,\cdot)}[u(0,\cdot)](x,\xi) = W_{\varphi_0}u_0(x,\xi), \end{cases} \quad (5.3)$$

ただし，$\widetilde{V}(t,x) = V(t,x) - \nabla_x V(t,x)\cdot x$ かつ

$$R[\varphi,u](t,x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\int \overline{\varphi(t,y-x)} \times \left(\int_0^1 \partial^\alpha V(t,x+\theta(y-x))(1-\theta)d\theta\right)(y-x)^\alpha u(t,y)e^{-i\xi y}dy$$

である．(5.3) に特性曲線の方法を用いることにより次の表示を得る．

$$W_{\varphi(t,\cdot)}[u(t,\cdot)](x,\xi) = e^{-iA(t,x,\xi)}W_{\varphi_0}u_0(x(0;t,x,\xi),\xi(0;t,x,\xi)) - i\int_0^t e^{-iB(t,x,\xi)}R[\varphi,u](s,x(s;t,x,\xi),\xi(s;t,x,\xi))|ds. \quad (5.4)$$

ここで，

$$A(t,x,\xi) = \int_0^t \{\frac{1}{2}|\xi(s;t,x,\xi)|^2 + \widetilde{V}(s,x(s;t,x,\xi))\}ds,$$
$$B(t,x,\xi) = \int_s^t \{\frac{1}{2}|\xi(\tau;t,x,\xi)|^2 + \widetilde{V}(\tau,x(\tau;t,x,\xi))\}d\tau$$

であり，$x(s;t,x,\xi)$, $\xi(s;t,x,\xi)$ は常微分方程式系

$$\begin{cases} \dot{x}(s) &= \xi(s),\ x(t) = x, \\ \dot{\xi}(s) &= -\nabla_x V(s,x(s)),\ \xi(t) = \xi. \end{cases}$$

の解である．(5.4) と定理 1.6 より，$(x_0,\xi_0) \notin WF(u(t,\cdot))$ であることは適当な領域内の (x,ξ) に対して

$$\left|e^{-iA(t,x,\lambda\xi)}W_{\varphi_0}u_0(x(0;t,x,\lambda\xi),\xi(0;t,x,\lambda\xi)) - i\int_0^t e^{-iB(t,x,\xi)}R[\varphi_\lambda,u](s,x(s;t,x,\lambda\xi),\xi(s;t,x,\lambda\xi))ds\right| \le C_{N,a,\varphi_0}\lambda^{-N}, \quad (\lambda \ge 1)$$

が成り立つことと同値であることがわかる．このことにより，以下の定理を示すことができる．

定理 5.1. (K. Kato and S. Ito [7, Theorem 1.2]) $b = (2-\rho)/4$ とする．$u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とし，$u(t,x)$ は (5.1) の解で $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ に属するとする．このとき，$(x_0, \xi_0) \notin WF(u(t,x))$ ならば，ある x_0 の近傍 K と ξ_0 の近傍 V が存在して次を満たす：　任意の $N \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$, $\varphi_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \backslash \{0\}$ に対して，$C_{N,a,\varphi_0} > 0$ が存在して

$$|W_{\varphi_\lambda(-t,\cdot)} u_0(x(0;t,x,\lambda\xi),\, \xi(0;t,x,\lambda\xi))| \leq C_{N,a,\varphi_0} \lambda^{-N}$$
$$(\lambda \geq 1,\ x \in K,\ \xi \in V \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n \,|\, a^{-1} \leq |\xi| \leq a\}$$

を満たす．ただし $\varphi_\lambda(t,x) = U(t)(\lambda^{bn/2}\varphi_0(\lambda^b x))$ とする．また，逆も成り立つ.

参考文献

[1] A. Córdoba and C. Fefferman, *Wave packets and Fourier integral operators*, Comm. Partial Differential Equations 3 (1978), 979–1005.

[2] G. B. Folland, Harmonic analysis in phase space, Ann. of Math. Studies No.122, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, (1989).

[3] P. Gérard, *Moyennisation et régularité deux-microlocale*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 23 (1990), 89–121.

[4] K. Gröchenig, Foundations of Time-Frequency Analysis, Birkhäuser Boston (2001).

[5] L. Hörmander, *Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients*, Comm. Pure Appl. Math. 24 (1971), 671–704.

[6] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, II, III, IV, Springer-Verlag, Berlin, (1983), (1985).

[7] K. Kato, M and S. Ito, *Singularities for solutions to time dependent Schrödinger equations with sub-quadratic potential*, SUT Journal of Math., 50 (2014), 383–398.

[8] S. Mizohota, The theory of partial differential equations, Cambridge University Press, New York, (1973).

[9] T. Ōkaji, *A note on the wave packet transforms*, Tsukuba J. Math. 25 (2001), 383–397.

[10] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara, *Hyperfunctions and pseudodifferential equations*, In: Lecture Notes in Math. 287, Springer-Verlag, New York (1973), 265–529.

[11] F. Trèves, Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators. Vol. 1 and Vol.2. The University Series in Mathematics. Plenum Press, New York-London, (1980).

球多様体への可視的作用とその応用について

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所　田中 雄一郎*

2015 年 9 月 4 日

概要

連結複素簡約代数群 G の作用する複素球多様体に対し、G のコンパクト実形が強可視的に作用することについて述べます。また、リーマン弱対称空間上の調和解析に対する応用にも少し触れます。

0　導入

群 G の表現 $G \curvearrowright V$（複素線型空間 V への線型な作用）は、V 上の G 絡作用素の環 $\mathrm{End}_G(V)$（G の作用と互換性のある線型作用素のなす環）が可換であるとき、無重複であると言われます。リー群の無重複な表現を統一的に扱うことを目的として、小林俊行氏は複素多様体への可視的な作用の理論を導入しました。

定義 0.1 ([Ko05])**.** 連結複素多様体 X にリー群 G が正則に作用しているとする。次の 2 つの条件が満たされるならば、作用は強可視的であると言う。

- X の実部分多様体 S が存在して、S と交わるような全ての G 軌道の和集合 $X' := G \cdot S = \bigcup_{s \in S} G \cdot s$ が X の空でない開集合となる。
- X' 上に反正則な微分同相写像 $\sigma : X' \to X'$ が存在して、$\sigma|_S = \mathrm{id}_S$ かつ $\sigma(G \cdot x) = G \cdot x$（$x \in X'$）が成り立つ。

実際、次の定理を用いることによって、可視的作用から無重複表現を得ることができます。

定理 0.2 ([Ko13])**.** G をリー群、$\mathcal{W} \to X$ を連結複素多様体 X 上の G 同変な正則エルミートベクトル束とする。また、V を G のユニタリ表現とする。以下に挙げる条件が満たされるならば、V は無重複である。

- 正則ベクトル束 $\mathcal{W}$ の大域切断の空間 $\mathcal{O}(X, \mathcal{W})$ への G 同変な埋め込み $V \hookrightarrow \mathcal{O}(X, \mathcal{W})$ が存在する。
- 底空間 X への G の作用は強可視的である（定義 0.1 の記号に則る）。
- ファイバー $\mathcal{W}_s$（$s \in S$）への固定化部分群 G_s の作用は無重複である。
（加えて、σ に関するいくつかの整合性条件を仮定する。詳しくは [Ko13]。）

*本研究は日本学術振興会特別研究員奨励費（15J05410）からの助成を受けています。

特に $\mathcal{W}$ が線束であるときを考えると、ファイバー $\mathcal{W}_s$ の無重複性は自明になります。よっておおまかには、可視的ならば無重複である、ということができます。そこで、その逆は成り立つか？ということを考えます。この記事では、この問題を複素球多様体に対して考えることにします。

定義 0.3 (c.f. [Wo, Chapter 12])**.** 連結複素簡約代数群 G が連結複素代数多様体 X に代数的に作用しているとする。G のボレル部分群 B が X 上に開軌道を持つとき、X は複素球多様体であるという。

連結複素簡約代数群 G の複素対称空間 G/H は複素球多様体の例になります（岩澤分解)。複素球多様体は無重複空間とも呼ばれます。

定理 0.4 ([VK])**.** 連結複素簡約代数群 G の複素等質空間 G/H に対し、G/H が複素球多様体であることと、任意の G-線束 $\mathcal{L} \to G/H$ の大域切断の空間 $\mathbb{C}[G/H, \mathcal{L}]$ が無重複であることとは同値である。

定理 0.4 において、H も複素簡約代数群であるような場合には多項式の空間 $\mathbb{C}[G/H]$ だけを考えれば十分です。この定理の言うように、無重複であることと球多様体であることとは同値でありますので、無重複ならば可視的か？と問うことは、球多様体には可視的作用があるか？と問うことと同じです。この問題に対し、コンパクトリー群の作用については以下のような肯定的な結果があります。

定理 0.5 (T-)**.** G を連結複素簡約代数群、X を G の複素球多様体とし、また U を G のコンパクト実形とする。このとき U の X への作用は強可視的である。

次節では可視的作用に関する先行結果の紹介をします。次々節では定理 0.5 の証明について、最後の節では調和解析への応用について述べます。

1 可視的作用に関する先行結果の紹介

この節では複素対称空間、エルミート対称空間、複素線型空間、複素旗多様体、いくつかの複素簡約型等質球多様体並びに、複素冪零軌道への可視的作用に関する結果を紹介します。

定理 1.1 ([Ko05])**.** G を連結複素簡約代数群、G/H を複素対称空間とする。また、U を G のコンパクト実形とする。このとき U の G/H への作用は強可視的である。

この定理の設定においては一般化カルタン分解 [Fl, La] を用いてスライスを具体的に構成することができ、また、反正則な微分同相写像もカルタン対合と H に対応する対合とから得ることができます。

定理 1.2 ([Ko07b])**.** G をエルミート型実単純リー群、G/K をエルミート対称空間とする。また、H を G の対称部分群（即ち G のある対合 τ について $G_0^\tau \subset H \subset G^\tau$）とする。このとき H の G/K への作用は強可視的である。

この定理の設定においてもやはり一般化カルタン分解 [Fl] を用いて具体的にスライスを構成することができます。難しいのは適当な反正則微分同相写像を構成することですが、ほとんどの場合に対称対の分類とイプシロン族を用いて作ることができます。また、興味深いのがエルミート対称空間 G/K において K を定める対合と H を定める対合とが可換に取れない場合でありまして、具体的な計算によって性質の良い部分群を見つけることが鍵となります。

定理 1.3 ([Sa09, Sa11a]). G を連結複素簡約代数群、V を G の有限次元表現とする。また、U を G のコンパクト実形とする。もし V が G の複素球多様体であるならば、U の V への作用は強可視的である。

この定理は V の分類 [BR, Ka, Le] を用いていくつかの系列に分けた上で、系列ごとに具体的な計算による証明がなされています。それゆえ、スライスの具体的な形を知ることができます。また、反正則微分同相写像としては（V の複素構造に関する）複素共役写像を取ることができます。

定理 1.4 ([Ko07a, Ta]). G を連結複素簡約代数群、P を放物型部分群とし、また H を G のレビ部分群とする。もし G/P が H の複素球多様体であるならば、H のコンパクト実形は G/P に強可視的に作用する。

この定理においては、小林氏によって導入された編み上げの手法を用い、レビ部分群に関する両側剰余分解を対称部分群に関するそれ [HPTT, Ho, Ma97] へと帰着することによってスライスが構成されています（各論によりますが、次節で説明する方法でより抽象的な証明も可能です）。また、反正則微分同相写像としては、G の正規実形を定める反正則対合を取ることができます。

定理 1.5 ([Sa10a, Sa10b, Sa11b]). G/H を、以下に挙げる複素簡約型等質球多様体の内の 1 つとする。

$$\begin{aligned} SL(m+n,\mathbb{C})/(SL(m,\mathbb{C})\times SL(n,\mathbb{C}))\ (m\neq n),\\ SO(4n+2,\mathbb{C})/SL(2n+1,\mathbb{C}),\\ SL(2n+1,\mathbb{C})/Sp(n,\mathbb{C}),\\ E_6(\mathbb{C})/SO(10,\mathbb{C}),\\ SO(8,\mathbb{C})/G_2(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

このとき、G のコンパクト実形の G/H への作用は強可視的である。

$SO(8,\mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})$ に対しては、八元数を用いた具体的な実現に基づいた証明が与えられています。それ以外については、編み上げの手法によって対称部分群に関する両側剰余分解 [Fl, La] へと帰着することでスライスを構成することができます。また、反正則微分同相写像として G の正規実形に対応する反正則対合を取ることができます。

定理 1.6 ([Ko05, Sa]). G を連結複素簡約代数群、X を G の複素冪零軌道、U を G のコンパクト実形とする。X が G の複素球多様体ならば、U の X への作用は強可視的である。

この定理は、U のレビ部分群による複素線型空間に対する可視的作用を、U の複素冪零軌道に対するそれへと誘導することによって証明されます（可視的作用の誘導法)。

2　複素球多様体への可視的作用

G を連結複素簡約代数群とし、X を G の複素球多様体、U を G のコンパクト実形とします。目標は、U の X への作用の強可視性を示すことです。まず、

X が等質空間のときに示せば十分である

ことに注意します。これは、次の 2 点から従います。

- 可視的作用の定義 0.1 より、X を、U 作用で閉じているような空でない開部分集合で置き換えることができる。

- 複素球多様体の定義 0.3 より、G のボレル部分群は X 上に開軌道を持つ。よって特に、G 自身も X 上に開軌道（即ち G の等質空間）を持つ。

よって以降では、X を複素等質球多様体 G/H に置き換えて考えます。

複素代数多様体が等質空間に置き換わってかなり簡単になりました。ところが一般に等質空間 G/H の H は、たとえ G/H が複素球多様体であるという仮定の下であっても、簡約群でもなければ冪零群でも可解群でもないよく分からない群となります。ここで、次の定理が役に立ちます。

定理 2.1 ([Mo]). G の複素代数部分群 H に対し、H を含むような放物型部分群 P が存在する。

つまり、極大な部分群は放物型部分群である、ということです。この定理によって次の表示を得ます。

$$G/H \simeq_G G \times_P P/H$$

ただし、$\simeq_K$ で K-多様体としての同型を表すこととします。ここで 2 点大切なことがあります。1 つ目は、このファイバー束としての表示における底空間であるところの複素旗多様体 G/P に対しては豊富な研究があり、よく分かるということです。2 つ目は、

ファイバー P/H がシュタイン多様体となるように P を取ることができる

ということです。これは、上の P を $\mathrm{Rad}_u(P)$ が $\mathrm{Rad}_u(H)$ を含むように取ることができるためです。ただし、$\mathrm{Rad}_u(K)$ で複素代数群 K の冪単根基を表すこととします。このような取り方で P/H がシュタイン多様体になることは次の定理に依ります。

定理 2.2 ([MM]). 正則主ファイバー束 (E, B, G) に対して、全空間 E がシュタインであり、かつ構造群 G が連結複素簡約代数群であるならば、底空間 B もまたシュタインである。

ここで、複素旗多様体 G/P にはコンパクト実形 U が推移的に作用する（岩澤分解）ことを用いると、次を得ます。

$$G/H \simeq_G G \times_P P/H \simeq_U U \times_{U_L} P/H$$

ただし、$U_L = U \cap P$ と置いています。即ち U_L は P のレビ部分（極大簡約部分群）L のコンパクト実形であり、U のレビ部分群です。ここで大切なことが、

G/H への U の作用の可視性が、レビ部分群 U_L の P/H への作用の可視性に帰着された

ということです。これで、群 U はより小さな群 U_L に、よく分からない等質空間 G/H はシュタイン多様体 P/H に置き換わりました。さらに、P/H は単にシュタインであるだけでなく実はアファイン代数多様体でありますので [Na]、P/H を L-多様体と見ると、次の定理を適用することができます。ここで、G/H が G の複素球多様体であるならば、P/H は L の複素球多様体であることに注意します。

定理 2.3 ([Ak]). K を連結複素簡約代数群、Z を K の複素球多様体であって、滑らかかつアファインなものとする。また、ν を K の正規実形を定める反正則対合とする。このとき反正則対合 $\sigma : Z \to Z$ が存在して $\sigma(kz) = \nu(k)\sigma(z)$ を満たす（$k \in K, z \in Z$）。また、Z の σ 固定点集合 Z^σ は空でない。

この定理2.3と次の定理とを合わせることで、U_L の P/H への作用が強可視的であることが分かります。

定理 2.4 (T-). K を連結複素簡約代数群、Z を K の複素球多様体とする。また、ν を K の正規実形を定める反正則対合とする。もし反正則対合 $\sigma : Z \to Z$ が存在して $\sigma(kz) = \nu(k)\sigma(z)$ ($k \in K, z \in Z$) を満たし、かつ Z^σ が空でないならば、K のコンパクト実形は Z に強可視的に作用する。

このように、滑らかなアファイン代数的球多様体へのレビ部分群の可視的作用からの誘導という形で、一般の複素球多様体へのコンパクト実形の可視的作用を得ることができます。

3 調和解析への応用

この節では G は実簡約群、H は等質空間 G/H が連結となるような（コンパクトな）ゲルファンド部分群、即ち G/H がリーマン弱対称空間となることを仮定します。前節において、一般の複素球多様体への作用の可視性が、滑らかなアファイン代数的球多様体への作用のそれへと帰着されることを見ました。滑らかなアファイン代数的球多様体への作用の可視性の証明と同じ手法によって、次を示すことができます。

$G = HAMH$ を満たすようなレビ部分群 AM が存在する。

さらに、「ほとんどの場合」に次のことも分かります：ある G のコンパクト対称部分群 K が存在して、$K = MH$ が成り立つ。また、これが成り立たない場合は、G/H が既約という仮定の下において H は非対称ポーラー部分群となります。

ここで大切なことは、AM は元の G よりも次元の小さな実簡約群であって、さらに、H を通してリーマン対称対 (G, K) とつながっている、という点です。即ち、より低い次元の群に関する結果とリーマン対称空間に対する結果とを合わせて、リーマン弱対称空間に対する結果が得られると期待できる、ということです。例えば、リーマン対称空間上の帯球関数とより低い次元のリーマン弱対称空間上のそれとを、積分を用いて組み合わせることにより、より大きな次元のリーマン弱対称空間上の帯球関数を構成することができます。

謝辞　合同シンポジウム開催責任者の中野史彦先生と横田智巳先生、並びに、会場責任者の山崎教昭先生に心より感謝を申し上げます。また、お声を掛けて頂きました伊師英之先生と分科会委員表現論グループの諸先生方に厚く御礼申し上げます。最後に、受入教員の落合啓之先生に感謝を申し上げます。

参考文献

[Ak] D. Akhiezer, Spherical Stein manifolds and the Weyl involution. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **59** (2009), no. 3, 1029–1041.

[AV] D. Akhiezer and E. Vinberg, Weakly symmetric spaces and spherical varieties. Transform. Groups **4** (1999), no. 1, 3–24.

[BR] C. Benson, and G. Ratcliff, A classification of multiplicity free actions. J. Algebra, **181** (1996), 152–186.

[Br] M. Brion, Classification des espaces homogenes spheriques. (French) [Classification of spherical homogeneous spaces] Compositio Math. **63** (1987), no. 2, 189–208.

[Da] J. Dadok, Polar coordinates induced by actions of compact Lie groups. Trans. Amer. Math. Soc. **288** (1985), no. 1, 125–137.

[Fl] M. Flensted-Jensen, Spherical functions of a real semisimple Lie group. A method of reduction to the complex case. J. Funct. Anal. **30** (1978), no. 1, 106–146.

[GS] V. Guillemin and S. Sternberg, Multiplicity-free spaces. J. Differential Geom. **19** (1984), no. 1, 31–56.

[HPTT] E. Heintze, R. Palais, C.-L. Terng and G. Thorbergsson, Hyperpolar actions on symmetric spaces. Geometry, topology, & physics, 214–245, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[He00] S. Helgason, Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions. Corrected reprint of the 1984 original. Mathematical Surveys and Monographs, 83. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. xxii+667 pp. ISBN: 0-8218-2673-5.

[Ho] B. Hoogenboom, Intertwining functions on compact Lie groups. CWI Tract, **5**. Stichting Mathematisch Centrum, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1984.

[HW] A. T. Huckleberry and T. Wurzbacher, Multiplicity-free complex manifolds. Math. Ann., **286** (1990), 261–280.

[Ka] V. Kac, Some remarks on nilpotent orbits. J. Algebra, **64** (1980), 190–213.

[Ki93] K. Kikuchi, Gel'fand pairs associated with nilpotent Lie groups. (Japanese) Problems on structure and representations of Lie groups (Japanese) (Kyoto, 1993). Surikaisekikenkyusho Kokyuroku No. **855** (1993), 31–47.

[Ki95] K. Kikuchi, Positive definiteness of K-spherical functions on solvable Lie groups. (Japanese) Noncommutative analysis on homogeneous spaces (Japanese) (Kyoto, 1994). Surikaisekikenkyusho Kokyuroku No. **895** (1995), 81–97.

[Ko98] 小林俊行, Multiplicity free theorem in branching problems of unitary highest weight modules. 表現論シンポジウム 1997 報告集，(1998), 9–17.

[Ko04] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of GL(n). visible actions on flag varieties, and triunity, Acta Appl. Math., **81**, (2004), 129–146.

[Ko05] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds. Publ. Res. Inst. Math. Sci., **41**, (2005), 497–549, special issue commemorating the fortieth anniversary of the founding of RIMS.

[Ko07a] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3))\backslash U(n)/(U(p) \times U(q))$. J. Math. Soc. Japan, **59**, (2007), 669–691.

[Ko07b] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces. Transform. Groups. **12**, (2007), 671–694.

[Ko08] T. Kobayashi, Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs. Representation theory and automorphic forms, 45–109, Progr. Math., **255**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2008.

[Ko13] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-freeness property for holomorphic vector bundles. Lie groups: structure, actions, and representations, in Honor of Joseph A. Wolf on the Occasion of his 75th Birthday, 113–140, Progr. Math., **306**, Birkhäuser/Springer, New York, 2013.

[Kr] M. Krämer, Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen. Compositio Math., **38** (1979), 129–153.

[La] M. Lassalle, Séries de Laurent des fonctions holomorphes dans la complexification d'un espace symétrique compact.(French) Ann. Sci. École Norm. Sup.(4) **11** (1978), no. 2, 167–210.

[Le] A. S. Leahy, A classification of multiplicity free representations. J. Lie Theory, **8** (1998), 367–391.

[Li] P. Littelmann, On spherical double cones. J. Algebra, **166**, (1994), 142-157.

[Lu] D. Luna, Slices etales. (French) Sur les groupes algebriques, pp. 81–105. Bull. Soc. Math. France, Paris, Memoire **33** Soc. Math. France, Paris, 1973.

[Ma95a] 松木敏彦, 代数群の 2 つの involution に関する両側剰余類分解 II, 等質空間上の非可換解析学 (京都, 1994), 数理解析研究所 講究録, No. **895**, (1995), 98–113.

[Ma95b] T. Matsuki, Double coset decomposition of algebraic groups arising from two involutions. I. J. Algebra, **175**, (1995), 865–925.

[Ma97] T. Matsuki, Double coset decompositions of reductive Lie groups arising from two involutions. J. Algebra, **197**, (1997), 49–91.

[MM] Y. Matsushima and A. Morimoto, Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein. (French) Bull. Soc. Math. France **88** (1960) 137–155.

[Mi] I. V. Mikityuk, Integrability of invariant Hamiltonian systems with homogeneous configuration spaces. (Russian) Mat. Sb. (N.S.) **129** (171) (1986), no. 4, 514–534, 591.

[Mo] V. V. Morozov, On nonsemisimple maximal subgroups of simple Lie groups. Doctor Phys.-Math. Sci. dissertation (Habilitation), Kazan, 1943 (Russian).

[Na] M. Nagata, Invariants of a group in an affine ring. J. Math. Kyoto Univ. **3** (1963)/(1964) 369–377.

[Sa09] A. Sasaki, Visible action on irreducible multiplicity-free spaces. Int. Math. Res. Not. IMRN, (2009), no. **18**, 3445–3466.

[Sa10a] A. Sasaki, A characterization of non-tube type Hermitian symmetric spaces by visible actions. Geom. Dedicata, **145**, (2010), 151–158.

[Sa10b] A. Sasaki, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $SU(2n+1)\backslash SL(2n+1,\mathbb{C})/Sp(n,\mathbb{C})$. J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **17**, (2010), 201–215.

[Sa11a] A. Sasaki, Visible actions on reducible multiplicity-free spaces. Int. Math. Res. Not. IMRN, (2011), no. **4**, 885–929.

[Sa11b] A. Sasaki, Visible actions on the non-symmetric homogeneous space $SO(8,\mathbb{C})/G_2(\mathbb{C})$. Adv. Pure Appl. Math. **2** (2011), no. 3-4, 437–450.

[Sa] A. Sasaki, Visible actions on spherical nilpotent orbits in complex simple Lie algebras (preprint), 51 pages.

[St] J. R. Stembridge, Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters. Represent. Theory, **7**, (2003), 404–439 .

[Ta] Y. Tanaka, Classification of visible actions on flag varieties. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **88** (2012), no. 6, 91–96.

[VK] É. B. Vinberg and B. N. Kimel'fel'd, Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple Lie groups. Funct. Anal. Appl., **12**, (1978), 168–174.

[Wa88] N. R. Wallach, Real reductive groups. I. Pure and Applied Mathematics, 132. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988. xx+412 pp.

[Wa92] N. R. Wallach, Real reductive groups. II. Pure and Applied Mathematics, 132-II. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992. xiv+454 pp.

[Wo] J. A. Wolf, Harmonic Analysis on Commutative Spaces. Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc., 2007.

[Ya] O. S. Yakimova, Gelfand pairs. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universitat Bonn, Bonn, 2004. Bonner Mathematische Schriften [Bonn Mathematical Publications], 374. Universitat Bonn, Mathematisches Institut, Bonn, 2005. front matter+ii+95 pp.

〒 819-0395
福岡市西区元岡 744 番地
E-mail: y-tanaka@imi.kyushu-u.ac.jp

等質錐の基本相対不変式に付随する一般化された b-関数

九州大学大学院・数理学研究院　中島 秀斗[*1] (Hideto NAKASHIMA)
Faculty of Mathematics,
Kyushu University

概要

簡約な概均質ベクトル空間の理論において b-関数は重要な役割を果たす．本稿では等質錐に単純推移的に作用する分裂可解 Lie 群から得られる概均質ベクトル空間上へ，b-関数を一般化する．そして，等質錐上の Laplace 変換を利用してその具体的表示を与える．

序文．

簡約な概均質ベクトル空間 (G,ρ,V) の相対不変式 $f(x)$ $(x\in V)$ は b-関数と呼ばれる多項式を持つ．この b-関数は概均質ベクトル空間のゼータ関数あるいは局所ゼータ関数の極の位置や関数等式に現れるガンマ因子の形を統制しており，概均質ベクトル空間の研究において重要な役割を果たしている．一方で等質錐は分裂可解 Lie 群が推移的に作用しており，その複素化を考えることにより自然に (簡約でない) 可解な概均質ベクトル空間を構成できる．本稿ではこの概均質ベクトル空間上において一般化された b-関数を定義し，その具体的表示を与える．

V を有限次元実ベクトル空間とし，$\Omega\subset V$ を階数 r の正則な開凸錐とする．Ω が等質であるとは，Ω を不変にする $GL(V)$ の部分群 $G(\Omega)$ が Ω に推移的に作用することであり，本稿では Ω は常に等質であることを仮定する．等質錐 Ω は基本相対不変式と呼ばれる既約多項式 $\Delta_1(x),\dots,\Delta_r(x)$ $(x\in V)$ を持ち，Ω はそれらの正値集合

$$\Omega=\{x\in V;\ \Delta_1(x)>0,\dots,\Delta_r(x)>0\}$$

として記述される (cf. Ishi–Nomura [6])．また $G(\Omega)$ の部分群であり，Ω に単純推移的

---

*1 h-nakashima@math.kyushu-u.ac.jp

に作用する分裂可解 Lie 群 H が存在する．H は分裂可解であるので，その対角成分を $t_1,\ldots,t_r$ とすれば，H の有理指標 $\chi\colon H\to\mathbb{R}$ は $\underline{\nu}=(\nu_1,\ldots,\nu_r)\in\mathbb{R}^r$ を用いて

$$\chi(h)=\chi_{\underline{\nu}}(h)=e^{\nu_1t_1+\cdots+\nu_rt_r}\quad(h\in H)$$

と表せる．ここで Ω 上の関数 f に対して，H のある有理指標 $\chi=\chi_{\underline{\nu}}$ が存在して $f(\rho(h)x)=\chi(h)f(x)$ $(h\in H,\ x\in\Omega)$ が成り立つとき，f は H-相対不変であるという．このとき $\underline{\nu}\in\mathbb{R}^r$ を f の指数と呼び，指数 $\underline{\nu}\in\mathbb{R}^r$ を持つ相対不変関数を $\Delta_{\underline{\nu}}(x)$ で表す．基本相対不変式 $\Delta_j(x)$ は H-相対不変であり，その指数を $\underline{\sigma}_j=(\sigma_{j1},\ldots,\sigma_{jr})$ としたとき，それらを並べた行列 σ を等質錐 Ω の指数行列と呼ぶ：

$$\sigma=\begin{pmatrix}\underline{\sigma}_1\\ \vdots\\ \underline{\sigma}_r\end{pmatrix}=(\sigma_{jk})_{1\le j,k\le r}.$$

[8] により，指数行列を求めるアルゴリズムが与えられている．また, 基本相対不変式の冪積を $\Delta^{\underline{\nu}}(x)=\Delta_1(x)^{\nu_1}\cdots\Delta_r(x)^{\nu_r}$ $(x\in\Omega)$ とすれば，$\Delta^{\underline{\nu}}(x)=\Delta_{\underline{\nu}\sigma}(x)$ が成り立つ．

V の内積を $\langle\cdot|\cdot\rangle$ とし，この内積に関する Ω の双対錐を Ω^* と書く．Ω^* の基本相対不変式を $\Delta_1^*(y),\ldots,\Delta_r^*(y)$ とし，その指数行列を σ_* とする．ここで双対錐 Ω^* 上の多項式 $p(y)$ に対して，微分作用素 $p(D_x)$ を $p(D_x)e^{\langle x|y\rangle}=p(y)e^{\langle x|y\rangle}$ を満たすものと定義する．さらに $\Delta_*^{\underline{\nu}^*}(y)=\Delta_1^*(y)^{\nu_1^*}\cdots\Delta_r^*(y)^{\nu_r^*}$ とおき，Ω の相対不変関数 $f(x)=\Delta^{\underline{\nu}}(x)$ が $\underline{\nu}':=\underline{\nu}\sigma\sigma_*^{-1}\in\mathbb{Z}_{\ge0}^r$ であるとき，f の一般化された b-関数 $b(s)$ を以下により定義する：

$$\Delta_*^{\underline{\nu}'}(D_x)\Delta^{\underline{\nu}}(x)^{s+1}=b(s)\Delta^{\underline{\nu}}(x)^s\quad(x\in\Omega).$$

この b-関数を計算するため，双対錐 Ω^* 上の相対不変関数 $\Delta_*^{\underline{\nu}^*}(y)$ の Laplace 変換 $\mathcal{L}[\Delta_*^{\underline{\nu}^*}](x)$ を定義する (cf. §3)．この Laplace 変換は以下を満たす (cf. 式 (3.4))：

$$\mathcal{L}[\Delta_*^{\underline{\nu}^*}](x)=\frac{1}{\Delta^{\widetilde{\underline{\nu}}^*}(x)}\quad(x\in\Omega;\ \text{ただし}\ \widetilde{\underline{\nu}}^*=\underline{\nu}^*\sigma_*\sigma^{-1}\ \text{とおいた}).$$

さて $\underline{\gamma}:=\underline{\nu}\sigma$ とおき，また V の “非対角成分” の空間 $\mathcal{V}_{kj}$ の次元を用いて，$\widetilde{m}_j:=1+(1/2)\sum_{k>j}\dim\mathcal{V}_{kj}$ とおく (cf. 式 (2.1))．このとき Ω の相対不変関数 $f(x)=\Delta^{\underline{\nu}}(x)$ の一般化された b-関数 $b(s)$ は

$$b(s)=\prod_{j=1}^{r}\prod_{k=0}^{\gamma_j-1}(\gamma_js+\widetilde{m}_j+k)$$

と計算される (定理 4.3)．既約な簡約概均質ベクトル空間の b-関数の導出は統一的ではなく難しい場合もあるが，本稿で扱った可解な概均質ベクトル空間の b-関数の導出は統一的

であり，興味深い結果となった．一方で既約な等質錐 Ω 上では $\Delta^{\underline{\nu}}(x)$ および $\Delta_*^{\underline{\nu}'}(y)$ が共に定数でない多項式になることができるのは Ω が対称錐のとき，そしてそのときに限る (cf. 定理 4.4) ので，Ω が対称でなければ，$\Delta^{\underline{\nu}}(x)$ と $\Delta_*^{\underline{\nu}'}(y)$ がともに一般化された b-関数を持つことはない．さらに簡約な概均質ベクトル空間の持つ "相対不変式 $f(x)$ の b-関数とそれに対応する $f^*(y)$ の b-関数が一致する" という性質は一般には持たないなど，簡約なものとは異なった様相を見せている点も興味深い．

謝辞. 本研究のきっかけを与えてくださった城西大学の小木曽岳義先生に，心より感謝申し上げます．

1　概均質ベクトル空間

G を複素数体上の群とし，n-次元複素ベクトル空間 V における有理表現を $\rho\colon G \to GL(V)$ と書く．このとき三つ組 (G, ρ, V) が概均質ベクトル空間であるとは，ρ が Zariski 位相で稠密な G-軌道を持つとき，すなわち V のある点 v について $\overline{\rho(G)v} = V$ (ただし $\overline{}$ は Zariski 閉包を表す) となることである．ここで群 G が簡約な代数群であるとき，(G, ρ, V) を簡約な概均質ベクトル空間という．概均質ベクトル空間の特異集合 $\mathcal{S}$ を

$$\mathcal{S} := \left\{ v \in V;\ \overline{\rho(G)v} \neq V \right\}$$

により定義する．V 上の恒等的に零ではない有理関数 f が相対不変式であるとは，G のある有理指標 χ が存在して $f(\rho(g)x) = \chi(g)f(x)$ $(g \in G,\ x \in V \setminus \mathcal{S})$ が成り立つことである．V の双対ベクトル空間 $V^* = \{f\colon V \to \mathbb{C};\ 線型写像\}$ に対し，$f(v)$ を $\langle f | v \rangle$ と表すことにする．このとき $\langle \rho(g)v | \rho^*(g)f \rangle = \langle v | f \rangle$ なる関係式により G の V^* における反傾表現 $\rho^*\colon G \to GL(V^*)$ が得られる．三つ組 (G, ρ^*, V^*) は一般には概均質ベクトル空間になるとは限らないが，これが概均質ベクトル空間となるとき，これを (G, ρ, V) と双対な概均質ベクトル空間と呼ぶ．(G, ρ, V) の相対不変式 f に対して，関数 $\varphi_f\colon V \setminus \mathcal{S} \to V^*$ を $\varphi_f = \operatorname{grad} \log f$ により定義する．$\overline{\operatorname{Im} \varphi_f} = V^*$ となる相対不変式 f を非退化な相対不変式と呼び，非退化な相対不変式を持つ概均質ベクトル空間を正則な概均質ベクトル空間と呼ぶ．

V の基底を一つ取り固定し，この基底に関して $x \in V$ を $x = (x_1, \ldots, x_n)$ のように表す．ベクトル $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ に対して $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ を多重指数とし，V 上の多項式関数 p を $p(x) = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ $(x \in V)$ のように表したとき，微分作用素 $p(D_x)$ を

$$p(D_x) = \sum_\alpha a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_r}\right)^{\alpha_r} = \sum_\alpha a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}$$

により定義する．この微分作用素は $p(D_x)e^{\langle x|y\rangle}=p(y)e^{\langle x|y\rangle}$ を満たす微分作用素として特徴付けられる．このとき概均質ベクトル空間における相対不変式 f の b-関数は以下の定理より導入される．

定理 1.1 (cf. Kimura [7])**.** (G,ρ,V) が簡約な概均質ベクトル空間とすると，その双対 (G,ρ^*,V^*) も概均質ベクトル空間である．また $f(x)$ を (G,ρ,V) の有理指標 χ に対応する d 次の相対不変多項式ならば，(G,ρ^*,V^*) には χ^{-1} に対応する d 次の相対不変多項式 $f^*(y)$ が存在し，次の関係式を満たす多項式関数 $b(s)$ が存在する:

$$f^*(D_x)f(x)^{s+1}=b(s)f(x)^s \quad (x\in V\setminus\mathcal{S}). \tag{1.1}$$

この多項式関数 $b(s)$ を相対不変式 f の b-関数と呼ぶ．b-関数は概均質ベクトル空間のゼータ関数や局所ゼータ関数の極の位置，関数等式に現れるガンマ因子の形を統制しており，概均質ベクトル空間の研究において重要な役割を果たしている．また b-関数は次のような関数等式を満たしている：

$$b(s)=(-1)^d\cdot b\left(-s-\frac{n}{d}-1\right). \tag{1.2}$$

例 1.2. $G=GL(n,\mathbb{C})$，$V=\mathrm{Sym}(n,\mathbb{C})$ とし，G の V 上の作用を $\rho(g)x:=gx\,{}^tg$ $(g\in G,\ x\in V)$ により定義すると，この三つ組 (G,ρ,V) は概均質ベクトル空間となる．また $f(x)=\det x$ とするとこれは既約な相対不変式となり，特に f の b-関数は

$$b(s)=\prod_{j=1}^{n}\left(s+\frac{j+1}{2}\right)=(s+1)\left(s+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(s+\frac{n+1}{2}\right)$$

で与えられる．このとき b-関数の関数等式 $b(s)=(-1)^n\cdot b(-s-\frac{n+3}{2})$ が成り立つことを確認するのは容易い．

2 等質錐

V を有限次元実ベクトル空間とし，その開部分集合 $\Omega\subset V$ が，任意の正数 λ,μ および $x,y\in\Omega$ に対して $\lambda x+\mu y\in\Omega$ となるとき，開凸錐と呼ぶ．また開凸錐 Ω が直線を含まないとき，正則であるという．V 上の一般線型群 $GL(V)$ の部分群で，Ω を不変にする部分群を $G(\Omega)=\{g\in GL(V);\ g(\Omega)=\Omega\}$ とおけば $G(\Omega)$ は $GL(V)$ の閉部分群となり，したがって線型 Lie 群となる．ここで $x,y\in\Omega$ に対してある $g\in G(\Omega)$ が存在し $x=gy$ となるとき，すなわち $G(\Omega)$ が Ω に推移的に作用するとき，開凸錐 Ω は等質であ

るという．本稿では Ω は常に正則な等質開凸錐であると仮定し，以後単に等質錐と呼ぶ．Vinberg [11] にあるように，Ω に単純推移的に作用する分裂可解 Lie 部分群 $H \subset G(\Omega)$ が存在する．

等質錐の例を挙げよう．$\mathcal{S}_N := \mathrm{Sym}(N, \mathbb{R})$ とおきその中で正定値なもの全体のなす集合を $\mathcal{S}_N^+$ で表すと，$\mathcal{S}_N^+$ は開凸錐となる．ここで $g \in GL(N, \mathbb{R})$ に対して $\rho(g)x := gx\,{}^tg$ $(x \in \mathcal{S}_N^+)$ により $\mathcal{S}_N^+$ 上の作用を定義すると，この作用により $\mathcal{S}_N^+$ は等質錐となる．さらに $\mathcal{H}_N$ を $GL(N, \mathbb{R})$ の部分群で対角成分が正である下三角行列とすれば，$\mathcal{H}_N$ は ρ により $\mathcal{S}_N^+$ に単純推移的に作用する (cf. Cholesky 分解)．

Ishi [5] に従い，$\mathcal{S}_N$ の部分空間の中で等質錐を構成することを考えよう．自然数 N を $N = n_1 + \cdots + n_r$ と分割する．そして $\mathcal{V}_{lk} \subset \mathrm{Mat}(n_l, n_k;\ \mathbb{R})$ $(k \le l)$ を次の条件を満たす行列空間の族とする：

(V0) $\mathcal{V}_{kk} = \mathbb{R}I_{n_k}$ $(k = 1, \ldots, r)$,
(V1) $A \in \mathcal{V}_{lk}$, $B \in \mathcal{V}_{kj} \Rightarrow AB \in \mathcal{V}_{lj}$ $(j < k < l)$,
(V2) $A \in \mathcal{V}_{lj}$, $B \in \mathcal{V}_{kj} \Rightarrow A\,{}^tB \in \mathcal{V}_{lk}$ $(j < k < l)$,
(V3) $A \in \mathcal{V}_{kj} \Rightarrow A\,{}^tA \in \mathcal{V}_{kk}$ $(j < k)$.

これらを用いて $\mathcal{S}_N$ の部分空間 $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}$ を

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{V}} := \left\{ x = \begin{pmatrix} X_{11} & {}^tX_{21} & \cdots & {}^tX_{r1} \\ X_{21} & X_{22} & \ddots & {}^tX_{r2} \\ \vdots & & \ddots & \\ X_{r1} & X_{r2} & \cdots & X_{rr} \end{pmatrix};\ \begin{array}{l} X_{kk} = x_{kk} I_{n_k}, \\ (x_{kk} \in \mathbb{R}) \\ X_{lk} \in \mathcal{V}_{lk} \end{array} \right\} \subset \mathcal{S}_N \tag{2.1}$$

により定義すると，$\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}$ の中で正定値なもののなす集合 $\mathcal{P}_{\mathcal{V}} := \mathcal{Z}_{\mathcal{V}} \cap \mathcal{S}_N^+$ は等質錐となる．実際,

$$H_{\mathcal{V}} := \left\{ h = \begin{pmatrix} T_{11} & & & \\ T_{21} & T_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T_{r1} & T_{r2} & \cdots & T_{rr} \end{pmatrix};\ \begin{array}{l} T_{kk} = e^{\frac{1}{2}t_k} I_{n_k} \\ (t_k \in \mathbb{R}) \\ T_{lk} \in \mathcal{V}_{lk} \end{array} \right\} \subset \mathcal{H}_N$$

とおけば，$\rho(h)x = hx\,{}^th$ $(h \in H_{\mathcal{V}},\ x \in \mathcal{P}_{\mathcal{V}})$ により $H_{\mathcal{V}}$ は $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ に単純推移的に作用している．実は Ishi [5] にあるように，任意の等質錐 Ω はこのように構成されたある $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ と線型同型になり，Ω に単純推移的に作用する分裂可解 Lie 群 H は対応する $H_{\mathcal{V}}$ と同型になることが知られている．本稿で扱う等質錐はすべてこのような形で実現されているとする．また，ここで現れる分割の個数 r を等質錐の階数という．

等質錐上の相対不変関数を定義しよう．H は三角行列で表されているので，H 上の任意の有理指標 χ はある $\underline{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_r) \in \mathbb{R}^r$ を用いて

$$\chi(h) = \chi_{\underline{\nu}}(h) = e^{\nu_1 t_1 + \cdots + \nu_r t_r} \quad (h \in H)$$

と表せる．Ω 上の関数 f が H に関して相対不変であるとは，H 上のある有理指標 $\chi = \chi_{\underline{\nu}}$ ($\underline{\nu} \in \mathbb{R}^r$) が存在して $f(\rho(h)x) = \chi(h)f(x)$ ($h \in H,\ x \in \Omega$) が成り立つこととし，$\underline{\nu}$ を相対不変関数 f の指数という．以後単に相対不変といえば H に関して相対不変のこととする．等質錐 Ω 上の相対不変な既約多項式は丁度 r 個存在し，任意の相対不変な多項式はそれらのべき積で表される (cf. Ishi [4])．すなわちその既約多項式を $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ とかけば，任意の相対不変多項式 $p(x)$ は

$$p(x) = (\mathrm{const.})\Delta_1(x)^{m_1} \cdots \Delta_r(x)^{m_r} \quad (x \in V; m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

となる．さらに Ω はそれらの正値集合として表されることが知られている (cf. [6]):

$$\Omega = \{x \in V;\ \Delta_1(x) > 0, \ldots, \Delta_r(x) > 0\}.$$

この既約多項式 $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ を等質錐 Ω の基本相対不変式と呼ぶ．$\Delta_j(x)$ の指数を $\underline{\sigma}_j = (\sigma_{j1}, \ldots, \sigma_{jr})$ とするとき，それらを並べて得られる r 次の正方行列

$$\sigma = \begin{pmatrix} \underline{\sigma}_1 \\ \vdots \\ \underline{\sigma}_r \end{pmatrix} = (\sigma_{jk})_{1 \leq j,k \leq r}$$

を等質錐 Ω の指数行列と呼ぶ．Ishi [4] で与えられているその構成法から，基本相対不変式の順番を適当にとれば，σ は下三角行列でその対角成分はすべて 1 となるので，以後 Ω の基本相対不変式はこの順番で並んでいるとする．また [8] により，指数行列の計算アルゴリズムが与えられている．

さて V の内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は $\langle x | y \rangle := \mathrm{Tr}(xy)$ により与えられているとする．このとき V の部分集合 Ω^* を

$$\Omega^* := \left\{x \in V;\ \langle x | y \rangle > 0 \text{ for all } y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\right\}$$

により定義すると Ω^* は開凸錐になるが，さらに Ω^* は反傾表現 ρ^* により等質となる．ここで ρ の反傾表現 ρ^* とは $\langle \rho(h)x | \rho^*(h)y \rangle = \langle x | y \rangle$ ($h \in H,\ x, y \in V$) を満たす H の V における有理表現である．よって Ω^* は階数 r の等質錐となり，これを Ω の双対錐と呼ぶ．作用が反傾であることを踏まえ Ω^* 上の関数 f が H-相対不変であるということを，H のある有理表現 $\chi_{\underline{\nu}^*}$ ($\underline{\nu}^* \in \mathbb{R}^r$) が存在して任意の $h \in H$ に対して $f(\rho^*(h)y) = \chi_{\underline{\nu}^*}^{-1}(h)f(y)$

$(y \in \Omega^*)$ を満たすことと定義し，この $\underline{\nu}^*$ を Ω^* の相対不変関数 f の指数と呼ぶ．さて Ω と同様に，Ω^* の基本相対不変式 $\Delta_1^*(y), \ldots, \Delta_r^*(y)$ の指数を $\underline{\sigma}_j^* = (\sigma_{j1}^*, \ldots, \sigma_{jr}^*)$ とし，それらを並べ指数行列

$$\sigma_* = \begin{pmatrix} \underline{\sigma}_1^* \\ \vdots \\ \underline{\sigma}_r^* \end{pmatrix} = (\sigma_{jk}^*)_{1 \le j,k \le r}$$

を構成する．ここで H が反傾で作用しているので，$\Delta_1^*(y), \ldots, \Delta_r^*(y)$ の順番を適当に並び替えることにより σ_* を上三角行列にすることができるので，以後 $\Delta_1^*(y), \ldots, \Delta_r^*(y)$ はこの順番で並んでいるとする．

例 2.1. V を以下のような 5 次元の実ベクトル空間とし，$\Omega := V \cap \mathcal{S}_5^+$ とおく：

$$V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & x_4 \\ x_2 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 & x_5 \end{pmatrix} ;\ x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

この Ω は非対称な等質錐としては最低次元のものであり，Vinberg 錐と呼ばれる．Ω の基本相対不変式 $\Delta_1(x), \Delta_2(x), \Delta_3(x)$ は $x \in V$ の左上からの小行列式の既約因子

$$\Delta_1(x) = x_1, \quad \Delta_2(x) = x_1x_3 - x_2^2, \quad \Delta_3(x) = x_1x_5 - x_4^2 \quad (x \in V) \tag{2.2}$$

である．また V^* を次のような 5 次元の実ベクトル空間とし，$\Omega^* := V^* \cap \mathcal{S}_3^+$ とおく：

$$V^* = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \\ y_2 & y_3 & 0 \\ y_4 & 0 & y_5 \end{pmatrix} ;\ y_1, \ldots, y_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

ここで V と V^* との双対ペア $\langle x \,|\, y \rangle$ を

$$\langle x \,|\, y \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_4y_4 + x_5y_5 \quad (x \in V,\ y \in V^*)$$

とすれば，Ω^* は $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する Ω の双対錐となる．その基本相対不変式は $y \in V^*$ の右下からの小行列式

$$\Delta_1^*(y) = y_1y_3y_5 - y_3y_4^2 - y_5y_2^2, \quad \Delta_2^*(y) = y_3, \quad \Delta_3^*(y) = y_5 \quad (y \in V^*) \tag{2.3}$$

で与えられるので，Ω および Ω^* の指数行列 σ, σ_* はそれぞれ以下のようになる:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$V_{\mathbb{C}}$, $H_{\mathbb{C}}$ をそれぞれ V, H の複素化とし，基本相対不変式 $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ や有理表現 ρ を複素正則に拡張する．すると，三つ組 $(V_{\mathbb{C}}, \rho, H_{\mathbb{C}})$ は正則な概均質ベクトル空間となり，特に $H_{\mathbb{C}}$ は簡約でなく可解 Lie 群である．この概均質ベクトル空間の特異集合は $\mathcal{S} := \{w \in V_{\mathbb{C}};\ \Delta_j(w) = 0 \text{ for some } j\}$ である．本稿ではこのタイプの概均質ベクトル空間において相対不変式の b-関数を考察するが，b-関数は概均質ベクトル空間の実構造には依らないので，以降ではすべて実数体上で考察する．

3 Laplace 変換

前節の記号を引き続き用いる．指数 $\underline{s}^* \in \mathbb{R}^r$ を持つ Ω^* の相対不変関数を $\Delta^*_{\underline{s}^*}(y)$ で表し，次の積分を考える:

$$\Gamma_{\Omega^*}(\underline{s}^*) := \int_{\Omega^*} e^{-\langle\, y \,|\, e\,\rangle} \Delta^*_{\underline{s}^*}(y)\, d\mu(y). \tag{3.1}$$

ここで $d\mu$ は Ω^* 上の Haar 測度である．$m_j := \sum_{k>j} \dim \mathcal{V}_{kj}$ とおく．

定理 3.1 (Gindikin [3])**.** 積分 (3.1) は $\underline{s}^* = (s^*_1, \ldots, s^*_r) \in \mathbb{R}^r$ が任意の j に対して $s^*_j > \frac{1}{2} m_j$ を満たすとき収束し，そのとき $\Gamma_{\Omega^*}(\underline{s}^*)$ は以下で与えられる：

$$\Gamma_{\Omega^*}(\underline{s}^*) = \frac{\pi^{(\dim V - r)/2}}{2^r} \prod_{j=1}^{r} \Gamma\left(s^*_j - \frac{m_j}{2}\right).$$

ただし Γ は通常のガンマ関数である：

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx \quad (s > 0).$$

この関数 Γ_{Ω^*} を双対錐 Ω^* のガンマ関数と呼び，これを用いて相対不変関数の Laplace 変換 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L}[\Delta^*_{\underline{s}^*}](x) := \frac{1}{\Gamma_{\Omega^*}(\underline{s}^*)} \int_{\Omega^*} e^{-\langle\, x \,|\, y\,\rangle} \Delta^*_{\underline{s}^*}(y)\, d\mu(y) \quad (x \in \Omega) \tag{3.2}$$

により定義する．$\Delta_{\underline{s}}(x)$ を指数 $\underline{s} \in \mathbb{R}^r$ をもつ Ω の相対不変関数とすると，次が成り立つことが知られている．

定理 3.2 (Gindikin [3])**.** 積分 (3.2) は，$\underline{s}^* = (s^*_1, \ldots, s^*_r) \in \mathbb{R}^r$ が任意の j に対して $s^*_j > \frac{1}{2} m_j$ を満たすとき，そしてそのときに限り収束する．そのとき $\mathcal{L}[\Delta^*_{\underline{s}^*}](x)$ は Ω 上の相対不変関数となり，以下で与えられる：

$$\mathcal{L}[\Delta^*_{\underline{s}^*}](x) = \Delta_{-\underline{s}^*}(x) \quad (x \in \Omega).$$

整数ベクトル $\underline{\nu},\ \underline{\nu}^* \in \mathbb{Z}^r$ に対して，Ω および Ω^* それぞれの基本相対不変式の冪積を

$$\Delta^{\underline{\nu}}(x) := \Delta_1(x)^{\nu_1} \cdots \Delta_r(x)^{\nu_r} \quad (x \in \Omega),$$
$$\Delta_*^{\underline{\nu}^*}(y) := \Delta_1^*(y)^{\nu_1^*} \cdots \Delta_r^*(y)^{\nu_r^*} \quad (y \in \Omega^*)$$

のように表す．このとき指数行列の定義より

$$\Delta^{\underline{\nu}}(x) = \Delta_{\underline{\nu}\sigma}(x), \quad \Delta_*^{\underline{\nu}^*}(y) = \Delta^*_{\underline{\nu}^*\sigma_*}(y) \quad (x \in \Omega,\ y \in \Omega^*) \tag{3.3}$$

が成り立つことに注意し，式 (3.3) と定理 3.2 を合わせると次を得る：

$$\mathcal{L}[\Delta_*^{\underline{\nu}^*}](x) = \frac{1}{\Delta^{\widetilde{\underline{\nu}}^*}(x)} \quad (x \in \Omega;\ \text{ただし}\ \widetilde{\underline{\nu}}^* := \underline{\nu}^*\sigma_*\sigma^{-1}\ \text{とおいた}). \tag{3.4}$$

例 3.3. Ω を Vinberg 錐とし，Ω^* をその双対錐とする (例 2.1 を参照)．Ω の基本相対不変式 $\Delta_1(x), \Delta_2(x), \Delta_3(x)$ および Ω^* の基本相対不変式 $\Delta_1^*(y), \Delta_2^*(y), \Delta_3^*(y)$ はそれぞれ式 (2.2) および式 (2.3) で与えられる．このとき

$$\sigma_*\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので，$\Delta_*^{\underline{\nu}^*}(y)$ ($\underline{\nu}^* = (\nu_1^*, \nu_2^*, \nu_3^*) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$) の Laplace 変換は次で与えられる:

$$\mathcal{L}[\Delta_*^{\underline{\nu}^*}](x) = \frac{\Delta_1(x)^{\nu_1^*+\nu_2^*+\nu_3^*}}{\Delta_2(x)^{\nu_1^*+\nu_2^*}\Delta_3(x)^{\nu_1^*+\nu_3^*}} \quad (x \in \Omega).$$

4 一般化された b-関数

本節では b-関数を等質錐の相対不変関数に拡張する．引き続き前節までの記号を踏襲する．Ω の相対不変関数 $f(x) = \Delta^{\underline{\nu}}(x)$ の指数は $\underline{\nu}\sigma$ であり，これと同じ指数 $\underline{\nu}\sigma$ を持つ Ω^* の相対不変関数 f^* は，$\underline{\nu}' := \underline{\nu}\sigma\sigma_*^{-1}$ とおけば

$$f^*(y) = \Delta_*^{\underline{\nu}'}(y) \quad (y \in \Omega^*)$$

となる．等質錐の相対不変式において式 (1.1) の類似を考えるためには $f^*(y)$ が多項式である必要があるが，次は明らかであろう．

補題 4.1. $f(x) = \Delta^{\underline{\nu}}(x)$ とする．$f^*(y)$ が多項式ならば，$\underline{\nu}' = \underline{\nu}\sigma\sigma_*^{-1} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$.

以降では Ω の相対不変関数 $f(x) = \Delta^{\underline{\nu}}(x)$ は $\underline{\nu}' \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ を満たすと仮定する．

命題 4.2 (cf. Kimura [7])**.** 相対不変関数 $f(x)=\Delta^{\underline{\nu}}(x)$ が $\underline{\nu}'\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ を満たすとき，

$$f^*(D_x)f(x)^{s+1}=b(s)f(x)^s \quad (x\in\Omega) \tag{4.1}$$

を満たす s の関数 $b(s)$ が存在する．

証明. $\underline{\nu}'\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ なので $f^*(D_x)$ は意味を持つ．$\chi=\chi_{\underline{\nu}'\sigma_*}$ とおく．ここで $h\in H$ に対して $y=\rho(h)x$ ならば $D_y=\rho^*(h)D_x$ であるので，

$$f^*(D_{\rho(h)x})=f^*(\rho^*(h)D_x)=\chi^{-1}(h)f^*(D_x).$$

また，$\phi(x)=f^*(D_x)f(x)^{s+1}$ とおけば $\phi(\rho(h)x)=\chi(h)^s\phi(x)$ であるが，その一方で $f(\rho(h)x)^s=\chi(h)^sf(x)^s$ であるので，

$$\frac{f^*(D_x)f(x)^{s+1}}{f(x)^s}$$

は x に依らず s のみに依存する．従ってこれを $b(s)$ とおけば，式 (4.1) を得る． □

式 (4.1) に現れる関数 $b(s)$ を，Ω の相対不変関数 f の一般化された b-関数と定義する．Faraut–Koranyi [2] の Proposition VII.1.4 の証明を参考にして，この一般化された b-関数 $b(s)$ を計算しよう．$\underline{s}=(s_1,\dots,s_r)\in\mathbb{R}^r$ に対して $|\underline{s}|:=s_1+\cdots+s_r$ とする．また $m_j=\sum_{k>j}\dim\mathcal{V}_{kj}$ に対して，$\widetilde{m}_j:=1+m_j/2$ とおく．

定理 4.3. Ω の相対不変関数 $f(x)=\Delta^{\underline{\nu}}(x)$ は $\underline{\nu}\sigma\sigma_*^{-1}\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ のとき一般化された b-関数 $b(s)$ を持ち，$\underline{\gamma}=\underline{\nu}\sigma$ とおけば，f の一般化された b-関数 $b(s)$ は次で与えられる：

$$b(s)=\prod_{j=1}^{r}\prod_{k=0}^{\gamma_j-1}\left(\gamma_js+\widetilde{m}_j+k\right).$$

証明. まず $\gamma_j<-\frac{1}{2}m_j$ を仮定する．式 (3.4) および式 (3.3) より

$$\Delta^{\underline{\nu}}(x)^{s+1}=\Delta^{(s+1)\underline{\nu}}(x)=\mathcal{L}[\Delta_*^{-(s+1)\underline{\nu}\sigma\sigma_*^{-1}}](x)=\mathcal{L}[\Delta^*_{-(s+1)\underline{\gamma}}](x)$$

が成り立つ．同じく式 (3.3) より $\Delta_*^{\underline{\nu}'}(D_x)=\Delta^*_{\underline{\gamma}}(D_x)$ が成り立つことに注意すれば，$\Delta_*^{\underline{\nu}'}(D_x)\Delta^{\underline{\nu}}(x)^{s+1}$ は次のように計算される：

$$\begin{aligned}
\Delta_*^{\underline{\nu}'}(D_x)\Delta^{\underline{\nu}}(x)^{s+1}&=\frac{1}{\Gamma_{\Omega^*}(-(s+1)\underline{\gamma})}\cdot\Delta^*_{\underline{\gamma}}(D_x)\int_{\Omega^*}e^{-\langle x\,|\,y\rangle}\Delta^*_{-(s+1)\underline{\gamma}}(y)\,d\mu(y)\\
&=\frac{(-1)^{|\underline{\gamma}|}}{\Gamma_{\Omega^*}(-(s+1)\underline{\gamma})}\cdot\int_{\Omega^*}e^{-\langle x\,|\,y\rangle}\Delta^*_{\underline{\gamma}}(y)\cdot\Delta^*_{-(s+1)\underline{\gamma}}(y)\,d\mu(y)\\
&=(-1)^{|\underline{\gamma}|}\cdot\frac{\Gamma_{\Omega^*}(-s\underline{\gamma})}{\Gamma_{\Omega^*}(-(s+1)\underline{\gamma})}\cdot\mathcal{L}[\Delta^*_{-s\underline{\gamma}}](x).
\end{aligned}$$

ここで $\mathcal{L}[\Delta^*_{-s\underline{\gamma}}](x) = \Delta^{\underline{\nu}}(x)^s$ であり，定理 3.1 およびガンマ関数の等式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ より，

$$\frac{\Gamma_{\Omega^*}(-s\underline{\gamma})}{\Gamma_{\Omega^*}(-(s+1)\underline{\gamma})} = (-1)^{|\underline{\gamma}|} \prod_{j=1}^{r} \left(\gamma_j s + \frac{m_j}{2} + 1\right) \cdots \left(\gamma_j s + \frac{m_j}{2} + \gamma_j\right)$$

であるので $\gamma_j < -\frac{1}{2}m_j$ において定理を得るが，式 (4.1) の両辺は $\underline{\nu}$ に関して整関数であるので，結局任意の $\underline{\nu}$ に対して成立する． □

ここで求めた $b(s)$ の性質を調べよう．$b(s) = b_0 \prod_{j,k}(s + \alpha_{jk})$ とすれば，

$$b_0 = \prod_j (\gamma_j)^{\gamma_j}, \quad \alpha_{jk} = \frac{\widetilde{m}_j + k}{\gamma_j}$$

であり，特に α_{jk} は正の有理数である．これは簡約な概均質ベクトル空間の b-関数が一般に持つ性質である．その一方で下記の定理 4.4 にもあるように，既約な等質錐 Ω 上の定数でない相対不変関数 $f(x) = \Delta^{\underline{\nu}}(x)$ が一般化された b-関数を持つとき，すなわち $\underline{\nu}' = \underline{\nu}\sigma\sigma_*^{-1} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ となるとき，Ω が対称錐でなければ f は多項式になれない．よって特に，Ω が対称でなければ，$f(x)$ と $f^*(y)$ がともに本稿で定義した一般化された b-関数を持つことはなく，従って簡約な概均質ベクトル空間の持つ "相対不変式 $f(x)$ の b-関数とそれに対応する $f^*(y)$ の b-関数が一致する" という性質は一般には持たないことになる．

定理 4.4 (論文準備中)**.** Ω は既約な等質錐とする．$\Delta^{\underline{\nu}}(x)$ および $\Delta_*^{\underline{\nu}'}(x)$ がともに定数でない多項式となることができるのは Ω が対称錐のとき，そしてそのときに限る．

最後に Vinberg 錐 (例 2.1 を参照) において，指数 $(1,1,1)$ を持つ相対不変関数の一般化された b-関数を紹介して本稿を終わろう．

例 4.5. Ω を Vinberg 錐とし，その双対錐を Ω^* とする．それぞれの基本相対不変式たちは式 (2.2) および式 (2.3) で与えられている．ここで Ω の相対不変関数 $f(x) = \Delta^{\underline{\nu}}(x)$ は指数 $(1,1,1)$ を持つとする．このとき，$\underline{\nu} = (-1,1,1)$ および $\underline{\nu}' = (1,0,0)$ であるので，f の b-関数 $b(s)$ は次を満たすものとして定義される：

$$\Delta_1^*(D_x)\left(\frac{\Delta_2(x)\Delta_3(x)}{\Delta_1(x)}\right)^{s+1} = b(s)\left(\frac{\Delta_2(x)\Delta_3(x)}{\Delta_1(x)}\right)^{s}.$$

Vinberg 錐 Ω においては $m_1 = 2$, $m_2 = 0$, $m_3 = 0$ であるので，$b(s)$ は

$$b(s) = (s+2)(s+1)^2$$

となる．一方で $\underline{\nu}^* = (1,0,0)$ とすれば，$f^*(y) = \Delta_*^{\underline{\nu}^*}(y)$ は指数 $(1,1,1)$ を持つ Ω^* 上の相対不変関数であるが，このとき $\widetilde{\underline{\nu}}^* = \underline{\nu}^* \sigma_* \sigma^{-1} = (-1,1,1)$ である．従って $\Delta^{\widetilde{\underline{\nu}}^*}(D_y)$ が定義されず，$f^*(y)$ は b-関数を持たない．

参考文献

[1] P. Etingof, D. Kazhdan and A. Polishchuk, *When is the Fourier transform of an elementary function elementary?*, Sel. math., New ser. **8** (2002), 27–66.

[2] J. Faraut and A. Korányi, "Analysis on symmetric cones", Clarendon Press, Oxford, 1994.

[3] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys **19** (1964), 1–89.

[4] H. Ishi, *Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications*, J. Lie Theory, **11** (2001), 155–171.

[5] H. Ishi, *On symplectic representations of normal j-algebras and their application to Xu's realizations of Siegel domains*, Differ. Geom. Appl., **24** (2006), 588–612.

[6] H. Ishi and T. Nomura, *Tube domain and an orbit of a complex triangular group*, Math. Z., **259** (2008), 697–711.

[7] T. Kimura, "Introduction to prehomogeneous vector spaces", Transl. Math. Monogr., Amer. Math. Soc., Providence, RI, **215**, (2002).

[8] H. Nakashima, *Basic relative invariants of homogeneous cones*, Journal of Lie Theory **24** (2014), 1013–1032.

[9] H. Nakashima, *Characterization of symmetric cones by means of the basic relative invariants*, submitting.

[10] H. Nakashima and T. Nomura, *Clans defined by representations of Euclidean Jordan algebras and the associated basic relative invariants*, Kyushu J. Math. **67** (2013), 163–202.

[11] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.