第53回実函数論・函数解析学
合同シンポジウム
講演集

期日: 2014年9月3日(水)–9月5日(金)
会場: 学習院大学・目白キャンパス

まえがき

本講演集は、2014 年 9 月 3 日 (水) から 9 月 5 日 (金) まで 3 日間にわたり学習院大学目白キャンパスで開催された第 53 回実函数論・函数解析学合同シンポジウムの講演集です。

本合同シンポジウムの開催のために多くの方々にご協力をいただきましたが、関係者皆様のご尽力によって、講演者の方々の素晴らしい論文を本講演集で発表することができました。各グループの責任者の方、講演者の皆様、本シンポジウム参加者の皆様方に対し感謝いたします。

また、特に会場責任者の中野史彦先生を始めとする学習院大学理学部の皆様には大変お世話になりました。ここに深く感謝の意を評します。

なお、このシンポジウムは、科学研究費基盤研究 (C)(課題番号 23540242 代表者 梶原 毅) の援助を受けて開催いたしました。

和泉澤　正隆
東海大学・理学部

梶原　毅
岡山大学・環境生命科学研究科

第53回実函数論・函数解析学合同シンポジウム
プログラム

期日: 2014年9月3日 (水) ー9月5日 (金)
会場: 学習院大学目白キャンパス理学部７号館１０１号室
〒１７１−８５８８豊島区目白１−５−１
http://www.gakushuin.ac.jp/mejiro.html

9月3日 (水)

13:30–14:30: 大野貴雄 (大分大・教育福祉科学) ”Hardy’s inequality in Musielak-Orlicz-Sobolev spaces”

14:45–15:45: 和田出秀光 (金沢大・理工学) ”Optimal embeddings on Sobolev-Lorentz-Zygmund spaces”

16:00–17:00: 渡邉 紘 (サレジオ工業高専・一般教育) ”強退化放物型方程式の一意可解性”

9月4日 (木)

9:30–10:30: 齋藤洋樹 (埼玉大・理工学) ”極大関数による掛谷問題の研究とその応用”

10:45–11:45: 縄田紀夫 (大阪教育大・教育) ”Simple stably projectionless C*- 環について”

13:45–14:45: 伊藤公智 (前橋工科大・工) ”Relations among relative operator entropies and operator divergences”

15:00–16:00: 久保利久 (東京大・数理科学) ”On the F-method for constructing intertwining differential operators between homogeneous vector bundles”

16:15–17:15: 蛭子彰仁 (九州大・マスフォアインダストリ研究所) ”超幾何級数の特殊値”

懇親会: 18:00–20:00
会場: 学習院大学目白キャンパス中央教育研究棟１２Ｆ

9月5日 (金)

9:30–10:30: 吉野邦生 (東京都市大・自然科学) ”Eigenvalue problem of Toeplitz operators on Bargmann - Fock space and Hyperfunctions”

10:45–11:45: 貝塚公一 (立命館大・総合科学技術研究機構) ”Scattering theory for the Laplacian on symmetric spaces of noncompact type and its application”

開催責任者: 和泉澤正隆 (東海大・理)
梶原　毅 (岡山大・環境生命)
会場責任者: 中野史彦 (学習院大・理)

目次

Hardy's inequality in Musielak-Orlicz-Sobolev spaces

Takao Ohno

Abstract

Our aim in this paper is to treat Hardy's inequalities for Musielak-Orlicz-Sobolev functions on proper open subset of $\mathbf{R}^N$.

1 Introduction

The higher dimensional Hardy's inequality of the form

$$\int_\Omega |u(x)|^p \delta(x)^{-p+\beta} dx \le C \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \delta(x)^\beta dx, \ u \in C_0^\infty(\Omega)$$

appeared in [12] for bounded Lipschitz domains $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, $1 < p < \infty$ and $\beta < p-1$, where $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$. For related results, we refer to [1], [2], [6], [7], [8] and [13].

Variable exponent Lebesgue spaces and Sobolev spaces were introduced to discuss nonlinear partial differential equations with non-standard growth conditions. Harjulehto-Hästö-Koskenoja [4] proved Hardy's inequality for Sobolev functions $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ when Ω is bounded and $p(\cdot)$ is a variable exponent satisfying the log-Hölder conditions on Ω, as an extension of [2]. In fact they proved the following:

Theorem A. *Let Ω be an open and bounded subset of $\mathbf{R}^N$. Suppose $1 < p^- \le p^+ < \infty$, where $p^- := \inf_{x\in\mathbf{R}^N} p(x)$ and $p^+ := \sup_{x\in\mathbf{R}^N} p(x)$. Assume that Ω satisfies the measure density condition, that is, there exists a constant $k > 0$ such that*

$$|B(z,r) \cap \Omega^c| \ge k|B(z,r)| \tag{1.1}$$

for every $z \in \partial\Omega$ and $r > 0$ (see [3]). *Then there exist positive constants C and b_0 such that the inequality*

$$\|\delta^{b-1}u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \le C\|\delta^b|\nabla u|\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \tag{1.2}$$

holds for all $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ and all $0 \le b < b_0$, where $\delta(x) = dist(x, \partial\Omega)$.

2000 Mathematics Subject Classification : Primary 46E30, 42B25

Key words and phrases : Musielak-Orlicz space, Hardy's inequality, variable exponent

In the case when $b = 0$, Hästö [5, Theorem 3.2] proved Theorem A without the assumption that Ω is bounded. It is also shown in [4] that if $p^- > N$ then (1.2) holds without the measure density condition (1.1).

Recently, these results have been extended to the two variable exponents Sobolev spaces $W_0^{1,\Phi_{p(\cdot),q(\cdot)}}(\Omega)$ in [10], where $\Phi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t) = t^{p(x)}(\log(c_0+t))^{q(x)}$ with $p(\cdot)$ as above and a measurable bounded function $q(\cdot)$. In fact, the following results are shown in [10]:

Theorem B ([10, Theorem 1.1]). *Let $\Omega \neq \mathbf{R}^N$ be an open set. Suppose $1 < p^- \le p^+ < \infty$ and Ω satisfies the measure density condition* (1.1). *Then, for $\alpha \in [0, N/p^+) \cap [0,1]$, there exist positive constants C and b_0 such that the inequality*

$$\|\delta^{\alpha+b-1}u\|_{\Psi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)} \le C\|\delta^b|\nabla u|\|_{\Phi_{p(\cdot),q(\cdot)}(\Omega)}$$

holds for all $u \in W_0^{1,\Phi_{p(\cdot),q(\cdot)}}(\Omega)$ and $0 \le b \le b_0$, where $\Psi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t) = (t(\log(c_0 + t))^{q(x)/p(x)})^{p_\alpha(x)}$ and $1/p_\alpha(x) = 1/p(x) - \alpha/N$.

Theorem B′ ([10, Theorem 1.2]). *If $N < p^- \le p^+ < \infty$, then the same conclusion as in Theorem B holds without the measure density condition* (1.1).

Our aim in this paper is to extend these results to functions in general Musielak-Orlicz-Sobolev spaces $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ defined by a general function $\Phi(x,t)$ satisfying certain conditions (see Section 2 for the definitions of Φ and $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$). Corresponding to the functions $\Psi_{p(\cdot),q(\cdot)}(x,t)$ in [10], we shall introduce functions $\Psi_\alpha(x,t)$ to state our main results Theorem 4.4 and Theorem 5.2, which are extensions of Theorem B and Theorem B′, respectively.

2 Preliminaries

Throughout this paper, let C denote various constants independent of the variables in question and $C(a,b,\cdots)$ be a constant that depends on $a,b,\cdots$.

We consider a function

$$\Phi(x,t) = t\phi(x,t) : \mathbf{R}^N \times [0,\infty) \to [0,\infty)$$

satisfying the following conditions (Φ1) – (Φ4):

(Φ1) $\phi(\cdot\,,t)$ is measurable on $\mathbf{R}^N$ for each $t \ge 0$ and $\phi(x,\cdot)$ is continuous on $[0,\infty)$ for each $x \in \mathbf{R}^N$;

(Φ2) there exists a constant $A_1 \ge 1$ such that

$$A_1^{-1} \le \phi(x,1) \le A_1 \quad \text{for all } x \in \mathbf{R}^N;$$

(Φ3) $\phi(x,\cdot)$ is uniformly almost increasing, namely there exists a constant $A_2 \ge 1$ such that

$$\phi(x,t) \le A_2\phi(x,s) \quad \text{for all } x \in \mathbf{R}^N \quad \text{whenever } 0 \le t < s;$$

($\Phi4$) there exists a constant $A_3 \geq 1$ such that

$$\phi(x, 2t) \leq A_3\phi(x, t) \quad \text{for all } x \in \mathbf{R}^N \text{ and } t > 0.$$

Note that ($\Phi2$), ($\Phi3$) and ($\Phi4$) imply

$$0 < \inf_{x\in\mathbf{R}^N} \phi(x, t) \leq \sup_{x\in\mathbf{R}^N} \phi(x, t) < \infty$$

for each $t > 0$.

If $\Phi(x, \cdot)$ is convex for each $x \in \mathbf{R}^N$, then ($\Phi3$) holds with $A_2 = 1$; namely $\phi(x, \cdot)$ is non-decreasing for each $x \in \mathbf{R}^N$.

Let $\bar{\phi}(x, t) = \sup_{0\leq s\leq t} \phi(x, s)$ and

$$\overline{\Phi}(x, t) = \int_0^t \bar{\phi}(x, r)\, dr$$

for $x \in \mathbf{R}^N$ and $t \geq 0$. Then $\overline{\Phi}(x, \cdot)$ is convex and

$$\frac{1}{2A_3}\Phi(x, t) \leq \overline{\Phi}(x, t) \leq A_2\Phi(x, t)$$

for all $x \in \mathbf{R}^N$ and $t \geq 0$.

By ($\Phi3$), we see that

$$\Phi(x, at) \begin{cases} \leq A_2 a\Phi(x, t) & \text{if } 0 \leq a \leq 1 \\ \geq A_2^{-1} a\Phi(x, t) & \text{if } a \geq 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

We shall also consider the following conditions:

($\Phi5$) for every $\gamma > 0$, there exists a constant $B_\gamma \geq 1$ such that

$$\phi(x, t) \leq B_\gamma\phi(y, t)$$

whenever $|x - y| \leq \gamma t^{-1/N}$ and $t \geq 1$;

($\Phi6$) there exist a function $g \in L^1(\mathbf{R}^N)$ and a constant $B_\infty \geq 1$ such that $0 \leq g(x) < 1$ for all $x \in \mathbf{R}^N$ and

$$B_\infty^{-1}\phi(x, t) \leq \phi(x', t) \leq B_\infty\phi(x, t)$$

whenever $|x'| \geq |x|$ and $g(x) \leq t \leq 1$.

Example 2.1. Let $p(\cdot)$ and $q_j(\cdot)$, $j = 1, \ldots, k$, be measurable functions on $\mathbf{R}^N$ such that

(P1) $1 \leq p^- := \inf_{x\in\mathbf{R}^N} p(x) \leq \sup_{x\in\mathbf{R}^N} p(x) =: p^+ < \infty$

and

(Q1) $-\infty < q_j^- := \inf_{x\in\mathbf{R}^N} q_j(x) \leq \sup_{x\in\mathbf{R}^N} q_j(x) =: q_j^+ < \infty$

for all $j = 1, \dots, k$.

Set $L_c(t) = \log(c+t)$ for $c \ge e$ and $t \ge 0$, $L_c^{(1)}(t) = L_c(t)$, $L_c^{(j+1)}(t) = L_c(L_c^{(j)}(t))$ and

$$\Phi(x,t) = t^{p(x)} \prod_{j=1}^{k} (L_c^{(j)}(t))^{q_j(x)}.$$

Then, $\Phi(x,t)$ satisfies (Φ1), (Φ2) and (Φ4). It satisfies (Φ3) if there is a constant $K \ge 0$ such that $K(p(x)-1) + q_j(x) \ge 0$ for all $x \in \mathbf{R}^N$ and $j = 1, \dots, k$; in particular if $p^- > 1$ or $q_j^- \ge 0$ for all $j = 1, \dots, k$.

Moreover, we see that $\Phi(x,t)$ satisfies (Φ5) if

(P2) $p(\cdot)$ is log-Hölder continuous, namely

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C_p}{L_e(1/|x-y|)}$$

with a constant $C_p \ge 0$ and

(Qj2) $q_j(\cdot)$ is $(j+1)$-log-Hölder continuous, namely

$$|q_j(x) - q_j(y)| \le \frac{C_{q_j}}{L_e^{(j+1)}(1/|x-y|)}$$

with constants $C_{q_j} \ge 0$, $j = 1, \dots k$.

Finally, we see that $\Phi(x,t)$ satisfies (Φ6) with $g(x) = 1/(1+|x|)^{N+1}$ if $p(\cdot)$ is log-Hölder continuous at ∞, namely if it satisfies

(P3) $|p(x) - p(x')| \le \dfrac{C_{p,\infty}}{L_e(|x|)}$ whenever $|x'| \ge |x|$ with a constant $C_{p,\infty} \ge 0$.

In fact, if $1/(1+|x|)^{N+1} < t \le 1$, then $t^{-|p(x)-p(x')|} \le e^{(N+1)C_{p,\infty}}$ for $|x'| \ge |x|$ and $L_c^{(j)}(t)^{|q_j(x)-q_j(x')|} \le L_c^{(j)}(1)^{q_j^+ - q_j^-}$.

Example 2.2. Let $p_1(\cdot)$, $p_2(\cdot)$, $q_1(\cdot)$ and $q_2(\cdot)$ be measurable functions on $\mathbf{R}^N$ satisfying (P1) and (Q1).

Then,

$$\Phi(x,t) = (1+t)^{p_1(x)}(1+1/t)^{-p_2(x)} L_c(t)^{q_1(x)} L_c(1/t)^{-q_2(x)}$$

satisfies (Φ1), (Φ2) and (Φ4). It satisfies (Φ3) if $p_j^- > 1$, $j = 1,2$ or $q_j^- \ge 0$, $j = 1,2$. As a matter of fact, it satisfies (Φ3) if and only if $p_j(\cdot)$ and $q_j(\cdot)$ satisfy the following conditions:

(1) $q_j(x) \ge 0$ at points x where $p_j(x) = 1$, $j = 1,2$;

(2) $\sup_{x: p_j(x) > 1} \{\min(q_j(x), 0) \log(p_j(x) - 1)\} < \infty$, $j = 1,2$.

Moreover, we see that $\Phi(x,t)$ satisfies (Φ5) if $p_1(\cdot)$ is log-Hölder continuous and $q_1(\cdot)$ is 2-log-Hölder continuous.

Finally, we see that $\Phi(x,t)$ satisfies (Φ6) with $g(x) = 1/(1+|x|)^{N+1}$ if $p_2(\cdot)$ is log-Hölder continuous at ∞ and

(Q3) $q_2(\cdot)$ is 2-log-Hölder continuous at ∞, namely

$$|q_2(x) - q_2(x')| \le \frac{C_{q_2,\infty}}{L_c^{(2)}(|x|)} \quad \text{whenever } |x'| \ge |x|$$

with a constant $C_{q_2,\infty} \ge 0$.

In fact, if $1/(1+|x|)^{N+1} < t \le 1$, then $(1+t)^{|p_1(x)-p_1(x')|} \le 2^{p_1^+-1}$, $(1+1/t)^{|p_2(x)-p_2(x')|} \le e^{(N+1)C_{p_2,\infty}}$, $(\log(e+t))^{|q_1(x)-q_1(x')|} \le (\log(e+1))^{q_1^+-q_1^-}$ and $(\log(e+1/t))^{|q_2(x)-q_2(x')|} \le C(N, C_{q_2,\infty})$ for $|x'| \ge |x|$.

Let Ω be an open set in $\mathbf{R}^N$. Given $\Phi(x,t)$ as above, the associated Musielak-Orlicz space

$$L^{\Phi}(\Omega) = \left\{ f \in L^1_{loc}(\Omega)\,;\, \int_{\Omega} \Phi\big(y, |f(y)|\big)\, dy < \infty \right\}$$

is a Banach space with respect to the norm

$$\|f\|_{L^{\Phi}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0\,;\, \int_{\Omega} \overline{\Phi}\big(y, |f(y)|/\lambda\big)\, dy \le 1 \right\}$$

(cf. [11]). Further, we define the Musielak-Orlicz-Sobolev space by

$$W^{1,\Phi}(\Omega) = \{u \in L^{\Phi}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{\Phi}(\Omega)\}.$$

The norm

$$\|u\|_{W^{1,\Phi}(\Omega)} = \|u\|_{L^{\Phi}(\Omega)} + \||\nabla u|\|_{L^{\Phi}(\Omega)}$$

makes $W^{1,\Phi}(\Omega)$ a Banach space. We denote the closure of $C_0^{\infty}(\Omega)$ in $W^{1,\Phi}(\Omega)$ by $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. As usual, let $W^{1,\Phi}_{loc}(\mathbf{R}^N)$ denote the set of functions u on $\mathbf{R}^N$ such that $u|_{\Omega} \in W^{1,\Phi}(\Omega)$ for every bounded open set Ω. By (Φ2) and (Φ3), $W^{1,\Phi}_{loc}(\mathbf{R}^N) \subset W^{1,1}_{loc}(\mathbf{R}^N)$.

3 Lemmas

We denote by $B(x,r)$ the open ball centered at x of radius r. For a measurable set E, we denote by $|E|$ the Lebesgue measure of E.

For a locally integrable function f on Ω, the Hardy-Littlewood maximal function Mf is defined by

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)\cap\Omega} |f(y)|\, dy.$$

We know the following boundedness of maximal operator on $L^{\Phi}(\Omega)$.

Lemma 3.1 ([9, Corollary 4.4]). *Suppose that $\Phi(x,t)$ satisfies (Φ5), (Φ6) and further assume:*

($\Phi3^*$) *$t \mapsto t^{-\varepsilon_0}\phi(x,t)$ is uniformly almost increasing on $(0,\infty)$ for some $\varepsilon_0 > 0$, namely there is a constant $A_{2,\varepsilon_0} \ge 1$ such that*

$$t^{-\varepsilon_0}\phi(x,t) \le A_{2,\varepsilon_0} s^{-\varepsilon_0}\phi(x,s) \quad \textit{for all } x \in \mathbf{R}^N \textit{ whenever } 0 < t < s.$$

Then the maximal operator M is bounded from $L^\Phi(\Omega)$ into itself, namely, there is a constant $C > 0$ such that

$$\|Mf\|_{L^\Phi(\Omega)} \le C\|f\|_{L^\Phi(\Omega)}$$

for all $f \in L^\Phi(\Omega)$.

For $\lambda \ge 1$, $x \in \mathbf{R}^N$ and $t \ge 0$, set

$$\Phi_\lambda(x,t) = \Phi(x,t^{1/\lambda}) = t\phi_\lambda(x,t),$$

where $\phi_\lambda(x,t) = t^{1/\lambda-1}\phi(x,t^{1/\lambda})$.

Lemma 3.2. (1) *$\Phi_\lambda(x,t)$ satisfies the conditions* ($\Phi2$) *and* ($\Phi4$).

(2) *Suppose $\Phi(x,t)$ satisfies* ($\Phi3^*$). *Then $\Phi_\lambda(x,t)$ satisfies* ($\Phi1$) *and* ($\Phi3$) *when $\lambda \le 1+\varepsilon_0$, and it satisfies* ($\Phi3^*$) *when $\lambda < 1+\varepsilon_0$ (with ε_0 replaced by $(1+\varepsilon_0-\lambda)/\lambda$).*

(3) *If $\Phi(x,t)$ satisfies* ($\Phi5$), *then so does $\Phi_\lambda(x,t)$.*

(4) *If $\Phi(x,t)$ satisfies* ($\Phi6$), *then so does $\Phi_\lambda(x,t)$.*

From Lemma 3.1 and the above lemma, we obtain

Corollary 3.3. *Suppose that $\Phi(x,t)$ satisfies* ($\Phi5$), ($\Phi6$) *and* ($\Phi3^*$). *Then the maximal operator M is bounded from $L^{\Phi_\lambda}(\Omega)$ into itself for $1 \le \lambda < 1+\varepsilon_0$.*

Set

$$\Phi^{-1}(x,s) = \sup\{t > 0\,;\, \Phi(x,t) < s\}$$

for $x \in \mathbf{R}^N$ and $s > 0$.

Lemma 3.4 (cf. [9, Lemma 5.1]). *$\Phi^{-1}(x,\cdot)$ is non-decreasing,*

$$\Phi(x,\Phi^{-1}(x,t)) = t$$

and

$$A_2^{-1}t \le \Phi^{-1}(x,\Phi(x,t)) \le A_2^2 t$$

for all $x \in \mathbf{R}^N$ and $t > 0$.

We shall consider the following condition:

($\Phi6^*$) $\Phi(x,t)$ satisfies ($\Phi6$) with $g(x) \le (1+|x|)^{-\beta}$ for some $\beta > N$.

Lemma 3.5. *If $\Phi(x,t)$ satisfies* ($\Phi6^*$), *then there exists $0 < \lambda < 1$ such that*

$$\Phi(x,\lambda g^*(x)) \le (2|x|)^{-N} \quad \textit{for all } x \in \mathbf{R}^N,$$

where $g^*(x) = \max\big(g(x),\, Mg(x)\big)$.

LEMMA 3.6. *$r \mapsto r^{\sigma_0}\Phi^{-1}(x, r^{-N})$ is uniformly almost decreasing on $(0, \infty)$, where $\sigma_0 = N \Big/ \big(1 + (\log A_3)/(\log 2)\big)$.*

LEMMA 3.7. *Suppose that $\Phi(x, t)$ satisfies $(\Phi5)$ and $(\Phi6^*)$. Let $0 < \alpha < \sigma_0$ for σ_0 given in Lemma 3.6. Then there exists a constant $C > 0$ such that*

$$\int_{B(x,2|x|)\setminus B(x,r)} |x-y|^{\alpha-N} f(y)\,dy \le Cr^{\alpha}\Phi^{-1}(x, r^{-N})$$

and

$$\int_{B(x,r)} f(y)\,dy \le Cr^{N}\Phi^{-1}(x, r^{-N})$$

for all $x \in \mathbf{R}^N$, $0 < r \le 2|x|$, and $f \ge 0$ satisfying $\|f\|_{L^{\Phi}(\mathbf{R}^N)} \le 1$.

Hereafter, let Ω is an open set in $\mathbf{R}^N$ such that $\Omega \ne \mathbf{R}^N$, and let $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$.

The following is a key lemma:

LEMMA 3.8. (1) *If Ω satisfies*

$$|B(z,r) \cap \Omega^c| \ge k|B(z,r)| \tag{3.1}$$

for every $z \in \partial\Omega$ and $r > 0$ with a constant $k > 0$ $(k \le 1)$, then there exists a constant $C = C(N, k) > 0$ such that

$$|u(x)| \le C \int_{B(x,2\delta(x))} |x-y|^{1-N} |\nabla u(y)|\ dy$$

for almost every $x \in \Omega$, whenever $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbf{R}^N)$ and $u = 0$ outside Ω.

(2) *Let $\lambda > N$. Then there exists a constant $C > 0$ such that*

$$|v(x)| \le C \left(\delta(x)^{\lambda-N} \int_{B(x,2\delta(x))} |\nabla v(y)|^{\lambda}\,dy\right)^{1/\lambda}$$

for every $x \in \Omega$, whenever $v \in W^{1,\lambda}_{loc}(\mathbf{R}^N)$ and $v = 0$ outside Ω.

For (1) see [10, Lemma 2.1]; for (2) see e.g. [6, (3.1)] (also cf. [2, Proposition 1]). Here note that (2) holds without the assumption (3.1).

We consider

$$H(f; x, \alpha) = \delta(x)^{\alpha-1} \int_{B(x,2\delta(x))} |x-y|^{1-N} f(y)\,dy$$

for $x \in \Omega$, $0 \le \alpha \le 1$ and $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$ such that $f \ge 0$, $f = 0$ outside Ω.

We know (by integration by parts)

$$H(f; x, 0) \le CMf(x).$$

for all $x \in \Omega$.

LEMMA 3.9. *Let $\Omega \neq \mathbf{R}^N$ be an open set and suppose that $\Phi(x,t)$ satisfies* ($\Phi5$) *and* ($\Phi6^*$).

(1) *Let $\alpha \in [0,\sigma_0) \cap [0,1]$. Then there exists a constant $C > 0$ such that*

$$H(f;x,\alpha) \leq CMf(x)\Phi(x,Mf(x))^{-\alpha/N}$$

for all $x \in \Omega$ and $f \geq 0$ such that $f = 0$ outside Ω and $\|f\|_{L^\Phi(\Omega)} \leq 1$.

(2) *Let $\alpha \in [0,\sigma_0]$. Then there exists a constant $C > 0$ such that*

$$\delta(x)^{\alpha-N} \int_{B(x,2\delta(x))} f(y)\,dy \leq CMf(x)\Phi(x,Mf(x))^{-\alpha/N}$$

for all $x \in \Omega$ and $f \geq 0$ such that $f = 0$ outside Ω and $\|f\|_{L^\Phi(\Omega)} \leq 1$.

4 Hardy's inequality I

LEMMA 4.1. *Let $\Omega \neq \mathbf{R}^N$ be an open set satisfying* (3.1). *Suppose $\Phi(x,t)$ satisfies* ($\Phi5$), ($\Phi6$) *and* ($\Phi3^*$). *Then there exist constants $C > 0$ and $0 < b_0 < 1$ such that*

$$\|\delta^{b-1}u\|_{L^\Phi(\Omega)} \leq C\|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)} \tag{4.1}$$

for all $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ and $0 \leq b \leq b_0$. If $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ and $\delta^b|\nabla u| \in L^\Phi(\Omega)$ for $0 \leq b \leq b_0$, then $\delta^b u$ extended by 0 outside Ω belongs to $W^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N)$.

Proof. Without loss of generality, we may assume that $0 \in \partial\Omega$. For $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ and $b \geq 0$, let

$$u_b(x) = \begin{cases} \delta(x)^b u(x), & \text{if } x \in \Omega \\ 0, & \text{if } x \in \Omega^c. \end{cases}$$

We first treat $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Note that δ and $1/\delta$ are bounded on support of u and $\delta \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Hence $u_b \in W^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N) \subset W^{1,1}_{loc}(\mathbf{R}^N)$ for every $b \geq 0$. Applying Lemma 3.8 (1) to this function, we have

$$\delta(x)^b|u(x)| \leq C\int_{B(x,2\delta(x))\cap\Omega} |x-y|^{1-N}\{b\delta(y)^{b-1}|u(y)| + \delta(y)^b|\nabla u(y)|\}\,dy, \tag{4.2}$$

so that

$$\delta(x)^{b-1}|u(x)| \leq C\left\{bM(\delta^{b-1}u)(x) + M(\delta^b|\nabla u|)(x)\right\}$$

for a.e. $x \in \Omega$ with a constant C independent of b. In view of Lemma 3.1, we find

$$\|\delta^{b-1}u\|_{L^\Phi(\Omega)} \leq C_0\left\{b\|\delta^{b-1}u\|_{L^\Phi(\Omega)} + \|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)}\right\},$$

which gives

$$(1-C_0b)\|\delta^{b-1}u\|_{L^\Phi(\Omega)} \leq C_0\|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)}.$$

Hence, taking b_0 such that $1 - C_0b_0 > 0$, we have (4.1) for $0 \leq b \leq b_0$.

We next treat $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ such that $u = 0$ outside $B(0,R)$ for some $R > 0$. Then we can find a sequence $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ such that $\varphi_j \to u$ in $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ and $\varphi_j = 0$ outside $B(0,2R)$ for each j. By the above discussions, for $0 < b \leq b_0$, we have

$$\|\delta^{b-1}\varphi_j\|_{L^\Phi(\Omega)} \leq C\|\delta^b|\nabla\varphi_j|\|_{L^\Phi(\Omega)} \tag{4.3}$$

for all j and

$$\|\delta^{b-1}(\varphi_j - \varphi_{j'})\|_{L^\Phi(\Omega)} \le C\|\delta^b|\nabla\varphi_j - \nabla\varphi_{j'}|\|_{L^\Phi(\Omega)} \tag{4.4}$$

for all $j,\ j'$. Since δ is bounded on $B(0,2R)$, we see that

$$\|\delta^b|\nabla\varphi_j|\|_{L^\Phi(\Omega)} \to \|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)}$$

as $j \to \infty$. Similarly

$$\|\delta^b|\nabla\varphi_j - \nabla\varphi_{j'}|\|_{L^\Phi(\Omega)} \to 0$$

as $j,\ j' \to \infty$. Hence by (4.4), $\{\delta^{b-1}\varphi_j\}$ is a Cauchy sequence in $L^\Phi(\Omega)$, which implies that $\delta^{b-1}\varphi_j \to \delta^{b-1}u$ in $L^\Phi(\Omega)$. Thus, letting $j \to \infty$ in (4.3), we obtain (4.1). Further, $(\varphi_j)_b \to u_b$ in $L^\Phi(\mathbf{R}^N)$ and

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi_j)_b &= \begin{cases} b\delta^{b-1}\varphi_j\nabla\delta + \delta^b\nabla\varphi_j & \text{on } \Omega \\ 0 & \text{on } \Omega^c \end{cases} \\ &\to \begin{cases} b\delta^{b-1}u\nabla\delta + \delta^b\nabla u & \text{on } \Omega \\ 0 & \text{on } \Omega^c \end{cases}\end{aligned}$$

in $L^\Phi(\mathbf{R}^N)$ as $j \to \infty$. It then follows that

$$\nabla u_b = \begin{cases} b\delta^{b-1}u\nabla\delta + \delta^b\nabla u & \text{on } \Omega \\ 0 & \text{on } \Omega^c, \end{cases}$$

which belongs to $L^\Phi(\mathbf{R}^N)$, and hence $u_b \in W^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N)$.

Finally we treat a general $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. For each $n \in \mathbf{N}$, we consider a C^1-function H_n on $[0,\infty)$ such that $0 \le H_n \le 1$ on $[0,\infty)$, $H_n = 1$ on $[0,n]$, $H_n = 0$ on $[3n,\infty)$, $0 \le -H_n'(t) \le t^{-1}$ for $t \in (n,3n)$. The existence of such H_n is assured since $\displaystyle\int_n^{3n} t^{-1}\,dt = \log 3 > 1$. Set $u_n(x) = H_n(|x|)u(x)$, $n = 1,2,\ldots$. Then we know by the above that

$$\|\delta^{b-1}u_n\|_{L^\Phi(\Omega)} \le C\|\delta^b|\nabla(u_n)|\|_{L^\Phi(\Omega)}. \tag{4.5}$$

Since $\delta^{b-1}|u_n| \uparrow \delta^{b-1}|u|$ $(n \to \infty)$,

$$\|\delta^{b-1}u_n\|_{L^\Phi(\Omega)} \to \|\delta^{b-1}u\|_{L^\Phi(\Omega)} \quad (n \to \infty).$$

On the other hand,

$$\begin{aligned}|\nabla u_n(x)| &\le |H_n{}'(|x|)||u(x)| + H_n(|x|)|\nabla u(x)| \\ &\le \frac{1}{|x|}|u(x)|\chi_{B(0,3n)\setminus B(0,n)}(x) + |\nabla u(x)|.\end{aligned}$$

Since $\delta(x)^b/|x| \le |x|^{b-1} \le n^{b-1}$ for $|x| \ge n$ and $b < 1$,

$$\delta(x)^b|\nabla u_n(x)| \le n^{b-1}|u(x)| + \delta(x)^b|\nabla u(x)|,$$

so that

$$\begin{aligned}\|\delta^b|\nabla u_n|\|_{L^\Phi(\Omega)} &\le n^{b-1}\|u\|_{L^\Phi(\Omega)} + \|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)} \\ &\to \|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)} \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

Therefore, by letting $n \to \infty$ in (4.5), we obtain (4.1), which also implies that $u_b \in W^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N)$. $\square$

For $\alpha \geq 0$, we consider a function $\Psi_\alpha(x,t) : \mathbf{R}^N \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ satisfying the following conditions:

(Ψ1) $\Psi_\alpha(\cdot,t)$ is measurable on $\mathbf{R}^N$ for each $t \geq 0$ and $\Psi_\alpha(x,\cdot)$ is continuous on $[0,\infty)$ for each $x \in \mathbf{R}^N$;

(Ψ2) $\Psi_\alpha(x,\cdot)$ is uniformly almost increasing on $[0,\infty)$, namely there is a constant $A_4 \geq 1$ such that $\Psi_\alpha(x,t) \leq A_4 \Psi_\alpha(x,s)$ for all $x \in \mathbf{R}^N$, whenever $0 \leq t < s$;

(Ψ3) there exists a constant $A_5 \geq 1$ such that

$$\Psi_\alpha\left(x, t\Phi(x,t)^{-\alpha/N}\right) \leq A_5 \Phi(x,t)$$

for all $x \in \mathbf{R}^N$ and $t > 0$.

Note that we may take $\Psi_0(x,t) = \Phi(x,t)$.

EXAMPLE 4.2. Let $\Phi(x,t)$ be as in Example 2.1. Set

$$\Psi_\alpha(x,t) = \left(t \prod_{j=1}^{k} (L_e^{(j)}(t))^{q_j(x)/p(x)} \right)^{p^\sharp(x)},$$

where $1/p^\sharp(x) = 1/p(x) - \alpha/N$. If $0 \leq \alpha < N/p^+$, then Ψ_α satisfies (Ψ1), (Ψ2) and (Ψ3).

EXAMPLE 4.3. Let $\Phi(x,t)$ be as in Example 2.2. Set

$$\Psi_\alpha(x,t) = \left((1+t)L_c(t)^{q_1(x)/p_1(x)}\right)^{p_1^\sharp(x)} \left((1+1/t)L_c(1/t)^{-q_2(x)/p_2(x)}\right)^{p_2^\sharp(x)}.$$

If $0 \leq \alpha < \min\{N/p_1^+, N/p_2^+\}$, then Ψ_α satisfies (Ψ1), (Ψ2) and (Ψ3).

THEOREM 4.4. *Let $\Omega \neq \mathbf{R}^N$ be an open set satisfying* (3.1). *Suppose $\Phi(x,t)$ satisfies* (Φ5), ($\Phi3^*$) *and* ($\Phi6^*$) *and let $\alpha \in [0,\sigma_0) \cap [0,1]$ for σ_0 given in Lemma 3.6. Then there exist constants $C^* > 0$ and $0 < b_0 < 1$ such that*

$$\int_\Omega \Psi_\alpha\big(x, \delta(x)^{\alpha+b-1}|u(x)|/C^*\big)\, dx \leq 1$$

for all $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ with $\|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)} \leq 1$ and $0 \leq b \leq b_0$.

Proof. Let b_0 be the number given in Lemma 4.1 and let $0 \leq b \leq b_0$. Let $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ with $\|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)} \leq 1$. By Lemma 4.1, $\delta^b u$ extended by 0 outside Ω belongs to $W_{loc}^{1,1}(\mathbf{R}^N)$, so that by Lemma 3.8 (1), (4.2) holds a.e. $x \in \Omega$. Hence

$$\delta(x)^{\alpha+b-1}|u(x)| \leq C\delta(x)^{\alpha-1} \int_{B(x,2\delta(x))} |x-y|^{1-N} f_u(y)\, dy$$

for a.e $x \in \Omega$, where $f_u(y) = b\delta(y)^{b-1}|u(y)| + \delta(y)^b|\nabla u(y)|$ for $y \in \Omega$ and $f_u(y) = 0$ for $y \in \Omega^c$. By Lemma 4.1, there is a constant $C_1 \geq 1$ such that $\|f_u\|_{L^\Phi(\Omega)} \leq C_1$. Applying Lemma 3.9 (1) to f_u/C_1 and using (Φ4), we have

$$\delta(x)^{\alpha+b-1}|u(x)| \leq C_2 M f_u(x) \Phi(x, Mf_u(x))^{-\alpha/N}$$

a.e. $x \in \Omega$. Hence by (Ψ2) and (Ψ3) we have

$$\int_\Omega \Psi_\alpha(x, \delta(x)^{\alpha+b-1}|u(x)|/C_2)\,dx \le A_4A_5 \int_\Omega \Phi(x, Mf_u(x))\,dx \tag{4.6}$$

whenever $\|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)} \le 1$. By Lemma 3.1, $\|Mf_u\|_{L^\Phi(\Omega)} \le C_3$, which implies $\int_\Omega \Phi(x, Mf_u(x))\,dx \le C_4$ ($C_4 \ge 1$).

Now let $0 < \varepsilon \le 1$. Since

$$\Phi(x, Mf_{\varepsilon u}(x)) = \Phi(x, \varepsilon Mf_u(x)) \le A_2\varepsilon\Phi(x, Mf_u(x))$$

by (2.1), applying (4.6) to εu, we have

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Psi_\alpha(x,&\delta(x)^{\alpha+b-1}|\varepsilon u(x)|/C_2)\,dx \le A_4A_5 \int_\Omega \Phi(x, Mf_{\varepsilon u}(x))\,dx \\ &\le A_2A_4A_5\varepsilon \int_\Omega \Phi(x, Mf_u(x))\,dx \le A_2A_4A_5C_4\varepsilon.\end{aligned}$$

Thus, taking $\varepsilon = (A_2A_4A_5C_4)^{-1}$ and $C^* = C_2/\varepsilon$, we obtain the required result. $\square$

Applying Theorem 4.4 to special Φ and Ψ_α given in Examples 2.1 and 4.2, we obtain the following corollary, which is an extension of Theorem B.

Corollary 4.5. *Let Φ and Ψ_α be as in Examples 2.1 and 4.2 and let $\Omega \ne \mathbf{R}^N$ be an open set satisfying* (3.1). *Suppose $p^- > 1$ and let $\alpha \in [0, N/p^+) \cap [0,1]$. Then there exist constants $C > 0$ and $0 < b_0 < 1$ such that*

$$\|\delta^{\alpha+b-1}u\|_{L^{\Psi_\alpha}(\Omega)} \le C\|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)}$$

for all $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ and $0 \le b \le b_0$.

Similarly, applying Theorem 4.4 to special Φ and Ψ_α given in Examples 2.2 and 4.3, we obtain another extension of Theorem B:

Corollary 4.6. *Let Φ and Ψ_α be as in Examples 2.2 and 4.3 and let $\Omega \ne \mathbf{R}^N$ be an open set satisfying* (3.1). *Suppose $\min(p_1^-, p_2^-) > 1$ and let $\alpha \in [0, \min(N/p_1^+, N/p_2^+)) \cap [0,1]$. Then there exist constants $C > 0$ and $0 < b_0 < 1$ such that*

$$\|\delta^{\alpha+b-1}u\|_{L^{\Psi_\alpha}(\Omega)} \le C\|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)}$$

for all $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ and $0 \le b \le b_0$.

5 Hardy's inequality II

For a proof of next theorem, we prepare the following lemma instead of Lemma 4.1.

LEMMA 5.1. *Let $\Omega \neq \mathbf{R}^N$ be an open set. Suppose that $\Phi(x,t)$ satisfies ($\Phi5$), ($\Phi6$) and ($\Phi3^*$) for $\varepsilon_0 > N-1$. Then there exist constants $C>0$ and $0<b_1<1$ such that*

$$\|\delta^{b-1}u\|_{L^\Phi(\Omega)} \le C\|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)}$$

for all $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ and $0 \le b \le b_1$. If $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ and $\delta^b|\nabla u| \in L^\Phi(\Omega)$ for $0 \le b \le b_1$, then $\delta^b u$ extended by 0 outside Ω belongs to $W^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N)$.

Proof. Take λ such that $N<\lambda<\varepsilon_0+1$. Then $W^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N) \subset W^{1,\lambda}_{loc}(\mathbf{R}^N)$.

First, let $u \in C_0^\infty(\Omega)$ and $b \ge 0$. Let u_b be the function $\delta^b u$ extended by 0 outside Ω. Then $u_b \in W^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N) \subset W^{1,\lambda}_{loc}(\mathbf{R}^N)$ and applying Lemma 3.8 (2) to $v=u_b$, we have

$$[\delta(x)^{b-1}|u(x)|]^\lambda \le C\delta(x)^{-N}\int_{B(x,2\delta(x))\cap\Omega} f_u(y)\,dy \le CMf_u(x) \tag{5.1}$$

for all $x\in\Omega$, where $f_u(y) = [b\delta(y)^{b-1}|u(y)| + \delta(y)^b|\nabla u(y)|]^\lambda$. In view of Corollary 3.3, we find

$$\|[\delta^{b-1}|u|]^\lambda\|_{L^{\Phi_\lambda}(\Omega)} \le C\|f_u\|_{L^{\Phi_\lambda}(\Omega)}.$$

Since $\|f\|_{L^{\Phi_\lambda}(\Omega)} = \|f^{1/\lambda}\|^\lambda_{L^\Phi(\Omega)}$ for every $f\in L^{\Phi_\lambda}(\Omega)$, we obtain

$$\|\delta^{b-1}u\|_{L^\Phi(\Omega)} \le C^{1/\lambda}\|f_u^{1/\lambda}\|_{L^\Phi(\Omega)} \le C_1\left\{b\|\delta^{b-1}u\|_{L^\Phi(\Omega)} + \|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)}\right\},$$

which gives

$$(1-C_1 b)\|\delta^{b-1}u\|_{L^\Phi(\Omega)} \le C_1\|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)}.$$

Take b_1 such that $1-C_1b_1>0$. Then, in the same way as the last half of the proof of Lemma 4.1, we obtain the required results for $u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ and $0\le b\le b_1$. $\square$

THEOREM 5.2. *Let $\Omega \neq \mathbf{R}^N$ be an open set. Suppose $\Phi(x,t)$ satisfies ($\Phi5$), ($\Phi6^*$) and ($\Phi3^*$) with $\varepsilon_0 > N-1$. Let $\alpha\in[0,\sigma_0]$. Then there exist $C^*>0$ and $0<b_1<1$ such that*

$$\int_\Omega \Psi_\alpha(x,\delta(x)^{\alpha+b-1}|u(x)|/C^*)\,dx \le 1$$

for all $u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ with $\|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)}\le 1$ and $0\le b\le b_1$.

Proof. Let b_1 be as in the above lemma and let $0\le b\le b_1$. Let $u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ with $\|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)}\le 1$. Take λ such that $N<\lambda<\varepsilon_0+1$. By the above lemma, $\delta^b u$ extended by 0 outside Ω belongs to $W^{1,\lambda}_{loc}(\mathbf{R}^N)$, so that by (5.1) we have

$$[\delta(x)^{\alpha+b-1}|u(x)|]^\lambda \le C\delta(x)^{\alpha\lambda-N}\int_{B(x,2\delta(x))} f_u(y)\,dy$$

for all $x\in\Omega$, where $f_u(y) = [b\delta(y)^{b-1}|u(y)|+\delta(y)^b|\nabla u(y)|]^\lambda$ for $y\in\Omega$ and $f_u(y)=0$ for $y\in\Omega^c$. By Lemma 5.1, there is a constant $C_1\ge 1$ such that $\|f_u^{1/\lambda}\|_{L^\Phi(\Omega)}\le C_1$, so that $\|f_u\|_{L^{\Phi_\lambda}(\Omega)}\le {C_1}^\lambda$.

Here we note that $\Phi_\lambda(x,t)$ satisfies ($\Phi6^*$) with g^λ in place of g and that $r \mapsto r^{\lambda\sigma_0}\Phi_\lambda^{-1}(x, r^{-N})$ is uniformly almost decreasing on $(0,\infty)$. Since $\lambda\alpha \in [0, \lambda\sigma_0]$, we can apply Lemma 3.9 (2) to $f_u/{C_1}^\lambda$, $\lambda\alpha$ and Φ_λ in place of f, α and Φ respectively, and using ($\Phi4$), we obtain

$$\begin{aligned}\delta(x)^{\alpha+b-1}|u(x)| &\le C[Mf_u(x)]^{1/\lambda}\Phi_\lambda(x, Mf_u(x)/{C_1}^\lambda)^{-\alpha/N}\\ &\le C_2[Mf_u(x)]^{1/\lambda}\Phi(x, [Mf_u(x)]^{1/\lambda})^{-\alpha/N}\end{aligned}$$

for all $x \in \Omega$. Hence by ($\Psi2$) and ($\Psi3$)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Psi_\alpha(x, \delta(x)^{\alpha+b-1}|u(x)|/C_2)\,dx &\le A_4A_5\int_\Omega \Phi(x, [Mf_u(x)]^{1/\lambda})\,dx\\ &= A_4A_5\int_\Omega \Phi_\lambda(x, Mf_u(x))\,dx. \qquad (5.2)\end{aligned}$$

By Corollary 3.3, $\|Mf_u\|_{L^{\Phi_\lambda}(\Omega)} \le C_3$, which implies $\int_\Omega \Phi_\lambda(x, Mf_u(x))\,dx \le C_4$.

Let $0 < \varepsilon \le 1$. Since

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(x, Mf_{\varepsilon u}(x)) &= \Phi_\lambda(x, \varepsilon^\lambda Mf_u(x)) = \Phi(x, \varepsilon[Mf_u(x)]^{1/\lambda})\\ &\le A_2\varepsilon\Phi(x, [Mf_u(x)]^{1/\lambda}) = A_2\varepsilon\Phi_\lambda(x, Mf_u(x))\end{aligned}$$

by (2.1), applying (5.2) to εu, we have

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Psi_\alpha(x,\delta(x)^{\alpha+b-1}|\varepsilon u(x)|/C_2)\,dx &\le A_4A_5\int_\Omega \Phi_\lambda(x, Mf_{\varepsilon u}(x))\,dx\\ &\le A_2A_4A_5\varepsilon\int_\Omega \Phi_\lambda(x, Mf_u(x))\,dx \le A_2A_4A_5C_4\varepsilon.\end{aligned}$$

Thus, taking $\varepsilon = (A_2A_4A_5C_4)^{-1}$ and $C^* = C_2/\varepsilon$, we obtain the required result. □

Applying Theorem 5.2 to special Φ and Ψ_α given in Examples 2.1 and 4.2, we obtain the following corollary, which is an extension of Theorem B′.

Corollary 5.3. *Let Φ and Ψ_α be as in Examples 2.1 and 4.2. Suppose $p^- > N$ and let $0 \le \alpha < N/p^+$. Then there exist constants $C > 0$ and $0 < b_1 < 1$ such that*

$$\|\delta^{\alpha+b-1}u\|_{L^{\Psi_\alpha}(\Omega)} \le C\|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)}$$

for all $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ and $0 \le b \le b_1$.

Similarly, applying Theorem 5.2 to special Φ and Ψ_α given in Examples 2.2 and 4.3, we obtain another extension of Theorem B′:

Corollary 5.4. *Let Φ and Ψ_α be as in Examples 2.2 and 4.3. Suppose $\min(p_1^-, p_2^-) > N$ and let $0 \le \alpha < \min(N/p_1^+, N/p_2^+)$. Then there exist constants $C > 0$ and $0 < b_1 < 1$ such that*

$$\|\delta^{\alpha+b-1}u\|_{L^{\Psi_\alpha}(\Omega)} \le C\|\delta^b|\nabla u|\|_{L^\Phi(\Omega)}$$

for all $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ and $0 \le b \le b_1$.

References

[1] D. E. Edmunds and W. D. Evans, Hardy operators, function spaces and embeddings, Springer, 2004.

[2] P. Hajłasz, Pointwise Hardy inequalities, Proc. Amer. Math. Soc. **127**(2) (1999), 417–423.

[3] P. Hajłasz, P. Koskela and H. Tuominen, Sobolev embeddings, extensions and measure density condition, J. Funct. Anal. **254** (2008), no. 5, 1217–1234.

[4] P. Harjulehto, P. Hästö and M. Koskenoja, Hardy's inequality in variable exponent Sobolev space, Georgian Math. J. **12** (2005), no. 3, 431–442.

[5] P. Hästö, Local-to-global results in variable exponent spaces, Math. Res. Lett. **16** (2009), no. 2, 263–278.

[6] J. Kinnunen and O. Martio, Hardy's inequalities for Sobolev functions, Math. Res. Lett. **4** (1997), no. 4, 489–500.

[7] P. Koskela and J. Lehrback, Weighted pointwise Hardy inequalities, J. London Math. Soc. (2) **79** (2009), no. 3, 757–779.

[8] A. Kufner and L. E. Persson, Weighted inequalities of Hardy type, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003.

[9] F.-Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of maximal operators and Sobolev's inequality on Musielak-Orlicz-Morrey spaces, Bull. Sci. Math. **137**, (2013), 76–96.

[10] Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, Hardy's inequality in Orlicz-Sobolev spaces of variable exponent, Hokkaido Math. J. **40** (2011), no. 2, 187–203.

[11] J. Musielak, Orlicz Spaces and Modular Spaces, Lecture Notes in Math. **1034**, Springer-Verlag, 1983.

[12] J. Nečas, Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **16** (1962), 305–326.

[13] A. Wannebo, Hardy inequalities, Proc. Amer. Math. Soc. **109**(1) (1990), 85–95.

Faculty of Education and Welfare Science
Oita University
Dannoharu Oita-city 870-1192, Japan
E-mail : t-ohno@oita-u.ac.jp

OPTIMAL EMBEDDINGS OF CRITICAL SOBOLEV-LORENTZ-ZYGMUND SPACES

Hidemitsu Wadade

Faculty of Mechanical Engineering, Institute of Science and Engineering, Kanazawa University, Kakuma, Kanazawa, Ishikawa 920-1192, Japan

1 Introduction and main theorems

In this paper, we consider the optimal embedding on the critical Sobolev-Lorentz-Zygmund space $H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ into the generalized Morrey space $\mathcal{M}_{\Phi,r}(\mathbb{R}^n)$, where $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $1 < q \le \infty$, $1 \le r < \infty$ and $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ are non-negative numbers with $m \in \mathbb{N}$, and Φ is a Young function. One of main purposes is to investigate the optimal Young function Φ with which the embedding $H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}_{\Phi,r}(\mathbb{R}^n)$ holds. The Sobolev-Lorentz-Zygmund space $H^s_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, is defined as a Bessel potential space $H^s_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n) := (1-\Delta)^{-\frac{s}{2}} L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ in terms of the Lorentz-Zygmund space $L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$. The space $H^s_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ extends the Sobolev-Lorentz space and the Sobolev space since $L_{p,q,0,\cdots,0}(\mathbb{R}^n) = L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ and $L_{p,p}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$, where $L_p(\mathbb{R}^n)$ and $L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ denote the Lebesgue space and the Lorentz space, respectively. We give definitions of those function spaces and related properties in Section 2.

We concern the optimal vanishing and growth orders of the local integrals $\int_E |u(x)|^r dx$ as $|E| \to 0$ or $|E| \to \infty$ for functions in $H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$. In Suzuki-Wadade [21], the authors gave the optimal growth order of the local integrals for functions in $H^{\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ stated as follows:

Theorem A [21]. *Let $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $1 < q \le \infty$ and $1 \le r < \infty$. Then there exists a positive constant C such that the inequality*

$$\left(\int_E |u(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \le C\,|E|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}} \|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q}} \tag{1.1}$$

holds for all $u \in H^{\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ and all measurable sets E if and only if $p > r$ or $p = r \ge q$, where C is independent of E.

In Theorem A, the necessity for the condition $p > r$ or $p = r \ge q$ comes from the part $|E| \to \infty$ in (1.1). In fact, the vanishing order $|E|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}$ as $|E| \to 0$ turns out not to be optimal, and in [21], the authors also proved the following:

Theorem B [21]. *Let $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $1 < q \le \infty$ and $1 \le r < \infty$. Then there exist positive constants δ and C such that the inequality*

$$\left(\int_E |u(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \le C\,|E|^{\frac{1}{r}} \log(\frac{1}{|E|})^{\frac{1}{q'}} \|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q}}$$

holds for all $u \in H^{\frac{n}{p}}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ and all measurable sets E satisfying $|E| < \delta$, where C and δ are independent of E, and $q' := \frac{q}{q-1}$.

Theorem B [21] was originally obtained by Brézis-Wainer [3] when $p = q$ which corresponds to the critical Sobolev space $H^{\frac{n}{p}}_p(\mathbb{R}^n)$. Ozawa [16] gave an alternative proof of Theorem B [21] when $p = q$. We also refer to Sawano-Wadade [19], where the authors proved similar embeddings on the critical Sobolev-Morrey space.

Our first goal in this paper is to extend both of Theorem A and Theorem B for functions in $H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$. Concerning an extension of Theorem A, we can show that the inequality (1.1) with $\|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q}}$ replaced by $\|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}}$ holds if and only if $p > r$ or $p = r \ge q$ without any modification for the proof of Theorem A in [21]. Therefore, we omit its proof in this paper. However, the vanishing order as $|E| \to 0$ depends on the exponents $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ when we consider an extension of Theorem B to the statement in terms of $H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$. In order to state main theorems, we introduce multiple-logarithmic functions by $\ell_l(t) := \underbrace{\ell_1 \circ \cdots \circ \ell_1}_{l}(t)$ for $t \ge c_l$ with $\ell_1(t) := \log t$, and the constants $c_l > 0$ are determined by $\ell_l(c_l) = 1$. Our first result now reads:

Theorem 1.1. *Let $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $1 < q \le \infty$, $1 \le r < \infty$ and let $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ be non-negative numbers with $m \in \mathbb{N}$. Assume one of the conditions (A)-(C):*

$$\begin{cases} \text{(A) There exists } 0 \le j \le m-1 \text{ such that } \lambda_1 = \cdots = \lambda_j = \frac{1}{q'} \text{ and } \lambda_{j+1} > \frac{1}{q'}\,; \\ \text{(B) There exists } 0 \le j \le m-1 \text{ such that } \lambda_1 = \cdots = \lambda_j = \frac{1}{q'} \text{ and } \lambda_{j+1} < \frac{1}{q'}\,; \\ \text{(C) } \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = \frac{1}{q'}, \end{cases}$$

where the conditions (A) and (B) are understood as $\lambda_1 > \frac{1}{q'}$ and $\lambda_1 < \frac{1}{q'}$ when $j = 0$, respectively. Then there exist positive constants C and δ such that the inequalities

$$\left(\int_E |u(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \le \begin{cases} C\,|E|^{\frac{1}{r}} \|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} & \text{if (A) is fulfilled;} \\ C\,|E|^{\frac{1}{r}}\, \ell_{j+1}(\frac{1}{|E|})^{\frac{1}{q'}-\lambda_{j+1}} \prod_{l=j+2}^{m} \ell_l(\frac{1}{|E|})^{-\lambda_l} \|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} & \text{if (B) is fulfilled;} \\ C\,|E|^{\frac{1}{r}}\, \ell_{m+1}(\frac{1}{|E|})^{\frac{1}{q'}} \|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} & \text{if (C) is fulfilled,} \end{cases} \tag{1.2}$$

hold for all $u \in H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ *and for all measurable sets* E *satisfying* $|E| < \delta$*, where the constants* C *and* δ *are independent of* E*, and in the middle inequality in* (1.2)*, the right-hand side of* (1.2) *is understood as* $C\,|E|^{\frac{1}{r}}\,\ell_m(\frac{1}{|E|})^{\frac{1}{q'}-\lambda_m}\|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}}$ *when* $j = m-1$.

As a special case of $m = 1$ in Theorem 1.1, we obtain the following corollary:

Corollary 1.2. *Let* $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $1 < q \le \infty$, $1 \le r < \infty$ *and* $\lambda \ge 0$. *Then there exist positive constants* C *and* δ *such that the inequalities*

$$\left(\int_E |u(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \le \begin{cases} C\,|E|^{\frac{1}{r}}\,\|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda}} & \text{if } \lambda > \frac{1}{q'}\,; \\ C\,|E|^{\frac{1}{r}}\,\log(\frac{1}{|E|})^{\frac{1}{q'}-\lambda}\,\|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda}} & \text{if } \lambda < \frac{1}{q'}\,; \\ C\,|E|^{\frac{1}{r}}\,\log\left(\log(\frac{1}{|E|})\right)^{\frac{1}{q'}}\,\|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda}} & \text{if } \lambda = \frac{1}{q'}, \end{cases} \tag{1.3}$$

hold for all $u \in H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ *and for all measurable sets* E *satisfying* $|E| < \delta$*, where the constants* C *and* δ *are independent of* E.

Remark that Theorem B is corresponding to the middle inequality in (1.3) with $\lambda = 0$ in Corollary 1.2. Furthermore, Corollary 1.2 tells us that the exponent $\lambda = \frac{1}{q'}$ is a threshold so that the logarithmic vanishing order as $|E| \to 0$ appears for the local integrals of functions in $H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Theorem 1.1 is regarded as the embedding on $H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ into the generalized Morrey space. The generalized Morrey spaces have been studied extensively, see for instance Kurata-Nishigaki-Sugano [8], Nakai [11, 12] and Sawano-Sugano-Tanaka [17, 18]. Let Φ be a Young function, that is, $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ is a continuous function satisfying $\Phi(0) = 0$ and $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$. Then for a locally integrable function u on $\mathbb{R}^n$, the norm of the generalized Morrey space $\mathcal{M}_{\Phi,r}(\mathbb{R}^n)$ is given by

$$\|u\|_{\mathcal{M}_{\Phi,r}} := \sup_{Q\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \Phi(|Q|)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |u(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}},$$

where $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ denotes the set of dyadic cubes in $\mathbb{R}^n$. The space $\mathcal{M}_{\Phi,r}(\mathbb{R}^n)$ extends the Morrey space and then the Lebesgue space. As an immediate consequnce of Theorem 1.1 and Theorem A with $\|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q}}$ replaced by $\|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}}$, we obtain the following embeddings:

Corollary 1.3. *Let* $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $1 < q \le \infty$, $1 \le r < \infty$ *and let* $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ *be non-negative numbers with* $m \in \mathbb{N}$. *Define Young functions* Φ *by*

$$\Phi(t) := \begin{cases} (1+t)^{\frac{1}{p}} & \text{if (A) is fulfilled;} \\ (1+t)^{\frac{1}{p}}\,\ell_{j+1}(c_{j+1}+\frac{1}{t})^{\lambda_{j+1}-\frac{1}{q'}} \displaystyle\prod_{l=j+2}^{m} \ell_l(c_l+\frac{1}{t})^{\lambda_l} & \text{if (B) is fulfilled;} \\ (1+t)^{\frac{1}{p}}\,\ell_{m+1}(c_{m+1}+\frac{1}{t})^{-\frac{1}{q'}} & \text{if (C) is fulfilled.} \end{cases} \tag{1.4}$$

Then the continuous embedding $H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}_{\Phi,r}(\mathbb{R}^n)$ *holds if and only if* $p > r$ *or* $p = r \geq q$.

As another application of Theorem 1.1, we investigate the Lipschitz type continuity for functions in $H^{\frac{n}{p}+1}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$. It is well-known that $H^{\frac{n}{p}+\alpha}_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ for $0 < \alpha < 1$ but $H^{\frac{n}{p}+1}_p(\mathbb{R}^n) \not\hookrightarrow Lip\,(\mathbb{R}^n)$, where $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ and $Lip\,(\mathbb{R}^n)$ denote the Hölder space and the Lipschitz space, respectively. Instead, the functions in $H^{\frac{n}{p}+1}_p(\mathbb{R}^n)$ admit the almost Lipschitz continuity, see Brézis-Wainger [3]. Based on this fact, we next aim to clarify how the exponents $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ influence the Lipschitz type continuity for functions in $H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$. Our second theorem reads as follows:

Theorem 1.4. *Let* $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $1 < q \leq \infty$, *and let* $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ *be non-negative numbers with* $m \in \mathbb{N}$. *Assume one of the conditions (A)-(C) in Theorem 1.1. Then there exist positive constants* C *and* δ *such that the inequalities*

$$|u(x) - u(y)| \leq \begin{cases} C\,|x-y|\,\|u\|_{H^{\frac{n}{p}+1}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} & \text{if (A) is fulfilled;} \\ C\,|x-y|\,\ell_{j+1}(\frac{1}{|x-y|})^{\frac{1}{q'}-\lambda_{j+1}} \prod_{l=j+2}^{m} \ell_l(\frac{1}{|x-y|})^{-\lambda_l}\,\|u\|_{H^{\frac{n}{p}+1}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} & \text{if (B) is fulfilled;} \\ C\,|x-y|\,\ell_{m+1}(\frac{1}{|x-y|})^{\frac{1}{q'}}\,\|u\|_{H^{\frac{n}{p}+1}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} & \text{if (C) is fulfilled,} \end{cases}$$

hold for all $u \in H^{\frac{n}{p}+1}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ *and for all points* x *and* y *satisfying* $|x-y| < \delta$, *where the constants* C *and* δ *are independent of* x *and* y.

The case $m = 1$ in Theorem 1.4 yields the following corollary:

Corollary 1.5. *Let* $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $1 < q \leq \infty$ *and* $\lambda \geq 0$. *Then there exist positive constants* C *and* δ *such that the inequalities*

$$|u(x) - u(y)| \leq \begin{cases} C\,|x-y|\,\|u\|_{H^{\frac{n}{p}+1}_{p,q,\lambda}} & \text{if } \lambda > \frac{1}{q'}\,; \\ C\,|x-y|\,\log\left(\frac{1}{|x-y|}\right)^{\frac{1}{q'}-\lambda}\,\|u\|_{H^{\frac{n}{p}+1}_{p,q,\lambda}} & \text{if } \lambda < \frac{1}{q'}\,; \\ C\,|x-y|\,\log\left(\log(\frac{1}{|x-y|})\right)^{\frac{1}{q'}}\,\|u\|_{H^{\frac{n}{p}+1}_{p,q,\lambda}} & \text{if } \lambda = \frac{1}{q'}, \end{cases} \tag{1.5}$$

hold for all $u \in H^{\frac{n}{p}+1}_{p,q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ *and for all points* x *and* y *satisfying* $|x-y| < \delta$, *where the constants* C *and* δ *are independent of* x *and* y.

In [3], the middle inequality in (1.5) with $p = q$ and $\lambda = 0$ was proved. Moreover, Corollary 1.5 tells us that the exponent $\lambda = \frac{1}{q'}$ is a threshold so that $H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ can be embedded into $Lip\,(\mathbb{R}^n)$.

Finally, we consider the optimality for the inequalities (1.2) in Theorem 1.1 with respect to the vanishing orders as $|E| \to 0$, which also implies the optimality for the Young functions (1.4) in Corollary 1.3. As a result, we can observe that the vanishing orders as $|E| \to 0$ are optimal in terms of the multiple logarithmic functions. Our final theorem is stated as follows:

Theorem 1.6. *Let $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $1 < q \le \infty$, $1 < r < \infty$, and let $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ be non-negative numbers with $m \in \mathbb{N}$. Take $k \ge m$ with $k \in \mathbb{N}$ and $\varepsilon > 0$. Assume one of the conditions (A)-(C) in Theorem 1.1.*

(i) If $q < \infty$, then there exist $u \in H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ and positive constants C and δ such that the inequalities

$$\left(\int_E |u(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \ge \begin{cases} C\,|E|^{\frac{1}{r}} & \text{if (A) is fulfilled;} \\ C\,|E|^{\frac{1}{r}}\,\ell_{j+1}(\frac{1}{|E|}) \displaystyle\prod_{l=j+1}^{m} \ell_l(\frac{1}{|E|})^{-\lambda_l} \prod_{l=j+1}^{k-1} \ell_l(\frac{1}{|E|})^{-\frac{1}{q}}\,\ell_k(\frac{1}{|E|})^{-\frac{1}{q}-\varepsilon} & \text{if (B) is fulfilled;} \\ C\,|E|^{\frac{1}{r}}\,\ell_{m+1}(\frac{1}{|E|}) \displaystyle\prod_{l=m+1}^{k} \ell_l(\frac{1}{|E|})^{-\frac{1}{q}}\,\ell_{k+1}(\frac{1}{|E|})^{-\frac{1}{q}-\varepsilon} & \text{if (C) is fulfilled,} \end{cases} \tag{1.6}$$

hold for all measurable sets E satisfying $|E| < \delta$, where u, C and δ are independent of E.
(ii) If $q = \infty$, then there exist $u \in H^{\frac{n}{p}}_{p,\infty,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ and positive constants C and δ such that the inequalities

$$\left(\int_E |u(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \ge \begin{cases} C\,|E|^{\frac{1}{r}} & \text{if (A) is fulfilled;} \\ C\,|E|^{\frac{1}{r}}\,\ell_{j+1}(\frac{1}{|E|}) \displaystyle\prod_{l=j+1}^{m} \ell_l(\frac{1}{|E|})^{-\lambda_l} & \text{if (B) is fulfilled;} \\ C\,|E|^{\frac{1}{r}}\,\ell_{m+1}(\frac{1}{|E|}) & \text{if (C) is fulfilled,} \end{cases}$$

hold for all measurable sets E satisfying $|E| < \delta$, where u, C and δ are independent of E.

Theorem 1.6 implies that the vanishing orders as $|E| \to 0$ for the inequalities (1.2) in Theorem 1.1 are best-possible when $q = \infty$ and they are also sharp even when $q < \infty$ in terms of the multiple logarithmic functions. It is worth noting that the last two inequalities in (1.6) become sharper as $k \in \mathbb{N}$ is getting larger.

The inequalities characterizing critical function spaces in terms of Sobolev's embedding such as Sobolev-Lorentz spaces, Sobolev-Morrey spaces, Besov spaces, Triebel-Lizorkin spaces and functions of bounded mean oscillation called BMO have been extensively studied, see for instance Brézis-Wainger [3], Chen-Zhu [4], Edmunds-Triebel [5], Machihara-Ozawa-Wadade [9], Nagayasu-Wadade [10], Ogawa [14], Ogawa-Ozawa [15], Ozawa [16], Sawano-Wadade [19], Wadade [22, 23, 24] and so on. In those papers, the authors established critical embeddings by proving Trudinger-Moser type inequalities, Gagliardo-Nirenberg type inequalities, Brézis-Gallouët-Wainger type inequalities and the logarithmic Hardy inequalities. Our main subject in this paper is concerned with the optimal embedding from the critical Sobolev-Lorentz-Zygmund space into the generalized Morrey space, which is regarded as one of the characterization for the critical Sobolev-Lorentz-Zygmund space. However, as far as we know, this kind of embeddings discussed in this paper is little known compared to the embeddings related to the corresponding Trudinger-Moser type inequalities and so on. We will discuss the relations between those critical embeddings in the forthcoming paper.

This paper is organized as follows. Section 2 is devoted to give the definition of the Sobolev-Lorentz-Zygmund space and to collect the elementary properties concerning the rearrangement of funtions. We shall prove main theorems in Section 3.

2 Preliminaries

In this section, we first recall the definition of the Lorentz-Zygmund space. To this end, we define the rearrangement of measurable functions. For a measurable function f on $\mathbb{R}^n$ with $n \in \mathbb{N}$, let $f_* : [0,\infty) \to [0,\infty]$ be the distribution function of f defined by

$$f_*(\lambda) := |\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, |f(x)| > \lambda\}| \quad \text{for } \lambda \geq 0,$$

where $|E|$ denotes the Lebesgue measure of a measurable set $E \subset \mathbb{R}^n$, and then the rearrangement $f^* : [0,\infty) \to [0,\infty]$ of f is defined by

$$f^*(t) := \inf\{\lambda > 0 \,;\, f_*(\lambda) \leq t\} \quad \text{for } t \geq 0.$$

Moreover, $f^{**} : (0,\infty) \to [0,\infty]$ denotes the average function of f^* defined by

$$f^{**}(t) := \frac{1}{t}\int_0^t f^*(\tau)d\tau \quad \text{for } t > 0.$$

In what follows, we assume $f^*(t) < +\infty$ for all $t > 0$. Then f^* is right-continuous and non-increasing on $(0,\infty)$, and hence, f^{**} is continuous and non-increasing on $(0,\infty)$ with $f^*(t) \leq f^{**}(t)$ for all $t > 0$. We now introduce the Lorentz-Zygmund space by using the rearrangement. Let $1 \leq p, q \leq \infty$, and let $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ be non-negative numbers with $m \in \mathbb{N}$. Then the Lorentz-Zygmund space $L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ is a function space equipped with the norm given by

$$\|f\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} := \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \prod_{l=1}^m \ell_l(c_l + \frac{1}{t})^{\lambda_l} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$

where $\ell_l(t) := \underbrace{\ell_1 \circ \cdots \circ \ell_1}_{l}(t)$ for $t \geq c_l$ with $\ell_1(t) := \log t$, and the constants $c_l > 0$ are determined by $\ell_l(c_l) = 1$. When $q = \infty$, the norm $\|f\|_{L_{p,\infty,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}}$ can be defined by the usual modification. Remark that the Lorentz-Zygmund space generalizes the Lorentz space $L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ since $\|f\|_{L_{p,q,0,\cdots,0}} = \|f\|_{L_{p,q}}$.

We can take f^* replaced by f^{**} in $\|f\|_{L_{p,q}}$ as another equivalent norm on $L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ if $p \neq 1$. Indeed, the following Hardy inequality guarantees its equivalence,

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{t^{\frac{1}{p}}}{t}\int_0^t f(s)ds\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq p' \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.1}$$

for non-negative measurable functions f, where $p' := \frac{p}{p-1}$. For the proof of (2.1), see O'Neil [13, Lemma 2.3] and references therein. Furthermore, since f^* and f^{**} are non-increasing functions in $(0, \infty)$, we get the following decay estimates. For any $t > 0$, we have

$$f^*(t) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} t^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,q}}, \tag{2.2}$$

and then if $p > 1$, together with (2.1), we obtain for any $t > 0$,

$$f^{**}(t) \leq p' \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} t^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,q}}.$$

Next, we recall the pointwise rearrangement inequality for the convolution of functions proved by O'Neil [13, Theorem 1.7]. In fact, for measurable functions f and g on $\mathbb{R}^n$, we have

$$(f * g)^{**}(t) \leq t\, f^{**}(t) g^{**}(t) + \int_t^\infty f^*(s) g^*(s) ds \quad \text{for } t > 0. \tag{2.3}$$

Moreover, we make use of the reverse O'Neil inequality established in Kozono-Sato-Wadade [7, Lemma 2.2]. In fact, there exists a positive constant C such that the inequality

$$(f * g)^{**}(t) \geq C \left(t\, f^{**}(t) g^{**}(t) + \int_t^\infty f^*(s) g^*(s) ds\right) \tag{2.4}$$

holds for all $t > 0$ and for all measurable functions f and g on $\mathbb{R}^n$ which are both non-negative, radially symmetric and non-increasing in the radial direction $|x|$.

In this paper, we frequently use the Bessel potential $G_s * f := (1 - \Delta)^{-\frac{s}{2}} f$ and the Riesz potential $I_s * f := (-\Delta)^{-\frac{s}{2}} f$ for $0 < s < n$. More precisely, the kernel functions I_s and G_s are defined respectively by

$$\begin{cases} I_s(x) := \dfrac{\Gamma\left(\frac{n-s}{2}\right)}{2^s \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} |x|^{-(n-s)}; \\ G_s(x) := \dfrac{1}{(4\pi)^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\pi\frac{|x|^2}{t} - \frac{t}{4\pi}} t^{-\frac{n-s}{2}} \frac{dt}{t} \end{cases}$$

for $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, where Γ denotes the Gamma function. Based on the Lorentz-Zygmund space, we define the Sobolev-Lorentz-Zygmund space $H^s_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ by $H^s_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n) := (I - \Delta)^{-\frac{s}{2}} L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n) = G_s * L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ equipped with the norm $\|u\|_{H^s_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} := \|(I - \Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}}$. The space $H^s_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ extends the Sobolev-Lorentz space $H^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ and then the Sobolev space $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ since we have $L_{p,q,0,\cdots,0}(\mathbb{R}^n) = L_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ and $L_{p,p}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$. We now collect the elementary properties of I_s and G_s in the following lemma.

Lemma 2.1. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $0 < s < n$.*

(i) I_s and G_s are non-negative, radially symmetric and non-increasing in the radial direction, so that $I_s^*(t) = I_s(x)$ and $G_s^*(t) = G_s(x)$ if $|x| = \left(\frac{t}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} > 0$, where $\omega_n := \frac{2\pi^{\frac{\pi}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$ denotes the volume of the unit ball in $\mathbb{R}^n$.

(ii) $G_s(x) \le I_s(x)$ for all $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, which implies $G_s^*(t) \le I_s^*(t)$, $G_s^{**}(t) \le I_s^{**}(t)$ for all $t > 0$, and $\lim\limits_{|x|\downarrow 0} \dfrac{G_s(x)}{I_s(x)} = \lim\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{G_s^*(t)}{I_s^*(t)} = 1$.

(iii) $\|G_s\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = 1$ and there exists a positive constant C such that the following inequalities hold,

$$G_s(x) \le \begin{cases} C\,|x|^{-(n-s)} & \text{for } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,; \\ C\,e^{-|x|} & \text{for } x \in \mathbb{R}^n \quad \text{with } |x| \ge 1. \end{cases}$$

Since the facts in Lemma 2.1 are well-known, we omit the detailed proof here, see Stein [20] for instance. Furthermore, we refer to Almgren-Lieb [1], Bennett-Sharpley [2] and Kokilashvili-Krbec [6] for further information about the rearrangement theory.

3 Proof of main theorems

In this section, we shall prove main theorems.

Proof of Theorem 1.1. First, letting $(1-\Delta)^{\frac{n}{2p}} u = f$, we have $u = G_{\frac{n}{p}} * f$, where $G_{\frac{n}{p}}$ denotes the Bessel kernel. Thus the inequality (1.2) can be written equivalently as

$$\left(\int_E |G_{\frac{n}{p}} * f(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}$$
$$\le \begin{cases} C\,|E|^{\frac{1}{r}}\,\|f\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} & \text{if (A) is fulfilled}\,; \\ C\,|E|^{\frac{1}{r}}\,\ell_{j+1}(\frac{1}{|E|})^{\frac{1}{q'}-\lambda_{j+1}} \displaystyle\prod_{l=j+2}^{m} \ell_l(\frac{1}{|E|})^{-\lambda_l}\,\|f\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} & \text{if (B) is fulfilled}\,; \\ C\,|E|^{\frac{1}{r}}\,\ell_{m+1}(\frac{1}{|E|})^{\frac{1}{q'}}\,\|f\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} & \text{if (C) is fulfilled,} \end{cases}$$

for all $f \in L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$ and all measurable sets E having small measure.

By O'Neil's inequality (2.3), we obtain

$$\left(\int_E |G_{\frac{n}{p}} * f(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_0^{|E|} (G_{\frac{n}{p}} * f)^*(t)^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\int_0^{|E|} \left(t\,G_{\frac{n}{p}}^{**}(t) f^{**}(t)\right)^r dt\right)^{\frac{1}{r}}$$
$$+ \left(\int_0^{|E|} \left(\int_t^\infty G_{\frac{n}{p}}^*(s) f^*(s) ds\right)^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \le \left(\int_0^{|E|} \left(t\,G_{\frac{n}{p}}^{**}(t) f^{**}(t)\right)^r dt\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+\left(\int_0^{|E|}\left(\int_t^{|E|} G^*_{\frac{n}{p}}(s)f^*(s)ds\right)^r dt\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\int_0^{|E|}\left(\int_{|E|}^{\infty} G^*_{\frac{n}{p}}(s)f^*(s)ds\right)^r dt\right)^{\frac{1}{r}} =: I_1+I_2+I_3.$$

We first estimate I_1. For small $t>0$, by the decay estimate (2.2) and Lemma 2.1, we see

$$\begin{aligned} t\, G^{**}_{\frac{n}{p}}(t)f^{**}(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t G^*_{\frac{n}{p}}(s)ds\int_0^t f^*(s)ds \le \frac{C}{t}\int_0^t s^{-\frac{1}{p'}}ds\int_0^t s^{-\frac{1}{p}}ds\,\|f\|_{L_{p,q}} \\ &= C\,\|f\|_{L_{p,q}} \le C\,\|f\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}}, \end{aligned}$$

and then $I_1 \le C\,|E|^{\frac{1}{r}}\|f\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}}$.

Next, we proceed to the estimate of I_2. By using (2.2) and Lemma 2.1, we have

$$\begin{aligned} I_2 &\le C\left(\int_0^{|E|}\left(\int_t^{|E|} s^{-\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}}ds\right)^r dt\right)^{\frac{1}{r}}\|f\|_{L_{p,q}} \le C\left(\int_0^{|E|}\left(\log\frac{|E|}{t}\right)^r dt\right)^{\frac{1}{r}}\|f\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} \\ &= C\left(\int_0^1\left(\log\frac{1}{s}\right)^r ds\right)^{\frac{1}{r}}|E|^{\frac{1}{r}}\|f\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} = C\,|E|^{\frac{1}{r}}\|f\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}}. \end{aligned}$$

Finally, we estimate I_3. For small $\delta>0$, we have

$$I_3 = |E|^{\frac{1}{r}}\int_{|E|}^{\infty} G^*_{\frac{n}{p}}(s)f^*(s)ds = |E|^{\frac{1}{r}}\int_{|E|}^{\delta} G^*_{\frac{n}{p}}(s)f^*(s)ds + |E|^{\frac{1}{r}}\int_{\delta}^{\infty} G^*_{\frac{n}{p}}(s)f^*(s)ds =: I_{31}+I_{32}.$$

We can estimate I_{32} as follows. By using (2.2) and Lemma 2.1 again, we see for any $\alpha > \frac{1}{p'}$,

$$I_{32} \le C\,|E|^{\frac{1}{r}}\int_{\delta}^{\infty} s^{-\alpha-\frac{1}{p}}ds\,\|f\|_{L_{p,q}} \le C\,|E|^{\frac{1}{r}}\|f\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}}.$$

Furthermore, by Lemma 2.1 and Hölder's inequality, I_{31} is estimated as

$$\begin{aligned} I_{31} &\le C\,|E|^{\frac{1}{r}}\int_{|E|}^{\delta} s^{-\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}}\prod_{l=1}^m \ell_l(\frac{1}{s})^{-\lambda_l} s^{\frac{1}{p}}\prod_{l=1}^m \ell_l(\frac{1}{s})^{\lambda_l} f^*(s)ds \\ &\le C\,|E|^{\frac{1}{r}}\left(\int_{|E|}^{\delta}\prod_{l=1}^m \ell_l(\frac{1}{s})^{-\lambda_l q'}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q'}}\|f\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

By applying L'Hopital's rule, we can investigate the growth orders as $|E|\to 0$ of the integral in the right-hand side of (3.1) under the conditions (A)-(C). As results, we obtain

$$\left(\int_{|E|}^{\delta}\prod_{l=1}^m \ell_l(\frac{1}{s})^{-\lambda_l q'}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q'}} \le \begin{cases} C \quad \text{if (A) is fulfilled}\,; \\ C\,\ell_{j+1}(\frac{1}{|E|})^{\frac{1}{q'}-\lambda_{j+1}}\displaystyle\prod_{l=j+2}^m \ell_l(\frac{1}{|E|})^{-\lambda_l} \quad \text{if (B) is fulfilled}\,; \\ C\,\ell_{m+1}(\frac{1}{|E|})^{\frac{1}{q'}} \quad \text{if (C) is fulfilled,} \end{cases}$$

and hence,

$$I_{31} \leq \begin{cases} C\,|E|^{\frac{1}{r}}\,\|f\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} & \text{if (A) is fulfilled}\,; \\ C\,|E|^{\frac{1}{r}}\,\ell_{j+1}(\frac{1}{|E|})^{\frac{1}{q'}-\lambda_{j+1}}\displaystyle\prod_{l=j+2}^{m}\ell_l(\frac{1}{|E|})^{-\lambda_l}\,\|f\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} & \text{if (B) is fulfilled}\,; \\ C\,|E|^{\frac{1}{r}}\,\ell_{m+1}(\frac{1}{|E|})^{\frac{1}{q'}}\,\|f\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} & \text{if (C) is fulfilled.} \end{cases}$$

Thus summing up all estimates above, we obtain desired conclusions. □

Next, we give a proof of Corollary 1.3. It is an immediate consequence of Theorem 1.1 and Theorem A with $\|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q}}$ replaced by $\|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}}$.

Proof of Corollary 1.3. First, assume $p > r$ or $p = r \geq q$. Then by applying Theorem 1.1 and Theorem A with $\|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q}}$ replaced by $\|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}}$, we see for any measurable set E,

$$\begin{aligned}&\left(\int_E |u(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \begin{cases} C\,|E|^{\frac{1}{r}}(1+|E|)^{-\frac{1}{p}}\,\|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} & \text{if (A) is fulfilled}\,; \\ C\,|E|^{\frac{1}{r}}(1+|E|)^{-\frac{1}{p}}\,\ell_{j+1}(c_{j+1}+\frac{1}{|E|})^{\frac{1}{q'}-\lambda_{j+1}}\displaystyle\prod_{l=j+2}^{m}\ell_l(c_l+\frac{1}{|E|})^{-\lambda_l}\,\|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} & \text{if (B) is fulfilled}\,; \\ C\,|E|^{\frac{1}{r}}(1+|E|)^{-\frac{1}{p}}\,\ell_{m+1}(c_{m+1}+\frac{1}{|E|})^{\frac{1}{q'}}\,\|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} & \text{if (C) is fulfilled,} \end{cases}\end{aligned} \tag{3.2}$$

which imply the continuous embeddings $H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}_{\Phi,r}(\mathbb{R}^n)$ with Young functions (1.4). Conversely, since the conditions $p > r$ or $p = r \geq q$ are necessary for Theorem A with $\|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q}}$ replaced by $\|u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}}$, they are necessary also for the inequalities (3.2). Thus we finish the proof of Corollary 1.3. □

We proceed to the proof of Theorem 1.4, which will be proved by utilizing Theorem 1.1.

Proof of Theorem 1.4. We consider only the case of the condition (C) since other cases can be treated in a quite same way. Let x and y be distinct points in $\mathbb{R}^n$, and let Q be a closed cube in $\mathbb{R}^n$ with its side $\rho = |x-y|$ containing x and y. For any $z \in Q$, we have

$$u(z) - u(x) = \int_0^1 \nabla u\,(tz + (1-t)x)\cdot(z-x)\,dt,$$

and then

$$|u(z) - u(x)| \leq \sqrt{n}\,\rho\int_0^1 |\nabla u\,(tz+(1-t)x)|\,dt. \tag{3.3}$$

Defining $u_Q := \frac{1}{|Q|}\int_Q u(z)dz$ and integrating (3.3) with respect to z over Q, we obtain

$$|u_Q - u(x)| \le \frac{1}{|Q|}\int_Q |u(z)-u(x)|dz \le \sqrt{n}\,\rho^{1-n}\int_0^1\int_Q |\nabla u\,(tz+(1-t)x)|\,dzdt$$
$$= \sqrt{n}\,\rho^{1-n}\int_0^1 t^{-n}\int_{tQ+(1-t)x}|\nabla u(\zeta)|\,d\zeta dt. \tag{3.4}$$

Here, applying Theorem 1.1 with $r=1$, we have for any small $|Q|$,

$$\int_{tQ+(1-t)x}|\nabla u(\zeta)|\,d\zeta \le C\,|tQ|\,\ell_{m+1}(\frac{1}{|tQ|})^{\frac{1}{q'}}\|\nabla u\|_{H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}}$$
$$\le C\,t^n\rho^n\ell_{m+1}(\frac{1}{t^n\rho^n})^{\frac{1}{q'}}\|u\|_{H^{\frac{n}{p}+1}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}}. \tag{3.5}$$

Thus combining (3.4) with (3.5) yields for any small $|Q|$,

$$|u_Q-u(x)| \le C\,\rho\int_0^1 \ell_{m+1}(\frac{1}{t^n\rho^n})^{\frac{1}{q'}}dt\,\|u\|_{H^{\frac{n}{p}+1}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} \le C\,\rho\,\ell_{m+1}(\frac{1}{\rho})^{\frac{1}{q'}}\|u\|_{H^{\frac{n}{p}+1}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}}. \tag{3.6}$$

Interchanging roles of x and y, we obtain (3.6) with x replaced by y, and then we have a desired conclusion. □

In the end, we shall show Theorem 1.6. The reverse O'Neil inequality (2.4) is an essential tool to estimate the local integrals from below.

Proof of Theorem 1.6. First, we consider the case $q<\infty$. Assume the condition (A). In this case, we define $f_0(x) := |x|^{\alpha n}\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n\,;\,|x|<\delta\}}(x)$, where α is any number satisfying $-\frac{1}{p}<\alpha<0$, and $\delta>0$ will be chosen small enough later, and then we have

$$f_0^*(t) = \tilde{f}_0\left(\left(\frac{t}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \simeq g_0(t) := t^\alpha\chi_{(0,\delta)}(t)$$

for all $t>0$ with some small $\delta>0$, where $\tilde{f}_0(|x|) = f_0(x)$, and $\omega_n := \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$ is the volume of the unit ball in $\mathbb{R}^n$. That is, there exist positive constants C and $\tilde{C}$ such that

$$\tilde{C}\,g_0(t) \le f_0^*(t) \le C\,g_0(t) \tag{3.7}$$

hold for all $t>0$ with some small $\delta>0$. Then by the definition of the Lorentz-Zygmund norm and the latter estimate in (3.7) and, $\frac{1}{p}+\alpha>0$, we obtain

$$\|f_0\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} \le C\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}\prod_{l=1}^m \ell_l(c_l+\frac{1}{t})^{\lambda_l}g_0(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\le C\left(\int_0^\delta\left(t^{\frac{1}{p}+\alpha}\prod_{l=1}^m \ell_l(\frac{1}{t})^{\lambda_l}\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_0^\delta t^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}+\alpha)-1}dt\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

which implies $f_0 \in L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$, or equivalently, $u_0 := G_{\frac{n}{p}} * f_0 \in H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$. On the other hand, for any measurable set E satisfying $|E| < \frac{\delta}{2}$, by the former estimate in (3.7), the Hardy inequality (2.1), the reverse O'Neil inequality (2.4) and Lemma 2.1, we see

$$\begin{aligned}
&\int_E |G_{\frac{n}{p}} * f_0(x)|^r dx = \int_0^{|E|} (G_{\frac{n}{p}} * f_0)^*(t)^r dt \geq C \int_0^{|E|} (G_{\frac{n}{p}} * f_0)^{**}(t)^r dt \\
&\geq C \int_0^{|E|} \left(t\, G^{**}_{\frac{n}{p}}(t) f_0^{**}(t) + \int_t^\infty G^*_{\frac{n}{p}}(s) f_0^*(s) ds \right)^r dt \\
&\geq C \int_0^{|E|} \left(\int_t^\delta G^*_{\frac{n}{p}}(s) f_0^*(s) ds \right)^r dt \geq C \int_0^{|E|} \left(\int_t^\delta G^*_{\frac{n}{p}}(s) g_0(s) ds \right)^r dt \\
&\geq C \int_0^{|E|} \left(\int_t^\delta s^{-\frac{1}{p'}} g_0(s) ds \right)^r dt \geq C \int_0^{|E|} \left(\int_{\frac{\delta}{2}}^\delta s^{\alpha - \frac{1}{p'}} ds \right)^r dt = C\,|E|, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

which is a desired inequality.

Next, assume the condition (B). In this case, we define functions $f_{\varepsilon,k}(x)$ by

$$f_{\varepsilon,k}(x) := \prod_{l=1}^{j} \ell_l(\frac{1}{|x|})^{-1} \prod_{l=j+1}^{m} \ell_l(\frac{1}{|x|})^{-\lambda_l} \prod_{l=j+1}^{k-1} \ell_l(\frac{1}{|x|})^{-\frac{1}{q}} \ell_k(\frac{1}{|x|})^{-\frac{1}{q}-\varepsilon} |x|^{-\frac{n}{p}} \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n\,;\,|x|<\delta\}}(x),$$

where $\delta > 0$ will be taken small enough later. It is easy to see that $f_{\varepsilon,k}$ are non-negative, radially symmetric and non-increasing with respect to the radial direction $|x|$. Thus we have

$$\begin{aligned}
&f^*_{\varepsilon,k}(t) = \tilde{f}_{\varepsilon,k}\left(\left(\frac{t}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \right) \\
&\simeq g_{\varepsilon,k}(t) := \prod_{l=1}^{j} \ell_l(\frac{1}{t})^{-1} \prod_{l=j+1}^{m} \ell_l(\frac{1}{t})^{-\lambda_l} \prod_{l=j+1}^{k-1} \ell_l(\frac{1}{t})^{-\frac{1}{q}} \ell_k(\frac{1}{t})^{-\frac{1}{q}-\varepsilon} t^{-\frac{1}{p}} \chi_{(0,\delta)}(t) \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

for all $t > 0$ with some small $\delta > 0$. Then by (3.9), we have

$$\begin{aligned}
\|f_{\varepsilon,k}\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} &\leq C \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \prod_{l=1}^{m} \ell_l(c_l + \frac{1}{t})^{\lambda_l} g_{\varepsilon,k}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C \left(\int_0^\delta \prod_{l=1}^{k-1} \ell_l(\frac{1}{t})^{-1} \ell_k(\frac{1}{t})^{-1-q\varepsilon} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty,
\end{aligned}$$

which implies $f_{\varepsilon,k} \in L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$, or equivalently, $u_{\varepsilon,k} := G_{\frac{n}{p}} * f_{\varepsilon,k} \in H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$. By using L'Hopital's rule, we see that there exists a small positive constant $\tilde{\delta} < \delta$ such that the inequalities

$$\int_t^\delta s^{-\frac{1}{p'}} g_{\varepsilon,k}(s) ds \simeq \ell_{j+1}(\frac{1}{t}) \prod_{l=j+1}^{m} \ell_l(\frac{1}{t})^{-\lambda_l} \prod_{l=j+1}^{k-1} \ell_l(\frac{1}{t})^{-\frac{1}{q}} \ell_k(\frac{1}{t})^{-\frac{1}{q}-\varepsilon} \qquad (3.10)$$

hold for all $0 < t < \tilde{\delta}$. Thus by carrying out the same estimates in (3.8) and using (3.9) and (3.10), for any measurable set E with $|E| < \tilde{\delta}$, we have

$$\int_E |G_{\frac{n}{p}} * f_{\varepsilon,k}(x)|^r dx \geq C \int_0^{|E|} \left(\int_t^\delta s^{-\frac{1}{p'}} g_{\varepsilon,k}(s) ds \right)^r dt$$
$$\geq C \int_0^{|E|} \left(\ell_{j+1}(\frac{1}{t}) \prod_{l=j+1}^m \ell_l(\frac{1}{t})^{-\lambda_l} \prod_{l=j+1}^{k-1} \ell_l(\frac{1}{t})^{-\frac{1}{q}} \ell_k(\frac{1}{t})^{-\frac{1}{q}-\varepsilon} \right)^r dt$$
$$\geq C\,|E| \left(\ell_{j+1}(\frac{1}{|E|}) \prod_{l=j+1}^m \ell_l(\frac{1}{|E|})^{-\lambda_l} \prod_{l=j+1}^{k-1} \ell_l(\frac{1}{|E|})^{-\frac{1}{q}} \ell_k(\frac{1}{|E|})^{-\frac{1}{q}-\varepsilon} \right)^r,$$

where the last inequality can be derived by noticing that the function

$$\ell_{j+1}(\frac{1}{t}) \prod_{l=j+1}^m \ell_l(\frac{1}{t})^{-\lambda_l} \prod_{l=j+1}^{k-1} \ell_l(\frac{1}{t})^{-\frac{1}{q}} \ell_k(\frac{1}{t})^{-\frac{1}{q}-\varepsilon}$$

is decreasing for small $t > 0$.

Next, assume the condition (C). In this case, we define functions $f_{\varepsilon,k}(x)$ by

$$f_{\varepsilon,k}(x) := \prod_{l=1}^m \ell_l(\frac{1}{|x|})^{-1} \prod_{l=m+1}^k \ell_l(\frac{1}{|x|})^{-\frac{1}{q}} \ell_{k+1}(\frac{1}{|x|})^{-\frac{1}{q}-\varepsilon} |x|^{-\frac{n}{p}} \chi_{\{x\in\mathbb{R}^n\,;\,|x|<\delta\}}(x),$$

and we have

$$f^*_{\varepsilon,k}(t) = \tilde{f}_{\varepsilon,k}\left(\left(\frac{t}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} \right) \simeq g_{\varepsilon,k}(t) := \prod_{l=1}^m \ell_l(\frac{1}{t})^{-1} \prod_{l=m+1}^k \ell_l(\frac{1}{t})^{-\frac{1}{q}} \ell_{k+1}(\frac{1}{t})^{-\frac{1}{q}-\varepsilon} t^{-\frac{1}{p}} \chi_{(0,\delta)}(t) \tag{3.11}$$

for all $t > 0$ with some small $\delta > 0$. Then by (3.11), we obtain

$$\|f_{\varepsilon,k}\|_{L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}} \leq C \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \prod_{l=1}^m \ell_l(c_l + \frac{1}{t})^{\lambda_l} g_{\varepsilon,k}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq C \left(\int_0^\delta \prod_{l=1}^k \ell_l(\frac{1}{t})^{-1} \ell_{k+1}(\frac{1}{t})^{-1-q\varepsilon} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

which implies $f_{\varepsilon,k} \in L_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$, or equivalently, $u_{\varepsilon,k} := G_{\frac{n}{p}} * f_{\varepsilon,k} \in H^{\frac{n}{p}}_{p,q,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$. Here, we see that there exists a small positive constant $\tilde{\delta} < \delta$ such that the inequalities

$$\int_t^\delta s^{-\frac{1}{p'}} g_{\varepsilon,k}(s) ds \simeq \ell_{m+1}(\frac{1}{t}) \prod_{l=m+1}^k \ell_l(\frac{1}{t})^{-\frac{1}{q}} \ell_{k+1}(\frac{1}{t})^{-\frac{1}{q}-\varepsilon} \tag{3.12}$$

hold for all $0 < t < \tilde{\delta}$. Thus by carrying out the same estimates in (3.8) and using (3.11) and (3.12), for any measurable set E with $|E| < \tilde{\delta}$, we have

$$\int_E |G_{\frac{n}{p}} * f_{\varepsilon,k}(x)|^r dx \geq C \int_0^{|E|} \left(\int_t^\delta s^{-\frac{1}{p'}} g_{\varepsilon,k}(s) ds \right)^r dt$$
$$\geq C \int_0^{|E|} \left(\ell_{m+1}(\frac{1}{t}) \prod_{l=m+1}^{k} \ell_l(\frac{1}{t})^{-\frac{1}{q}} \ell_{k+1}(\frac{1}{t})^{-\frac{1}{q}-\varepsilon} \right)^r dt$$
$$\geq C\,|E| \left(\ell_{m+1}(\frac{1}{|E|}) \prod_{l=m+1}^{k} \ell_l(\frac{1}{|E|})^{-\frac{1}{q}} \ell_{k+1}(\frac{1}{|E|})^{-\frac{1}{q}-\varepsilon} \right)^r,$$

where the last inequality can be derived by noticing that the function

$$\ell_{m+1}(\frac{1}{t}) \prod_{l=m+1}^{k} \ell_l(\frac{1}{t})^{-\frac{1}{q}} \ell_{k+1}(\frac{1}{t})^{-\frac{1}{q}-\varepsilon}$$

is decreasing for small $t > 0$.

We proceed to the case $q = \infty$. First, assume the condition (A). However, this case can be treated in a same way as the case $q < \infty$ with the condition (A). Therefore, we omit it.

Next, assume the condition (B). In this case, we define a function $f_0(x)$ by

$$f_0(x) := \prod_{l=1}^{j} \ell_l(\frac{1}{|x|})^{-1} \prod_{l=j+1}^{m} \ell_l(\frac{1}{|x|})^{-\lambda_l} |x|^{-\frac{n}{p}} \chi_{\{x\in\mathbb{R}^n\,;\,|x|<\delta\}}(x),$$

where $\delta > 0$ will be taken small enough later, and we have

$$f_0^*(t) = \tilde{f}_0\left(\left(\frac{t}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{n}} \right) \simeq g_0(t) := \prod_{l=1}^{j} \ell_l(\frac{1}{t})^{-1} \prod_{l=j+1}^{m} \ell_l(\frac{1}{t})^{-\lambda_l} t^{-\frac{1}{p}} \chi_{(0,\delta)}(t) \tag{3.13}$$

for all $t > 0$ with some small $\delta > 0$. Then by (3.13), we obtain $f_0 \in L_{p,\infty,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$, or equivalently, $u_0 := G_{\frac{n}{p}} * f_0 \in H^{\frac{n}{p}}_{p,\infty,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$. Here, we see that there exists a small positive constant $\tilde{\delta} < \delta$ such that the inequalities

$$\int_t^\delta s^{-\frac{1}{p'}} g_0(s) ds \simeq \ell_{j+1}(\frac{1}{t}) \prod_{l=j+1}^{m} \ell_l(\frac{1}{t})^{-\lambda_l}$$

hold for all $0 < t < \tilde{\delta}$. Thus by carrying out the same estimates in (3.8), for any measurable set E with $|E| < \tilde{\delta}$, we have

$$\int_E |G_{\frac{n}{p}} * f_0(x)|^r dx \geq C \int_0^{|E|} \left(\int_t^\delta s^{-\frac{1}{p'}} g_0(s) ds \right)^r dt$$

$$\geq C\int_0^{|E|}\left(\ell_{j+1}(\frac{1}{t})\prod_{l=j+1}^m \ell_l(\frac{1}{t})^{-\lambda_l}\right)^r dt \geq C\,|E|\left(\ell_{j+1}(\frac{1}{|E|})\prod_{l=j+1}^m \ell_l(\frac{1}{|E|})^{-\lambda_l}\right)^r.$$

Finally, assume the condition (C). In this case, we define a function $f_0(x)$ by

$$f_0(x) := \prod_{l=1}^m \ell_l(\frac{1}{|x|})^{-1}|x|^{-\frac{n}{p}}\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n\,;\,|x|<\delta\}}(x),$$

where $\delta > 0$ will be taken small enough later, and we have

$$f_0^*(t) = \tilde{f}_0\left(\left(\frac{t}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \simeq g_0(t) := \prod_{l=1}^m \ell_l(\frac{1}{t})^{-1}t^{-\frac{1}{p}}\chi_{(0,\delta)}(t) \tag{3.14}$$

for all $t > 0$ with some small $\delta > 0$. Then by (3.14), we obtain $f_0 \in L_{p,\infty,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$, or equivalently, $u_0 := G_{\frac{n}{p}} * f_0 \in H^{\frac{n}{p}}_{p,\infty,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}(\mathbb{R}^n)$. Here, we see that there exists a small positive constant $\tilde{\delta} < \delta$ such that the inequalities $\int_t^\delta s^{-\frac{1}{p'}}g_0(s)ds \simeq \ell_{m+1}(\frac{1}{t})$ hold for all $0 < t < \tilde{\delta}$. Therefore, by carrying out the same estimates in (3.8), for any measurable set E with $|E| < \tilde{\delta}$, we have

$$\int_E |G_{\frac{n}{p}} * f_0(x)|^r dx \geq C\int_0^{|E|}\left(\int_t^\delta s^{-\frac{1}{p'}}g_0(s)ds\right)^r dt \geq C\int_0^{|E|}\ell_{m+1}(\frac{1}{t})^r dt \geq C|E|\,\ell_{m+1}(\frac{1}{|E|})^r.$$

Thus we complete the proof of Theorem 1.6. □

References

[1] F. J. Almgren and E. H. Lieb, *Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continuous*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 683–773.

[2] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Inc, New York, 1988.

[3] H. Brézis and S. Wainger, *Note on limiting cases of Sobolev embeddings and convolution inequalities*, Comm. Partial Differential Equations **5** (1980), 773–789.

[4] J. Chen and X. Zhu, *A note on BMO and its application*, J. Math. Anal. Appl. **303** (2005), 696–698.

[5] D. E. Edmunds and H. Triebel, *Sharp Sobolev embeddings and related Hardy inequalities : the critical case*, Math. Nachr. **207** (1999), 79–92.

[6] V. Kokilashvili and M. Krbec, *Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*, World Scientific Pub. Co. Pte. Ltd., 1991.

[7] H. Kozono, T. Sato and H. Wadade, *Upper bound of the best constant of a Trudinger-Moser inequality and its application to a Gagliardo-Nirenberg inequality*, Indiana Univ. Math. J. **55** (2006), 1951–1974.

[8] K. Kurata, S. Nishigaki and S. Sugano, *Boundedness of integral operators on generalized Morrey spaces and its application to Schrödinger operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1125–1134.

[9] S. Machihara, T. Ozawa and H. Wadade, *Generalizations of the logarithmic Hardy inequality in critical Sobolev-Lorentz spaces*, J. Ineq. Appl. (2013), 2013:381.

[10] S. Nagayasu and H. Wadade, *Characterization of the critical Sobolev space on the optimal singularity at the origin*, J. Funct. Anal. **258** (2010), 3725–3757.

[11] E. Nakai, *Generalized fractional integrals on Orlicz-Morrey spaces*, Banach and function spaces, 323–333, Yokohama Publ., Yokohama, 2004.

[12] E. Nakai, *Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces*, Math. Nachr **166** (1994), 95–103.

[13] R. O'Neil, *Convolution operators and $L(p, q)$ spaces*, Duke Math. J. **30** (1963), 129–142.

[14] T. Ogawa, *A proof of Trudinger's inequality and its application to nonlinear Schrödinger equation*, Nonlinear Anal. **14** (1990), 765–769.

[15] T. Ogawa and T. Ozawa, *Trudinger type inequalities and uniqueness of weak solutions for the nonlinear Schrödinger mixed problem*, J. Math. Anal. Appl. **155** (1991), 531–540.

[16] T. Ozawa, *On critical cases of Sobolev's inequalities*, J. Funct. Anal. **127** (1995), 259–269.

[17] Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, *A note on generalized fractional integral operators on generalized Morrey space*, Bound. Value Probl. 2010, Art.ID 835865, 18 pp.

[18] Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, *Generalized fractional integral operators and fractional maximal operators in the framework of Morrey spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 6481–6503.

[19] Y. Sawano and H. Wadade, *On the Gagliardo-Nirenberg type inequality in the critical Sobolev-Morrey space*, J. Fourier Anal. Appl. **19** (2013), 20–47.

[20] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.

[21] T. Suzuki and H. Wadade, *Optimal embeddings on critical Sobolev-Lorentz spaces into generalized Morrey spaces*, Adv. Math. Sci. Appl. **22** (2012), 225–238.

[22] H. Wadade, *Quantitative estimates of embedding constants for Gagliardo-Nirenberg inequalities on critical Sobolev-Besov-Lorentz spaces*, J. Fourier Anal. Appl. **19** (2013), 1029–1059.

[23] H. Wadade, *Remarks on the critical Besov space and its embedding into weighted Besov-Orlicz spaces*, Studia Math. **201** (2010), 227–251.

[24] H. Wadade, *Remarks on the Gagliardo-Nirenberg type inequality in the Besov and the Triebel-Lizorkin spaces in the limiting case*, J. Fourier Anal. Appl. **15** (2009), 857–870.

強退化放物型方程式に対する一意可解性

渡邉 紘 (サレジオ工業高等専門学校・一般教育科)*

1. 導入

本講演では, 以下の形の方程式について考える:

$$u_t + \nabla \cdot A(u) = \Delta\beta(u). \tag{1}$$

ここで, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_N)$, $\Delta = \sum_{i=1}^N \partial^2/\partial x_i^2$ は $\mathbb{R}^N$ の (空間変数に関する) ナブラ, ラプラシアンを表す. 左辺の関数 $A(\xi) = (A^1, \ldots, A^N)(\xi)$ を $\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{R}^N$ 値の局所 Lipschitz 連続な関数とする. 右辺の関数 β は $\mathbb{R}$ 上で単調非減少かつ局所 Lipschitz 連続であると仮定する. 本講演の目的は, 方程式 (1) の初期値問題や初期値境界値問題の適切性, すなわち解の存在性, 一意性, 初期値への連続的依存性を証明することである.

右辺において $\beta \equiv 0$ のとき, 方程式 (1) は双曲型保存則方程式:

$$u_t + \nabla \cdot A(u) = 0 \tag{2}$$

となる. この方程式 (2) に対する初期値問題については, Vol'pert [45], Kružkov [30], Dirichlet 問題については Bardos-Leroux-Nedelec [5], Otto [38], Vasseuer [43] 等の結果が知られている. 特に, Kružkov [30] によって導入されたエントロピー解の概念は, (2) に対する初期値問題や初期値境界値問題の適切性を証明する上で欠かせないものとなっている. ここでエントロピー解とは, ある特別な性質 (エントロピー不等式) を満たす超関数の意味の解 (弱解) を意味する.

また, 左辺において $A(\xi) \equiv 0$ のとき, (1) は退化放物型方程式:

$$u_t = \Delta\beta(u) \tag{3}$$

となる. この方程式 (3) については, Brézis-Strass [10], Brézis-Crandall [9], Bénilan-Crandall [8] 等の結果が知られており, Vázquez [44] にまとめられている. 一般解としては超関数の意味の解 (弱解) が用いられる.

方程式 (1) は, 形の上では方程式 (2) と (3) の線形結合とみなされるため, (1) は双曲型の性質と放物型の性質を両方持つ方程式であると考えられる. 実際, 拡散項の非線形関数 β に対する仮定により, (1) は次のような性質を持つ.

1. β に狭義増加を仮定した場合, $\beta'(\xi) = 0$ となる点 ξ の集合は高々可算点である. この意味で, 上記の方程式を (弱) 退化放物型方程式と呼ぶ. この場合, 双曲性より放物性の方が強い状況であると解釈できる.

2. β に単調非減少を仮定した場合, $\beta'(\xi) = 0$ となる点 ξ の集合が非負測度を持つ場合が考えられる. この意味で, 上記の方程式を強退化放物型方程式と呼ぶ. この場合, 放物性が強いところと双曲性が強いところが混在していると考えられる.

本研究は科学研究費 (若手研究 (B) 課題番号: 25800086, 基盤研究 (C) 課題番号: 26400138) の助成を受けたものである.
2000 Mathematics Subject Classification: 35K65, 35K55, 35L65, 35R05, 47H20, 47H35
キーワード：強退化放物型, 双曲型保存則, 適切性, エントロピー解, 有界変動関数, 非線形発展作用素
*e-mail: h-watanabe@salesio-sp.ac.jp

本研究では, 放物性と双曲性の強さが単純に比較できない状況に対する解析に主眼を置いている．それゆえに, 方程式 (1) の一般解には超関数の意味の解ではなく, エントロピー解の概念を用いる．

本講演では, 変数係数を持つ方程式:

$$u_t + \nabla \cdot A(x,t,u) + B(x,t,u) = \varDelta\beta(u) \tag{4}$$

の初期値問題や初期値境界値問題に対するエントロピー解を定義し, 空間 L^1 における適切性について解説する．まず 2 節において, 各係数 $A(x,t,\xi)$, $B(x,t,\xi)$ が各変数 (x,t,ξ) に関して滑らかな場合に対する方程式 (4) の第二種境界値問題について述べる．次に 3 節では, 方程式 (1) の初期値問題に対する動力学的定式化について解説する．最後に 4 節では, 係数 $A(x,t,\xi) \equiv A(x,\xi)$ が空間変数 x に関して不連続な場合に対する解析について, 現在までに得られている結果を解説する．

本稿を通し, $BV(\Omega)$ は領域 Ω における有界変動関数の空間である ([2], [17], [45], [46], [55] 等を参照)．また, $\mathcal{L}^N$, $\mathcal{H}^N$ をそれぞれ N 次元 Lebesgue 測度, Hausdorff 測度とする．

2. 強退化放物型方程式に対する第二種境界値問題

本節では, 以下の形の強退化放物型方程式の第二種境界値問題を考える．

$$\text{(IBVP)} \qquad \begin{cases} u_t + \nabla \cdot A(x,t,u) + B(x,t,u) = \varDelta\beta(u), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ [\nabla\beta(u) - A(x,t,u)] \cdot \mathbf{n}(x) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega). \end{cases}$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は有界な Lipschitz 領域とし, [0,T] は固定された時間区間である．左辺の関数 $A(x,t,\xi)$, $B(x,t,\xi)$ は変数 $(x,t,\xi) \in \overline{\Omega} \times [0,T] \times \mathbb{R}$ に関して滑らかな関数とする．また, $\mathbf{n}$ は $\partial\Omega$ の単位法線を表す．(IBVP) はダム問題, ステファン問題, 微粒子懸濁液の沈殿・硬化過程を記述する数学モデル等へ応用することができる興味深い問題である．

方程式 (1) や滑らかな係数を持つ場合における方程式 (4) に対する先行研究は, Oleinik [37], Vol'pert-Hudjaev [47], Carrillo [13], Bürger-Evje-Karlsen [11], Mascia-Porretta-Terracina [32], Karlsen-Risebro [22], Andreianov-Gazibo [3] などが挙げられるが, 第二種境界値問題に対する結果は殆ど得られていなかった．実際, 先行研究においても, [11], [3] を除いては初期値問題, Dirichlet 問題に対する結果である．[11], [3] は, 1 次元の第二種境界値問題を取り扱っている．

本節では, 問題 (IBVP) の適切性について解説する．まず, 解の存在性を証明するための手法を二つ紹介する．一つ目は (IBVP) を非線形偏微分方程式の初期値境界値問題として扱う手法であり, W. [50] に沿った解説を行う．次に,(IBVP) を無限次元空間の常微分方程式 (発展方程式) として定式化し, 非線形発展作用素論 (非線形半群論) を適用する手法について, W.-Oharu [53, 54] を参考に解説する．ここでは非線形発展作用素の生成理論 (Kobayasi-Oharu [25]) を用いる．非線形半群論を用いた手法の先行研究は, 双曲型保存則方程式に対しては, Crandall [15], Oharu-Takahashi [34], (弱) 退化放物型方程式に対しては Okamoto-Oharu [36] が挙げられる．最後に, 解の一意性を Kružkov [30], Carrillo [13] による手法を用いて解説する．

まず, 問題 (IBVP) に対する一般解を以下のように定義する:

Definition 1
初期関数 $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ を取る. 関数 $u \in L^\infty(\Omega \times (0,T)) \cap BV(\Omega \times (0,T))$ が次の二つの条件を満たすとき, (IBVP) の BV-エントロピー解と呼ぶ:

(1) $u \in C([0,T]; L^1(\Omega))$ であり, $L^1\text{-}\lim_{t\downarrow 0} u(\cdot,t) = u_0$ が成立する.

(2) $\nabla\beta(u) \in L^2(0,T; L^2(\Omega)^N)$ であり, 各 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,T))^+$ と $k \in \mathbb{R}$ に対して, 次の不等式が成立する.

$$\int_0^T \int_\Omega |u-k|\varphi_t \, dxdt \geq \int_0^T \int_\Omega \mathrm{sgn}(u-k)(\nabla\beta(u)\cdot\nabla\varphi$$
$$-[A(x,t,u)-A(x,t,k)]\cdot\nabla\varphi + [\nabla\cdot A(x,t,k)+B(x,t,u)]\varphi)\, dxdt$$
$$-\int_0^T \int_{\partial\Omega} \mathrm{sgn}(T_r u - k)A(x,t,k)\cdot\mathbf{n}(x)\varphi d\mathcal{H}^{N-1} dt.$$

ここで, $\mathrm{sgn}(\xi)$ は符号関数であり, T_r は $BV(\Omega)$ 内のトレース作用素である.

Remark 1 BV-エントロピー解は $BV(\Omega)$ 内の弱解 (BV 解) になる. つまり, 方程式 (4) を超関数の意味で満たす.

Remark 2 BV-エントロピー解は第二種境界条件を弱い意味で満たす.

上記の BV-エントロピー解の存在性を示すために, 以下のような粘性近似問題を考える

$$(\mathrm{IBVP})_\varepsilon \begin{cases} \partial_t u_\varepsilon + \nabla\cdot A(x,t,u_\varepsilon) + B(x,t,u_\varepsilon) = \Delta\beta_\varepsilon(u_\varepsilon),\ (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ [\nabla\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) - A(x,t,u_\varepsilon)]\cdot\mathbf{n}(x) = 0,\ (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \\ u_\varepsilon(x,0) = u_0(x),\ x\in\Omega. \end{cases}$$

ここで, 各 $\varepsilon > 0$ に対して $\beta_\varepsilon(\xi) = \beta(\xi) + \varepsilon\xi$ と置く.

係数 $A(x,t,\xi)$ が全ての変数に関して滑らかな場合, 問題 (IBVP) の適切性の証明には BV 空間のコンパクト性と Kružkov の二重変数法を用いる手法が良く知られている. この手法を用いるためには, 以下の評価を得る必要がある:

. $||u_\varepsilon(\cdot,t)||_{L^\infty(\Omega)} \leq C$.

. $|u_\varepsilon(\cdot,t)|_{BV(\Omega)} \leq C$.

. $||u_\varepsilon(\cdot,t) - u_\varepsilon(\cdot,s)||_{L^1(\Omega)} \leq C|t-s|$.

ここで, u_ε は問題 (IBVP) の近似解 (すなわち問題 $(\mathrm{IBVP})_\varepsilon$ の古典解) であり, $|u_\varepsilon|_{BV(\Omega)}$ は u_ε の Ω 内での全変動を表している. 問題 (IBVP) を偏微分方程式の初期値境界値問題として考える場合でも, 発展方程式として考える場合でも, 上記の 3 つの評価が近似解を収束させる際の鍵となる. これらの評価が成立するような仮定の下で, 問題 (IBVP) の解法を考える.

2.1. 偏微分方程式としての解法

本節では, (IBVP) を非線形偏微分方程式の初期値境界値問題として考える. このとき, 近似解に対する必要な評価を導くためには, 以下の仮定を課す必要がある.

$\{$A0$\}$ 初期関数に対する仮定:

$$\begin{cases} u_0(x) \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega), \\ p < u_0 < q \quad \text{for some } p, q \in \mathbb{R} \text{ with } p < q. \end{cases}$$

$\{$A1$\}$ 係数の正則性: 各 $i = 1, \ldots, N$ に対し,

$$\begin{cases} A^i(\cdot,\cdot,\xi),\ \partial_t\partial_\xi A^i(\cdot,\cdot,\xi),\ B(\cdot,\cdot,\xi) \in L^\infty(\Omega \times (0,T)) \quad \text{for } \xi \in [p,q], \\ A^i(x,t,\cdot),\ B(x,t,\cdot) \in \mathrm{Lip}_{loc}(\mathbb{R}) \quad \text{for } (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,T], \\ \nabla \cdot \partial_t A(\cdot,\cdot,\xi),\ \partial_t B(\cdot,\cdot,\xi) \in L^1(\Omega \times (0,T)) \quad \text{for } \xi \in [p,q], \\ \partial_t A(\cdot,\cdot,\xi) \in L^1(\partial\Omega \times (0,T))^N \quad \text{for } \xi \in [p,q], \\ \beta(\cdot) \in \mathrm{Lip}_{loc}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

$\{$A2$\}$ 解の有界性を得るための仮定:

$$\begin{cases} \nabla \cdot A(x,t,p) + B(x,t,p) \le 0, \\ \nabla \cdot A(x,t,q) + B(x,t,q) \ge 0, \end{cases} \quad \text{for } (x,t) \in \overline{\Omega} \times (0,T).$$

$\{$A3$\}$ 関数 β の退化性:

$$\beta(\xi) \text{ は } \xi \text{ に関して非減少} \quad (\text{ i.e. } \partial_\xi \beta(\cdot) \ge 0).$$

$\{$S$\}$ 係数に対する更なる正則性: 各 $i = 1, \ldots, N$ に対し,

$$\begin{cases} A^i(\cdot,\cdot,\xi),\ B(\cdot,\cdot,\xi) \in L^\infty(\Omega \times (0,T)) \cap W^{1,1}(\Omega \times (0,T)) \quad \text{for } \xi \in [p,q], \\ \nabla \cdot \partial_{x_i} A(\cdot,\cdot,\xi) \in L^1(\Omega \times (0,T)) \quad \text{for } \xi \in [p,q], \\ \partial_{x_i}\partial_\xi A^i(\cdot,\cdot,\xi) \in L^\infty(\Omega \times (0,T)) \quad \text{for } \xi \in [p,q], \\ \partial_{x_i} A(\cdot,\cdot,\xi) \in L^1(\partial\Omega \times (0,T))^N \quad \text{for } \xi \in [p,q]. \end{cases}$$

条件 $\{$A0$\}$-$\{$A3$\}$ は 4 節でも用いる仮定である. 条件 $\{$S$\}$ は近似解の BV 評価を得るために必要な仮定であり, 本節のみに用いる.

これらの仮定の下で, 近似解に対する 3 つの評価と $BV(\Omega)$ の $L^1(\Omega)$ におけるコンパクト性を用いると, 以下の結果を得ることができる.

Theorem 1
条件 $\{$A0$\}$-$\{$A3$\}$, $\{$S$\}$ を仮定する. このとき, 問題 (IBVP) の BV-エントロピー解が存在する.

2.2. 発展方程式としての解法

本節では, 非線形発展作用素の生成理論を用いた BV-エントロピー解の存在性を証明するために, (IBVP) を以下のような $L^1(\Omega)$ 上の抽象的 Cauchy 問題に書き換える:

$$\text{(ACP)} \begin{cases} (d/dt)u(t) = \mathcal{A}(t)u(t) \quad \text{for } t \in (0,T), \\ u(0) = v \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega). \end{cases}$$

ここで, $(d/dt)u(t)$ は $u(\cdot)$ の一般化された意味での導関数と解釈される. また, 微分作用素 $\mathcal{A}(t)$ は, BV-エントロピー解の定義に沿って定式化される.

(ACP) に非線形発展作用素論 Kobayasi-Oharu [25] を適用するためには, 以下の仮定が必要となる.

(H.1) 各 $r > 0$ に対し, 関数 A^i, $\partial_{x_i}A^i$, $\partial_\xi A^i$, $\partial_{x_i x_j}A^i$, $\partial_{x_i}\partial_\xi A^i$, B, $\partial_{x_i}B$, $(i,j = 1,\ldots,N)$ は全て, $Q_r = \overline{\Omega} \times [0,T] \times [-r,r]$ 上で有界かつ連続である.

(H.2) 以下の不等式を満たすような定数 α, α_i, $(i = 1,\ldots,N)$, α' が存在する:

任意の $(x,t,\xi) \in \overline{\Omega} \times [0,T] \times [p,q]$ に対し,

$$-\partial_{x_i}\partial_\xi A^i(x,t,\xi) - (1/N)\partial_\xi B(x,t,\xi) \le \alpha_i, \quad \alpha \equiv \sum_{i=1}^N \alpha_i, \quad -\partial_\xi B(x,t,\xi) \le \alpha'.$$

(H.3) 各 $r > 0$ と $\tau > 0$ に対し, $x \in \overline{\Omega}$ と, $|s-t| \le \tau$, $|\xi| \le r$ となるような $s,t \in [0,T]$, $\xi \in [p,q]$ に対し,

$$\rho(\tau;r) = \max \left\{ \begin{array}{l} \sup |\partial_{x_i}A^i(x,t,\xi) - \partial_{x_i}A^i(x,s,\xi)|, \\ \sup |\partial_\xi A^i(x,t,\xi) - \partial_\xi A^i(x,s,\xi)|, \\ \sup |B(x,t,\xi) - B(x,s,\xi)| \end{array} \right\}, \quad (i = 1,\ldots,N),$$

とおく. このとき, 各 $r > 0$ に対し,

$$\rho(\tau;r) \to 0 \quad \text{as } \tau \downarrow 0.$$

まず, $\mathcal{A}(t)$ に対するレゾルベント作用素: $\mathcal{J}(\lambda;t) = (I - \lambda\mathcal{A}(t))^{-1}$ に対する評価を導出する. そのためには (ACP) に対する近似解を構成し, 近似解に対する L^∞ 評価, BV 評価及び時間に関する Lipschitz 連続性を証明する. さらに $BV(\Omega)$ の $L^1(\Omega)$ におけるコンパクト性を用いて近似解を収束させることで, 以下の結果を得る.

Proposition 2
条件 {H.1}-{H.3} を仮定する. $t \in [0,T]$ を取り, 正の実数 λ を十分小さく取る. 関数 $v, w \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ に対し, $\mathcal{J}(\lambda;t)v \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$. さらに,

$$||\mathcal{J}(\lambda;t)v - \mathcal{J}(\lambda;t)w||_{L^1(\Omega)} \le (1 - \lambda\alpha)^{-1}||v - w||_{L^1(\Omega)}$$

が成立する. ここで, α は仮定 (H.2) で定義した定数である.

上記の命題は微分作用素 $\mathcal{A}(t)$ が準消散的であることを意味している．さらに, 値域条件, $\mathcal{A}(t)$ の定義域の $L^\infty(\Omega)$ における稠密性, $\mathcal{J}(\lambda;t)$ に対する時間依存性評価を導出することにより, 適切な仮定の下で以下のような非線形発展作用素の生成定理が得られる．

Theorem 3 (W.-Oharu [53])
条件 (H.1)-(H.3) を仮定する．(IBVP) に対する $L^\infty(\Omega)$ 上の非線形発展作用素 $\{\mathcal{U}(t,s); 0 \leq s \leq t \leq T\}$ が存在する．さらに, 各 $v \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ に対し, 指数公式:

$$\mathcal{U}(t,s)v = L^1(\Omega)\text{ - }\lim_{\lambda\downarrow 0} \prod_{i=1}^{[(t-s)/\lambda]} \mathcal{J}(\lambda;(s+i\lambda))v, \tag{5}$$

が成立する．また, $v \in \widehat{D} \cap BV(\Omega)$ を仮定する．このとき, 関数 $u(x,t) = \mathcal{U}(t,0)v(x)$ は, BV-エントロピー解を与える．ここで,

$$\widehat{D} \equiv \{v \in L^\infty(\Omega)\ ;\ \liminf_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1}||\mathcal{J}(\lambda;t)v - v||_{L^1(\Omega)} < \infty\}$$

は Crandall の一般化定義域 [16] である．

2.3. BV-エントロピー解の一意性

さらに, BV-エントロピー解の初期値への L^1 の意味での連続的依存性が得られる．この結果により, BV-エントロピー解が一意であることが分かる．

Theorem 4 (W.-Oharu [53])
関数 u, v を初期関数 $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ に対する (IBVP) の BV-エントロピー解とする．このとき,

$$||u - v||_{L^1(\Omega)} \leq e^{\alpha' t}||u_0 - v_0||_{L^1(\Omega)}, \tag{6}$$

が成立する．ここで, α' は $-\partial_\xi B(x,t,\xi) \leq \alpha'$ を満たす正の定数である．

証明には Kružkov の二重変数法を用いる．この手法は双曲型保存則方程式 ($\beta \equiv 0$ の場合) に対して Kružkov [30] によって導入され, Carrillo [13] によって退化放物型方程式 (1) に対して拡張された．

証明の概略を述べる．まず, BV-エントロピー解 $u(x,t)$ の定義式内に, $k = v(y,s)$ を代入し, 変数 $(y,s) \in \Omega \times (0,T)$ に関して積分する．ここで, $v(y,s)$ は空間変数 y, 時間変数 s を持つ, もう一つの BV-エントロピー解である．次に, BV-エントロピー解 $v(y,s)$ の定義式に対しても同様の計算を行う．そして, 得られた二つの不等式を足し合わせ, 必要な評価を行い, 最後に二種類の変数 (x,t) と (y,s) を一致させることにより, 加藤タイプの不等式を導く．そして, 試験関数を適切に取り, Gronwall の不等式を用いることで, 不等式 (6) を導く．

3. 初期値問題に対する動力学的定式化

本節では, 以下の形の方程式に対する初期値問題について考える:

$$\text{(CP)} \qquad \begin{cases} u_t + \nabla \cdot A(u) = \varDelta\beta(u), & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

本節では, Giga-Miyakawa [18] によって提唱された動力学的近似を用いた一般解の構成について解説する. 動力学的近似では, 強退化放物型方程式を流体力学における巨視的観測量を記述する方程式とみなす. これに対し, 微視的状態量は相空間において線形 Boltzmann 型の方程式:

$$
\text{(B)} \qquad \begin{cases} f_t + \xi \cdot \nabla f = 0, \quad (x,\xi,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ f(x,\xi,0) = f_0(x,\xi), \end{cases}
$$

に従うものとする. 動力学的近似とは, 微視的状態量 f の速度変数 ξ による平均化により, 強退化放物型方程式の解 u を実現する手法である. この手法は Giga-Miyakawa [18], Kobayashi [27], Giga-Miyakawa-Oharu [19] により, 双曲型保存則方程式 (すなわち $\beta \equiv 0$ の場合) に対して適用され, 弱解やエントロピー解が構成されている. また, Miyakawa [33] は半線形放物型方程式 (すなわち $\beta(s) \equiv \nu s$, ただし ν は非負の実数) の場合に対して, Kobayashi [28] は退化拡散方程式 (すなわち $A(s) \equiv 0$) の場合に対して, 弱解を構成している. さらに Okamoto [38] は, これらの結果を組み合わせ, 弱退化放物型方程式に対して BV 解 (BV 空間内における弱解) を構成している. 本節では, 強退化放物型方程式に対するエントロピー解の構成を Okamoto [38] に沿って論じる.

以下では, 微視的状態量 f から強退化放物型方程式の解 (巨視的状態量)u の構成法を述べる. そのために, 次の核関数 χ と関数 F を取る.

$$
\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)^+, \quad \chi(\xi) = \chi(|\xi|), \quad \mathrm{supp}\ \chi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^N \ ; \ |\xi| \le 1\}, \quad \int \chi(\xi) d\xi = 1.
$$

$$
F(w,s) = \begin{cases} 1 & (0 < s \le w), \\ -1 & (w \le s < 0), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}
$$

さらに, 関数 β の正則化関数列 $\{\beta_\varepsilon \ ; \ \varepsilon > 0\}$ を以下のように取る:

$$
\beta_\varepsilon'(s) > 0 \ \text{ for } s \in \mathbb{R}, \quad \beta_\varepsilon \to \beta \ \text{ as } \varepsilon \downarrow 0 \text{ in } L^\infty_{loc}(\mathbb{R}),
$$

$$
\sup\{\beta_\varepsilon'(s) \ ; \ |s| \le r, \ \varepsilon > 0\} < \infty \ \text{ for each } r > 0.
$$

上記の関数を用いて, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して二つの関数 χ_ε, F_ε を定義する:

$$
\chi_\varepsilon(\xi,s) = \left(\frac{\varepsilon}{\beta_\varepsilon'(s)^{1/2}} \right)^N \chi\left(\frac{\varepsilon}{\beta_\varepsilon'(s)^{1/2}} \xi \right) \ \text{ for } (\xi,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},
$$

$$
F_\varepsilon(w,\xi) = \int F(w,s) \chi_\varepsilon(\xi - a(s), s) ds \ \text{ for } (w,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.
$$

ここで, $a(s) = (a^1(s), \ldots, a^N(s))$, $a^i(s) = dA^i/ds$ である. 主結果を得るために, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $F_\varepsilon(u_0(\cdot),\xi)$ の形をした初期関数を持つ問題 (B) の解を考える. そして, 問題 (B) の解作用素の族 $\{U_\xi(t) \ ; \ t \ge 0\}$ をとり, 非線形作用素の族 $\{S_h \ ; \ h > 0\}$ を

$$
S_h v = \int U_\xi(h) F_\varepsilon(v(\cdot),\xi) d\xi, \quad \text{for } v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N),
$$

と定義する. ここで, $f(x,\xi,t) = U_\xi(t) F_\varepsilon(v(x),\xi)$ とおくと, f は線形 Boltzmann 方程式を満たすことに注意する. さらに ε と h に安定性条件を課し, 同時に 0 に収束させ, 非

線形半群の収束定理 [34] を適用することにより, 問題 (CP) に対する非線形半群が構成される. さらに, この非線形半群は強退化放物型方程式の解 u を与えることも示される. 実際, 適切な仮定の下で, 以下の結果が得られる.

Theorem 5

(i) $L^1(\mathbb{R}^N)$ 上の非線形半群 $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ が存在し, 各 $v \in L^1(\mathbb{R}^N)$ に対し,

$$S_h^{[t/h]} v \to T(t)v \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^N) \text{ as } h \downarrow 0.$$

(ii) 各 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ に対し, 関数 $u(x,t) = [T(t)u_0](x)$ は問題 (CP) のエントロピー解を与える.

Remark 3 本講演で用いた Giga-Miyakawa による手法は, Brenier [6] によっても独立に考案された. [6] では, 双曲型保存則方程式に対して特性曲線法を用いて構成される多価な解に平均化を行い, 適切なエントロピー解を構成した. この手法は Brenier 自身よって発展され, 双曲型保存則方程式に対してエントロピー解を用いる Kružkov の理論が, Hilbert 空間内の極大単調作用素論を用いて L^2 空間内で完全に作り直された [7].

Remark 4 本講演で用いた Giga-Miyakawa による手法とは別に, 動力学的な定式化は Lions-Perthame-Tadmor [31] によっても得られている. Giga-Miyakawa による手法は時間差分化を行っているため, 非線形半群を構成するのに適している. これに対し, [31] では関数 F に関する 1 階線形偏微分方程式を定式化し (動力学的定式化), この微分方程式の解 (動力学的解) を用いて解析を行う手法である. この手法は Perthame [41] によって整理され, 退化放物型方程式に対しては Chen-Perthame [14], Kobayasi-Ohwa [26] 等の結果が得られている.

4. 不連続な係数を持つ場合

本節の目的は, 係数 $A(x,\xi)$ が x に関して不連続な場合に対して, 方程式:

$$u_t + \nabla \cdot A(x,u) = \Delta\beta(u) \tag{7}$$

に対する初期値境界値問題の適切性を証明することである. 特に, 第二種境界値問題に対するエントロピー解の一意存在性について論じる. この場合, Kružkov の理論 [30] (すなわち 2 節の方法) は適用できない. なぜなら, 近似解 u_ε の全変動評価が ε に関して一様に有界にならないことが知られているからである.

不連続な係数 (流速) を持つ双曲型保存則方程式の初期値問題に対する適切性の研究は, 近年盛んに研究されており, 1 次元問題に対しては沢山の結果が得られている. 多次元問題に対しては, 補完測度法 (Tartar [42]) を使った Karlsen-Rascle-Tadmor [21] ($N = 2$) や H-測度を用いた Aleksić-Mitrovic [1] ($N = 2$) などが知られており, いずれも弱解の存在性が示されている. さらに Panov [40] ($N \geq 1$) によって, エントロピー解の存在性が証明されているが, 一意性については言及されていない. 境界値問題に対しては, 1 次元の場合に Jimenez [20] によって Dirichlet 問題が扱われているが, 多次元問題に対する結果は得られていない.

退化放物型方程式に関しては, 1 次元初期値問題に対して Karlsen-Risebro-Towers [23] による補完測度法を用いた弱解の存在性と, 構成した解の一意性が得られており,

Karlsen-Risebro-Towers [24] ではエントロピー解の一意存在性が示されている．さらに, Panov [39] によって多次元定常問題のエントロピー解の存在性が得られている．さらに, W. [50, 52] によって1次元第二種境界値問題に対する弱解の存在性やエントロピー解の一意存在性も得られているが, 多次元問題に対する結果は得られていない.

本節では, 以下のような1次元第二種境界値問題を考える:

$$
\text{(P)} \begin{cases} u_t + \partial_x A(x,u) = \partial_x^2 \beta(u), & (x,t) \in I \times (0,T), \\ \partial_x \beta(u) - A(x,u) = 0, & (x,t) \in \partial I \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_0 \in BV(I), & p \le u_0 \le q. \end{cases}
$$

ここで, $I \subset \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{R}$ である．1次元空間においては $BV(I) \subset L^\infty(I)$ であることより, 初期関数の値域を有界区間に制限しても一般性を失わない．まず, (P) に対するエントロピー解の定義を以下のように与える:

Definition 2

初期関数 $u_0 \in BV(I)$ をとる．関数 $u \in L^\infty(I \times (0,T))$ が (P) のエントロピー解であるとは, 次の二つの性質を満たすものである:

(1) $\partial_x \beta(u) \in L^2(0,T; L^2(I))$

(2) 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,T))^+$ と $k \in \mathbb{R}$ に対し, 以下の不等式が成立する:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_I \mathrm{sgn}(u-k)\{(u-k)\varphi_t - \partial_x \beta(u) \partial_x \varphi + [A(x,u) - A(x,k)]\partial_x \varphi\} dx dt \\
&\quad - \int_0^T \int_{I \setminus I_S} \mathrm{sgn}(u-k) \partial_x A(x,k) \varphi dx dt + \int_0^T \int_{I_S} |D_x^s A(x,u)| \varphi dx \\
&\quad + \int_I |u(x,0) - u_0(x)| \varphi(x,0) dx \ge 0.
\end{aligned}
$$

ここで, I_S は $D_x A(x,\xi)$ が変数 x に関して特異測度となる領域である.

上記のエントロピー解の一意存在性を得るためは, 以下の評価が必要となる.

$$
\text{(P)}_\varepsilon^\delta \begin{cases} \partial_t u_\varepsilon^\delta + \partial_x A^\delta(x, u_\varepsilon^\delta) = \partial_x^2 \beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta), \ (x,t) \in I \times (0,T), \\ \partial_x \beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta) - A^\delta(x, u_\varepsilon^\delta) = 0, \ (x,t) \in \partial I \times (0,T), \\ u_\varepsilon^\delta(x,0) = u_0^\delta(x). \end{cases}
$$

ここで, $A^\delta(x,\xi)$ は, 関数 $A(x,\xi)$ の変数 x に関する近似関数である．すなわち, 各 $\xi \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ に対し,

$$
A^\delta(x,\xi) = (1/\delta)\omega(x/\delta) * A(x,\xi).
$$

ここで, ω は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への滑らかな関数であり,

$$
\omega(\lambda) = 0 \text{ for } |\lambda| \ge 1, \quad \int_{\mathbb{R}} \omega(\lambda) d\lambda = 1
$$

を満たす．さらに, $*$ は畳み込み作用素を表す．そして, 近似問題 $(P)_\varepsilon^\delta$ の初期関数を

$$
u_0^\delta(x) = (1/\delta)\omega(x/\delta) * u_0(x) \quad \text{for } \delta > 0,
$$

と取る. 加えて, 各$\varepsilon, \delta > 0$に対して $\beta_\varepsilon^\delta(\xi) = \beta^\delta(\xi) + \varepsilon\xi$ と置き, $\beta^\delta(\xi)$ は($A^\delta(x,\xi)$の定義と同様に) $\beta(\xi)$ の軟化子を用いた近似関数である.

係数$A(x,\xi)$が変数xに関して不連続な場合, 近似解に対する評価は以下の3つを用いる.

. $||u_\varepsilon(\cdot,t)||_{L^\infty(\Omega)} \le C$.

. $||\sqrt{\partial_\xi \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)}\partial_x u_\varepsilon||_{L^2(\Omega)} \le C$.

. 近似問題$(\mathrm{P})_\varepsilon^\delta$に対する流速 "$\partial_x \beta_\varepsilon^\delta(u_\varepsilon^\delta) - A^\delta(x, u_\varepsilon^\delta)$" の L^1_{loc}-コンパクト性

本節では, 非線形関数$A(x,\xi)$に対して, 以下の仮定を課す:

{D1} $$A(\cdot,\xi) \in BV(\bar{I}) \quad \text{for } \xi \in [p,q].$$

また, Panov [41] を適用するために, 以下のような非退化条件が必要となる:

{D2} 殆ど至る所 $x \in \bar{I}$, と全ての $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, に対し, 関数 $\xi \mapsto \lambda A(x,\xi)$ と $\xi \mapsto \lambda\beta(\xi)$ は, 非退化領域上で同時に定数とならない.

さらに, エントロピー解の一意性を証明するために, 関数$A(x,\xi)$に対して以下のような制限を与える:

{D3} 任意の $\xi \in [p,q]$ に対し, 関数 $A(\cdot,\xi)$ は, I内で高々有限個の不連続点を持つ.

{D4} (crossing条件) 任意の不連続点 $x \in I$ に対し,

$$A(x_+,\xi) - A(x_-,\xi) < 0 < A(x_+,\eta) - A(x_-,\eta) \Rightarrow \xi < \eta, \tag{8}$$

が成立する. ここで, x_+, x_- は不連続点xにおける右極限と左極限をそれぞれ表す.

以上の仮定の下で, 次の結果が得られる:

Theorem 6 (W.[50])
条件{A0}-{A3}, {D1}-{D2}を仮定する. このとき, 問題(P)のエントロピー解 u が得られる.

Theorem 7 (W.[50])
条件{A0}-{A3}, {D1}-{D4}を仮定する. 関数u, v をそれぞれ初期関数u_0, v_0を持つようなエントロピー解として取る. このとき,

$$\int_I |u(x,t) - v(x,t)|dx \le e^{\alpha' t} \int_I |u_0(x) - v_0(x)|dx,$$

が成立する. 特に, 各初期関数 u_0 に対して, エントロピー解は一意的に定まる.

参考文献

[1] J. Aleksić and D. Mitrovic, On the compactness for two dimensional scalar conservation law with discontinuous flux, Comm. Math. Science, 4 (2009), 963-971.

[2] L. Ambrosio, N. Fusco and Pallara, Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems, Oxford Science Publications, (2000).

[3] B. Andreianov and M. K. Gazibo, Entropy formulation of degenerate parabolic equation with zero-flux boundary condition, Z. Angew. Math. Phys., DOI10.1007/s00033-012-0297-6.

[4] H. Attouch, G. Buttazzo and G. Michaille, Variational Analysis in Sobolev and BV spaces, Applications to PDEs and optimization, SIAM and MPS (2006).

[5] C. Bardos, A. Y. Leroux and J. C. Nedelec, First order quasilinear equations with boundary conditions, Comm. In Partial differential equations, 4(9) (1979), 1017-1034.

[6] Y. Brenier Averaged multivalued solutions for scalar conservation laws, SIAM J. Numer. Anal., 21 (1984), 1013-1037.

[7] Y. Brenier L^2 formulation of multidimensional scalar conservation laws, Arch. Rational Mech. Anal., 193 (2009), 1-19.

[8] P. Bénilan and M. G. Crandall, The continuous dependence on φ of solutions of $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$, Indiana Univ. Math. J., 30 no. 2 (1981), 161–177.

[9] H. Brézis, M. Crandall, Uniqueness of solutions of the initial value problem for $u_t - \varDelta\phi(u) = 0$, J. Math. Pures Appl. 58 (1979), 153-163.

[10] H. Brézis, W. A. Strauss, Semi-linear second-order elliptic equations in L^1, J. Math. Soc. Japan, 25 (1973), 565-590.

[11] R. Bürger, S. Evje and K. H. Karlsen, On strongly degenerate convection-diffusion problems modeling sedimentation-consolidation processes, J. Math. Anal. Appl., 247 no. 2 (2000), 517–556.

[12] R. Bürger, H. Frid and K. H. Karlsen, On the well-posedness of entropy solutions to conservation laws with a zero-flux boundary condition, J. Math. Anal. Appl., 326 (2007), 108-120.

[13] J. Carrillo, Entropy solutions for nonlinear degenerate problems, Arch. Rational. Anal., 147 (1999), 269-361.

[14] G.-Q. Chen, B. Perthame, Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 20 (2003) 645-668.

[15] M. G. Crandall, The semigroup approach to first order quasilinear equations in several space variables, Israel J. Math., 12 (1972), 108–132.

[16] M. G. Crandall, A generalized domain for semigroup generators, Proc. Amer. Math. Soc., 37 no.2 (1973), 434-440.

[17] L. C. Evans and R. Gariepy, Measure theory and fine properties of functions, Studies in Advanced Math., CRC Press, London,(1992).

[18] Y. Giga, T. Miyakawa, A kinetic construction of global solutions of first order quasilinear equations, Duke Math. J. 50 (1983), 505-515.

[19] Y. Giga, T. Miyakawa, S. Oharu, A kinetic approach to general first order quasilinear equations, Trans. Amer. Math. Soc. 287 (1985), 723-743.

[20] J. Jimenez, Scalar conservation law with discontinuous flux in a bounded domain, Discrete Contin. Dyn. Syst. 2007, Dynamical Systems and Differential Equations. Proceedings of the 6th AIMS International Conference, suppl., 520-530.

[21] K. H. Karlsen, M. Rascle and E. Tadmor, On the existence and compactness of a two-dimensional resonant system of conservation laws, Commun. Math. Sci. 5(2), (2007), 253-265.

[22] K. H. Karlsen, N. H. Risebro, On the uniqueness and stability of entropy solutions of nonlinear degenerate parabolic equations with rough coefficients, Discrete Contin. Dyn., 9(5):1081-1104, 2003.

[23] K. H. Karlsen, N. H. Risebro and J. D. Towers, On a nonlinear degenerate parabolic transport-diffusion equation with a discontinuous coefficient, Electron. J. Differential Equations, 28 (2002), 1-23 (electronic).

[24] K. H. Karlsen, N. H. Risebro and J. D. Towers, *L^1 stability for entropy solutions of nonlinear degenerate parabolic convective-diffusion equations with discontinuous coefficients*, Skr. K. Vidensk. Selsk., (3):1-49, 2003.

[25] K. Kobayasi and S. Oharu, Nonlinear evolution operators in Fréchet spaces, Japan J. Math., 10 (1984), 243-270.

[26] K. Kobayasi, H. Ohwa Uniqueness and existence for anisotropic degenerate parabolic equations with boundary conditions on a bounded rectangle, J. Differential Equations 252 (2012), 137-167.

[27] Y. Kobayashi A product formula approach to first order quasilinear equations, Hiroshima Math. J. 14 (1984), 489-509.

[28] Y. Kobayashi An operator theoretic method for solving $u_t = \Delta\psi(u)$, Hiroshima Math. J. 17 (1987), 76-89.

[29] S. N. Kružkov, Generalized solutions of the Cauchy problem in the large for nonlinear equations of first order, Soviet. Math. Dokl., 10 (1969), 785-788.

[30] S. N. Kružkov, First order quasilinear equations in several independent variables, Math. USSR Sbornik, 10 (1970), 217-243.

[31] P.L. Lions, B. Perthame, E. Tadmor, A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations, J. Amer. Math. Soc. 7 (1994) 169-191.

[32] C. Mascia, A. Porretta and A. Terracina, Nonhomogeneous Dirichlet problems for degenerate parabolic-hyperbolic equations, Arch. Rational Mech. Anal., 163 (2002), 87-124.

[33] T. Miyakawa, Construction of solutions of semilinear parabolic equations with the aid of the linear Boltzmann equation, Hiroshima Math. J. 14 (1984), 299-310.

[34] S. Oharu and T. Takahashi, A convergence theorem of nonlinear semigroups and its application to first order quasilinear equations, J. Math. Soc. Japan., 26 (1974), 124-160.

[35] K. Okamoto, A kinetic approach to nonlinear degenerate parabolic equations, Hiroshima Math. J. 23 (1993), 577-606.

[36] K. Okamoto and S. Oharu, Nonliner evolution operators associated with nonlinear degenerate parabolic equations, Adv, Math, Sci, Appl,. 8 (1998), 581-629.

[37] O. A. Oleinik, Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation, Uspehi. Mat. Nauk, 14 (1959), 165–170.

[38] F. Otto, Initial-boundary value problem for a scalar conservation law, C. R. Acad. Sci. Paris Ser.I Math., 322 (1996), 729–734.

[39] E. Yu. Panov, On the strong precompactness property for entropy solutions of a degenerate elliptic equation with discontinuous flux, J. Differential Equations, 247 (2009), no. 10, 2821-2870.

[40] E. Yu. Panov, Existence and strong pre-compactness properties for entropy solutions of a first-order quasilinear equation with discontinuous flux, Arch. Rational Mech. Anal., 195 (2010), 643-673.

[41] B. Perthame, Kinetic Formulation of Conservation Laws, Oxford Univ. Press, Oxford, UK, 2002.

[42] L. Tartar, Compensated compactness and applications to partial differential equations,

Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol. IV, 136–212. Pitman, Boston, Mass. London, (1979).

[43] A. Vasseur, Strong traces for solutions of multidimensional scalar conservation laws, Arch. Ration. Mech. Anal., 160 (2001), 181-193.

[44] J. L. Vázquez The Porous Medium Equation: Mathematical Theory, Oxford Univ. Press, (2006).

[45] A. I. Vol'pert, The spaces BV and quasilinear equations, Math. USSR-Sb., 2 (1967), 225-267.

[46] A. I. Vol'pert and S. I. Hudjaev, Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, (1985).

[47] A. I. Vol'pert and S. I. Hudjaev, Cauchy's problem for degenerate second order quasilinear parabolic equations, Math. USSR-Sb., 7 (1969), 365-387.

[48] H. Watanabe, A uniqueness theorem of the BV solutions to nonlinear degenerate parabolic equations, Adv. Math. Sci. Appl., 19 (2009), 415-427.

[49] H. Watanabe, Initial value problem for strongly degenerate parabolic equations with discontinuous coefficients, Bulletin of Salesian Polytechnic 38 (2012), 13-20.

[50] H. Watanabe, Entropy solutions to strongly degenerate parabolic equations with zero-flux boundary conditions, Advances in Mathematical Sciences and Applications, 23 (2013), no.1, 209–234.

[51] H. Watanabe, Existence and uniqueness of entropy solutions to strongly degenerate parabolic equations with discontinuous coefficients, Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Discrete Contin. Dyn. Syst.-Proceedings 2013, Dedicated to the 9th AIMS Conference, Orlando, Florida, USA, 781–790.

[52] H. Watanabe, Solvability of boundary value problems for strongly degenerate parabolic equations with discontinuous coefficients, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, 7 (2014), no. 1, 177–189.

[53] H. Watanabe and S. Oharu, BV-entropy solutions to strongly degenerate parabolic equations, Adv. Differential Equations 15(7-8) (2010), 757-800.

[54] H. Watanabe and S. Oharu, Finite-Difference approximation to a class of strongly degenerate parabolic equations, Adv. Math. Sci. Appl., 20 (2010), 319-347.

[55] W. P. Ziemer, Weakly differentiable functions, Springer-Verlag, New York, (1989).

極大関数による掛谷問題の研究とその応用

齋藤 洋樹 (埼玉大学)

1　導入と関連するトピックス

1917 年に東北大学の掛谷宗一は次のような問題を提示した. これは現在「掛谷の針問題」と呼ばれている:

問題. 長さ 1 の線分を平面上で 180° 回転させるために必要な最小の面積を求めよ.

これについて, まったく別の問題意識から次の驚くべき結果が Besicovitch によって示された:

定理 (Besicovitch,1927). 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 面積が ε 以下の図形を構成し, その中で単位線分を 180° 回転させることができる.

一見すると, これらの問題と回答は幾何学的な関心しか持たないように見える. しかし近年これらの問題が多くの数学の分野, 数論, 組合せ論, 振動積分, 偏微分方程式などと関わることがわかってきた. そして, 掛谷問題の解決に用いられる手法はそれらの分野に影響を及ぼすと考えられている. この分野に関する概説が, [22], [30], [35], [38] にある. 特に日本語のものとしては, [30], [31] があり, 著者の田中仁氏は掛谷問題に関する多くの成果を挙げられている.

現在「掛谷問題」と呼ばれるものは, 関連するいくつかの予想の総称のようになっている. 本稿の最初にそれらを概観することから始める. そして, 後半で最近の結果を報告する. その際多くの内容は結果のみを記述するが, 本稿の表題である「掛谷極大関数」を研究する際に必要となる重要な技術を紹介するために, 証明に踏み込んだ部分がある.

1.1　掛谷集合とその δ 近傍

Besicovitch が与えた回答は次の 2 つの事実による. 1 つは, あらゆる方向の単位線分を含む面積 0 のコンパクト図形が存在すること. 2 つ目は, 単位線分を軸と垂直方向に平行移動する際に必要な面積は任意に小さくできるということである. そこで, $\mathbb{R}^n$ の部分集合であらゆる単位線分を含む測度 0 のコンパクト集合を掛谷集合 (あるいは Besicovitch 集合) と呼ぶ. このような図形の構成法は, Perron の木と呼ばれる方法をはじめいくつか知られているが, 日本語では [3] に見ることができる. この掛谷集合について定量的な解析を実現したい. そこで十分小さな $0 < \delta \ll 1$ に対し, 単位線分を $1 \times \delta$ の長方形に置き換える. すなわち掛谷集合の δ-近傍の面積を評価することを考える. このとき, 掛谷集合の δ 近傍の測度の減衰について, 任意の $a > 0$ に対し δ^a よりも早く減衰しないという予想がなされている: $E \subset \mathbb{R}^n$ を掛谷集合とし, 任意の $a > 0$ に対し

$$\frac{|\mathcal{N}(E)|}{\delta^a} \not\to 0 \qquad (\delta \to 0). \tag{1}$$

2 次元ではこの予想が正しいことが知られており, $|\mathcal{N}(E)| \sim 1/\log(1/\delta)$ となることがわかっている.

最初に掛谷予想が解析学に応用されたのは 1970 年代のことである. $\mathbb{R}^n$ 上のテスト関数 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して Fourier 変換を

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx$$

で定義する. このとき, Fourier の反転公式

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi$$

が成立する. Fourier の反転公式はより一般に超関数の意味で成立するが, より定量的な収束の問題を考えたい. そこで, Fourier 部分和を

$$T_R f(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\xi|\le R} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi$$

と定め, $R \to \infty$ としたときの $L^p(\mathbb{R}^n)$ 収束の問題を考える. Fefferman はこのことについて, 次の結果を残している. 驚くべきことに, このことの証明に本質的に (1) が用いられているのである (*cf.*[30, 31]):

定理 (C. Fefferman,1971). $p \neq 2$**,** $n \ge 2$ **に対しては**

$$\|T_R f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \not\to 0. \quad (R \to \infty)$$

$n = 1$ の場合は Hilbert 変換の $L^p(\mathbb{R})$ 有界性から $1 < p < \infty$ で $\|T_R f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ となることが得られ, $p = 2$ の場合は Plancherel の定理から $\to 0$ が成り立つことがわかる. 本稿ではこの内容に関してはこれ以上踏み込まない. 先に挙げた日本語の概説を参照していただきたい.

1.2 Bochner-Riesz 平均

Fourier 部分和に関する上記の結果から, T_R よりも特異性の小さい Bochner-Riesz 平均

$$S_R^\delta f(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\xi|\le R} \left(1 - \frac{|\xi|^2}{R^2}\right)_+^\delta \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi, \quad \delta > 0$$

の有界性に関心が移った. ここで, $t_+^\delta := \max(0, t^\delta)$ である. もちろん問題は,

$$\|S_R^\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つかどうかである. S_R^δ の核は

$$K_\lambda(x) = \pi^{-\lambda}\Gamma(\lambda+1)|x|^{-\frac{n}{2}-\lambda} J_{\frac{n}{2}+\lambda}(2\pi|x|)$$

とかける, ここで, J_μ は Bessel 関数である. $J_\mu(t) = O(t^\mu)$ as $t \to 0$ と, $J_\mu(t) \sim t^{-1/2}$ as $t \to \infty$ より,

$$|K_\lambda(x)| \begin{cases} \le C & \text{as } |x| \to 0 \\ \sim |x|^{-\frac{n}{2}-\lambda-\frac{1}{2}} & \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

となる．したがって, 遠方での核の減衰の仕方から,

$$\frac{2n}{n+1} \leq p \leq \frac{2n}{n-1}$$

で $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界になることが予想されている．やはり $n=2$ のときは解決されている．そして, Bochner-Riesz 平均に関する予想が正しいと, 掛谷集合の δ 近傍に関する予想が正しいという事実が示されている ([34]).

1.3 Fourier 制限問題

Bochner-Riesz 平均の問題は, Fourier 制限問題と呼ばれる問題と深い関わりがある．$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ の Fourier 変換は $\mathbb{R}^n$ 上の連続関数であるので, 例えば $\mathbb{R}^n$ の単位球 $\mathbb{S}^{n-1}$ に Fourier 像を制限することに意味がある． しかし, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ の Fourier 変換は $L^2(\mathbb{R}^n)$ であるので, 測度 0 の部分集合上の制限には意味がない． しかし, 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ の曲率が非零のいくつかの場合について, Fourier 変換の S への制限が可能であることが示されている．

定理 (Tomas-Stein). $1 \leq p \leq \dfrac{2n+2}{n+3}$ **に対し,**

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(d\sigma)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ．ここで, $q = \dfrac{n-1}{n+1}p'$**,** $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ **であり,** $d\sigma$ **は** $\mathbb{S}^{n-1}$ **上の表面測度である.**

表面測度 $d\sigma$ の Fourier 変換を

$$\widehat{d\sigma} := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-ix\cdot\xi}\, d\sigma(\xi)$$

で定義する．これは Bessel 関数を用いて計算することができ, $|x| \to \infty$ としたとき, $\widehat{d\sigma}$ は $|x|^{-\frac{n-1}{2}}$ のオーダーで減衰することが示される．したがって, $\widehat{d\sigma}(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > \dfrac{2n}{n-1}$ が示される．これが, $\mathbb{S}^{n-1}$ 上の任意の有界関数 f に対する $\widehat{fd\sigma}$ に対して成り立つか? という問題が Fourier 制限問題である．これはトーラス上の Laplace 作用素の固有関数に関する L^p 評価や, 分散型偏微分方程式 (dispersive PDE) の解の L^p 評価と関連する．これらに関する優れた概説が [35] にある．そして, **Bochner-Riesz 平均問題 ⇒Fourier 制限問題**という含意が成立する ([34]). 少し本筋から話が逸れるが, 現在までに Fourier 制限問題に関わる日本語の文献は [31] のほかになく, またこの文献についても, Bochner-Riesz 平均に関する関係や, 偏微分方程式との関わりまでは述べられていない. 今後の発展を促す意味でも日本語でまとめられた論説が望まれると考える ([36]).

1.4 掛谷極大関数

ここまで, 掛谷集合の δ 近傍に関する予想, Bochner-Riesz 平均に関する予想, Fourier 制限問題とごく手短に紹介をしてきた. 最後に本稿の主題である掛谷極大関数に関する L^p 有界性に関する予想を紹介する．これに, 掛谷集合の幾何的次元に関する予想を加えて, これら総称して掛谷問題と呼ばれる.

N を十分大きな自然数とし, $\mathbb{R} \ni a > 0$ とする. $\mathcal{B}_{a,N}$ は n-次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ の円柱の集合で, 長軸が Na, 短軸が a の円柱に合同なものであるとする. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ に対し, "小さい" 掛谷極大関数 $K_{a,N}$ を

$$K_{a,N}f(x) := \sup_{x \in R \in \mathcal{B}_{a,N}} \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)|\,dy$$

と定義し, 掛谷極大関数 K_N を $K_N f(x) := \sup_{a>0} K_{a,N}f(x)$, と定義する. つまり, $K_{a,N}$ は dilation のない極大関数である. この極大関数の $L^n(\mathbb{R}^n)$ 上の作用素ノルムの有界性について, $O((\log N)^{\alpha_n})$ for some $\alpha_n > 0$ as $N \to \infty$ のオーダーで評価できることが予想されており, $n = 2$ のときには肯定的に解決されている (Cordoba, [7]). ここで, $L^p(\mathbb{R}^n)$ の p は n に近いところに関心がある. より正確には自明な評価と補間によって, 次のような予想となっている ([31]).

$$\|K_N f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C_{N,p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \tag{2}$$

が次の定数で成り立つ,

$$C_{N,p} := \begin{cases} O(N^{2/p-1}(\log N)^{2/p'}) & 1 < p < 2 \\ O((\log N)^{2/p}) & 2 \leq p < \infty, \end{cases}$$

しかし, $n \geq 3$ のときには部分的な解決しか得られていない.

まとめると次の含意が成り立つ:

Bochner-Riesz 平均 $\Rightarrow$ Fourier 制限問題

$\Rightarrow$ 掛谷極大関数の有界性 $\Rightarrow$ 掛谷集合の幾何的次元

これらの関連をまとめた概説として多くのものがあるが, ここでは [22, 35, 38, 39] を挙げるにとどめる.

本報告の目的は掛谷極大関数に関する研究を中心に解説することである.

注意. 文献によっては上で定義した極大関数は Nikodym 極大関数と呼ばれることが多いようである. しかし, [15, 18, 32, 33] などは上記のものを Kakeya maximal function と呼んでいる. 多くの場合, 2 つの間には同様の結果を導くことができるが, 本稿においてはすべて上記のそれを掛谷極大関数と呼ぶことにする.

2 掛谷極大関数

$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対し, Hardy-Littlewood の極大関数を

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

と定める. 簡単な幾何的考察から,

$$K_N f(x) \leq CN^{n-1} Mf(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

と各点評価ができることがわかるので, Hardy-Littlewood の極大関数の L^p 有界性 $(1 < p < \infty)$ より, 掛谷極大関数の有界性もわかる. だがこの場合

$$\|K_N f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq CN^{n-1} \|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

という粗い評価となる．これに対し, 掛谷極大関数に関する予想は

$$\|K_N f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \le C(\log N)^{\alpha_n}\|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つというもので, $L^p(\mathbb{R}^n)$ の p は n に近いところに関心がある．また, $\log N$ のオーダーが落とせないことが,

$$f(x) = \frac{\chi_{[1/N,1]}(|x|)}{|x|}$$

なる関数を用いて評価するとわかる ([18, 31]).

前節の最後に述べたように, 掛谷極大関数の有界性に関しては, Cordoba によって $n=2$ の場合で証明された．さらに, Bochner-Riesz 平均に関する予想が 2 次元で成立することの別証明を, 2 次元の掛谷極大関数の $L^2(\mathbb{R}^2)$ 評価を用いて与えている ([7, 31]).

高次元になるとこの問題は大変に難しく, 部分的な解決しか得られていない．また関数の形を制限した形で示されたものある．積型関数 $f(x) = f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)$ に対し, Igari([19]) は dilation のない極大関数について

$$\|K_{a,N}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \le C(\log N)^{3/2}\|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

を示した．また, Tanaka はこれを $(\log N)^{(n-1)/n}$ とできることを示した．さらに, 放射型 (radial) 関数 $f(x) = f_0(\|x\|_{l^2})$ に対しては Carbery, Hernández, Soria [6] が

$$\|K_N\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \le C\log N\|f\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

を示し, Tanaka([33]) は $f(x) = f_0(\|x\|_{l^1})$ の形の関数に対し, $K_{a,N}$ が $\le C\log N$ で評価できることを示している.

2.1 極大関数の有界性の証明 ($n=2$)

ここで dilation のない $K_{a,N}$ について,

$$\|K_{a,N}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le C(\log N)^{1/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tag{3}$$

を, “Carbery の補題” を用いて示す方法を紹介しよう．f は非負とする．$\mathbb{R}^2$ を一辺が a の開正方形 $\{Q_\alpha\}$ で各軸に平行なものに分割し, $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ をその中心とする．f の局所可積分性によって, 各 Q_α に対し $R_\alpha \in \mathcal{B}_{a,N}$ を, $\alpha \in R_\alpha$ かつ

$$K_{a,N}f(x) \le \frac{2}{|R_\alpha|}\int_{R_\alpha} f(y)\,dy\chi_{Q_\alpha}(x)$$

とできる．よって (3) は

$$Tf(x) := \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2}\left(\frac{1}{|R_\alpha|}\int_{R_\alpha} f\right)\chi_{Q_\alpha}(x) \quad \text{for } f \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

に対して示せばよい．定義により

$$Tf(x) \le K_{a,N}f(x)$$

が任意の R_α の選び方に対して成り立つ.

次の補題は Carbery[5] による:

Lemma 2.1 *Let T be as above. Then T is of strong type (p,p) if and only if there exists a constant C_q, such that for any sequence $\{\lambda_\alpha\} \subset \mathbb{R}_+$, we have*

$$\int \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2} \frac{\lambda_\alpha}{|R_\alpha|} \chi_{R_\alpha}(x) \right)^q dx \le C_q \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2} |\lambda_\alpha|^q, \tag{4}$$

where q is the conjugate of p. Moreover, the infimum of the constants $(C_q)^{1/q}$ satisfying (4) is $\|T\|_{L^p\to L^p}$.

この補題を $p = q = 2$ で用いて, (4) が $C_2 = \log N$ で成り立つことを示せばよい. 次の量を計算する.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^2} \frac{\lambda_\alpha}{|R_\alpha|} \chi_{R_\alpha}(x) \right)^2 dx \\ &= \sum_\alpha \sum_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta \frac{|R_\alpha \cap R_\beta|}{|R_\alpha||R_\beta|} \\ &= \frac{1}{a^2N^2} \sum_\alpha \sum_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta |R_\alpha \cap R_\beta| \end{aligned}$$

掛谷極大関数の評価には, 2 つの長方形 (高次元では円柱, 直方体) の共通部分を評価するという局面がしばしば現れる. これは “Cordoba の評価” と呼ばれる幾何的技術が用いられる.

Lemma 2.2

$$\sum_\alpha |R_\alpha \cap R_\beta| \lesssim a^2N^2 \log N \ (\forall\beta) \quad \text{and} \quad \sum_\beta |R_\alpha \cap R_\beta| \lesssim a^2N^2 \log N \ (\forall\alpha). \tag{5}$$

Proof.

$$\sum_\beta |R_\alpha \cap R_\beta| \lesssim a^2N^2 \log N, \quad \text{for each } \alpha.$$

を示せばよい. 各 α に対し, 必要ならば回転させて

$$R_\alpha = [-a/2, aN - a/2] \times [-a/2, a/2].$$

としてよい. R_β^∞ によって, R_β を含み, 長さが無限大の帯とする. R_β^∞ が R_α と完全に交差するときが最も共通部分の面積が大きく,

$$|R_\alpha \cap R_\beta| \le |R_\alpha \cap R_\beta^\infty| \le \frac{a^2}{\sin\theta} \wedge a^2N \le \frac{2a^2N}{N\sin\theta + 1},$$

となる. ここで, θ は R_α と R_β^∞ のなす角である. $B_m \subset \mathbb{Z}^2$ を

$$B_m = \{\beta = (m,n) : -N \le n \le N, n \in \mathbb{Z}\}, \quad m \in \mathbb{Z}, -N \le m \le 2N$$

と定める. 各 m について,

$$\sum_{\beta\in B_m} |R_\alpha \cap R_\beta| \le \sum_{\beta\in B_m} \frac{2a^2N}{N\sin\theta + 1} \sim 2\sum_{n=1}^{N} \frac{2a^2N}{n+1} \lesssim a^2N \log N.$$

となり (上の最初の不等号で用いた評価を "Cordoba の評価" という [31]),

$$\sum_{\beta} |R_\alpha \cap R_\beta| = \sum_{m=-N}^{2N} \sum_{\beta \in B_m} |R_\alpha \cap R_\beta| \lesssim a^2 N^2 \log N$$

を得て補題の証明が終わる. ∎

よって,

$$\begin{aligned}
I \lesssim & \frac{1}{a^2N^2} \cdot \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta |R_\alpha \cap R_\beta| \\
= & \frac{1}{a^2N^2} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha} \lambda_\alpha^2 \left(\sum_{\beta} |R_\alpha \cap R_\beta| \right) + \sum_{\beta} \lambda_\beta^2 \left(\sum_{\alpha} |R_\alpha \cap R_\beta| \right) \right\} \\
\lesssim & \frac{1}{a^2N^2} \cdot \frac{1}{2} \left\{ a^2 N^2 \log N \sum_{\alpha} \lambda_\alpha^2 + a^2 N^2 \log N \sum_{\beta} \lambda_\beta^2 \right\} \\
= & \log N \sum_{\alpha} \lambda_\alpha^2,
\end{aligned}$$

となって証明が終わる.

以上で掛谷問題に関連するトピックの紹介と, 掛谷極大関数の評価に関する基本的な技術について紹介をした. 次の節から最近の研究結果の報告をする.

3 球対称型荷重付方向付極大関数

掛谷極大関数を調べるために, 方向付極大関数と呼ばれる作用素によって, 掛谷極大関数を制御できることが Strömberg [29] によって示された. ここで方向付極大関数とは次のように定義される: Ω を $\mathbb{R}^2$ の単位ベクトルの集合で, $|\Omega| = N$ とする. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ に対し, 方向付極大関数 M_Ω を

$$M_\Omega f(x) := \sup_{r>0, \omega \in \Omega} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} |f(x + t\omega)| \, dt$$

と定める. Strömberg ([29]) は Ω の要素が一様に分布している場合に,

$$\|M_\Omega f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \log N \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tag{6}$$

となることを示している. また, Ω が一様に分布している場合, $K_N f(x) \leq C M_\Omega f(x)$. と評価できることから, 掛谷極大関数の有界性を導くことができる. さらに [20] と [21] において, Katz は Ω の方向に無制限に上の評価ができることを示した. 我々の結果は, この Katz の結果に対し, 球対称型 (放射型) 荷重を付けたものである. その際, [1] と [2] でなされている巧妙な幾何的議論を援用した. ここではその概観をすることにする.

$\Omega \subset [0, \pi/4)$ とし, w を $\mathbb{R}^2$ 上の荷重とし, 荷重型方向付極大関数 $M_{\Omega,w}$ を

$$M_{\Omega,w} f(x) := \sup_{x \in R \in \mathcal{B}_\Omega} \frac{1}{w(R)} \int_R |f(y)| w(y) \, dy$$

と定める. ここで, $\mathcal{B}_\Omega$ は平面上の長方形の集合であり, 長軸が x 軸となす各 θ が Ω の要素であるもの全体である. $\Omega_0 := \{\theta_1 > \theta_2 > \cdots > \theta_j > \cdots\} \subset \Omega$, $\theta_0 = \pi/4$ ととり, 各 $j \geq 1$ に対し, $\Omega_j = [\theta_j, \theta_{j-1}) \cap \Omega$ を $\theta_j \in \Omega_0$ となるように定める. 各 Ω_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$ に対し, $\mathcal{B}_{\Omega_j}$ に付随する荷重型極大関数を

$$M_{\Omega_j,w}f(x) := \sup_{x \in R \in \mathcal{B}_{\Omega_j}} \frac{1}{w(R)} \int_R |f(y)| w(y)\, dy, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

と定める.

以下荷重は球対称型 (放射型) とする: $w(x) = w_0(\|x\|_{l^2}) = w_0(|x|)$ for some w_0 on $\mathbb{R}_+$. さらに, 以下の 2 つの条件を仮定する:

Doubling condition: For all $0 \leq r_1 \leq r_1' \leq r_2' \leq r_2 < \infty$ with $r_2 - r_1 = 2(r_2' - r_1')$,

$$\int_{r_1}^{r_2} w_0(r)\, dr \leq C \int_{r_1'}^{r_2'} w_0(r)\, dr; \tag{7}$$

Supremum condition: For all $0 < r_1 < r_2 < \infty$,

$$\sup_{r_1 < r < r_2} w_0(r) \leq \frac{C}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} w_0(r)\, dr. \tag{8}$$

特に, 冪型荷重 $|x|^a$ $(a > 0)$ は以上の条件を満たすことはすぐにわかる.

本報告における主定理は次であるが, 最初の定理は Almost orthgonality principle と呼ばれるものであり, 荷重なしの結果は [1, 2] による:

Theorem 3.1 *Let w be a radial weight satisfying* (7) *and* (8). *Then there exists a constant C independent of Ω such that*

$$\|M_{\Omega,w}\|_{L^2(w)\to L^2(w)} \leq \sup_{j\geq 1} \|M_{\Omega_j,w}\|_{L^2(w)\to L^2(w)} + C\|M_{\Omega_0,w}\|_{L^2(w)\to L^2(w)},$$

where $\|T\|_{L^2(w)\to L^2(w)}$ denotes the operator norm $T : L^2(w) \to L^2(w)$.

Corollary 3.1 *Let Ω be a set of unit vectors on $\mathbb{R}^2$ with cardinality $N \gg 1$ and $w(x) = |x|^a$, $a > 0$. Then there exists a constant C depending on only a such that*

$$\|M_{\Omega,w}\|_{L^2(w)\to L^2(w)} \leq C \log N.$$

証明には次の面積不等式が必要であるが, これは [1, 2] で行われている議論に着想を得ていることが大きく起因する. 図は荷重なしの場合で $\widetilde{R}$ をどのようにして選んでいるかを示したものである.

Lemma 3.1 *Let $B \in \mathcal{B}_i$ and $R \in \mathcal{B}_j$. Suppose that $B \cap R \neq \emptyset$ and the long side length of B is bigger than that of R. Then there exists a rectangle $\widetilde{R} \in \mathcal{B}_0$ such that*

$$\frac{w(R \cap B)}{w(R)} \lesssim \frac{w(\widetilde{R} \cap B)}{w(\widetilde{R})}.$$

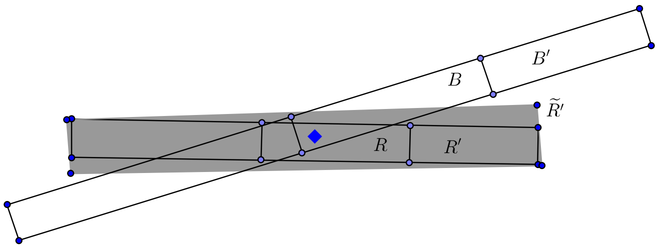

Figure 1: The star shape is the common center of R' and B'. The rectangle $\widetilde{R}'$ is shaded.

3.1 Sketch of the proof

まず次の幾何的補題が必要である.

Lemma 3.2 *Let $R \subset \mathbb{R}^2$ be a rectangle. Then*

$$\frac{w(R)}{|R|} \sim \frac{1}{r_2(R) - r_1(R)} \int_{r_1(R)}^{r_2(R)} w_0(r)\, dr,$$

where $r_1(A) := \inf_{x\in A} |x|$, $r_2(A) := \sup_{x\in A} |x|$.

以下, 本質を見失わないように, 荷重なしの場合を解説する. まず問題を

$$T_\Lambda f(x) := \sum_\alpha \frac{1}{|R_\alpha|} \left(\int_{R_\alpha} f \right) 1_{Q_\alpha}(x) \tag{9}$$

によって線形化する. $T_\Lambda f(x) \le M_\Lambda f(x)$ が成り立っており, M_Λ を T_{Λ_k} によって近似することができる. Carbery の補題を再掲する:

Lemma 3.3 (Non-weight version [5]) *T_Λ is of strong type $(2,2)$ if and only if there exists a constant C_2, such that for any sequence $(\lambda_\alpha) \subset \mathbb{R}_+$, we have*

$$\int \left(\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{1}{|R_\alpha|} 1_{R_\alpha} \right)^2 \le C_2 \sum_\alpha |\lambda_\alpha|^2. \tag{10}$$

Moreover, the infimum of C_2 is $\|T_\Lambda\|_{2\to 2}^2$.

この補題によって, 問題を左辺の積分に注目できる. 我々はこの定数について,

$$C_2^{1/2} = \sup_{j\ge 1} \|M_{\Omega_j}\|_{2\to 2} + C\|M_{\Omega_0}\|_{2\to 2}.$$

を示せばよいことになる. 中の積分は 2 乗であるから計算ができて,

$$\begin{aligned} I &:= \int \left(\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{1}{|R_\alpha|} 1_{R_\alpha}(x) \right)^2 dx = \int \left(\sum_l \sum_{\alpha: R_\alpha \in \Omega_l} \lambda_\alpha \frac{1}{|R_\alpha|} 1_{R_\alpha} \right)^2 \\ &= \int \sum_l \left(\sum_{\alpha: R_\alpha \in \Omega_l} \lambda_\alpha \frac{1}{|R_\alpha|} 1_{R_\alpha} \right)^2 + 2 \sum_l \sum_{j<l} \int \sum_{R_\alpha \in \Omega_l} \sum_{R_\beta \in \Omega_j} \lambda_\alpha \lambda_\beta \frac{1}{|R_\alpha||R_\beta|} 1_{R_\alpha} 1_{R_\beta} \\ &=: A + B. \end{aligned}$$

となる. A については簡単に処理することができるが, B に含まれる $\dfrac{|R_\alpha \cap R_\beta|}{|R_\alpha||R_\beta|}$ の処理が難しい. 荷重付の議論でも Carbery の補題が成立するので, 同様の議論が可能である. したがって, $\dfrac{w(R_\alpha \cap R_\beta)}{w(R_\alpha)w(R_\beta)}$ の評価をしなければならない. 我々はこの部分に面積不等式を適用し, 方向に関してうまく分類をした.

3.2 Dilation のない場合の荷重付極大関数

方向付極大関数によって荷重付掛谷極大関数

$$K_{N,w}f(x) := \sup_{x \in R \in \mathcal{B}_N} \frac{1}{w(R)} \int_R |f(y)| w(y)\, dy$$

を評価するために Corollary 3.1 を適用するためには, 荷重が $w(x) = |x|^a$ $(a > 0)$ という冪型荷重に限られてしまう. Supremum condition と doubling condition だけで評価できることが予想されるが, これは今後の課題となっている. しかし, 次の dilation のない掛谷極大関数

$$K^a_{N,w}f(x) := \sup_{x \in R \in \mathcal{B}^a_N} \frac{1}{w(R)} \int_R |f(y)| w(y)\, dy$$

については, 次の評価を示すことができる:

$$\|K^a_{N,w}f\|_{L^2(w)} \le C(\log N)^{1/2} \|f\|_{L^2(w)}$$

証明は 2 節で示した方法による. 荷重付 Carbery の補題によって次のような評価を行う.

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \lambda_\alpha \frac{w(Q_\alpha)}{w(R_\alpha)} \chi_{R_\alpha}(x) \right)^2 w(x)\, dx \\
&= \sum_\alpha \sum_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta \frac{w(Q_\alpha)w(Q_\beta)}{w(R_\alpha)w(R_\beta)} w(R_\alpha \cap R_\beta) \\
&= \sum_\alpha \sum_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta \frac{\sqrt{w(Q_\alpha)w(Q_\beta)}}{w(R_\alpha)w(R_\beta)} w(R_\alpha \cap R_\beta) \cdot \sqrt{w(Q_\alpha)w(Q_\beta)}
\end{aligned}$$

補題 3.2 により

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{w(Q_\alpha)w(Q_\beta)}}{w(R_\alpha)w(R_\beta)} w(R_\alpha \cap R_\beta) \\
&\sim \frac{1}{N^2} \frac{\left(\frac{1}{|\operatorname{rad}(Q_\alpha)|} \int_{\operatorname{rad}(Q_\alpha)} w_0 \right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{|\operatorname{rad}(R_\alpha)|} \int_{\operatorname{rad}(R_\alpha)} w_0} \cdot \frac{\left(\frac{1}{|\operatorname{rad}(Q_\beta)|} \int_{\operatorname{rad}(Q_\beta)} w_0 \right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{|\operatorname{rad}(R_\beta)|} \int_{\operatorname{rad}(R_\beta)} w_0} \cdot \frac{|R_\alpha \cap R_\beta|}{|\operatorname{rad}(R_\alpha \cap R_\beta)|} \int_{\operatorname{rad}(R_\alpha \cap R_\beta)} w_0 \\
&\lesssim \frac{1}{N^2} \frac{\left(\sup_{\operatorname{rad}(Q_\alpha)} w_0 \right)^{\frac{1}{2}}}{\sup_{\operatorname{rad}(R_\alpha)} w_0} \cdot \frac{\left(\sup_{\operatorname{rad}(Q_\beta)} w_0 \right)^{\frac{1}{2}}}{\sup_{\operatorname{rad}(R_\beta)} w_0} \cdot |R_\alpha \cap R_\beta| \sup_{\operatorname{rad}(R_\alpha \cap R_\beta)} w_0,
\end{aligned}$$

ここで, $|Q_\alpha|=1$ と, supremum condition を最後の不等式で用いている. 任意の α に対して $Q_\alpha \subset 2R_\alpha$ なので, $\mathrm{rad}\,(Q_\alpha) \subset \mathrm{rad}\,(2R_\alpha)$ となり, w_0 の doubling condition を用いて,

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{N^2}\left(\frac{\sup\limits_{\mathrm{rad}\,(Q_\alpha)} w_0}{\sup\limits_{\mathrm{rad}\,(R_\alpha)} w_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sup\limits_{\mathrm{rad}\,(Q_\beta)} w_0}{\sup\limits_{\mathrm{rad}\,(R_\beta)} w_0}\right)^{\frac{1}{2}} |R_\alpha \cap R_\beta| \left(\frac{\sup\limits_{\mathrm{rad}\,(R_\alpha\cap R_\beta)} w_0}{\sup\limits_{\mathrm{rad}\,(R_\alpha)} w_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sup\limits_{\mathrm{rad}\,(R_\alpha\cap R_\beta)} w_0}{\sup\limits_{\mathrm{rad}\,(R_\beta)} w_0}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \frac{1}{N^2}|R_\alpha \cap R_\beta|.
\end{aligned}
$$

Therefore,

$$
\begin{aligned}
I \lesssim & \frac{1}{N^2}\cdot \sum_\alpha \sum_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta \sqrt{w(Q_\alpha)w(Q_\beta)}|R_\alpha \cap R_\beta| \\
= & \frac{1}{N^2}\cdot\frac{1}{2}\left\{\sum_\alpha \lambda_\alpha^2 w(Q_\alpha)\left(\sum_\beta |R_\alpha\cap R_\beta|\right) + \sum_\beta \lambda_\beta^2 w(Q_\beta)\left(\sum_\alpha |R_\alpha \cap R_\beta|\right)\right\} \\
\lesssim & \frac{1}{N^2}\cdot\frac{1}{2}\left\{N^2 \log N \sum_\alpha \lambda_\alpha^2 w(Q_\alpha) + N^2 \log N \sum_\beta \lambda_\beta^2 w(Q_\beta)\right\} \\
= & \log N \sum_\alpha \lambda_\alpha^2 w(Q_\alpha).
\end{aligned}
$$

4 変動指数 Lebesgue 空間

この節から変動指数 Lebesgue 空間について考察する. これら理論は Kovácik と Rákosiík([23]) によって大きな進歩を遂げ, 基本的な性質が調べられた. 次に Hardy-Littlewood の極大関数 M の $L^{p(\cdot)}$ における有界性の条件が Cruz-Uribe, Fiorenza, Neugebauer [10] and Nekvinda [25] によって調べられた. 彼らは独立に有界性のための $p(\cdot)$ の十分条件が与えられた. Diening [12] は共役指数 $p'(\cdot)$ を用いて必要十分条件についての研究を行った. 彼は $\Omega=\mathbb{R}^n$ の場合について, M が $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界になることと, $L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界となることが同値であることを示した. 近年, Cruz-Uribe, Fiorenza, Martell, Pérez [9] は M が有界となるような $p(\cdot)$ に対して, いくつかの重要な作用素, 特異積分, 分数冪積分作用素が $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 上有界となることを示した [10, 11, 12, 13, 25]. また, Nakai, Sawano [24] は変動指数 Hardy 空間と一般化 Campanato 空間を grand 極大関数を用いて調べ多くの重要な成果を挙げている. この節では掛谷極大関数を考察する.

4.1 準備と主要結果

可測関数 $p(\cdot):\mathbb{R}^n \to [1,\infty)$ に対し, 変動指数 Lebesgue 空間 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ を

$$
\rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx < \infty, \quad \text{for some } \lambda > 0
$$

を満たす可測関数の集合と定義する. $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ はノルム

$$
\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\{\lambda > 0 :\ \rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) \le 1\}.
$$

を備えたBanach空間となる．$p(x) \equiv p_0$ のときは $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ は通常の $L^p(\mathbb{R}^n)$ と一致する．

Definition 4.1 (a) $p(\cdot)$ が *locally log-Hölder* 連続であるとは, 定数 $c_0 > 0$ が存在し

$$|p(x) - p(y)| \log\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \leq c_0, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n,\ |x-y| < 1/2.$$

となることである．

(b) $p(\cdot)$ が *log-Hölder continuous at infinity* とは, 定数 $c_\infty > 0$ と $p(\infty)$ が存在し,

$$|p(x) - p(\infty)| \log(e + |x|) \leq c_\infty, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

となることである．

(c) 可測集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ に対し,

$$p_-(E) = \operatorname*{ess\,inf}_{x \in E} p(x) \text{ and } p_+(E) = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} p(x)$$

と定める．$E = \mathbb{R}^n$ の場合には単に p_-, p_+ とかく．

主定理は次である (see also [8]):

Theorem 4.1 *Let $N \gg 1$ and $2 \leq p_- \leq p_+ < \infty$. Suppose that $p(\cdot)$ is locally log-Hölder continuous and log-Hölder continuous at infinity. Then K_N is bounded from $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)$ to $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)$ and*

$$\|K_N f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)} \leq C N^{1-\frac{p_-}{p_+}} (\log N)^{\frac{2}{p_-}} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)}, \tag{11}$$

where the constant C is independent of N.

注意. (1) $p(\cdot)$ が定数であった場合, $1 - \dfrac{p_-}{p_+} = 0$ となって, 古典的な結果 (2) の $2 \leq p < \infty$ の場合と一致する．
(2) 一見すると,

$$\|K_N f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)} \leq C(\log N)^{2/p_-} \text{ when } 2 \leq p_- \leq p_+ < \infty.$$

となることが期待されるが, N の指数を除くことはできない．すなわち次が成り立つ．

Theorem 4.2 *Let $N \gg 1$ and $1 < p_- < p_+ < \infty$. Suppose that K_N is bounded from $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)$ to $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)$ and that $p(\cdot)$ is continuous. Then there exist a positive constant C, independent of N, and a small constant $\varepsilon > 0$ such that*

$$\|K_N\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2) \to L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)} \geq C N^{\varepsilon}.$$

5　終わりに

本稿の後半は私自身の結果に傾倒してしまい, 他の研究者の最新の結果を紹介することができなかった. これについては [30, 38] を参照していただきたい. また今回の合同シンポジウムは微分方程式に関心を持たれる方々が多く参加されていることと思われるが, こちらの方面について述べることができなかったのは自身の力不足によるものである. この方面への応用については [35] を参照していただきたい.

References

[1] A. Alfonseca, F. Soria, and A. Vargas, *A remark on maximal operators along directions in* $\mathbb{R}^2$, Math. Res. Lett., **10** (2003), no. 1, 41–49.

[2] ———, *An almost-orthogonality principle in* L^2 *for directional maximal functions*, Harmonic analysis at Mount Holyoke (South Hadley, MA, 2001), 1–7, Contemp. Math., **320**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[3] 新井仁之, ルベーグ積分講義, 日本評論社, 2003.

[4] C. Capone, D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, *The fractional maximal operator on variable* L^p *spaces*, Revista Mat. Iberoamericana **3(23)** (2007), 747–770.

[5] A. Carbery, *Covering Lemmas Revisited.* Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), **31** (1988), no. 1, 145–150.

[6] A. Carbery, E. Hernández and F. Soria, *Estimates for the Kakeya maximal operator on radial functions in* $\mathbb{R}^n$, in Harmonic Analysis (S. Igari, ed.), ICM-90 Satellite Conference Proceedings, Springer-Verlag, Tokyo, 1991, 41–50.

[7] A. Córdoba, *The Kakeya maximal function and the spherical summation multiplier*, Amer. J. math., **99** (1977), no. 1, 1–22.

[8] D. Cruz-Uribe, L. Diening and A. Fiorenza, *A new proof of the boundedness of maximal operators on variable Lebesgue spaces*, Boll. Unione Mat. Ital. (9) **2** (2009), no. 1, 151–173.

[9] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, J. M. Martell and C. Perez, *The boundedness of classical operators on variable* L^p *spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math **31** (2006), 239–264.

[10] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza and C. J. Neugebauer, *The maximal function on variable* L^p *spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math **28** (2003), 223–238, and **29** (2004), 247–249.

[11] L. Diening, *Maximal function on generalized Lebesgue spaces* $L^{p(\cdot)}$, Math. Inequal. Appl. **7(2)** (2004), 245–253.

[12] ———, *Maximal functions on Musielak-Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces*, Bull. Sci. Math. **129** (2005), 657–700.

[13] ———, *Habilitation*, Universität Freiburg, 2007.

[14] L. Diening, P. Hästö and A. Nekvinda, *Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces*, In FSDONA04 Proceedings (Dravek and Rakosnik (eds.); Milovy, Czech Republic, pages 38–58. Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, (2005).

[15] Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Grad. Studies in Math. **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[16] C. Fefferman, The multiplier problem for the ball, *Ann. of Math.*, (2), **94** (1972), 330–336.

[17] J. García-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[18] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, volume 250 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2nd edition, 2008.

[19] S. Igari, *On Kakeya's maximal function*, Proc. Japan Acad. Ser. A, **62** (1986), no. 8, 292–293.

[20] N. H. Katz, *Maximal operators over arbitrary sets of directions*, Duke Math. J., **97** (1999), no. 1, 67–79.

[21] ——, *Remarks on maximal operators over arbitrary sets of directions*, Bull. London Math. Soc., **31** (1999), no. 6, 700–710.

[22] M. H. Kim, *The Kakeya Problem in Harmonic Analysis*, preprint.

[23] O. Kovácik and J. Rákosník *On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$*, Czechoslovak Math. J. **41**(116) (1991), no.4, 592–618.

[24] E. Nakai and Y. Sawano, *Hardy spaces with variable exponents and generalized Campanato spaces*, J. Funct. Anal. **262** no. 9 (2012), 3665–3748.

[25] A. Nekvinda, *Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$*, Math. Inequal. Appl. **7** (2004), 255–265.

[26] H. Saito and H. Tanaka, *Directional maximal operators and radial weights on the plane*, Bull. Aust. Math. Soc, to appear.

[27] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, no. 30, Princeton University Press, New Jersey (1970).

[28] ———, *Harmonic Analysis*: *Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, (1993).

[29] J.-O. Strömberg, *Maximal functions associated to rectangles with uniformly distributed directions*, Ann. Math. (2), **107** (1978), no. 2, 399–402.

[30] 田中仁, 掛谷予想について, 「数学」日本数学会， 57 (2005) no. 2， 113–129.

[31] 薮田公三, 中路貴彦, 佐藤圓治, 田中仁, 宮地晶彦, 古典調和解析, 朝倉書店, 2008.

[32] H. Tanaka, *An elementary proof of an estimate for the Kakeya maximal operator on functions of product type*, Tohoku Math. J. (2), **48** (1996), no. 3, 429–435.

[33] ———, *An estimate for the Kakeya maximal operator on functions of square radial type*, Tokyo J. Math., **22** (1999), no. 2, 391–398.

[34] T. Tao, *The Bochner-Riesz conjecture implies the restriction conjecture*, Duke. Math. J., **96**, no.2 (1999), 363–375.

[35] T. Tao, *From rotating needles to stability of waves: emerging connections between combinatorics, analysis, and PDE*, Notices Amer. Math. Soc., **48**, no.3 (2001), 294–303.

[36] T. Tao, *Recent progress on the Restriction conjecture*, In: Fourier analysis and convexity, Apple. Numer. Harmon. Anal., 2004, 217–243.

[37] T. Wolff, *An improved bound for Kakeya type maximal functions*, Rev. Mat. Iberoamericana, **11** (1995) 651–674.

[38] ———, *Recent work connected with the Kakeya problem*, Prospects in Mathematics (Princeton, New Jersey, 1996) (Hugo Rossi, ed.), American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, pp. 129–162.

[39] ———, *Lectures on harmonic analysis*, In: With a foreword by Charles Fefferman and preface by Izabella Łaba, (eds. I. Łaba and C. Shubin), Univ. Lecture Ser., **29**, Amer. math. Soc., Providence, RI, 2003.

Simple stably projectionless C*-環について

縄田 紀夫
大阪教育大学

概 要

本講演では, 単純 stably projectionless C*-環について説明する. 基本的には, [25] で得られた有限群作用の結果にもとづくものである. 特に, stably projectionless C*-環への有限群作用に対して Rohlin 性を導入して, Rohlin 性を持つ作用の分類を考える.

1 定義および基本的なこと

1.1 作用素環

単純 stably projectionless C*-環は特別な作用素環であるので作用素環の定義から始める. 作用素環の参考文献として [2] を挙げておく.

定義 1.1. $B(H)$ をヒルベルト空間上の有界線形作用素全体として A を $B(H)$ の $*$ 部分環とする. (ただし, $*$ は随伴作用素をとるという演算である.)
(1) A が作用素ノルム位相に関して閉集合であるとき, C*-環という.
(2) A が弱作用素位相に関して閉集合であるとき, von Neumann 環という.

von Neumann 環は C*-環であるが, C*-環と考えて研究されることはあまりない. C*-環は Banach $*$-環で C*-条件 $\|a^*a\| = \|a\|^2$ を満たすものと抽象的に定義することもできる. von Neumann 環も前双対を持つ C*-環として抽象的に特徴付けられる. 可換 C*-環は (局所コンパクト)Hausdorff 空間上の複素数値連続関数環と同型になり可換 von Neumann 環は測度空間上の本質的有界な可測関数環と同型になる.

C*-環と von Neumann 環における研究手法はとても異なる. しかし, von Neumann 環の理論の類似を C*-環で考えることによって成功した理論が多くあったり C*-環の理論で von Neumann 環の研究に役に立ったものもあったりして互いに影響を与えながら研究されている. 大雑把に述べると作用素環論では違う作り方をした二つの環がいつ同型になるかということが問題になる. また, 環の性質として群作用や不変量について研究することが中心的課題である.

1.2 単純 C*-環と単位元を持たない C*-環

可換 C*-環は (局所コンパクト)Hausdorff 空間上の複素数値連続関数環と同型になると述べたが, 基本的に作用素環論で興味があるのは非可換な対象である. また, すべての (局所コンパクト)Hausdorff 空間について考えるということは現実的ではない. このことから本質的に非可換な対象に絞って研究を行うことは自然なことである. 本質的に非可換な対象とは何かということは議論になることであるが, この講演では単純 C*-環についてだけ議論する. (可換な単純 C*-環は $\mathbb{C}$ のみである.)

定義 1.2. C*-環 A は非自明な閉両側イデアルを持たないとき, 単純 (simple) であるという.

C*-環は単位元を持つとは限らない．無限次元可分ヒルベルト空間上のコンパクト作用素全体 $K(\ell^2(\mathbb{N}))$ はそのような例である．特に $K(\ell^2(\mathbb{N}))$ は単純 C*-環である．単位元を持たない C*-環 A は，単位元 (恒等作用素) をひとつ加えることによって作られる C*-環 $\tilde{A}$ または乗法子環 $M(A)$ に埋め込んで考えることが多い．また, 近似単位元を用いて解析される．

定義 1.3. C*-環 A の近似単位元とは, A の縮小正作用素からなるネット $\{h_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で任意の $x \in A$ に対して $\lim h_\lambda x = x$ を満たすものである[1]．

任意の C*-環は近似単位元を持つ．また, 可分 C*-環に対しては列で近似単位元を取ることができる．

1.3 C*-環の例

作用素環の例は群や力学系を利用して構成されることが多いが，帰納極限を使って C*-環を作る方法と Cuntz 環について紹介する．

行列環 $M_n(\mathbb{C})$ を k 個テンソルしてできる環 $M_n\mathbb{C} \otimes \cdots M_n(\mathbb{C})$ を A_k として，A_k は A_{k+1} に $a \to a \otimes 1$ という準同型写像で埋め込まれているとする．このとき, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ は A_k から来る C*-ノルムを持った代数的な環になる．この代数的な環と C*-ノルムに対して完備化を行うことによって n^∞ 型 UHF (uniformly hyperfinite) 環 M_{n^∞} という C*-環を構成することができる[2]．UHF 環は単純 C*-環である．

より一般に C*-環の帰納系 (A_k, φ_k) があったときに同じような方法で帰納極限 C*-環 $\varinjlim(A_k, \varphi_k)$ を構成することができる．特に A_k のことを building block と呼ぶ．Building block が有限次元 C*-環のときに構成される帰納極限 C*-環を AF (approximately finite dimensional) 環という．明らかに UHF 環は AF 環であるが，UHF 環でない AF 環も多く存在する．可分ヒルベルト空間上のコンパクト作用素全体 $K(\ell^2(\mathbb{N}))$ は AF 環である．

2 以上の自然数 n に対して Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$ とは，関係式

$$S_i^* S_j = \delta_{ij} 1, \quad \sum_{i=1}^{n} S_i S_i^* = 1$$

を満たす n 個の元 $S_1, ..., S_n$ で生成される C*-環である．ただし, δ_{ij} はクロネッカー記号である．また, $n = \infty$ に対しても一つ目の関係式だけを満たす $S_1, S_2, ...$ で生成される C*-環として考える．Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$ は生成元のとり方によらずに一意的に定まる単純 C*-環である．

1.4 Stably projectionless C*-環

C*-環 A の元 p が射影であるとは $p = p^* = p^2$ を満たすときにいう．

定義 1.4. $A \otimes K(\ell^2(\mathbb{N}))$ が 0 以外に射影を持たない C*-環 A を stably projectionless C*-環と呼ぶ．

C*-環 A が 0 でない射影 p を持つとき，$K(\ell^2(\mathbb{N}))$ の階数 1 の射影 e をとってきて $p \otimes e \in A \otimes K(\ell^2(\mathbb{N}))$ を考えると, これは 0 でない射影である．よって, stably projectionless C*-環自体も 0 以外に射影を持たない C*-環である．特に, stably projectionless C*-環は単位元も持たない．Stably projectionless C*-環の最も簡単な例としては実数上の無限遠点で 0 になる複素数値連続関数環 $C_0(\mathbb{R})$ がある．この例を考えると C*-環として基本的なものであると感じるかもしれないが, 単純 stably projectionless C*-環については解明さ

[1] 単調増加性を仮定するときもある

[2] n^∞ 型 UHF 環は構成法から $\bigotimes_{k=1}^{\infty} M_n(\mathbb{C})$ とも書かれる．

れていないことが多い．作用素環の解析では射影が重要な働きをするので, 単純 stably projectionless C*-環はよくわからない対象と考えられている．特に AF 環や Cuntz 環は射影を豊富に持つ．

1.5　トレイス

C*-環の正作用素全体を A_+ と書く．

定義 1.5. C*-環 A のトレイスとは, 恒等的に 0 でない関数 $\tau : A_+ \to [0, \infty]$ で以下の条件[3]を満たすものである．
(i) 任意の $a, b \in A_+,\ \lambda \geq 0$ に対して $\tau(\lambda a) = \lambda\tau(a), \tau(a+b) = \tau(a) + \tau(b)$.
(ii) 任意の $x \in A$ に対して $\tau(x^*x) = \tau(xx^*)$.
(iii) $\{a \in A_+ : \tau(a) < \infty\}$ は A_+ で稠密．
(iv) τ は下半連続．

ネット $\{h_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A の近似単位元としたとき, $\lim \tau(h_\lambda) < \infty$ となるトレイスを有界トレイスという．また, $\lim \tau(h_\lambda) = 1$ となる有界トレイスをトレイス状態という．単位元を持つ C*-環のトレイスは全て有界である．トレイス全体は正錐でありトレイス状態全体は凸集合である．

UHF 環はトレイス状態を唯一つ持ち非有界トレイスを持たない C*-環である．一方, トレイス状態全体が弱 $*$ 位相でコンパクトにならないような (単位元を持たない) 単純 AF 環が存在する．Cuntz 環はトレイスを持たない C*-環である．

1.6　群作用

作用素環論において群作用の研究は中心的課題である．群作用の分類の歴史, 意義, 先行研究については [10], [13], [21] 等を参照されたい．ここでは, 基本的な定義について説明する．

ユニタリ $u \in U(\tilde{A})$ に対して, A の内部自己同型写像 $\mathrm{Ad}u$ を $\mathrm{Ad}u(x) = uxu^*$ と定める．内部自己同型写像の集合を $\mathrm{Inn}(A)$ と書く．

定義 1.6. (1) 局所コンパクト群 G から C*-環 A の自己同型群 $\mathrm{Aut}(A)$ への連続準同型を，G の A への作用という．ただし, $\mathrm{Aut}(A)$ の位相は各点収束位相である．
(2) G の A への作用 α が外部的であるとは, 任意の $g \in G \setminus \{\iota\}$ に対して $\alpha_g \notin \mathrm{Inn}(A)$ となるときにいう．

局所コンパクト群 G の C*-環 A への作用 α があったとき, 接合積 C*-環 $A \rtimes_\alpha G$ を構成することができる．これは代数の半直積の一般化であるが, ノルムの定義によって full と reduced という二つの種類の接合積 C*-環がある．G が従順群の場合はこの二つのノルムは一致する．(本講演では, 有限群および実数群の接合積しか考えない．厳密な定義については [2] を参照のこと.)

群作用の同値関係を二つ定義する．

定義 1.7. α と β を局所コンパクト G の C*-環 A への作用とする．
(1) α-コサイクル u とは，G から $M(A)$ のユニタリ群 $U(M(A))$ への連続写像 u で任意の $g, h \in G$ に対して
$$u_{gh} = u_g\alpha_g(u_h)$$
を満たすものである．
(2) ある自己同型写像 $\theta \in \mathrm{Aut}(A)$ が存在して任意の $g \in G$ に対して
$$\theta \circ \alpha_g \circ \theta^{-1} = \beta_g$$

[3](iii) と (iv) の条件を除いたものをトレイスとする場合もある

が成り立つとき，α と β は共役であるという．
(3) ある α-コサイクル u とある自己同型写像 $\theta \in \mathrm{Aut}(A)$ が存在して任意の $g \in G$ に対して

$$\theta \circ \mathrm{Ad}\, u_g \circ \alpha_g \circ \theta^{-1} = \beta_g$$

が成り立つとき，α と β はコサイクル共役であるという．

共役性の方がコサイクル共役性よりも強く自然な同値関係と思うかもしれないが, 作用素環論的応用ではコサイクル共役性で十分である．実際, α と β がコサイクル共役ならば $A \rtimes_\alpha G$ と $A \rtimes_\beta G$ は同型になる．

2 単純 stably projectionless C*-環の例

2.1 帰納極限による例

$\frac{m}{n}$ が 2 以上の自然数になる $n, m \in \mathbb{N}$ に対して C*-環 $A(n,m)$ を

$$A(n,m) := \left\{ f \in C([0,1]) \otimes M_m(\mathbb{C}) \mid \begin{array}{c} f(0) = \mathrm{diag}(\overbrace{c, .., c}^{l}, 0_n), f(1) = \mathrm{diag}(\overbrace{c, .., c}^{l+1}), \\ c \in M_n(\mathbb{C}) \end{array} \right\}$$

と定める．ただし, $l = \frac{m}{n} - 1$ である．$A(n,m)$ は単純でない stably projectionless C*-環となることが容易にわかる．この $A(n,m)$ を building block とする帰納極限 C*-環を考えて単純 stably projectionless C*-環を構成する．帰納極限 C*-環で単純 C*-環を構成する方法は, C*-環の専門家の間ではよく知られている．具体的には, (n_k, m_k) という上の条件を満たす自然数の組を取ってきて準同型写像 $\varphi_k : A(n_k, m_k) \to A(n_{k+1}, m_{k+1})$ を作る必要がある．準同型写像 φ_k は，適当な連続関数 $\xi_i : [0,1] \to [0,1]$ と適当なユニタリの連続 path $u : [0,1] \to U(M_{m_{k+1}}(\mathbb{C}))$ を使って

$$\varphi_k(f) = u \begin{pmatrix} f \circ \xi_1 & & & \\ & f \circ \xi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & f \circ \xi_{\frac{m_{k+1}}{m_k}} \end{pmatrix} u^*$$

という形で定義される．帰納極限 C*-環を単純にするためには ξ_i を上手く選んでくることが重要である．具体的な $(n_k, m_k), \xi_i, u$ の定義は, [11] や [23] 等を参照されたい．

Razak によって $A(n,m)$ を building block とする単純帰納極限 C*-環はトレイス全体で分類されることが証明されている [26]．このことから $A(n,m)$ を building block とする帰納極限 C*-環で単純かつトレイス状態を唯一つ持ち，非有界トレイスを持たないものは一意的に定まる．その C*-環をこの講演では, $\mathcal{W}_2$ と書く．Razak による分類定理から次の系を得る．

系 2.1. (1) B を UHF 環とすると

$$B \otimes \mathcal{W}_2 \cong \mathcal{W}_2.$$

(2) 任意の $\mathcal{W}_2$ の自己同型写像 α は近似内部的である．つまり, $\alpha \in \overline{\mathrm{Inn}(A)}$ となる．

Razak の分類定理に含まれない多くの単純 stably projectionless C*-環が $A(n,m)$ よりも一般的な building block を使って帰納極限 C*-環として構成されている [4].

2.2 $\mathbb{R}$ 接合積による例

定義 2.2. C*-環 A への $\mathbb{R}$ 作用 α がトレイススケーリング作用であるとは, ある A 上のトレイス τ と実数 $\lambda \neq 0$ が存在して

$$\tau \circ \alpha_t = e^{-\lambda t}\tau$$

となるときにいう.

トレイススケーリング作用を持つ単純 C*-環は stably projectionless C*-になることがわかる. トレイススケーリング作用は, von Neumann 環論で III 型因子環の構造定理に関連して重要なものである ([30] 参照のこと). 岸本と Kumjian はこの構造定理の類似を C*-環で考えて, 多くの単純 stably projetionless C*-環がトレイスを持たない単純 C*-環の $\mathbb{R}$ 接合積として構成できることを示した [18]. 特に, Cuntz 環への $\mathbb{R}$ 作用 α で, $\mathcal{O}_n \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ が定数倍を除いて唯一つのトレイスを持つ単純 stably projectionless C*-環になるものが存在する. ([17] も参照のこと.)

2.3 Cuntz 環 $\mathcal{O}_2$ と $\mathcal{W}_2$ の関係

Robert は Razak の分類定理よりも広いクラスの単純 stably projectionless C*-環に対しての分類定理を示した [27]. さらに, Robert は分類定理と [5],[18],[19],[3] の結果を利用して次の定理を示した.

定理 2.3. (Robert)
ある $\mathcal{O}_2$ への $\mathbb{R}$ 作用 α が存在して

$$\mathcal{O}_2 \rtimes_\alpha \mathbb{R} \cong \mathcal{W}_2 \otimes K(\ell^2(\mathbb{N})).$$

上の定理から $\mathcal{W}_2 \otimes K(\ell^2(\mathbb{N}))$ はトレイススケーリング作用を持つこともわかる. [18] で構成されたすべての単純 stably projectionless C*-環 $\mathcal{O}_2 \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ が $\mathcal{W}_2 \otimes K(\ell^2(\mathbb{N}))$ と同型になるかどうかということはわかっていない. 同型になるのが自然である.

3 有限群作用

3.1 Rohlin 性

作用素環への群作用の研究において Rohlin 性という性質は大変重要な性質である. この性質はエルゴード理論における Rohlin の補題の類似であるが, 単位元を持った C*-環への有限群作用に対しては泉によって導入され, 基本的な性質が研究された [8],[9]. ([7],[16] も参照のこと.)

泉による単位元を持った C*-環への有限群作用の Rohlin 性の定義は次のものである.

定義 3.1. (泉)
有限群 G の単位元を持った C*-環 A への作用 α が Rohlin 性を持つとは, 任意の $\epsilon > 0$ と A の有限集合 F に対して A の射影の族 $\{e_g\}_{g\in G}$ でその和が 1 であり

$$\|\alpha_g(e_h) - e_{gh}\| < \epsilon, \quad g, h \in G,$$

$$\|xe_g - e_g x\| < \epsilon, \quad x \in F, g \in G$$

を満たすものが存在するときにいう.

Rohlin 性の定義は中心列 C*-環を利用すると簡明に書くことができる．C*-環 A に対して

$$c_0(A) := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}, A) \mid \lim_{n\to\infty} \|a_n\| = 0\},\ A^\infty := \ell^\infty(\mathbb{N}, A)/c_0(A)$$

とする．A を定数列として A^∞ に埋め込み,

$$A_\infty := A^\infty \cap A' = \{x \in A^\infty : xa = ax,\ \forall a \in A\}$$

と定めて A_∞ を A の中心列 C*-環と呼ぶ. 任意の A の自己同型写像 α は A_∞ の自己同型写像を誘導する．その誘導した A_∞ の自己同型写像も同じ記号 α で表記する．中心列 C*-環を用いると有限群作用 α が Rohlin 性を持つということは, A_∞ の射影の族 $\{e_g\}_{g\in G}$ で

$$\sum_{g\in G} e_g = 1, \qquad \alpha_g(e_h) = e_{gh}, \quad g, h \in G$$

となるものが存在すると簡明に述べることができる.

例 3.2. 有限群 G に対して, λ_g を G の左正則表現を表す $M_{|G|}(\mathbb{C})$ のユニタリ行列とする．UHF 環 $\bigotimes_{k=1}^\infty M_n(\mathbb{C})$ への G 作用 γ^G を

$$\gamma_g^G := \bigotimes_{k=1}^\infty \mathrm{Ad}\ \lambda_g$$

と定めると, γ^G は Rohlin 性を持つ.

Rohlin 性の定義は単位元の射影による分解を使っているので, stably projectionless C*-環への作用に対して (作用の分類のために意味のある)Rohlin 性を定義することは自明なことではない．特に, $\tilde{A}$ を考えて定義しても意味がない．Kirchberg によって提唱された中心列 C*-環を使って Rohlin 性を定義する.

3.2 Kirchberg の中心列 C*-環

Kirchberg によって提唱された中心列 C*-環 [14] について説明する．([24],[31] も参照のこと.)

C*-環 A に対して

$$\mathrm{Ann}(A, A^\infty) := \{(a_n)_n \in A^\infty \cap A' \mid (a_n)_n a = 0\}$$

と定める．容易に $\mathrm{Ann}(A, A^\infty)$ は A_∞ の閉両側イデアルであることを確かめることができる．ただし, $\mathrm{Ann}(A, A^\infty)$ は A^∞ の両側イデアルにはならないことを注意しておく.

定義 3.3. C*-環 A に対して

$$F(A) := A_\infty/\mathrm{Ann}(A, A^\infty)$$

と定め, $F(A)$ を Kirchberg の中心列 C*-環と呼ぶ.

単位元を持った C*-環 A に対しては $F(A) = A_\infty$ になることや C*-環 A が近似単位元の列 $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を持つ場合は $[(h_n)_n]$ が $F(A)$ の単位元になることは簡単にわかる．また,

$$F(A) \cong \tilde{A}_\infty/\mathrm{Ann}(A, \tilde{A}^\infty)$$

となる．A の自己同型写像は $F(A)$ の自己同型写像を誘導するが, 同じ記号で表すことにする.

3.3 主結果

まず，Kirchberg の中心列 C*-環を使って一般の (可分)C*-環への有限群作用に対して Rohlin 性を定義する．

定義 3.4. 有限群 G の (可分)C*-環 A への作用 α が Rohlin 性を持つとは，$F(A)$ の射影の族 $\{e_g\}_{g\in G}$ で

$$\sum_{g\in G} e_g = 1, \qquad \alpha_g(e_h) = e_{gh}, \quad g, h \in G$$

となるものが存在するときにいう．

注意 3.5.
(1) A が単位元を持つならば上の定義は定義 3.1 と一致する．
(2) 上の定義も定義 3.1 のように中心列 C*-環を使わないで近似的に書くことができる．ただし, 中心列 C*-環を使って簡明に書くことで主定理の証明などの見通しが立つようになる．

例 3.6. 有限群 G に対して，$M_{|G|^\infty} \otimes \mathcal{W}_2 \cong \mathcal{W}_2$ への G 作用 ν^G を

$$\nu_g^G := \gamma_g^G \otimes \mathrm{id}$$

と定める．ただし，γ^G は例 3.2 で定義した UHF 環への作用である．すると，ν^G は Rohlin 性を持つ $\mathcal{W}_2$ への G 作用となる．

多くの (単純 stably projectionless)C*-環に対して上で定義した Rohlin 性を持つ有限群作用の例があることが示されている [1]. 次の定理が本講演での主定理である．

定理 3.7. A を可分 C*-環で $A \subseteq \mathrm{GL}(\tilde{A})$ となるものとする．α と β を有限群 G の A への Rohlin 性を持った作用とする．もし，任意の $g \in G$ に対して α_g と β_g が近似ユニタリ同値 (つまり，$\beta^{-1} \circ \alpha \in \overline{\mathrm{Inn}(A)}$) ならば α と β は共役である．

注意 3.8.
(1) A が単位元を持つとき，泉は $A \subseteq \mathrm{GL}(\tilde{A})$ の仮定なしに上の定理を示している [8, Theorem 3.5].
(2) 単位元を持たない C*-環に対して $A \subseteq \mathrm{GL}(\tilde{A})$ の仮定は実用上問題ない．実際, 分類可能なクラスに入ることが期待される $\mathcal{Z}$-stable な ([12] 参照のこと) 単純 C*-環はこの条件を満たすことがわかる．

主定理, 系 2.1 および例 3.6 より次の定理を得る．

定理 3.9. G を有限群とする．G の $\mathcal{W}_2$ への Rohlin 性を持つ作用は存在して共役の意味で一意である．

3.4 主定理の証明の概略

基本的な証明の道筋は，[8, Theorem 3.5] の証明と同じである．つまり，Bratteli-Elliott-Evans-Kishimoto intertwining argument [6] を使って証明される．

単位元のない場合に鍵となるのはユニタリを持ち上げることができるという次の補題である．

補題 3.10. A を近似単位元の列を持つ C*-環で $A \subseteq \overline{\mathrm{GL}(\tilde{A})}$ を満たすものであるとする．任意の $F(A)$ のユニタリ u に対して $\tilde{A}_\infty$ のユニタリ v が存在して $u = [v]$ となる．

一般に A が stably projectionless C*-環であるとき，$F(A)$ の (非自明な) 射影は $\tilde{A}_\infty$ の射影に持ち上げることができないことを注意しておく．また，$\mathrm{Ann}(A, A^\infty)$ は A^∞ の両側イデアルにはならないので上の補題を直接使って主定理を証明できるわけではない．(簡単なことであるが,) 少しだけ工夫をしなければならない．

3.5 Rohlin 性を持たない外部作用

一般に C*-環の場合, Rohlin 性を持たない外部作用は多く存在する. ここでは, 特別な $\mathcal{W}_2$ への $\mathbb{Z}_2$ 作用の分類について考える. これは泉による $\mathcal{O}_2$ への $\mathbb{Z}_2$ 作用の分類の類似を $\mathcal{W}_2$ で考えたものである.

定義 3.11. 有限群 G の C*-環 A への作用 α が, $\mathcal{C}_{\mathrm{R}}$ で局所表現可能であるとは α 不変な A の部分 C*-環の増大列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と G の $M(A_n)$ へのユニタリ表現 $u^{(n)}$ で次を満たすものがあるときにいう:
(1) $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = A$,
(2) $\alpha_g(a) = \mathrm{Ad}(u^{(n)}(g))(a), \quad a \in A_n, g \in G$,
(3) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して A_n は Robert の分類クラスに入る.

上の定義で (3) の仮定だけを満たさない作用を単に局所表現可能な作用という. 局所表現可能な作用の分類については次の命題が鍵になる.

命題 3.12. α を有限 abel 群 G の可分 C*-環 A への局所表現可能作用とすると, 双対作用 $\hat{\alpha}$ は Rohlin 性を持つ.

もっと一般に Rohlin 性の双対作用による特徴付けはできている [25].
上の命題, 竹崎-高井双対定理 [29], 単純 stably projectionless C*-環の性質 ([24]) を駆使することによって次の分類定理を示すことができる.

定理 3.13. α と β を $\mathcal{W}_2$ への $\mathcal{C}_{\mathrm{R}}$ で局所表現可能な外部 $\mathbb{Z}_2$ 作用とする. すると, α と β がコサイクル共役であることの必要十分条件は

$$\mathcal{W}_2 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2 \cong \mathcal{W}_2 \rtimes_\beta \mathbb{Z}_2$$

である.

上の定理の接合積 C*-環は Robert の分類したクラスに入ることがわかるので K 群とトレイス空間の言葉を使って上の定理は言い換えることもできる. また, 上の定理の作用はある不変量を使って共役でも分類できることがわかっている. 詳しくは [25] を参照のこと.

4 これからの課題

Elliott により提唱された核型 C*-環の分類理論について全く述べることができなかったが, 単位元を持つ核型単純 C*-環の分類理論は近年急速に発展している. ([20], [22], [32] 等を参照のこと. また, 分類理論の一般的なことは [28] を参照されたい.) ただし, これらの分類理論の議論が単純 stably projectionless C*-環に簡単に適用できるわけではない. 特に, 抽象的な性質による単純 stably projectionless C*-環の分類はまだない. Razak や Robert の分類定理のように帰納極限 C*-環を分類したものだけである. $\mathcal{W}_2$ は Cuntz 環 $\mathcal{O}_2$ の類似物ということから次の問題は自然な問題である ([15] 参照のこと).

問題 4.1. A を核型単純 C*-環で唯一つのトレイス状態を持ち非有界トレイスを持たないとする. このとき

$$A \otimes \mathcal{W}_2 \cong \mathcal{W}_2$$

であるか？

自然に, $\mathcal{W}_2 \otimes \mathcal{W}_2$ が $\mathcal{W}_2$ に同型であることも期待されるがこれもまだ証明されていない.
群作用の問題としては次のものが挙げられる.

問題 4.2. $\mathcal{W}_2$ と $\mathcal{W}_2 \otimes K(\ell^2(\mathbb{N}))$ への $\mathbb{Z}$ 作用で Rohlin 性を持つものを分類せよ.

$\mathbb{Z}$ 作用に対しても適当な Rohlin 性を定義することができる．それを分類したいということは自然なことである．$\mathcal{W}_2$ への強外部作用や $\mathcal{W}_2 \otimes K(\ell^2(\mathbb{N}))$ のトレイススケーリング $\mathbb{Z}$ 作用が Rohlin 性を持つという結果は既に得ている．

とても大きな課題としてトレイススケーリング $\mathbb{R}$ 作用を解析することが挙げられるが, 今の段階で (私は) 何もわかっていない．

参考文献

[1] S. Barlak and G. Szabo, *Rokhlin actions of finite groups on UHF-absorbing C*-algebras*, preprint, arXiv:1403.7312 [math.OA]

[2] B. Blackadar, *Operator Algebras : Theory of C*-Algebras and von Neumann Algebras*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **122**, Springer, 2006.

[3] A. Dean, *A continuous field of projectionless C*-algebras*, Canad. J. Math. **53** (2001), no. 1, 51–72.

[4] G. A. Elliott, *An invariant for simple C*-algebras*, Canadian Mathematical Society. 1945–1995, Vol. 3, 61–90, Canadian Math. Soc., Ottawa, ON, 1996.

[5] D. E. Evans, *On* $\mathcal{O}_n$, Publ. R. I. M. S., Kyoto Univ. **16** (1980), 915–927.

[6] D. E. Evans and A. Kishimoto, *Trace scaling automorphisms of certain stable AF algebras*, Hokkaido Math. J. **26** (1997), no. 1, 211–224.

[7] R. H. Herman and V. F. R. Jones, *Models of finite group actions*, Math. Scand. **52** (1983), no. 2, 312–320.

[8] M. Izumi, *Finite group actions on C*-algebras with the Rohlin property, I*, Duke Math. J. **122** (2004), no. 2, 233–280.

[9] M. Izumi, *Finite group actions on C*-algebras with the Rohlin property, II*, Adv. Math. **184** (2004), no. 1, 119–160.

[10] 泉正己, 作用素環への群作用の分類について, 数学 **63** (2011), 145–160.

[11] B. Jacelon, *A simple, monotracial, stably projectionless C*-algebra*, J. Lond. Math. Soc. (2) **87** (2013), no. 2, 365–383.

[12] X. Jiang and H. Su, *On a simple unital projectionless C*-algebra*, Amer. J. Math. **121** (1999), no. 2, 359–413.

[13] 片山良一, 超有限因子環への群作用の分類, 数学 **48** (1996), 1-11.

[14] E. Kirchberg, *Central sequences in C*-algebras and strongly purely infinite algebras*, Operator Algebras: The Abel Symposium 2004, 175–231, Abel Symp., **1**, Springer, Berlin, 2006.

[15] E. Krichberg and N. C. Phillips, *Embedding of exact C*-algebras in the Cuntz algebra* $\mathcal{O}_2$, J. Reine Angew. Math. **525** (2000), 17–53.

[16] A. Kishimoto, *On the fixed point algebra of a UHF algebra under a periodic automorphism of product type*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **13** (1977/78), no. 3, 777–791.

[17] A. Kishimoto, *Pairs of simple dimension groups*, Internat. J. Math. **10** (1999), no. 6, 739–761.

[18] A. Kishimoto and A. Kumjian, *Simple stably projectionless C*-algebras arising as crossed products*, Canad. J. Math. **48** (1996), no. 5, 980–996.

[19] A. Kishimoto and A. Kumjian, *Crossed products of Cuntz algebras by quasi-free automorphisms*, in Operator algebras and their applications (Waterloo, ON, 1994/1995), 173–192, Fields Inst. Commun., 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[20] H. Lin and Z. Niu, *Lifting KK-elements, asymptotic unitary equivalence and classification of simple C^*-algebras*, Adv. Math. **219** (2008), no. 5, 1729–1769.

[21] 増田俊彦, 戸松玲治, 従順因子環への群・量子群作用について, 数学 **64** (2012) 24–46.

[22] H. Matui and Y. Sato, *Decomposition rank of UHF-absorbing C^*-algebras*, to appear in Duke Math. J. arXiv:1303.4371.

[23] N. Nawata, *Fundamental group of simple C^*-algebras with unique trace III*, Canad. J. Math. **64**, (2012), no. 3, 573–587.

[24] N. Nawata, *Picard groups of certain stably projectionless C^*-algebras*, J. Lond. Math. Soc. (2) **88** (2013), no. 2, 161–180.

[25] N. Nawata, *Finite group actions on certain stably projectionless C^*-algebras with the Rohlin property*, preprint, arXiv:1308.0429 [math.OA]

[26] S. Razak, *On the classification of simple stably projectionless C^*-algebras*, Canad. J. Math. **54** (2002), no. 1, 138–224.

[27] L. Robert, *Classification of inductive limits of 1-dimensional NCCW complexes*, Adv. Math. **231** (2012), no. 5, 2802–2836.

[28] M. Rørdam, *Classification of nuclear, simple C^*-algebras*, in:Classification of nuclear C^*-algebras. Entropy in operator algebras, 1–145, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **126**, Springer, 2002.

[29] H. Takai, *On a duality for crossed products of C^*-algebras*, J. Funct.l Anal. **19** (1975), 25–39.

[30] 竹崎正道, 作用素環の構造, 岩波書店.

[31] A. Tikuisis, *Nuclear dimension, $\mathcal{Z}$-stability, and algebraic simplicity for stably projectionless C^*-algebras*, Math. Ann. **358** (2014), no. 3-4, 729–778.

[32] W. Winter, *Decomposition rank and $\mathcal{Z}$-stability*, Invent. Math. **179** (2010), no. 2, 229–301.

Relations among relative operator entropies and operator divergences

伊藤 公智 （前橋工科大学）

Abstract

情報理論で知られている相対エントロピーの作用素版として，藤井 - 亀井 [3] によって，ヒルベルト空間上の有界線形作用素 A, B の相対作用素エントロピー

$$S(A|B) \equiv A^{\frac{1}{2}} \log(A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$$

が導入された．これに関して，古田 [6] は，作用素版シャノンの不等式を示した．また，柳 - 栗山 - 古市 [18] は，ツァリス相対作用素エントロピー

$$T_t(A|B) \equiv \frac{A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}} - A}{t} = \frac{A \natural_t B - A}{t} \quad (0 < t \leq 1)$$

を導入し，古田の結果の拡張を得た．ここで，$\natural_t$ は作用素 A, B の重みつき幾何平均 $A \natural_t B = A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}}$ $(0 \leq t \leq 1)$ であり，これを A から B への path と考えることができる．

本講演では，相対作用素エントロピーやツァリス相対作用素エントロピーに関する基本的な性質，これらのエントロピーの拡張，シャノンの不等式の拡張について得られた結果を紹介する．また，藤井 [2] によって導入された α-作用素ダイバージェンスに関する基本的な性質や，path $\natural_t$ （の実数全体への拡張）上の “noncommutative ratio translation”についても紹介する．

なお，本講演の内容は，伊佐浩史氏（前橋工科大学），亀井栄三郎氏，遠山宏明氏（前橋工科大学），渡邉雅之氏（前橋工科大学）との共同研究 [8, 9, 10, 11] によって得られた結果である．

1 Introduction

In this report, an operator means a bounded linear operator on a Hilbert space $\mathcal{H}$. An operator T is said to be positive (denoted by $T \geq 0$) if $(Tx, x) \geq 0$ for all $x \in \mathcal{H}$, and also an operator T is said to be strictly positive (denoted by $T > 0$) if T is positive and invertible.

For two discrete probability distributions $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ and $q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$, that is, $p_i, q_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$ and $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1$, relative entropy (Kullback-Leibler divergence, Kullback-Leibler distance) is defined by $D(p|q) \equiv \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{p_i}{q_i}$ ([13, 15]). We remark that if $q = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$, then $D(p|q) = \log n - H(p)$, where $H(p) \equiv -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i$ is the famous Shannon entropy. The relative entropy plays an important role in the classical information theory as a notion to measure the difference between two probability distributions.

It is also well known that $-\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \le -\sum_{i=1}^n p_i \log q_i$ holds. This inequality is called Shannon inequality (Shannon lemma, Gibbs' inequality), and it is equivalent to $D(p|q) = -\sum_{i=1}^n p_i \log \frac{q_i}{p_i} \ge 0$.

The quantum relative entropy was introduced by Umegaki [17] as $S(\rho,\sigma) \equiv \operatorname{tr}(\rho\log\rho) - \operatorname{tr}(\rho\log\sigma)$ for two density operators (i.e., positive operators with trace 1) ρ,σ on $\mathcal{H}$. We remark that $S(\rho, \frac{1}{n}I) = \log n - S(\rho)$ on an n-dimensional Hilbert space, where $S(\rho) \equiv -\operatorname{tr}(\rho\log\rho)$ is the von Neumann entropy.

For $A, B > 0$, Fujii-Kamei [3] defined relative operator entropy by

$$S(A|B) \equiv A^{\frac{1}{2}} \log(A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}.$$

We remark that $S(A|I) = -A\log A$ is operator entropy given by Nakamura-Umegaki [14]. For $A, B > 0$ and $t \in \mathbb{R}$, Furuta [6] introduced generalized relative operator entropy

$$S_t(A|B) \equiv A^{\frac{1}{2}} (A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^t \log(A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}}) A^{\frac{1}{2}},$$

where $A \sharp_t B = A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}}$ for $0 \le t \le 1$. We can treat the weighted geometric mean $A \sharp_t B$ as a path from A to B. We remark that $S_t(A|B)$ can be considered as a tangent at t of $A \sharp_t B$, and also $S_0(A|B) = S(A|B)$. Tsallis relative operator entropy was introduced by Yanagi-Kuriyama-Furuichi [18] as follows: For $A, B > 0$ and $0 < t \le 1$,

$$T_t(A|B) \equiv \frac{A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}} - A}{t} = \frac{A \sharp_t B - A}{t}.$$

We remark that

$$T_0(A|B) \equiv \lim_{t \to +0} T_t(A|B) = S(A|B)$$

since $\lim\limits_{t\to+0} \frac{x^t - 1}{t} = \log x$ for $x > 0$, and also the definition of $T_t(A|B)$ can be extended for $t \in \mathbb{R}$. We note that for $t \in \mathbb{R}$, we use the notation $\natural_t$ instead of $\sharp_t$, that is, $A \natural_t B = A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}}$ for $t \in \mathbb{R}$.

Let $\mathbb{A} = (A_1, \cdots, A_n)$ and $\mathbb{B} = (B_1, \cdots, B_n)$ be sequences of strictly positive operators. In [8, 10], we define relative operator entropy $S(\mathbb{A}|\mathbb{B})$, generalized relative operator entropy $S_t(\mathbb{A}|\mathbb{B})$, Tsallis relative operator entropy $T_t(\mathbb{A}|\mathbb{B})$ and Rényi relative operator entropy $I_t(\mathbb{A}|\mathbb{B})$ of two sequences $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ as follows: For $0 \le t \le 1$,

$$\begin{aligned}
&S(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \equiv \sum_{i=1}^n S(A_i|B_i), \quad S_t(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \equiv \sum_{i=1}^n S_t(A_i|B_i), \\
&T_t(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \equiv \sum_{i=1}^n T_t(A_i|B_i) \ \text{ and} \\
&I_t(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \equiv \frac{1}{t} \log \sum_{i=1}^n A_i \sharp_t B_i \ \text{ (if } t \ne 0).
\end{aligned}$$

We call an operator sequence $\mathbb{A} = (A_1, \cdots, A_n)$ operator distribution if $A_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$ and $\sum_{i=1}^{n} A_i = I$, since it can be regarded as an operator version of discrete probability distribution. In this report, we assume that $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ are operator distributions. We remark that

$$I_0(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \equiv \lim_{t \to +0} I_t(\mathbb{A}|\mathbb{B}) = S(\mathbb{A}|\mathbb{B})$$

follows from (2.1) stated below.

In [6], for two operator distributions $\mathbb{A} = (A_1, \cdots, A_n)$ and $\mathbb{B} = (B_1, \cdots, B_n)$, Furuta obtained the operator version of Shannon inequality (briefly, operator Shannon inequality).

$$S(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq 0. \tag{1.1}$$

Yanagi-Kuriyama-Furuichi [18] obtained a generalization of (1.1) by using Tsallis relative operator entropy for operator distributions.

$$T_t(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq 0 \quad \text{for } 0 < t \leq 1. \tag{1.2}$$

Amari [1] defined α-divergence as a notion to measure the difference between two probability distributions as follows: For two probability distributions $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ and $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, and for $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$D_\alpha[\, p \,:\, q \,] \equiv \frac{4}{1-\alpha^2}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^{\frac{1-\alpha}{2}} q_i^{\frac{1+\alpha}{2}}\right), \ \alpha \neq \pm 1.$$

If $\alpha = -1$, then $D_{-1}[p : q] \equiv \lim\limits_{\alpha \to -1} D_\alpha[p : q] = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{p_i}{q_i} = D(p, q)$, and if $\alpha = 1$, then $D_1[p : q] \equiv \lim\limits_{\alpha \to 1} D_\alpha[p : q] = D_{-1}[q : p]$.

If we put $t = \frac{1+\alpha}{2}$, then α-divergence can be expressed as follows:

$$D_t(\, p \,|\, q \,) \equiv D_{2t-1}[\, p \,:\, q \,] = \frac{1}{t(1-t)} \sum_{i=1}^{n} \left\{(1-t)p_i + tq_i - p_i^{1-t} q_i^t\right\}, \ t \neq 0, 1.$$

Based on this expression, Fujii [2] defined an operator valued α-divergence as follows: For strictly positive operators A and B, and for $\alpha \in (0, 1)$,

$$D_\alpha(A|B) \equiv \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}(A \,\nabla_\alpha\, B - A \,\sharp_\alpha\, B),$$

where $A \,\nabla_\alpha\, B \equiv (1-\alpha)A + \alpha B$ is the weighted arithmetic mean. We remark that Fujii-Mićić-Pečarić-Seo [4, 5] showed

$$D_0(A|B) \equiv \lim_{\alpha \to 0} D_\alpha(A|B) = B - A - S(A|B)$$

and

$$D_1(A|B) \equiv \lim_{\alpha \to 1} D_\alpha(A|B) = A - B + S_1(A|B).$$

In this report, first, we state fundamental relations among operator entropies. Next, we introduce generalizations of operator entropies stated above, and we extend Shannon inequality via these generalizations. Moreover, we have fundamental properties of operator valued α-divergence, and we discuss the translation for operator entropies and operator valued α-divergence on the path $\natural_t$ named *noncommutative ratio translation.*

2 Fundamental relations of relative operator entropies

In this section, we state the results in [8]. Firstly, we show essential properties in our discussion.

Theorem 2.1. *Let $A, B > 0$. Then the following properties hold:*

(i) $S_u(A|B) \le \dfrac{A \natural_t B - A \natural_u B}{t-u} \le S_t(A|B)$ *for $u, t \in \mathbb{R}$ and $u < t$.*

(ii) $S_t(A|B) = -S_{1-t}(B|A)$ *for $t \in \mathbb{R}$.*

(iii) $S_1(A|B) = -S(B|A)$.

Proof. We have (i) since $x^u \log x \le \frac{x^t - x^u}{t-u} \le x^t \log x$ for $x > 0$.

We have (ii) since

$$\begin{aligned}
-S_{1-t}(B|A) &= -B^{\frac{1}{2}}(B^{\frac{-1}{2}}AB^{\frac{-1}{2}})^{1-t}\log(B^{\frac{-1}{2}}AB^{\frac{-1}{2}})B^{\frac{1}{2}} \\
&= A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{-1}{2}}B^{\frac{1}{2}}(B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}})^{t-1}\log(B^{\frac{1}{2}}A^{-1}B^{\frac{1}{2}})B^{\frac{1}{2}}A^{\frac{-1}{2}}A^{\frac{1}{2}} \\
&= A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^{t-1}\log(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})A^{\frac{1}{2}} \\
&= A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^{t}\log(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})A^{\frac{1}{2}} \\
&= S_t(A|B).
\end{aligned}$$

(iii) is obtained by putting $t = 1$ in (ii). Hence the proof is complete. □

By Theorem 2.1, we have the following relation among $S(A|B)$, $T_t(A|B)$ and $S_t(A|B)$.

Theorem 2.2. *Let $A, B > 0$. Then for $0 < t < 1$,*

$$S(A|B) \le T_t(A|B) \le S_t(A|B) \le -T_{1-t}(B|A) \le -S(B|A) = S_1(A|B).$$

For an integer n, we obtain the similar relation for $n < t < n+1$ to that for $0 < t < 1$. We state it without proof.

Theorem 2.3. *Let $A, B > 0$ and n be an integer. Then the following hold and they are equivalent:*

(i) *For $n < t < n+1$,*

$$S_n(A|B) \leq \frac{A \natural_t B - A \natural_n B}{t-n} \leq S_t(A|B) \leq \frac{A \natural_{n+1} B - A \natural_t B}{n+1-t} \leq S_{n+1}(A|B)$$

(ii) *For $n < t < n+1$,*

$$\begin{aligned}(BA^{-1})^n S(A|B) &\leq (BA^{-1})^n T_{t-n}(A|B) \leq (BA^{-1})^n S_{t-n}(A|B) \\ &\leq -(BA^{-1})^n T_{n+1-t}(B|A) \leq -(BA^{-1})^n S(B|A) = (BA^{-1})^n S_1(A|B)\end{aligned}$$

As relations among relative operator entropies for operator distributions, we obtain the following inequalities including Shannon inequality (1.1) and (1.2).

Theorem 2.4. *Let $\mathbb{A} = (A_1, \cdots, A_n)$ and $\mathbb{B} = (B_1, \cdots, B_n)$ be operator distributions. Then*

$$S(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq I_t(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq T_t(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq 0, \tag{2.1}$$

$$0 \leq -T_{1-t}(\mathbb{B}|\mathbb{A}) \leq -I_{1-t}(\mathbb{B}|\mathbb{A}) \leq S_1(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \tag{2.2}$$

and

$$T_t(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq S_t(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq -T_{1-t}(\mathbb{B}|\mathbb{A}) \tag{2.3}$$

hold for $0 < t < 1$.

Jensen's operator inequality [7] plays an important role to prove Theorem 2.4.

Theorem 2.A (Jensen's operator inequality [7])**.** *Let $f(x)$ be an operator concave function on an interval J. Let $\{C_i\}_{i=1}^n$ be operators with $\sum_{i=1}^n C_i^* C_i = I$. Then*

$$f\left(\sum_{i=1}^n C_i^* A_i C_i\right) \geq \sum_{i=1}^n C_i^* f(A_i) C_i$$

holds for every selfadjoint operators $\{A_i\}_{i=1}^n$ whose spectra are contained in J.

Proof of Theorems 2.4. Since $f(x) = \log x$ is operator concave for $x > 0$, by using Theorem 2.A, we have that

$$\begin{aligned} I_t(\mathbb{A}|\mathbb{B}) &= \frac{1}{t}\log\sum_{i=1}^{n} A_i^{\frac{1}{2}}(A_i^{\frac{-1}{2}}B_iA_i^{\frac{-1}{2}})^tA_i^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n} A_i^{\frac{1}{2}}\log(A_i^{\frac{-1}{2}}B_iA_i^{\frac{-1}{2}})^tA_i^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_i^{\frac{1}{2}}\log(A_i^{\frac{-1}{2}}B_iA_i^{\frac{-1}{2}})A_i^{\frac{1}{2}} = S(\mathbb{A}|\mathbb{B}). \end{aligned}$$

Since $\log x \leq x - 1$ for $x > 0$, we have

$$\begin{aligned} I_t(\mathbb{A}|\mathbb{B}) &= \frac{1}{t}\log\sum_{i=1}^{n} A_i^{\frac{1}{2}}(A_i^{\frac{-1}{2}}B_iA_i^{\frac{-1}{2}})^tA_i^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{t}\left[\sum_{i=1}^{n} A_i^{\frac{1}{2}}(A_i^{\frac{-1}{2}}B_iA_i^{\frac{-1}{2}})^tA_i^{\frac{1}{2}} - I\right] = T_t(\mathbb{A}|\mathbb{B}). \end{aligned}$$

Since $\frac{x^t-1}{t} \leq x - 1$ for $x > 0$ and $0 < t < 1$, we have

$$\begin{aligned} T_t(\mathbb{A}|\mathbb{B}) &= \frac{1}{t}\left[\sum_{i=1}^{n} A_i^{\frac{1}{2}}(A_i^{\frac{-1}{2}}B_iA_i^{\frac{-1}{2}})^tA_i^{\frac{1}{2}} - I\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_i^{\frac{1}{2}}\frac{(A_i^{\frac{-1}{2}}B_iA_i^{\frac{-1}{2}})^t - I}{t}A_i^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} A_i^{\frac{1}{2}}(A_i^{\frac{-1}{2}}B_iA_i^{\frac{-1}{2}} - I)A_i^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{i=1}^{n}(B_i - A_i) = 0. \end{aligned}$$

Therefore we obtain (2.1).

By (2.1),

$$S(\mathbb{B}|\mathbb{A}) \leq I_{1-t}(\mathbb{B}|\mathbb{A}) \leq T_{1-t}(\mathbb{B}|\mathbb{A}) \leq 0$$

holds for $0 < t < 1$, so that we have (2.2) by (iii) in Theorem 2.1.

We also have (2.3) since

$$T_t(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq S_t(\mathbb{A}|\mathbb{B}) = -S_{1-t}(\mathbb{B}|\mathbb{A}) \leq -T_{1-t}(\mathbb{B}|\mathbb{A})$$

by (i) and (ii) in Theorem 2.1. Hence the proof is complete. $\square$

3 Generalizations of operator entropy and operator Shannon inequality

In this section, we state the results in [9, 10]. For $A, B > 0$, $0 \le t \le 1$ and $-1 \le r \le 1$, power mean

$$A \natural_{t,r} B = A^{\frac{1}{2}}\{(1-t)I + t(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^r\}^{\frac{1}{r}}A^{\frac{1}{2}}$$

is well known as a path of operator means from harmonic mean to arithmetic mean on r. In fact,

$$\begin{aligned} A \natural_{t,-1} B &= \{(1-t)A^{-1} + tB^{-1}\}^{-1} = A \,\Delta_t\, B, \\ A \natural_{t,0} B &\equiv \lim_{r\to 0} A \natural_{t,r} B = A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}} = A \natural_t B, \\ A \natural_{t,1} B &= (1-t)A + tB = A \nabla_t B. \end{aligned}$$

In [9], we introduce generalizations of $S_t(A|B)$ and $T_t(A|B)$ as follows: For $A, B > 0$, $0 \le t \le 1$ and $-1 \le r \le 1$,

$$\begin{aligned} S_{t,r}(A|B) &\equiv A^{\frac{1}{2}}\left(\{(1-t)I + t(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^r\}^{\frac{1}{r}-1} \cdot \frac{(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^r - I}{r}\right)A^{\frac{1}{2}}, \\ T_{t,r}(A|B) &\equiv \frac{A^{\frac{1}{2}}\{(1-t)I + t(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^r\}^{\frac{1}{r}}A^{\frac{1}{2}} - A}{t} = \frac{A \natural_{t,r} B - A}{t}. \end{aligned}$$

Similarly to $S_t(A|B)$, we can treat $A \natural_{t,r} B$ as a path from A to B on t, and also $S_{t,r}(A|B)$ can be considered as a tangent at t of $A \natural_{t,r} B$. We remark that the following properties hold.

$$\begin{aligned} &S_{0,r}(A|B) = T_r(A|B), \quad S_{t,0}(A|B) \equiv \lim_{r\to 0} S_{t,r}(A|B) = S_t(A|B), \\ &T_{0,r}(A|B) \equiv \lim_{t\to +0} T_{t,r}(A|B) = T_r(A|B) \quad \text{and} \quad T_{t,0}(A|B) = T_t(A|B). \end{aligned}$$

The following result is an extension of Theorems 2.1 and 2.2 for $0 < t < 1$. Theorem 3.1 leads (ii), (iii) in Theorem 2.1 and Theorem 2.2 by letting $r \to 0$.

Theorem 3.1. *Let $A, B > 0$. Then the following properties hold:*

(i) $S_{t,r}(A|B) = -S_{1-t,r}(B|A)$ *for* $0 < t < 1$ *and* $-1 \le r \le 1$

(ii) $S_{1,r}(A|B) = -S_{0,r}(B|A)$ *for* $-1 \le r \le 1$.

(iii) *For* $0 < t < 1$ *and* $-1 \le r \le 1$,

$$S_{0,r}(A|B) \le T_{t,r}(A|B) \le S_{t,r}(A|B) \le -T_{1-t,r}(B|A) \le -S_{0,r}(B|A) = S_{1,r}(A|B).$$

Next, we discuss a generalization of Theorem 2.4. We can generalize $S_t(\mathbb{A}|\mathbb{B})$, $T_t(\mathbb{A}|\mathbb{B})$ and $I_t(\mathbb{A}|\mathbb{B})$ as follows:

Definition 1 ([10]). *Let* $\mathbb{A} = (A_1, \cdots, A_n)$ *and* $\mathbb{B} = (B_1, \cdots, B_n)$ *be operator distributions. For* $0 \leq t \leq 1$ *and* $-1 \leq r \leq 1$,

$$S_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \equiv \sum_{i=1}^{n} S_{t,r}(A_i|B_i), \quad T_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \equiv \sum_{i=1}^{n} T_{t,r}(A_i|B_i),$$

$$I_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \equiv \frac{1}{t} \log \sum_{i=1}^{n} A_i \natural_{t,r} B_i \quad (\textit{if } t, r \neq 0),$$

$$I_{0,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \equiv \lim_{t \to +0} I_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \quad \textit{and} \quad I_{t,0}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \equiv \lim_{r \to 0} I_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) = I_t(\mathbb{A}|\mathbb{B}).$$

We obtain the following relations among $S(\mathbb{A}|\mathbb{B})$, $T_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B})$ and $I_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B})$. (3.1) and (3.2) in Theorem 3.2 imply (2.1) and (2.2) in Theorem 2.4 by letting $r \to +0$, respectively.

Theorem 3.2. *Let* $\mathbb{A} = (A_1, \cdots, A_n)$ *and* $\mathbb{B} = (B_1, \cdots, B_n)$ *be operator distributions. Then*

$$S(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq I_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq T_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq 0 \tag{3.1}$$

and

$$0 \leq -T_{1-t,r}(\mathbb{B}|\mathbb{A}) \leq -I_{1-t,r}(\mathbb{B}|\mathbb{A}) \leq S_1(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \tag{3.2}$$

hold for $0 < t < 1$ *and* $0 < r \leq 1$.

The inequalities (3.1) and (3.2) hold partially even in the case $-1 \leq r < 0$.

Theorem 3.3. *Let* $\mathbb{A} = (A_1, \cdots, A_n)$ *and* $\mathbb{B} = (B_1, \cdots, B_n)$ *be operator distributions. Then*

$$I_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq T_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq 0 \tag{3.3}$$

and

$$0 \leq -T_{1-t,r}(\mathbb{B}|\mathbb{A}) \leq -I_{1-t,r}(\mathbb{B}|\mathbb{A}) \tag{3.4}$$

hold for $0 < t < 1$ *and* $-1 \leq r < 0$.

We get the following result on $I_{0,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B})$ by scrutinizing the proof of Theorems 3.2 and 3.3.

Proposition 3.4. *Let* $\mathbb{A} = (A_1, \cdots, A_n)$ *and* $\mathbb{B} = (B_1, \cdots, B_n)$ *be operator distributions. For each* $-1 \leq r \leq 1$ *such that* $r \neq 0$,

$$I_{0,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) = T_r(\mathbb{A}|\mathbb{B}).$$

We discuss another generalization of Theorem 2.4. We introduced $S_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B})$ as a generalizaton of $S_t(\mathbb{A}|\mathbb{B})$, but $S_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B})$ does not appear in Theorem 3.2. Then we expect that we can generalize (2.1) to

$$S_{0,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) = T_r(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq J_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq T_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq 0 \tag{3.5}$$

for a suitable generalized entropy $J_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B})$ such that $J_{t,0}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) = I_t(\mathbb{A}|\mathbb{B})$. From this viewpoint, we introduce another generalization of $I_t(\mathbb{A}|\mathbb{B})$.

Definition 2 ([10]). *Let $\mathbb{A} = (A_1, \cdots, A_n)$ and $\mathbb{B} = (B_1, \cdots, B_n)$ be operator distributions. For $0 < t \leq 1$ and $-1 \leq r \leq 1$ such that $r \neq 0$,*

$$\begin{aligned} J_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) &\equiv \frac{(\sum_{i=1}^n A_i \ \sharp_{t,r} \ B_i)^r - I}{tr}, \\ J_{0,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) &\equiv \lim_{t\to+0} J_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \quad \textit{and} \quad J_{t,0}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \equiv \lim_{r\to0} J_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}). \end{aligned}$$

Firstly we show a relation between $I_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B})$ and $J_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B})$, two generalizations of $I_t(\mathbb{A}|\mathbb{B})$.

Proposition 3.5. *Let $\mathbb{A} = (A_1, \cdots, A_n)$ and $\mathbb{B} = (B_1, \cdots, B_n)$ be operator distributions. Then for each $0 < t < 1$,*

(i) $I_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq J_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B})$ *for* $0 < r \leq 1$.

(ii) $J_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq I_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B})$ *for* $-1 \leq r < 0$.

Next we obtain the following results among $S_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B})$, $J_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B})$ and $T_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B})$. By (ii) in Proposition 3.7, we recognize that Theorem 3.6 implies Theorem 2.4 by letting $r \to 0$.

Theorem 3.6. *Let $\mathbb{A} = (A_1, \cdots, A_n)$ and $\mathbb{B} = (B_1, \cdots, B_n)$ be operator distributions. Then*

$$S_{0,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) = T_r(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq J_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq T_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq 0, \tag{3.5}$$

$$0 \leq -T_{1-t,r}(\mathbb{B}|\mathbb{A}) \leq -J_{1-t,r}(\mathbb{B}|\mathbb{A}) \leq S_{1,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \tag{3.6}$$

and

$$T_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq S_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \leq -T_{1-t,r}(\mathbb{B}|\mathbb{A}) \tag{3.7}$$

hold for $0 < t < 1$ and $-1 \leq r \leq 1$ such that $r \neq 0$.

Proposition 3.7. *Let $\mathbb{A} = (A_1, \cdots, A_n)$ and $\mathbb{B} = (B_1, \cdots, B_n)$ be operator distributions.*

(i) *For each* $-1 \le r \le 1$ *such that* $r \ne 0$, $J_{0,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) = T_r(\mathbb{A}|\mathbb{B})$.

(ii) *For each* $0 < t \le 1$, $J_{t,0}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) = I_t(\mathbb{A}|\mathbb{B})$.

We get the following result by combining Theorem 3.2, Theorem 3.3, Proposition 3.5 and Theorem 3.6.

Corollary 3.8. *Let* $\mathbb{A} = (A_1, \cdots, A_n)$ *and* $\mathbb{B} = (B_1, \cdots, B_n)$ *be operator distributions. Then for* $0 < t < 1$,

$$S(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \le I_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \le J_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \le T_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \le 0$$

holds if $0 < r \le 1$, *and also*

$$S_{0,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) = T_r(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \le J_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \le I_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \le T_{t,r}(\mathbb{A}|\mathbb{B}) \le 0$$

holds if $-1 \le r < 0$.

4 Operator valued α-divergence

In this section and the next section, we state the results in [11]. Here, we have some fundamental properties of operator valued α-divergences. Petz [16] introduced the operator divergence $D_{FK}(A|B) \equiv B - A - S(A|B)$. Fujii et al. showed the following relation between $D_{FK}(A|B)$ and operator valued α-divergences at end points for interval $(0,1)$.

Proposition 4.1 (Fujii-Mićić-Pečarić-Seo, [4, 5])**.** *Let* A *and* B *be strictly positive operators. Then the following hold.*

(i) $D_0(A|B) \equiv \lim_{\alpha \to 0} D_\alpha(A|B) = D_{FK}(A|B) = B - A - S(A|B)$,

(ii) $D_1(A|B) \equiv \lim_{\alpha \to 1} D_\alpha(A|B) = D_{FK}(B|A) = A - B + S_1(A|B)$.

The following (i) in Proposition 4.2 interpolates (i) and (ii) in Proposition 4.1 since $T_0(A|B) = S(A|B)$ and $-S(B|A) = S_1(A|B)$.

Proposition 4.2. *Let* A *and* B *be strictly positive operators. Then the following hold.*

(i) $D_\alpha(A|B) = \dfrac{1}{1-\alpha}(B - A - T_\alpha(A|B)) = \dfrac{1}{\alpha}(A - B - T_{1-\alpha}(B|A))$ *for* $\alpha \in (0,1)$,

(ii) $D_{1-\alpha}(B|A) = D_\alpha(A|B)$ *for* $\alpha \in [0,1]$.

We have the following fundamental properties of $D_\alpha(A|B)$.

Theorem 4.3. *Let A and B be strictly positive operators. Then the following hold.*

(i) $0 \leq D_\alpha(A|B) \leq \dfrac{1}{1-\alpha} D_0(A|B)$ *and* $0 \leq D_\alpha(A|B) \leq \dfrac{1}{\alpha} D_1(A|B)$ *for* $\alpha \in (0,1)$.

(ii) $D_\alpha(A|B) = -\{T_\alpha(A|B) + T_{1-\alpha}(B|A)\}$ *for* $\alpha \in (0,1)$.

(iii) $D_\alpha(A|B) \leq S_1(A|B) - S(A|B)$ *for* $\alpha \in (0,1)$.

We remark that (ii) means that an operator value $D_\alpha(A|B)$ can be represented by the sum of two operator values for Tsallis entropies.

5 Noncommutative ratio translation

First, we show the following result on translation of generalized relative operator entropies.

Proposition 5.1. *Let A and B be strictly positive operators. Then*

$$(A \natural_{u+v} B)(A \natural_u B)^{-1} S_u(A|B) = S_{u+v}(A|B)$$

holds for $u, v \in \mathbb{R}$.

We can regard $S_u(A|B)$ and $S_{u+v}(A|B)$ as tangent vectors at u and $u+v$ on the path $A \natural_w B$, respectively. Then, Proposition 5.1 means that $S_{u+v}(A|B)$ is parallelly transferring $S_u(A|B)$ by v along the path.

Here, we define the following noncommutative ratio on the path $A \natural_w B$, and give a new viewpoint for the equality in Proposition 5.1.

Definition 3 ([11])**.** *For strictly positive operators A and B, and for $u, v \in \mathbb{R}$, noncommutative ratio on the path $A \natural_w B$ is defined as follows:*

$$\mathcal{R}(u, v; A, B) \equiv (A \natural_{u+v} B)(A \natural_u B)^{-1}.$$

We have the following property of noncommutative ratio.

Proposition 5.2. *Let A and B be strictly positive operators. Then*

$$(A \natural_{u+v} B)(A \natural_u B)^{-1} = (A \natural_v B)A^{-1},$$

that is,

$$\mathcal{R}(u, v; A, B) = \mathcal{R}(0, v; A, B) = (A \natural_v B)A^{-1}$$

holds for $u, v \in \mathbb{R}$.

By Proposition 5.2, $\mathcal{R}(u, v; A, B)$ does not depend on u. So, we denote $\mathcal{R}(u, v; A, B)$ by $\mathcal{R}(v; A, B)$, or simply $\mathcal{R}(v)$ in the rest of this section. We call multiplying by $\mathcal{R}(v)$ from the left side *noncommutative ratio translation*. We get the following immediately.

Proposition 5.3. *Let A and B be strictly positive operators. Then the following hold.*

(i) $\mathcal{R}(v)S_u(A|B) = S_{u+v}(A|B)$ *for $u, v \in \mathbb{R}$.*

(ii) $\mathcal{R}(v)T_u(A|B) = \dfrac{A \natural_{u+v} B - A \natural_v B}{u}$ *for $u, v \in \mathbb{R}$.*

Let n be an integer. Then $\mathcal{R}(n) = (A \natural_n B)A^{-1} = (BA^{-1})^n$ holds, and we can regard (ii) in Theorem 2.3 as the result applying noncommutative ratio translation to Theorem 2.2. Here, we apply noncommutative ratio translation to other fundamental relations, and try to show the similar property to Theorem 2.3. To see this, we make some preparations.

Lemma 5.4. *Let A and B be strictly positive operators. Then*

$$(A \natural_u B) \natural_w (A \natural_{u+v} B) = A \natural_{u+vw} B$$

holds for $u, v, w \in \mathbb{R}$.

Proposition 5.5. *Let A and B be strictly positive operators. Then the following hold.*

(i) $S_u(A \natural_v B|A \natural_{v+w} B) = wS_{v+uw}(A|B)$ *for $u, v, w \in \mathbb{R}$.*

(ii) $S(A \natural_v B|A \natural_{v+w} B) = wS_v(A|B)$ *for $v, w \in \mathbb{R}$.*

(iii) $S_u(A|A \natural_w B) = wS_{uw}(A|B)$ *for $u, w \in \mathbb{R}$.*

(iv) $S_u(A \natural_v B|A \natural_{v+1} B) = S_{u+v}(A|B)$ *for $u, v \in \mathbb{R}$.*

We remark that Proposition 5.5 is an extension of some kind of the additivity for entropy, that is,

$$S(A|A \sharp_t B) = tS(A|B)$$

for $t \in [0,1]$ shown by Kamei [12].

We can obtain the following result on noncommutative ratio translation for each operator value $S_u(A|B)$, $T_u(A|B)$, and $D_\alpha(A|B)$.

Theorem 5.6. *Let A and B be strictly positive operators. Then the following hold.*

(i) $\mathcal{R}(v)S_u(A|B) = S_u(A \natural_v B|A \natural_{v+1} B)$ *for* $u, v \in \mathbb{R}$.

(ii) $\mathcal{R}(v)T_u(A|B) = T_u(A \natural_v B|A \natural_{v+1} B)$ *for* $u, v \in \mathbb{R}$.

(iii) $\mathcal{R}(v)D_\alpha(A|B) = D_\alpha(A \natural_v B|A \natural_{v+1} B)$ *for* $\alpha \in (0,1)$ *and* $v \in \mathbb{R}$.

By using Theorem 5.6, we get the following properties by applying noncommutative ratio translation to fundamental relations between operator valued α-divergences and relative operator entropies shown in Proposition 4.1 and Theorem 4.3.

Theorem 5.7. *Let A and B be strictly positive operators. Then the following hold for* $\alpha \in (0,1)$ *and* $v \in \mathbb{R}$.

(i) $\mathcal{R}(v)D_0(A|B) = D_0(A \natural_v B|A \natural_{v+1} B)$ *and*
$\mathcal{R}(v)D_1(A|B) = D_1(A \natural_v B|A \natural_{v+1} B)$.

(ii) $\mathcal{R}(v)D_\alpha(A|B) = -\mathcal{R}(v)\{T_\alpha(A|B) + T_{1-\alpha}(B|A)\}$.

(iii) $0 \le \mathcal{R}(v)D_\alpha(A|B) \le \dfrac{1}{1-\alpha}\mathcal{R}(v)D_0(A|B)$ *and*
$0 \le \mathcal{R}(v)D_\alpha(A|B) \le \dfrac{1}{\alpha}\mathcal{R}(v)D_1(A|B)$.

(iv) $\mathcal{R}(v)D_\alpha(A|B) \le \mathcal{R}(v)\{S_1(A|B) - S(A|B)\}$.

References

[1] S. Amari, Differential Geometrical Methods in Statistics, Springer Lecture Notes in Statistics, **28** (1985).

[2] J. I. Fujii, On the relative operator entropy (in Japanese), RIMS Kokyuroku, **903**(1995), 49–56.

[3] J.I. Fujii and E. Kamei, *Relative operator entropy in noncommutative information theory*, Math. Japon., **34** (1989), 341–348.

[4] J. I. Fujii, J. Mićić, J. Pečarić and Y. Seo, Comparison of operator mean geodesics, J. Math. Inequal., **2**(2008), 287–298.

[5] M. Fujii, J. Mićić, J. Pečarić and Y. Seo, Recent Development of Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities, Monographs in Inequalities 4, Element, Zagreb, (2012).

[6] T. Furuta, *Parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators*, Linear Algebra Appl., **381** (2004), 219–235.

[7] F. Hansen and G. K. Pedersen, *Jensen's operator inequality*, Bull. London Math. Soc., **35** (2003), 553–564.

[8] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, *Relative operator entropy, operator divergence and Shannon inequality*, Sci. Math. Jpn., **75** (2012), 289–298. (online: **e-2012** (2012), 353–362.)

[9] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, *Extensions of Tsallis relative operator entropy and operator valued distance*, Sci. Math. Jpn., **76** (2013), 427–435. (online: **e-2013** (2013), 427–435.)

[10] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, *Generalizations of operator Shannon inequality based on Tsallis and Rényi relative entropies*, Linear Algebra Appl., **439** (2013), 3148–3155.

[11] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, *On relations between operator valued α-divergence and relative operator entropies*, to appear in Sci. Math. Jpn..

[12] E. Kamei, Paths of operators parametrized by operator means, Math. Japon., **39**(1994), 395–400.

[13] S. Kullback, Information Theory and Statistics, Wiley, New York, 1959.

[14] M. Nakamura and H. Umegaki, *A note on the entropy for operator algebras*, Proc. Japan Acad., **37** (1961), 149–154.

[15] M. I. Nielsen, I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press, Cambridge, (2000).

[16] D. Petz, Bregman divergence as relative operator entropy, Acta Math. Hungar., **116**(2007), 127–131.

[17] H. Umegaki, Conditional expectation in operator algebra IV, Kodai Math. Sem. Rep., **14** (1962), 59–85.

[18] K. Yanagi, K. Kuriyama and S. Furuichi, *Generalized Shannon inequalities based on Tsallis relative operator entropy*, Linear Algebra Appl., **394** (2005), 109–118.

(Masatoshi Ito) Maebashi Institute of Technology, 460-1 Kamisadorimachi, Maebashi, Gunma 371-0816, JAPAN
E-mail address: `m-ito@maebashi-it.ac.jp`

On the F-method for constructing intertwining differential operators between homogeneous vector bundles

東京大学　大学院数理科学研究科　久保　利久 (Toshihisa KUBO)[a]

Graduate School of Mathematical Sciences,

The University of Tokyo

概 要

This notes is a summary of our preprint [3] on finding explicit formulas for $SL(2,\mathbb{R})$-intertwining differential operators between homogeneous vector bundles. Key tools are the Jacobi polynomial and Rankin–Cohen bidifferential operator. To reduce the technicality we try not to appeal to representation theory as much as possible.

1 Introduction

The main concern of this notes is to provide explicit formulas for certain differential operators. To describe precisely let $\vec{F}(x,y) := \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ be a $\mathbb{C}^2$-valued function defined on $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Given $\lambda \in \mathbb{C}$, we set

$$\vec{F}^{\vee}_{\lambda}(r\cos\theta, r\sin\theta) := r^{-2\lambda} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \vec{F}\left(\frac{-\cos\theta}{r}, \frac{\sin\theta}{r}\right).$$

Observe that differential operators $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 : C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R})$ yield a linear map

$$\mathcal{D} : C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad (f_1, f_2) \mapsto (\mathcal{D}_1 f_1)(x,0) + (\mathcal{D}_2 f_2)(x,0).$$

If we write

$$\mathcal{D} := \mathrm{Rest}_{y=0} \circ (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2),$$

then the main problem of this notes may be described as follows.

---

[a]E-mail address: toskubo@ms.u-tokyo.ac.jp

Problem A. Given $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$, find explicit formulas for constant coefficient differential operators $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ so that, for any $\vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2)$, the functional identity

$$(\mathcal{D}_{\lambda,\nu}\vec{F}_\lambda^\vee)(x) = |x|^{-2\nu}(\mathcal{D}_{\lambda,\nu}\vec{F})\left(-\frac{1}{x}\right) \tag{$\mathcal{M}_{\lambda,\nu}$}$$

holds for $x \in \mathbb{R}^\times$ and $\mathcal{D}_{\lambda,\nu} \equiv \mathcal{D} = \mathrm{Rest}_{y=0} \circ (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$.

Given $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$, if we write

$$\mathrm{Diff}^a(\lambda,\nu) := \{\mathcal{D} : C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R}) : \mathcal{D} \text{ is of order } a \text{ and satisfying } (\mathcal{M}_{\lambda,\nu})\},$$

then Problem A may be understood as showing the differential operators $\mathcal{D} \in \mathrm{Diff}^a(\lambda,\nu)$ for any $a \in \mathbb{N}_+ := \{1, 2, \ldots\}$. For "generic" $\lambda \in \mathbb{C}$, the following fact reduces the possibility of ν to consider for Problem A.

Fact 1.1. *Let $\lambda \in \mathbb{C}$ so that $2\lambda \notin -\mathbb{N} := \{0, -1, -2, \ldots\}$ and $a \in \mathbb{N}_+$. Then $\mathrm{Diff}^a(\lambda,\nu) \neq \emptyset$ if and only if $\nu - \lambda = a$. Moreover, we have $\dim_\mathbb{C} \mathrm{Diff}^a(\lambda, \lambda + a) = 2$.*

The key idea of the fact is the branching laws of generalized Verma modules. Since some structure theory of complex simple Lie algebras may require to describe the idea, we do not discuss the proof in this notes. For those readers who are interested in the fact, we suggest to consult [2] or [3]. Although not discussing the fact, we may want to note that the condition $2\lambda \notin -\mathbb{N}$ can be observed from meromorphic functions $A_a(\lambda)$, $B_a(\lambda)$, and $U_a(\lambda)$ defined in Section 3. (See the proof of Proposition 3.4.)

The purpose of this notes is to find explicit formulas for differential operators $\mathcal{D} \in \mathrm{Diff}^a(\lambda, \lambda + a)$ for any $a \in \mathbb{N}_+$, provided that $\lambda \in \mathbb{C}$ with $2\lambda \notin -\mathbb{N}$. Namely, we consider the following problem.

Problem B. Given $\lambda \in \mathbb{C}$ with $2\lambda \notin -\mathbb{N}$, for any $a \in \mathbb{N}_+$, find explicit formulas for constant coefficient differential operators $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ so that, for any $\vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2)$, the functional identity

$$(\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}\vec{F}_\lambda^\vee)(x) = |x|^{-2(\lambda+2)}(\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}\vec{F})\left(-\frac{1}{x}\right)$$

holds for $x \in \mathbb{R}^\times$.

For example, if

$$\mathcal{D} = \mathrm{Rest}_{y=0} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x}, \lambda\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{1.1}$$

namely,

$$\mathcal{D}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,0) + \lambda\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,0),$$

then $\mathcal{D} \in \mathrm{Diff}^1(\lambda, \lambda+1)$. Also if

$$\mathcal{D} = \mathrm{Rest}_{y=0} \circ \left(2(2\lambda+1)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, (\lambda-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\lambda+1)(2\lambda+1)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right), \tag{1.2}$$

namely,

$$\mathcal{D}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}(x) = 2(2\lambda+1)\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x,0) + (\lambda-1)\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x,0) + (\lambda+1)(2\lambda+1)\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x,0),$$

then $\mathcal{D} \in \mathrm{Diff}^2(\lambda, \lambda+2)$.

Now we describe our results. Let $\mathcal{C}_\ell^\alpha := C_\ell^\alpha\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ be the homogeneous differential operator of order ℓ on $\mathbb{R}^2$ obtained by formally substituting $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ and $\frac{\partial}{\partial y}$ to r and s in the inflated Gegenbauer polynomial $C_\ell^\alpha(r,s)$ (see (3.1) and (3.2)), respectively. For example, we have

$$\mathcal{C}_0^\alpha = \mathrm{id}, \qquad \mathcal{C}_1^\alpha = 2\alpha\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathcal{C}_2^\alpha = \alpha\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\alpha+1)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

and

$$\mathcal{C}_3^\alpha = \frac{2}{3}\alpha(\alpha+1)\left(3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 2(\alpha+2)\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right).$$

For $\lambda \in \mathbb{C}$ and $a \in \mathbb{N}_+$, set

$$\mathbb{D}_1 := a(2\lambda+a-1)\frac{\partial}{\partial x} \circ \mathcal{C}_{a-1}^{\lambda+\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

and

$$\mathbb{D}_2 := \left(2\lambda^2 + 2(a-1)\lambda + a(a-1)\right)\frac{\partial}{\partial y} \circ \mathcal{C}_{a-1}^{\lambda+\frac{1}{2}} + (\lambda-1)(2\lambda+1)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \circ \mathcal{C}_{a-2}^{\lambda+\frac{3}{2}}, \tag{1.4}$$

where $\mathcal{C}_\ell^\alpha$ with $\ell < 0$ is understood as $\mathcal{C}_\ell^\alpha = 0$. If

$$\mathbb{D}_{\lambda,\lambda+a} := \mathrm{Rest}_{y=0} \circ (\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2),$$

then the following theorem holds.

Theorem 1.2. *If $\lambda \in \mathbb{C}$ with $2\lambda \notin -\mathbb{N}$, then $\mathbb{D}_{\lambda,\lambda+a} \in \mathrm{Diff}^a(\lambda, \lambda+a)$ for any $a \in \mathbb{N}_+$.*

Note that the differential operators $\mathcal{D}$ in (1.1) and (1.2) are in fact $\mathcal{D} = \mathbb{D}_{\lambda,\lambda+1}$ and $\mathcal{D} = \mathbb{D}_{\lambda,\lambda+2}$, respectively. Now, to exhaust the differential operators in $\mathrm{Diff}^a(\lambda, \lambda+a)$, observe that if $\mathcal{D} = \mathrm{Rest}_{y=0} \circ (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) \in \mathrm{Diff}^a(\lambda, \lambda+a)$, then so is

$$\mathcal{D}^\vee := \mathrm{Rest}_{y=0} \circ (-\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1).$$

(See [3, Proposition 1.2].) It follows from (1.3) and (1.4) that, for $2\lambda \notin -\mathbb{N}$, the differential operators $\mathbb{D}_{\lambda,\lambda+a}$ and $\mathbb{D}_{\lambda,\lambda+a}^\vee$ are linearly independent over $\mathbb{C}$. Hence, by Fact 1.1, the following holds.

Corollary 1.3. *If $\lambda \in \mathbb{C}$ with $2\lambda \notin -\mathbb{N}$, then, for any $a \in \mathbb{N}_+$,*

$$\mathrm{Diff}^a(\lambda, \lambda+a) = \mathrm{span}_\mathbb{C}\{\mathbb{D}_{\lambda,\lambda+a}, \mathbb{D}_{\lambda,\lambda+a}^\vee\}.$$

Before closing this introduction, we would like to write two remarks on this notes. The first remark is about the existence of differential operator $\mathcal{D} \in \mathrm{Diff}^a(\lambda, \lambda + a)$ for arbitrary $\lambda \in \mathbb{C}$. In the course of finding formulas (1.3) and (1.4), we obtain the following slightly weak result.

Theorem 1.4. [Corollary 2.4] *For any* $\lambda \in \mathbb{C}$ *and* $a \in \mathbb{N}_+$, *we have* $\mathrm{Diff}^a(\lambda, \lambda + a) \neq \emptyset$.

The other remark is about the technique to obtain the explicit formulas in (1.3) and (1.4). As the title suggests, we originally planned to discuss so-called the "F-method," the new technique to obtain explicit formulas recently invented by Toshiyuki Kobayashi. Nonetheless, as it assumes certain background of Lie theory, we decided not to do so. We feel sorry for those readers who are interested in the wonderful technique. The main idea of the "F-method" may be described as to obtain the differential operators $\mathbb{D}_1$ and $\mathbb{D}_2$ by "solving a certain system of differential equations." For the details, see, for instance, [4]. In this notes we then use the bidifferential operator

$$\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}(f_1 \otimes f_2)(z) = \sum_{\ell=0}^{a} (-1)^\ell \binom{\lambda_1 + a - 1}{\ell} \binom{\lambda_2 + a - 1}{a - \ell} \frac{\partial^{a-\ell} f_1}{\partial z^{a-\ell}}(z) \frac{\partial^\ell f_2}{\partial z^\ell}(z),$$

to derive the explicit formulas. As the bidifferential operator $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}$ is often referred to as the *Rankin–Cohen bracket* ([1, 5]) in the theory of automorphic forms, we in this notes call it the *Rankin–Cohen bidifferential operator*.

Now we briefly describe the rest of this notes. There are three sections with this introduction. In Section 2, we first reformulate Problem B in such a way that arguments on $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}$ can be applied easily. In fact the reformulation reveals certain representation theoretic motivation behind Problem B. In the section we then derive the differential operator $\mathbb{D}_{\lambda,\lambda+a}$ from the Rankin–Cohen bidifferential operator $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}$. The explicit formulas for $\mathbb{D}_1$ and $\mathbb{D}_2$ are then discussed in Section 3. The key idea of finding the concrete formulas is to observe classical orthogonal polynomials, namely, the Jacobi polynomials and Gegenbauer polynomials.

Notation: $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{N}_+ := \{1, 2, \ldots\}$

2 The Rankin–Cohen bidifferential operator $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}$

The purpose of this section is to relate Problem B to the Rankin–Cohen bidifferential operator $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}$.

2.1 Covariance of $SL(2, \mathbb{R})$

We start with reformulating Problem B in such a way that the problem can be handled easily. Given $\lambda \in \mathbb{C}$, let $\psi_\lambda : \mathbb{C}^\times \to GL(2, \mathbb{R})$ be the group homomorphism defined by

$$z = re^{i\theta} \mapsto r^\lambda \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Then, for a $\mathbb{C}^2$-valued function $\vec{F}$ on $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ and $h^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, we define $\varpi_\lambda(h)\vec{F}$ by

$$(\varpi_\lambda(h)\vec{F})(z) := \psi_\lambda\left((cz+d)^{-2}\right)\vec{F}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

for $z \in \mathbb{C}$ with $cz+d \neq 0$. (Note that this formula is indeed for $\varpi_\lambda(h)$, not $\varpi_\lambda(h^{-1})$.) In this formulation Problem B may be rephrased as follows.

Problem B'. Given $\lambda \in \mathbb{C}$ with $2\lambda \notin -\mathbb{N}$, for any $a \in \mathbb{N}_+$, find explicit formulas for differential operators $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ so that $\mathcal{D} = \mathrm{Rest}_{y=0} \circ (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ satisfies

$$\big(\mathcal{D}(\varpi_\lambda(h)\vec{F})\big)(x) = |cx+d|^{-2(\lambda+a)}(\mathcal{D}\vec{F})\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) \tag{$\mathcal{M}'_{\lambda,\lambda+a}$}$$

for all $\vec{F} \in C^\infty(\mathbb{C}) \oplus C^\infty(\mathbb{C})$, $h^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, and $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

Note that the constant coefficient property of $\mathcal{D}_1$ and $\mathcal{D}_2$ is encoded by the functional identity ($\mathcal{M}'_{\lambda,\lambda+a}$) for $h = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ for $t \in \mathbb{R}$. Moreover, the equivalence between Problems B and B' can be observed by the facts that $\vec{F}_\lambda^\vee(z) = (\varpi_\lambda(w)\vec{F})(z)$ for $w^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ and that $SL(2,\mathbb{R})$ is generated by w and $\left\{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$.

2.2 The Rankin–Cohen bidifferential operator

We now observe the Rankin–Cohen bidifferential operator $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}$. Let D be a domain of $\mathbb{C}$ and $\mathcal{O}(D)$ the space of holomorphic functions on D. First, recall that, for $a \in \mathbb{N}$ and $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$, the Rankin–Cohen bidifferential operator $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2} : \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(D)$, is defined by

$$\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}(f_1 \otimes f_2)(z) := \sum_{\ell=0}^{a}(-1)^\ell \binom{\lambda_1+a-1}{\ell}\binom{\lambda_2+a-1}{a-\ell}\frac{\partial^{a-\ell} f_1}{\partial z^{a-\ell}}(z)\frac{\partial^\ell f_2}{\partial z^\ell}(z). \tag{2.1}$$

One of the important properties of $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}$ is that $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}$ satisfies a certain covariance property. To see the property let G be a subgroup of $SL(2,\mathbb{C})$ so that $\dfrac{az+b}{cz+d} \in D$ for $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ and $z \in D$. Given $\lambda \in \mathbb{Z}$, for $h \in G$ and $f \in \mathcal{O}(D)$, we define $\pi_\lambda(h)f \in \mathcal{O}(D)$ by

$$(\pi_\lambda(h)f)(z) := (cz+d)^{-\lambda} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right),$$

where $h^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. If writing $\mathcal{O}(D)_\lambda \equiv \mathcal{O}(D)$ to indicate the integral parameter λ, then we have

$$\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2} : \mathcal{O}(D)_{\lambda_1} \otimes \mathcal{O}(D)_{\lambda_2} \to \mathcal{O}(D)_{\lambda_1+\lambda_2+2a}.$$

In other words, $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}$ satisfies the covariance property

$$\pi_{\lambda_1+\lambda_2+2a}(h) \circ \mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2} = \mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2} \circ (\pi_{\lambda_1}(h) \otimes \pi_{\lambda_2}(h)) \tag{2.2}$$

for all $h \in G$.

Recall from Section 2.1 that our goal is to find an explicit formula of $\mathcal{D} : C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R})$ so that the functional equation $(\mathcal{M}'_{\lambda,\lambda+a})$ holds. The following proposition relates $\mathcal{O}(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}(\mathbb{C})$ to $C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2) \cong C^\infty(\mathbb{C}) \oplus C^\infty(\mathbb{C})$.

Proposition 2.1. [3, Proposition 4.2] *There exist embeddings*

$$\begin{aligned}(\iota^*)^{1,0} : \mathcal{O}(\mathbb{C})_{\lambda+1} \otimes \mathcal{O}(\mathbb{C})_{\lambda-1} &\hookrightarrow C^\infty(\mathbb{C}) \oplus C^\infty(\mathbb{C}) \\ f_1(z_1) \otimes f_2(z_2) &\mapsto (f_1(z)f_2(\bar{z}), \sqrt{-1}f_1(z)f_2(\bar{z}))\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(\iota^*)^{0,1} : \mathcal{O}(\mathbb{C})_{\lambda-1} \otimes \mathcal{O}(\mathbb{C})_{\lambda+1} &\hookrightarrow C^\infty(\mathbb{C}) \oplus C^\infty(\mathbb{C}) \\ f_1(z_1) \otimes f_2(z_2) &\mapsto (f_1(z)f_2(\bar{z}), -\sqrt{-1}f_1(z)f_2(\bar{z})),\end{aligned}$$

so that the equations

$$(\iota^*)^{1,0} \circ (\pi_{\lambda+1}(g) \otimes \pi_{\lambda-1}(\bar{g})) = \varpi_{\lambda-1}(g) \circ (\iota^*)^{1,0}$$

and

$$(\iota^*)^{0,1} \circ (\pi_{\lambda-1}(g) \otimes \pi_{\lambda+1}(\bar{g})) = \varpi_{\lambda-1}(g) \circ (\iota^*)^{0,1}$$

hold for any $g \in SL(2,\mathbb{C})$ that makes sense.

As the proof involves some representation theory, namely, the principal series representation of $SL(2,\mathbb{C})$, we omit the proof. We remark that ι^* for the embeddings $(\iota^*)^{1,0}$ and $(\iota^*)^{0,1}$ is the pull-back of the totally real embedding

$$\iota : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^1\mathbb{C} \otimes \mathbb{P}^1\mathbb{C}, \quad z \mapsto (z, \bar{z})$$

of $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$. Now, given $a \in \mathbb{N}_+$, we consider differential operator $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a} : C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R})$ that make the diagrams

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(\mathbb{C})_{\lambda+1} \otimes \mathcal{O}(\mathbb{C})_{\lambda-1} \arrow[r, hook, "(\iota^*)^{1,0}"] \arrow[d, "\mathcal{RC}^a_{\lambda+1,\lambda-1}"'] & C^\infty(\mathbb{R}^2) \oplus C^\infty(\mathbb{R}^2) \arrow[d, "\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}"] \\ \mathcal{O}(\mathbb{C})_{2\lambda+2a} \arrow[r, hook, "\iota^*"] & C^\infty(\mathbb{R}) \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

and

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(\mathbb{C})_{\lambda-1}\otimes\mathcal{O}(\mathbb{C})_{\lambda+1} \arrow[r, hook, "(\iota^*)^{0,1}"] \arrow[d, "\mathcal{RC}^a_{\lambda-1,\lambda+1}"'] & C^\infty(\mathbb{R}^2)\oplus C^\infty(\mathbb{R}^2) \arrow[d, "\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}"] \\
\mathcal{O}(\mathbb{C})_{2\lambda+2a} \arrow[r, hook, "\iota^*"] & C^\infty(\mathbb{R})
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

commutative.

Theorem 2.2. [3, Section 4.3] *For any $\lambda \in \mathbb{C}$ and $a \in \mathbb{N}_+$, any differential operator $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}$ that make the diagrams* (2.3) *and* (2.4) *satisfies the functional identity* $(\mathcal{M'}_{\lambda,\lambda+a})$.

Proof. As $\mathbb{Z}$ is Zariski dense in $\mathbb{C}$, it suffices to show that $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}$ satisfies $(\mathcal{M'}_{\lambda,\lambda+a})$ for $\lambda \in \mathbb{Z}$. For $\lambda \in \mathbb{Z}$, it first follows from the hypothesis for $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}$ and the covariance property (2.2) that $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}$ satisfies $(\mathcal{M'}_{\lambda,\lambda+a})$ on the image

$$(\iota^*)^{1,0}\big(\mathcal{O}(\mathbb{C})_{\lambda+1}\otimes\mathcal{O}(\mathbb{C})_{\lambda-1}\big)+(\iota^*)^{0,1}\big(\mathcal{O}(\mathbb{C})_{\lambda-1}\otimes\mathcal{O}(\mathbb{C})_{\lambda+1}\big).$$

To show $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda+a}$ indeed satisfies the functional identity on $C^\infty(\mathbb{R}^2)\oplus C^\infty(\mathbb{R}^2)$, observe that, for $m, n \in \mathbb{N}$, a linear span of $(z^m\bar{z}^n, \sqrt{-1}z^m\bar{z}^n)$ and $(z^m\bar{z}^n, -\sqrt{-1}z^m\bar{z}^n)$ is contained in the image. Now our assertion follows from the fact that, by the Stone–Wierstrass theorem, a linear span of $(x+\sqrt{-1}y)^m(x-\sqrt{-1}y)^n$ is dense in $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. □

To finish this section we derive from the Rankin–Cohen bidifferential operator $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}$ a differential operator $\mathbb{D}_{\lambda,\lambda+a} : C^\infty(\mathbb{R}^2)\oplus C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R})$ that satisfies the commutative diagrams (2.3) and (2.4). Observe that if $\mathrm{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}(x,y)$ is the polynomial of two variables x and y defined by

$$\mathrm{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}(x,y) := \sum_{\ell=0}^{a}(-1)^\ell\binom{\lambda_1+a-1}{\ell}\binom{\lambda_2+a-1}{a-\ell}x^{a-\ell}y^\ell, \tag{2.5}$$

then the Rankin–Cohen bidifferential operator $\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}$ is given by

$$\mathcal{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2} = \mathrm{Rest}_{z_1=z_2=z}\circ \mathrm{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\frac{\partial}{\partial z_2}\right).$$

Given $\lambda \in \mathbb{Z}$ and $a \in \mathbb{N}_+$, let D_1 and D_2 be homogeneous polynomials with real coefficients so that

$$D_1(x,y)+\sqrt{-1}D_2(x,y) = 2^{-a}\mathrm{RC}^a_{\lambda+1,\lambda-1}(x-\sqrt{-1}y, x+\sqrt{-1}y). \tag{2.6}$$

Now we set

$$\mathbb{D}_j := D_j\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ for } j=1,2$$

and

$$\mathbb{D}_{\lambda,\lambda+a} := \mathrm{Rest}_{y=0}\circ(\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2).$$

Note that we have

$$\mathbb{D}_1+\sqrt{-1}\mathbb{D}_2 = \mathrm{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}\left(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right). \tag{2.7}$$

The following lemma shows that $\mathbb{D}_{\lambda,\lambda+a}$ indeed makes the diagrams (2.3) and (2.4) commutative.

Lemma 2.3. [3, Lemma 4.3] *For any holomorphic functions f_1 and f_2, we have*

$$\mathbb{D}_{\lambda,\lambda+a}\left((\iota^*)^{1,0}(f_1 \otimes f_2)\right) = \iota^* \mathcal{RC}^a_{\lambda+1,\lambda-1}(f_1 \otimes f_2)$$

and

$$\mathbb{D}_{\lambda,\lambda+a}\left((\iota^*)^{0,1}(f_1 \otimes f_2)\right) = \iota^* \mathcal{RC}^a_{\lambda-1,\lambda+1}(f_1 \otimes f_2).$$

Proof. As $\mathrm{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}(x,y) = \mathrm{RC}^a_{\lambda_2,\lambda_1}(y,x)$, it suffices to show the first equality. Observe that since

$$(\iota^*)^{1,0}(f_1(z_1) \otimes f_2(z_2)) = \left(f_1(z)f_2(\bar{z}), \sqrt{-1}f_1(z)f_2(\bar{z})\right),$$

we have

$$\begin{aligned}
&\mathbb{D}_{\lambda,\lambda+a}\left((\iota^*)^{1,0}(f_1(z_1) \otimes f_2(z_2))\right) \\
&= \mathrm{Rest}_{y=0} \circ (\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2) \begin{pmatrix} f_1(z)f_2(\bar{z}) \\ \sqrt{-1}f_1(z)f_2(\bar{z}) \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Rest}_{y=0} \circ (\mathbb{D}_1 + \sqrt{-1}\mathbb{D}_2)\left(f_1(z)f_2(\bar{z})\right) \\
&= \mathrm{Rest}_{y=0} \circ \mathrm{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\left(f_1(z)f_2(\bar{z})\right). \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Note that we apply (2.7) from line three to line four. If $\mathrm{RC}^a_{\lambda+1,\lambda-1}(x,y) = \sum_{\ell=0}^a r_\ell x^{a-\ell}y^\ell$, then

$$\begin{aligned}
(2.8) &= \mathrm{Rest}_{y=0} \circ \mathrm{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\left(f_1(z)f_2(\bar{z})\right) \\
&= \mathrm{Rest}_{y=0} \circ \sum_{\ell=0}^a r_\ell \frac{\partial^{a-\ell} f_1}{\partial z^{a-\ell}}(z) \frac{\partial^\ell f_2}{\partial \bar{z}^\ell}(\bar{z}) \\
&= \sum_{\ell=0}^a r_\ell \frac{\partial^{a-\ell} f_1}{\partial x^{a-\ell}}(x) \frac{\partial^\ell f_2}{\partial x^\ell}(x) \\
&= \iota^* \mathcal{RC}^a_{\lambda+1,\lambda-1}(f_1(z) \otimes f_2(z)).
\end{aligned}$$

Note that the fact that f_1 and f_2 are holomorphic functions is used from line one to line two. □

As a direct consequence of Theorem 2.2 and Lemma 2.3, the following holds.

Corollary 2.4. *For any $\lambda \in \mathbb{C}$, the differential operator $\mathbb{D}_{\lambda,\lambda+a}$ satisfies $(\mathcal{M}'_{\lambda,\lambda+a})$.*

In the next section we show that, for $2\lambda \notin -\mathbb{N}$, the differential operators $\mathbb{D}_1$ and $\mathbb{D}_2$ for $\mathbb{D}_{\lambda,\lambda+a}$ can be indeed expressed as in (1.3) and (1.4), respectively.

3 The explicit formulas for $\mathbb{D}_1$ and $\mathbb{D}_2$

In this section we show that, up to scalar multiple, the differential operators $\mathbb{D}_1$ and $\mathbb{D}_2$ may be given as in (1.3) and (1.4), respectively, provided that $2\lambda \notin -\mathbb{N}$. To do so we start with observing two classical orthogonal polynomials, namely, the Jacobi polynomial and Gegenbauer polynomial.

First, recall that the Jacobi polynomial $P_\ell^{\alpha,\beta}(t)$ is a polynomial of one variable t of degree ℓ given by

$$P_\ell^{\alpha,\beta}(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\ell+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\ell+1)} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\ell+k+1)}{(\ell-k)!k!\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{t-1}{2}\right)^k.$$

We inflate it to a homogeneous polynomial of two variables x and y of degree ℓ by

$$P_\ell^{\alpha,\beta}(x,y) := y^\ell P_\ell^{\alpha,\beta}\left(2\frac{x}{y}+1\right).$$

For example, we have $P_0^{\alpha,\beta}(x,y) = 1$ and $P_1^{\alpha,\beta}(x,y) = (2+\alpha+\beta)x + (\alpha+1)y$.

Next the Gegenbauer polynomial or ultraspherical polynomial $C_\ell^\alpha(t)$ is a polynomial in one variable t of degree ℓ given by

$$C_\ell^\alpha(t) = \sum_{k=0}^{[\frac{\ell}{2}]} (-1)^k \frac{\Gamma(\ell-k+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\ell-2k+1)k!} (2t)^{\ell-2k}, \tag{3.1}$$

where $[m]$ denotes the greatest integer that does not exceed m. As for $P_\ell^{\alpha,\beta}(x,y)$, we inflate $C_\ell^\alpha(t)$ to a polynomial of two variables by

$$C_\ell^\alpha(r,s) := r^\ell C_\ell^\alpha\left(\frac{s}{\sqrt{r}}\right). \tag{3.2}$$

For instance, we have $C_0^\alpha(r,s) = 1$, $C_1^\alpha(r,s) = 2\alpha s$, and $C_2^\alpha(r,s) = 2\alpha(\alpha+1)s^2 - \alpha r$.

Now, for $a \in \mathbb{N}_+$, define meromorphic functions $A_a(\lambda)$, $B_a(\lambda)$, and $U_a(\lambda)$ of λ by

$$A_a(\lambda) := \frac{2\lambda^2 + 2(a-1)\lambda + a(a-1)}{a(2\lambda+a-1)}, \tag{3.3}$$

$$B_a(\lambda) := \frac{(\lambda-1)(2\lambda+1)}{a(2\lambda+a-1)}, \quad \text{and} \tag{3.4}$$

$$U_a(\lambda) := \frac{2\left(\lambda+[\frac{a}{2}]\right)_{[\frac{a-1}{2}]}}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_{[\frac{a-1}{2}]}}, \tag{3.5}$$

where $(\mu)_k := \mu(\mu+1)\cdots(\mu+k-1) = \frac{\Gamma(\mu+k)}{\Gamma(\mu)}$ is the Pochhammer symbol. By using $A_a(\lambda)$, $B_a(\lambda)$, and $U_a(\lambda)$, one may show a relationship between Jacobi polynomial and Gegenbauer polynomial as follows.

Proposition 3.1. [3, Proposition 4.5] *We have*

$$
\begin{aligned}
&(1-z)^a P_a^{\lambda,-2\lambda-2a+1}\left(\frac{3+z}{1-z}\right)\\
&= (-1)^{a-1}U_a(\lambda)\left((1-A_a(\lambda)z)C_{a-1}^{\lambda+\frac{1}{2}}(z) + B_a(\lambda)(1-z^2)C_{a-2}^{\lambda+\frac{3}{2}}(z)\right).
\end{aligned}
$$

Equivalently,

$$
\begin{aligned}
&P_a^{\lambda,-2\lambda-2a+1}(x-\sqrt{-1}y, x+\sqrt{-1}y)\\
&= (\sqrt{-1})^{a-1}U_a(\lambda)\left(xC_{a-1}^{\lambda+\frac{1}{2}}(-x^2,y) + \sqrt{-1}\left(A_a(\lambda)yC_{a-1}^{\lambda+\frac{1}{2}}(-x^2,y) + B_a(\lambda)(x^2+y^2)C_{a-2}^{\lambda+\frac{3}{2}}(-x^2,y)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Remark 3.2. We would like to remark that we thought that the first equation of Proposition 3.1 was already known; however, we could not find the identity in the literature.

Proposition 3.1 shows a concrete formula for $P_a^{\lambda,-2\lambda-2a+1}(x-\sqrt{-1}y, x+\sqrt{-1}y)$. On the other hand, we recall from (2.6) that the homogeneous polynomials D_j with $\mathbb{D}_j = D_j\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ for $j=1,2$ are defined in such a way that

$$
D_1(x,y) + \sqrt{-1}D_2(x,y) = 2^{-a}\mathrm{RC}^a_{\lambda+1,\lambda-1}(x-\sqrt{-1}y, x+\sqrt{-1}y).
$$

The following lemma then relates the differential operators $\mathbb{D}_1$ and $\mathbb{D}_2$ with the Jacobi polynomial $P_a^{\lambda,-2\lambda-2a+1}(x-\sqrt{-1}y, x+\sqrt{-1}y)$.

Lemma 3.3. [3, Section 3] *We have*

$$
\mathrm{RC}^a_{\lambda_1,\lambda_2}(x,y) = (-1)^a P_a^{\lambda_1-1,-\lambda_1-\lambda_2-2a+1}(x,y).
$$

Now, we are ready to show the explicit formulas for $\mathbb{D}_1$ and $\mathbb{D}_2$.

Proposition 3.4. *If $\lambda \in \mathbb{C}$ so that $2\lambda \notin -\mathbb{N}$, then, for any $a \in \mathbb{N}_+$, unique up to scalar multiple, the differential operators $\mathbb{D}_1$ and $\mathbb{D}_2$ are given as in* (1.3) *and* (1.4).

Proof. It follows from (2.6) and Lemma 3.3 that

$$
D_1(x,y) + \sqrt{-1}D_2(x,y) = (-2)^{-a}P_a^{\lambda,-2\lambda-2a+1}(x-\sqrt{-1}y, x+\sqrt{-1}y).
$$

Therefore, by Proposition 3.1,

$$
\begin{aligned}
&D_1(x,y) + \sqrt{-1}D_2(x,y)\\
&= (-2)^{-a}(\sqrt{-1})^{a-1}U_a(\lambda)\left(xC_{a-1}^{\lambda+\frac{1}{2}}(-x^2,y)\right.\\
&\qquad\left. + \sqrt{-1}\left(A_a(\lambda)yC_{a-1}^{\lambda+\frac{1}{2}}(-x^2,y) + B_a(\lambda)(x^2+y^2)C_{a-2}^{\lambda+\frac{3}{2}}(-x^2,y)\right)\right).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Observe that if given $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfies $2\lambda \notin -\mathbb{N}$, then $A_a(\lambda)$, $B_a(\lambda)$, and $U_a(\lambda)$ are all constant. Thus, by factoring $a(2\lambda + a - 1)$ out from the right hand side of (3.6), we have

$$
\begin{aligned}
&D_1(x,y) + \sqrt{-1}D_2(x,y) \\
&= S\Bigg(a(2\lambda + a - 1)xC_{a-1}^{\lambda+\frac{1}{2}}(-x^2, y) \\
&+ \sqrt{-1}\big((2\lambda^2 + 2(a-1)\lambda + a(a-1))yC_{a-1}^{\lambda+\frac{1}{2}}(-x^2, y) + (\lambda-1)(2\lambda+1)(x^2+y^2)C_{a-2}^{\lambda+\frac{3}{2}}(-x^2, y)\big)\Bigg)
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

with S some constant. Now, up to scalar multiple, the the formulas (1.3) and (1.4) follow from substituting $\frac{\partial}{\partial x}$ and $\frac{\partial}{\partial y}$ to x and y, respectively, in both sides of (3.7). □

参考文献

[1] H. Cohen, *Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters*, Math. Ann. **217**, (1975), 271–285.

[2] T. Kobayashi, *Restrictions of generalized Verma modules to symmetric pairs*, Transform. Group, **17**, (2012) 523–546.

[3] T. Kobayashi, T. Kubo, M. Pevzner, *Vector-valued covariant differential operators for the Möbius transformation*, preprint, 20pp. arXiv:1406.0674, (to appear in Lie Theory and Its Applications in Physics: Xth International Workshop, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics)

[4] T. Kobayashi, M. Pevzner, *Rankin–Cohen operators for symmetric pairs*, preprint, 53pp. arXiv:1301.2111.

[5] R. A. Rankin, *The construction of automorphic forms from the derivatives of a given form*, J. Indian Math. Soc. **20** (1956), pp. 103–116.

超幾何級数の特殊値

蛭子　彰仁　(九州大学マス・フォア・インダストリ研究所) *

1　はじめに

二項係数を係数に持つ級数 (二項級数) は冪関数で表されることが知られている. 二項定理と呼ばれるこの定理は, 古くから親しまれており, もはや日常に溶け込んでいるといって過言ではないだろう. このように非常によい性質を持った二項級数であるから, その一般化も考えられてきた. その内の一つが超幾何級数で, それは「複数の」二項係数を係数に持つ級数として定義される. Euler に端を発するこの級数は, よい性質を幾つも持っており, 数理物理等様々な場面で現れる. もしこの素姓の良い超幾何級数が, 二項定理のように, よく知られた関数で表されたのなら, それは様々な応用を持ち, また重要な意味を持つだろう. 本稿では, そのような恒等式 (超幾何恒等式) を探し出す一つの方法を掲示する. 例として, Gauss の超幾何級数に関する恒等式, Appell の多変数超幾何級数に関する恒等式を挙げる.

2　二項定理と超幾何恒等式

二項係数は

$$\binom{\alpha}{i} := \begin{cases} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!} & (i \geq 1), \\ 1 & (i = 0) \end{cases}$$

と定められる. この二項係数を係数に持つ, 次の級数を考えよう:

$${}_1F_0(a;-;x) := \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-a}{i} (-x)^i. \tag{2.1}$$

「${}_1F_0(a;-;x)$」という記法はほとんどの読者になじみがないと思われるが, 後々意味が明らかになるので, 気にせずに進めて頂きたい. さて, この級数は次のように冪関数で表されることが知られている:

$${}_1F_0(a;-;x) = (1-x)^{-a} \quad (|x| < 1). \tag{2.2}$$

二項定理と呼ばれるこの恒等式 (2.2) は, 様々な応用を持っている:

応用例 2.1. 二項定理より, 0 以上の整数 n に対して,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = {}_1F_0(-n;-;-1) = 2^n$$

が成り立つことが分かる. このように二項定理から, 組み合わせ論的恒等式が得られる.

*e-mail: a-ebisu@math.kyushu-u.ac.jp

応用例 2.2. 二項定理より

$$ {}_1F_0\left(\frac{1}{2};-;\frac{1}{50}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{7} $$

だから, $\sqrt{2}$ の数値計算が (実用には十分という意味で) 効率的に行える ([Eu] の 292 頁参照):

$$ \sqrt{2}=\frac{7}{5}\left\{1+\frac{1}{100}+\frac{1\cdot 3}{2!}\left(\frac{1}{100}\right)^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}\left(\frac{1}{100}\right)^3+\cdots\right\}. $$

同じように二項定理を使うことによって, 他の代数的数の数値計算も行える.

これら二つの例からも分かる通り, 二項定理は非常に強力な定理である.

こんなにも強力な定理なのだから,「二匹目のどじょうを狙いたい」と思ってしまうのは人情だろう. そこで, もう一度二項定理を見直してみると,「二項係数を係数に持った級数が, よく知られた関数で表される」という風に見ることが出来る. これの一般化は出来ないだろうか. まずは, 左辺の「二項係数を係数に持った級数」を拡張してみよう. 安直だが, 複数の二項係数を係数に持つような級数を考えてみる:

$$ {}_2F_1(a,b;c;x):=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\binom{-a}{i}\binom{-b}{i}}{\binom{-c}{i}}(-x)^i. \tag{2.3} $$

この級数は, $b=c$ のときに (2.1) に落ちるから, 級数 ${}_1F_0(a;-;x)$ の一般化となっていることに注意. 安直に考えた級数であるが, 実はこの級数には名前が付いている. その名も Gauss の超幾何級数であり, 超幾何級数と呼ばれる級数達の中で最も基本的なものである. 現在では, この Gauss の超幾何級数を種にして, 数多くの超幾何級数が知られている (例えば, [原岡], [木村], [Be] 参照). こういった超幾何級数達は, 数学の至るところで現れる.

残念なことに, Gauss の超幾何級数は二項定理のようにはいかない. すなわち, 一般の (a,b,c,x) に対して, Gauss の超幾何級数が別のよく知られた関数で表されるということはない. 他の超幾何級数に関しては言わずもがなである. しかしながら, (a,b,c,x) が特別な数の組である場合には, その限りではないということは古くから知られていた. 例えば, Euler によって Gauss の超幾何級数が導入されるよりはるか昔 13 世紀には, 0 以上の整数 n に対して,

$$ {}_2F_1(a,-n;c;1)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\binom{-a}{i}\binom{n}{i}}{\binom{-c}{i}}(-1)^i=\frac{\binom{a-c}{n}}{\binom{-c}{n}}. \tag{2.4} $$

が成り立つことが知られていた. この恒等式 (2.4) は, 現在 Chu-Vandermnode の公式と呼ばれている ([AAR] の補題 2.2.3 参照). さらに, この恒等式を一般化した

$$ {}_2F_1(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\quad(\Re(c-a-b)>0) \tag{2.5} $$

が Gauss によって得られている (cf. [Ga] の 24[48] 式参照). ここで, $\Re(c-a-b)>0$ は Gauss の超幾何級数が $x=1$ で収束する為の条件である. これら恒等式は, 様々な場面で使われている. それでなくとも, (2.4) は組み合わせ論的恒等式であるし, (2.5) は超越数を近似することにも使える (応用例 2.1, 2.2 の類似) 為, 大変重要な恒等式である. このように超幾何級数が良く知られた関数で表されたのなら, それは様々な応用を持ち, 重要な意味を持つだろう. そのため, このような恒等式 (超幾何恒等式) を見つける研究は現在に至るまで精力的に行われている. 本稿の目的は, 超幾何恒等式を見つける一つの手段を提供することである.

3　本稿で取り上げられる超幾何級数達

この節では, 本稿で取り上げられる超幾何級数達を定義しよう. これらは 19 世紀には既に知られていた超幾何級数達で, 古典的超幾何級数と呼ばれている. 後に述べるように, これら古典的超幾何級数は重要な性質 (隣接関係) を持っている.

古典的超幾何級数は二項係数を用いて定義することも出来るが, 通常は Pochhammer 記号

$$(\alpha, i) := \frac{\Gamma(\alpha+i)}{\Gamma(\alpha)} = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+i-1) & (i \geq 1), \\ 1 & (i = 0) \end{cases}$$

を用いて定義される.[1] まずは, 超幾何級数の雛型である ${}_1F_0(a;-;x)$, Gauss の超幾何級数 ${}_2F_1(a,b;c;x)$ を Pochhammer 記号を用いて書き直そう:

$$\binom{-\alpha}{i} = (-1)^i \frac{(\alpha, i)}{i!}$$

であるから,

$${}_1F_0(a;-;x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a,i) \frac{x^i}{i!}, \tag{3.1}$$

$${}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a,i)(b,i)}{(c,i)} \frac{x^i}{i!} \tag{3.2}$$

となる.

さて, Gauss の超幾何級数 (3.2) の係数に現れる Pochhammer 記号を増やした級数を考える:

$$\begin{aligned} {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix} a_0, a_1, \cdots, a_p \\ b_1, b_2, \cdots, b_p \end{matrix}; x\right) &:= {}_{p+1}F_p(a_0, a_1, \cdots, a_p; b_1, b_2, \cdots, b_p; x) \\ &:= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a_0,i)(a_1,i)\cdots(a_p,i)}{(b_1,i)(b_2,i)\cdots(b_p,i)} \frac{x^i}{i!}. \end{aligned}$$

この級数は一般化超幾何級数と呼ばれる. $p = 1$ のときは, Gauss の超幾何級数であることに注意しよう.

今度は, 多変数化することを考える. Appell は以下の四つの多変数超幾何級数を定義した:

$$\begin{aligned} F_1(a;b_1,b_2;c;x,y) &:= \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(a,i+j)(b_1,i)(b_2,j)}{(c,i+j)} \frac{x^i y^j}{i!j!}, \\ F_2(a;b_1,b_2;c_1,c_2;x,y) &:= \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(a,i+j)(b_1,i)(b_2,j)}{(c_1,i)(c_2,j)} \frac{x^i y^j}{i!j!}, \\ F_3(a_1,a_2;b_1,b_2;c;x,y) &:= \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(a_1,i)(a_2,j)(b_1,i)(b_2,j)}{(c,i+j)} \frac{x^i y^j}{i!j!}, \\ F_4(a;b;c_1,c_2;x,y) &:= \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(a,i+j)(b,i+j)}{(c_1,i)(c_2,j)} \frac{x^i y^j}{i!j!}. \end{aligned}$$

[1] 本稿では取り上げないが Bessel 関数等, 合流型超幾何級数を定義する際には, 二項係数では足りなくて, Pochhammer 記号が必要になってくる.

これらを総称して Appell の超幾何級数と呼ぶ. これらも Gauss の超幾何級数の一般化になっていることに注意しよう. 例えば F_1 の場合, $b_2 = 0$ のときや $y = 0$ のときには Gauss の超幾何級数に落ちることが分かる. 本稿では挙げないが, Appell の超幾何級数はさらに多変数化されており, それらは Appell-Lauricella の超幾何級数と呼ばれている.

以上に挙げた, Gauss の超幾何級数, 一般化超幾何級数, Appell-Lauricella の超幾何級数は古典的超幾何級数と呼ばれている. これら古典的超幾何級数達は, 共通の, そして重要な性質を持っている. すなわち, パラメータ (級数の係数に現れる変数のこと, 例えば Gauss の超幾何級数の場合 a, b, c) が整数差ずれた複数の超幾何級数の間に, 有理関数係数の一次関係式が成り立つのである. この関係式を隣接関係式と呼ぶ. 本稿で提供する超幾何恒等式を探し出す方法では, この隣接関係式が重要な役割を果たす.

4　超幾何恒等式を探し出す

この節では, 超幾何恒等式を探し出す方法を構成する. 構成の際, 隣接関係式が重要な役割を果たすので, 「隣接関係式の方法」と呼ぶことにしよう. この方法は古典的超幾何級数に適用することが出来る. 例として, Gauss の超幾何級数 ${}_2F_1$, Appell の超幾何級数 F_1 に関する恒等式を幾つか挙げる.

4.1　隣接関係式の方法と超幾何級数の特殊値

この小節では, 隣接関係式の方法について述べる.

まずは, 二項定理 (2.2) を証明することから始めよう. これから述べる証明法が, 隣接関係式の方法の雛型となる. 微分記号を ∂ と書くことにしよう. すなわち, $\partial := \frac{d}{dx}$. このとき, $x\partial x^i = ix^i$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned}(x\partial + a)\,{}_1F_0(a; -; x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a,i)}{(1,i)}(x\partial + a)x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a,i)}{(1,i)}(i+a)x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a(a+1,i)}{(1,i)}x^i = a\,{}_1F_0(a+1; -; x)\end{aligned}$$

となる. また,

$$\begin{aligned}\partial{}_1F_0(a; -; x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a,i)}{(1,i)} ix^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a,i+1)}{(1,i)}x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a(a+1,i)}{(1,i)}x^i = a\,{}_1F_0(a+1; -; x)\end{aligned}$$

である. これら二つの式から微分記号を消去すると,

$${}_1F_0(a; -; x) = (1-x){}_1F_0(a+1; -; x) \tag{4.1}$$

を得る. こうして, ${}_1F_0(a; -; x)$ と ${}_1F_0(a+1; -; x)$ の間には, 有理関数係数の一次関係式が成り立つことが分かった. さらには, (4.1) は有理関数係数の一階線型差分方程式と見なせる. このことに注意して, 差分方程式 (4.1) を解いてみよう. 任意の自然数 n に対して

$${}_1F_0(a+n-1; -; x) = (1-x){}_1F_0(a+n; -; x)$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned}{}_1F_0(a;-;x) &= (1-x){}_1F_0(a+1;-;x) = (1-x)^2{}_1F_0(a+2;-;x) = \cdots \\ &= (1-x)^n{}_1F_0(a+n;-;x)\end{aligned} \tag{4.2}$$

となる. この式 (4.2) に $a=-n$ を代入することにより,

$${}_1F_0(-n;-;x) = (1-x)^n{}_1F_0(0;-;x) = (1-x)^n. \tag{4.3}$$

を得る. 恒等式 (4.3) は 0 以上の整数 n に対して成り立つから, Carlson の定理 (証明は [Ba] の 5.3 節参照)

定理 4.1. 以下の三つの条件

$$\begin{aligned}&(i) \quad f(n), g(n) : \Re(n) \geq 0 \text{ で正則}, \\ &(ii) \quad f(n), g(n) : \Re(n) \geq 0 \text{ で } O(e^{k|n|}) \quad (\text{ここで, } k < \pi), \\ &(iii) \quad f(n) = g(n) \ (n = 0, 1, 2, \cdots)\end{aligned}$$

が成り立つとき, $f(n) = g(n)$ $(\Re(n) \geq 0)$.

が適用出来て, (4.3) は実は任意の複素数 n に対して成り立つことが分かる. こうして, 二項定理の証明が出来た.

隣接関係式の方法は, この二項定理の証明法の一般化である. 先に述べたように, 古典的超幾何級数は隣接関係を持つという性質を持っていた. すなわち, パラメータが整数差ずれた幾つかの超幾何級数の間には, 有理関数係数の一次関係式が成り立つのであった. もし, パラメータ・独立変数に条件を加えることによって, 隣接関係式が二個の超幾何級数の間の一次関係式に落ちたとしよう. さらに, この一次関係式は有理関数係数の一階線型差分方程式と見なせたとしよう. このとき, 先ほど二項定理を証明したように, この差分方程式を解くことによって, 超幾何恒等式が得られるだろう. 以上が, 隣接関係式の方法となる.

この方法によって果たしてどれくらいの超幾何恒等式が得られるだろう, と感じる方も多いかと思うが, 実は, Gauss の超幾何級数に関しては, 既に知られているほとんど全ての超幾何恒等式が構成される. そればかりでなく, 多くの新しい超幾何恒等式が構成されることが分かっている ([Eb2] には, 実際に構成される沢山の超幾何恒等式が挙げられている). また, 一般化超幾何級数 ${}_3F_2$ に関しても, 同様なことが言えそうだと分かってきた. このことから, 隣接関係式の方法によって, 既知・新規を問わずに数多くの超幾何恒等式が得られると期待される. そこで, 隣接関係式の方法から得られる超幾何級数の値を, 大層だが特殊値 (special value) と呼ぶことにしよう[2].

次小節, 次々小節では, 隣接関係式の方法を適用して, Gauss の超幾何級数 ${}_2F_1$, Appell の超幾何級数 F_1 の特殊値の例を幾つか挙げる.

4.2 Gauss の超幾何級数の特殊値

この小節では, 隣接関係式の方法を適用して, Gauss の超幾何級数の特殊値を幾つか挙げていく.

[2]適当な日本語, 適当な英語が見つからなかったのが真相である.

先に述べたように, 古典的超幾何級数は隣接関係を持っている. Gauss の超幾何級数の場合は, 三個の級数の間に隣接関係式が成り立つことが知られている[3]. すなわち, 整数の三つ組 $(k,l,m)\in\mathbf{Z}^3$ を与えたとき,

$$ {}_2F_1(a+k,b+l;c+m;x)=Q{}_2F_1(a+1,b+1;c+1;x)+R{}_2F_1(a,b;c;x) \tag{4.4}$$

を満たすような唯一の有理関数の組 $(Q,R)\in(\mathbf{Q}(a,b,c,x))^2$ が存在する. ここで大事なことは, 整数の三つ組 (k,l,m) を与えたとき, 有理関数 Q,R の計算が実際に出来るということである. Q,R を計算する為に様々な計算法が知られている. しかし, Gauss の超幾何級数の場合は Q,R の明示的な表示が求まっており, その表示式から計算する方法が (著者の知る限りでは) 最も効率的である (詳しくは, [Eb1] を参照). 例えば, $1\le m$, $0\le m-k-l$, $k\le l$ の場合,

$$\begin{aligned}
Q&=x^{1-m}(1-x)Q_0, &&(Q_0\text{: } x \text{ の } (m-k-1) \text{ 次多項式}),\\
R&=x^{1-m}R_0, &&(R_0\text{: } x \text{ の } (m-k-1) \text{ 次多項式})
\end{aligned}$$

と表され, さらに Q_0,R_0 は次のように表示される:

$$\begin{aligned}
Q_0&=C^1x^m{}_2F_1(a+k,b+l;c+m;x){}_2F_1(1-a,1-b;2-c;x)\\
&\quad+C^2{}_2F_1(c-a,c-b;c;x){}_2F_1(a+1-c+k-m,b+1-c+l-m;2-c-m;x),\\
R_0&=C^3x^{m-1}{}_2F_1(a+k,b+l;c+m;x){}_2F_1(-a,-b;1-c;x)\\
&\quad+C^4{}_2F_1(c-a,c-b;c+1;x){}_2F_1(a+1-c+k-m,b+1-c+l-m;2-c-m;x),\\
C^1&=-\frac{ab}{c(1-c)},\ C^3=1,\\
C^2&=\frac{ab(c,m)(a+1-c,k-m)(b+1-c,l-m)}{c(1-c)(a,k)(b,l)(2-c,-m)},\ C^4=-C^2.
\end{aligned}$$

これらの表示のみだと Q_0,R_0 は無限級数に見えるが, 上記のようにこれらは $(m-k-1)$ 次多項式ということが分かっている. そこで, $(m-k-1)$ 次までの計算で打ち切ることによって, Q_0,R_0 が実際に求まる. こうして, Q,R が求まるという塩梅である[4].

さて話を進めよう. 関係式 (4.4) から,

$$\begin{aligned}
&{}_2F_1(a+nk,b+nl;c+nm;x)\\
&=Q^{(n)}{}_2F_1(a+(n-1)k+1,b+(n-1)l+1;c+(n-1)m+1;x)\\
&+R^{(n)}{}_2F_1(a+(n-1)k,b+(n-1)l,c+(n-1)m;x),
\end{aligned}$$

を得る. ここで,

$$\begin{aligned}
Q^{(n)}&:=Q|_{(a,b,c)\to(a+(n-1)k,b+(n-1)l,c+(n-1)m)},\\
R^{(n)}&:=R|_{(a,b,c)\to(a+(n-1)k,b+(n-1)l,c+(n-1)m)}
\end{aligned}$$

とする. (a,b,c,x) を方程式系

$$Q^{(n)}=0\quad\text{for } n=1,2,3,\ldots. \tag{4.5}$$

[3] そういうわけで, 「Gauss の超幾何級数の三項間関係式」と呼ぶこともある.

[4] この方法を実装した Risa/Asir プログラムは `https://sites.google.com/site/akihitoebisu/programs/3tr-rr` に置かれている.

の解としよう．このとき, (a,b,c,x) は関係式

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{1}{R^{(1)}} \times {}_2F_1(a+k,b+l;c+m;x) $$

を満たす．これは一階線型差分方程式と見なせるから,

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{1}{R^{(1)}R^{(2)}\cdots R^{(n)}} \times {}_2F_1(a+nk,b+nl;c+nm;x) \tag{4.6} $$

を得る．そして, この関係式 (4.6) から特殊値が得られる．例えば, $k \neq 0$ としよう．このとき, (4.6) に $a=-nk-k'$(ここで, k' は $0 \le k' < |k|$ を満たすような整数) を代入することによって,

$$ {}_2F_1(-nk-k',b;c;x) = \left.\left(\frac{1}{R^{(1)}R^{(2)}\cdots R^{(n)}}\right)\right|_{a\to -nk-k'} \times {}_2F_1(-k',b+nl;c+nm;x). \tag{4.7} $$

といった特殊値が得られる (右辺の超幾何級数は, 定義から $(k'+1)$ 項の和なので実際に計算出来る).

少し長くなってしまったので, まとめると以下のようになる:

手順 1: $(k,l,m) \in \mathbf{Z}^3$ を与えよ．

手順 2: 隣接関係式 (4.4) の係数 Q,R を求めよ．

手順 3: 方程式系 (4.5) を満たすような (a,b,c,x) を得よ．

手順 4: 関係式 (4.6) から特殊値を求めよ．

ここで注意すべきは, $Q^{(n)}$ の分子は $\mathbf{Z}[a,b,c,x]$ 係数の n に関する多項式になるということである．それ故, 方程式系 (4.5) を満たすような (a,b,c,x) を得るためには, この多項式の全ての係数が 0 となるような (a,b,c,x) を探せばよい．すなわち, 手順 3 を達成する為には, (a,b,c,x) に関する多項式系を解けばよいのである．この計算には, Gröbner 基底の理論, およびそれを実装した数式処理システムが役に立つ[5]．また, この構成法から, 関係式 (4.6) は任意の整数 n に対して成り立つことに注意しよう．

それでは幾つかの格子点 (k,l,m) を与えて, それらに対応する特殊値を見ていこう．と, その前に, Gauss の超幾何級数 ${}_2F_1(a,b;c;x)$ の収束性について簡単におさらいをする．a や b が 0 以下の整数の場合有限和になるが, それ以外の場合は無限和となり, 収束半径は 1 となる．また, 収束円の境界上 $(|x|=1)$ での収束性についても分かっており, $x=1$ の場合, $\Re(c-a-b)>0$ のときに収束し, それ以外の場合, $\Re(c-a-b)>-1$ のときに収束する．今までは形式的に議論を行ってきたのだが, 実際に特殊値の計算を行う際には, 級数の収束性を議論する必要が出てくるのである．

例 4.2. $(k,l,m)=(0,1,1)$ の場合．この場合, 隣接関係式として

$$ {}_2F_1\left(a,b+1;c+1;x\right) = \frac{a\left(1-x\right){}_2F_1\left(a+1,b+1;c+1;x\right)}{a-c} - \frac{c_2F_1\left(a,b;c;x\right)}{a-c} \tag{4.8} $$

を得る．

$$ Q^{(n)}(x) = \frac{a(1-x)}{a-c-n+1} $$

[5] 著者は Risa/Asir を使用している．

となるから, 方程式系 (4.5) を満たすような (a,b,c,x) は $(a,b,c,x)=(0,b,c,x)$ と $(a,b,c,1)$ である. (a,b,c,x) が前者の場合, 対応する超幾何級数は ${}_2F_1(0,b;c;x)$ となるが, これは定義から明らかに 1 となる (つまらない). 後者の場合を考えよう. この場合,

$$\frac{1}{R^{(1)}R^{(2)}\cdots R^{(n)}}=\frac{(c-a,n)}{(c,n)}$$

となるから,

$${}_2F_1(a,b;c;1)=\frac{(c-a,n)}{(c,n)}{}_2F_1(a,b+n;c+n;1)$$

を得る. この関係式は, a や b が 0 以下の整数で有る場合か, $\Re(c-a-b)>0$ を満たす場合に成り立つことに注意しよう. この式に $b=-n$(ここで, $n\in\mathbf{Z}_{\geq 0}$) を代入することにより, Chu-Vandermonde の公式 (2.4) を得る. また, この恒等式は

$${}_2F_1(a,-n;c;1)=\frac{(c-a,n)}{(c,n)}=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a+n)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c+n)} \tag{4.9}$$

と書ける. ここで, (定義される範囲においてであるが)Gauss の超幾何級数 ${}_2F_1(a,b;c;x)$ は (a,b,c,x) に関して正則であるということに注意すると, Carlson の定理から (4.9) は $\Re(c-a+n)>0$ を満たす任意の複素数 n に対して成り立つことが分かる. これは, Gauss の和公式 (2.5) に他ならない.

注意 4.3. Gauss 自身, 本質的には隣接関係式の方法を用いて, Gauss の和公式 (2.5) を得ている ([Ga] の 18 節 [39] 式, 24 節 [48] 式参照). それ故, 隣接関係式の方法は全くの新しい方法ではなく, その始まりは Gauss にまで遡る.

例 4.4. $(k,l,m)=(-1,0,1)$ の場合. この場合, 隣接関係式 (4.4) の係数 Q,R はそれぞれ,

$$\begin{aligned}Q&=\frac{ab\,(1-x)\,(xb-xc-1+a)}{(a-c)\,(a-c-1)\,(b-c)},\\ R&=\frac{c\left(-xb^2+xbc-a^2-2\,ba+2\,ac+a+cb+b-c^2-c\right)}{(a-c)\,(a-c-1)\,(b-c)}\end{aligned}$$

となる. このことから $Q^{(n)}$ の分子は

$$b\,(1-x)\left[(x+1)\,n^2+\{(-a-2-b+c)\,x-2\,a-1\}\,n+(a+1)\,\{(1+b-c)\,x+a\}\right]$$

となるが, これが n に依らずに 0 となるためには, (a,b,c,x) が $(a,0,c,x),(a,b,c,1),(a,b,b+1-a,-1)$ のいずれかである必要がある. 一番最初の場合は, つまらない恒等式 ${}_2F_1(a,0;c;x)=1$ が出てくる. 二番目の場合から出てくる恒等式は例 4.2 で考察しているので, 最後の場合のみを考えよう. この場合,

$$\frac{1}{R^{(1)}R^{(2)}\cdots R^{(n)}}=\frac{(\frac{b}{2}+1-a,n)}{(b+1-a,n)}$$

となり,

$${}_2F_1(a,b;b+1-a;-1)=\frac{(\frac{b}{2}+1-a,n)}{(b+1-a,n)}{}_2F_1(a-n,b;b+1-a+n;-1)$$

を得る．この関係式は, $\Re(a) < 1$ であり, 且つ $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ である場合に成り立つことに注意しよう．さて, この式に $a = 0$ を代入することにより,

$$ {}_2F_1(-n, b; b+1+n; -1) = \frac{(b+1, n)}{(\frac{b}{2}+1, n)} $$

を得る．例 4.2 で Gauss の和公式を導いたように, この式に対して Carlson の定理を用いることにより,

$$ {}_2F_1(-n, b; b+1+n; -1) = \frac{\Gamma(\frac{b}{2}+1)\Gamma(b+1+n)}{\Gamma(b+1)\Gamma(\frac{b}{2}+1+n)} \tag{4.10} $$

が $\Re(n) > -1$ を満たす任意の複素数 n に対して成り立つことがわかる．$-n$ を a と書き直すことにより, 等式 (4.10) は

$$ {}_2F_1(a, b; b+1-a; -1) = \frac{\Gamma(\frac{b}{2}+1)\Gamma(b+1-a)}{\Gamma(b+1)\Gamma(\frac{b}{2}+1-a)} \quad (\Re(a) < 1) \tag{4.11} $$

と表される．この恒等式は, Kummer の公式と呼ばれている．

例 4.5. $(k, l, m) = (3, 2, 2)$ の場合． この場合, 方程式系 (4.5) を満たすようなものとして, $(3a, 2a, 2a+\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ がある．このとき,

$$ \frac{1}{R^{(1)}R^{(2)}\cdots R^{(n)}} = \frac{3^{3n}(a+\frac{1}{3}, n)(a+\frac{2}{3}, n)}{2^{6n}(a+\frac{1}{4}, n)(a+\frac{3}{4}, n)} $$

となり,

$$ {}_2F_1\left(3a, 2a; 2a+\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) = \frac{3^{3n}(a+\frac{1}{3}, n)(a+\frac{2}{3}, n)}{2^{6n}(a+\frac{1}{4}, n)(a+\frac{3}{4}, n)} {}_2F_1\left(3a+3n, 2a+2n; 2a+\frac{1}{2}+2n; \frac{1}{4}\right) $$

を得る．今回の場合, 級数は (定義される限りは) 収束するので, 前回前々回の例で見たような条件を課さなくてよい．さて, この式に $a = 0$ を代入すると, $n \in \mathbf{Z}$ に関して

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left(3n, 2n; \frac{1}{2}+2n; \frac{1}{4}\right) &= \frac{2^{6n}(\frac{1}{4}, n)(\frac{3}{4}, n)}{3^{3n}(\frac{1}{3}, n)(\frac{2}{3}, n)} = \frac{2^{6n}\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{4}+n)\Gamma(\frac{3}{4}+n)}{3^{3n}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{3}+n)\Gamma(\frac{2}{3}+n)} \\ &= \frac{2^{6n+\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{4}+n)\Gamma(\frac{3}{4}+n)}{3^{3n+\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{3}+n)\Gamma(\frac{2}{3}+n)} \end{aligned} $$

が成り立つ．この式に対して Carlson の定理を使い, さらに得られた式に対して n を a と書きかえると,

$$ {}_2F_1\left(3a, 2a; 2a+\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) = \frac{2^{6a+\frac{1}{2}}\Gamma(a+\frac{1}{4})\Gamma(a+\frac{3}{4})}{3^{3a+\frac{1}{2}}\Gamma(a+\frac{1}{3})\Gamma(a+\frac{2}{3})} \tag{4.12} $$

を得る．

4.3 Appell の超幾何級数 F_1 の特殊値

この小節では, 隣接関係式の方法を適用して, Appell の超幾何級数 F_1 の特殊値を幾つか挙げていく.

F_1 の場合は, 四個の級数の間に隣接関係式が成り立つことが知られている. すなわち, 整数の四つ組 $(k, l_1, l_2, m) \in \mathbf{Z}^4$ を与えたとき,

$$\begin{aligned} &F_1(a+k; b_1+l_1, b_2+l_2; c+m; x, y) \\ &= Q_1 \cdot F_1(a+1; b_1+1, b_2; c+1; x, y) + Q_2 \cdot F_1(a+1; b_1, b_2+1; c+1; x, y) + Q_3 \cdot F_1(a; b_1, b_2; c; x, y) \end{aligned} \tag{4.13}$$

を満たすような唯一の有理関数の組 $(Q_1, Q_2, Q_3) \in (\mathbf{Q}(a, b_1, b_2, c, x, y))^3$ が存在する. 整数の四つ組 (k, l_1, l_2, m) を与えたときに, 有理関数 Q_1, Q_2, Q_3 の計算が実際に行えるということに注意しよう[6].

これからやっていくことは前小節でやったことと同じである. 関係式 (4.13) から,

$$\begin{aligned} &F_1(a+nk; b_1+nl_1, b_2+nl_2; c+nm; x, y) \\ &= Q_1^{(n)} \cdot F_1(a+1+(n-1)k; b_1+1+(n-1)l_1, b_2+(n-1)l_2; c+1+(n-1)m; x, y) \\ &+ Q_2^{(n)} \cdot F_1(a+1+(n-1)k; b_1+(n-1)l_1, b_2+1+(n-1)l_2; c+1+(n-1)m; x, y) \\ &+ Q_3^{(n)} \cdot F_1(a+(n-1)k; b_1+(n-1)l_1, b_2+(n-1)l_2; c+(n-1)m; x, y) \end{aligned}$$

を得る. ここで,

$$Q_i^{(n)} := Q|_{(a, b_1, b_2, c) \to (a+(n-1)k, b_1+(n-1)l_1, b_2+(n-1)l_2, c+(n-1)m)}$$

(i=1,2,3) とする. (a, b_1, b_2, c, x) が, どのような n に対しても

$$\begin{cases} Q_1^{(n)} = 0, \\ Q_2^{(n)} = 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

を満たしているとしよう. このとき, そのような (a, b_1, b_2, c, x) は関係式

$$F_1(a; b_1, b_2; c; x, y) = \frac{1}{Q_3^{(1)}} \times F_1(a+k, b_1+l_1, b_2+l_2; c+m; x, y)$$

を満たす. これは一階線型差分方程式と見なせるから,

$$F_1(a; b_1, b_2; c; x, y) = \frac{1}{Q_3^{(1)} Q_3^{(2)} \cdots Q_3^{(n)}} \times F_1(a+nk, b_1+nl_1, b_2+nl_2; c+nm; x, y) \tag{4.15}$$

を得る. そして, この関係式 (4.15) から特殊値が得られるのである.

工程をまとめると以下のようになる.

手順 1': $(k, l_1, l_2, m) \in \mathbf{Z}^4$ を与えよ.

手順 2': 隣接関係式 (4.13) の係数 Q_1, Q_2, Q_3 を求めよ.

[6]隣接関係式の係数が明示的に与えられていた Gauss の超幾何級数の場合と違い, F_1 の場合は, 隣接関係式の係数である Q_1, Q_2, Q_3 を明示的に求めることに未だ成功していない. そこで多少効率が悪いが, 微分作用素環に Gröbner 基底の理論を用いることによって, F_1 の隣接関係式の計算を行っている. 詳しくは, [日比] の 6, 7 章参照.

手順 3': どのような n に対しても (4.14) を満たすような (a, b_1, b_2, c, x, y) を得よ.

手順 4': 関係式 (4.15) から特殊値を求めよ.

それでは幾つかの格子点 (k, l_1, l_2, m) を与えて, それらに対応する特殊値を見ていこう. 最初に, Appell の超幾何級数 $F_1(a; b_1, b_2; c; x, y)$ の収束性について述べる. a が 0 以下の整数の場合有限和になるが, それ以外の場合は無限和となる. この場合, $|x|, |y| < 1$ を満たす領域で絶対収束することが知られている.

例 4.6. $(k, l_1, l_2, m) = (3, 0, 2, 2)$ の場合. どのような n に対しても (4.14) を満たすような (a, b_1, b_2, c, x, y) として, $(3a, 2b-1, 2a+1-2b, 2a+b, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ がある. このとき,

$$\frac{1}{Q_3^{(1)} Q_3^{(2)} \cdots Q_3^{(n)}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{3n} \frac{(a+\frac{1}{3}, n)(a+\frac{2}{3}, n)}{(a+\frac{b}{2}, n)(a+\frac{b}{2}+\frac{1}{2}, n)}$$

となり, それ故

$$\begin{aligned} &F_1\left(3a; 2b-1; 2a+1-2b; 2a+b; \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{3n} \frac{(a+\frac{1}{3}, n)(a+\frac{2}{3}, n)}{(a+\frac{b}{2}, n)(a+\frac{b}{2}+\frac{1}{2}, n)} F_1\left(3a+3n; 2b-1; 2a+1-2b+2n; 2a+b+2n; \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

を得る. さて, この式に $a = 0$ を代入しよう. $F_1(0; b_1, b_2; c; x, y) = 1$ であることに注意すると, $n \in \mathbf{Z}$ に関して

$$\begin{aligned} F_1\left(3n; 2b-1; 1-2b+2n; b+2n; \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) &= \left(\frac{3}{4}\right)^{-3n} \frac{(\frac{b}{2}, n)(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}, n)}{(\frac{1}{3}, n)(\frac{2}{3}, n)} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{-3n} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{b}{2}+n)\Gamma(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(\frac{b}{2})\Gamma(\frac{b}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{3}+n)\Gamma(\frac{2}{3}+n)} \end{aligned}$$

が成り立つ. この式に対して Carlson の定理を使い, さらに得られた式に対して n を a と書きかえると,

$$F_1\left(3a; 2b-1; 2a+1-2b; 2a+b; \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^{-3a} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(a+\frac{b}{2})\Gamma(a+\frac{b}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{b}{2})\Gamma(\frac{b}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(a+\frac{1}{3})\Gamma(a+\frac{2}{3})} \tag{4.16}$$

を得る. この式 (4.16) を特殊化してみよう.

$$\begin{aligned} F_1(a; 0, b_2; c; x, y) &= {}_2F_1(a, b_2; c; y), \\ F_1(a; b_1, 0; c; x, y) &= {}_2F_1(a, b_1; c; x) \end{aligned}$$

であることに注意し, $b = \frac{1}{2}$, $b = a + \frac{1}{2}$ を代入してみると, それぞれから

$${}_2F_1\left(3a, 2a; 2a+\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) = \frac{2^{6a+\frac{1}{2}}\Gamma(a+\frac{1}{4})\Gamma(a+\frac{3}{4})}{3^{3a+\frac{1}{2}}\Gamma(a+\frac{1}{3})\Gamma(a+\frac{2}{3})}, \tag{4.17}$$

$${}_2F_1\left(3a, 2a; 3a+\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right) = \frac{2^{4a}\Gamma(a+\frac{1}{6})\Gamma(a+\frac{5}{6})}{\sqrt{3}\Gamma(a+\frac{1}{3})\Gamma(a+\frac{2}{3})} \tag{4.18}$$

を得る. 特に, 式 (4.17) は式 (4.12) そのものである. このことから, 式 (4.16) は式 (4.12) や式 (4.18) の一般化と見なすことが出来る.

例 4.7. $(k, l_1, l_2, m) = (3, 0, 4, 2)$ の場合．どのような n に対しても (4.14) を満たすような (a, b_1, b_2, c, x, y) として，$(3a, \frac{1}{2}, 4a-1, 2a+\frac{1}{2}, \frac{1}{81}, \frac{2}{27})$ がある．このとき，

$$\frac{1}{Q_3^{(1)} Q_3^{(2)} \cdots Q_3^{(n)}} = \frac{2^{2n} 5^{5n} (a+\frac{1}{3}, n)(a+\frac{2}{3}, n)}{3^{9n} (a+\frac{1}{4}, n)(a+\frac{3}{4}, n)}$$

となり，それ故

$$\begin{aligned} & F_1\left(3a; \frac{1}{2}, 4a-1; 2a+\frac{1}{2}; \frac{1}{81}, \frac{2}{27}\right) \\ & = \frac{2^{2n} 5^{5n} (a+\frac{1}{3}, n)(a+\frac{2}{3}, n)}{3^{9n} (a+\frac{1}{4}, n)(a+\frac{3}{4}, n)} F_1\left(3a+3n; \frac{1}{2}, 4a-1+4n; 2a+\frac{1}{2}+2n; \frac{1}{81}, \frac{2}{27}\right) \end{aligned}$$

を得る．さて，この式に $a=0$ を代入すると，$n \in \mathbf{Z}$ に関して

$$\begin{aligned} F_1\left(3n; \frac{1}{2}, -1+4n; \frac{1}{2}+2n; \frac{1}{81}, \frac{2}{27}\right) &= \frac{3^{9n} (\frac{1}{4}, n)(\frac{3}{4}, n)}{2^{2n} 5^{5n} (\frac{1}{3}, n)(\frac{2}{3}, n)} \\ &= \frac{3^{9n} \Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{4}+n)\Gamma(\frac{3}{4}+n)}{2^{2n} 5^{5n} \Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{3}+n)\Gamma(\frac{2}{3}+n)} \\ &= \frac{3^{9n-\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{4}+n)\Gamma(\frac{3}{4}+n)}{2^{2n-\frac{1}{2}} 5^{5n} \Gamma(\frac{1}{3}+n)\Gamma(\frac{2}{3}+n)} \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．この式に対して Carlson の定理を使い，さらに得られた式に対して n を a と書きかえると，

$$F_1\left(3a; \frac{1}{2}, 4a-1; 2a+\frac{1}{2}; \frac{1}{81}, \frac{2}{27}\right) = \frac{3^{9a-\frac{1}{2}} \Gamma(a+\frac{1}{4})\Gamma(a+\frac{3}{4})}{2^{2a-\frac{1}{2}} 5^{5a} \Gamma(a+\frac{1}{3})\Gamma(a+\frac{2}{3})} \tag{4.19}$$

を得る．この式 (4.19) を特殊化してみよう．$a = \frac{1}{4}$ を代入してみると，

$${}_2F_1\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{81}\right) = \frac{9\,\Gamma(\frac{1}{4})^2}{2^{\frac{3}{2}} 5^{\frac{5}{4}} \pi^{\frac{3}{2}}} \tag{4.20}$$

を得る．このように，得られた F_1 の特殊値をさらに特殊化することによって，自由変数を持たない ${}_2F_1$ に関する超幾何恒等式が得られることもある．

注意 4.8. 恒等式 (4.20) には，自由変数が一つも含まれていない．この他にも，自由変数を持たない ${}_2F_1$ に関する超幾何恒等式は幾つも知られている．例えば，[BW] には次のような恒等式が載っている:

$${}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; \frac{1}{2}; \frac{1323}{1331}\right) = \frac{3 \cdot 11^{\frac{1}{4}}}{4}. \tag{4.21}$$

特別であるが故にこのような恒等式を美しいと見るべきかもしれないが，いささか融通の利かないものにも見える．このような恒等式を特別な場合として含んでいる，自由変数を持った超幾何恒等式はないのだろうか．

Gauss の超幾何級数 ${}_2F_1$ の特殊値は，その性質上，離散的ないし連続的な自由変数を少なくとも一つ持つ (式 (4.6), (4.7) を参照)．このことから例えば，恒等式 (4.21) を含むような ${}_2F_1$ の特殊値は存在しないかどうか，疑問に思うが，現在のところそのようなものは見つかってい

ない[7]. しかしながら, F_1 の特殊値 (4.19) が超幾何恒等式 (4.20) を含んでいたように, 古典的超幾何級数の特殊値が, 自由変数を持っていない ${}_2F_1$ に関する超幾何恒等式を含んでいる場合はかなりあると思われる. そのような特殊値がどれくらいあるだろうか, また実際にどのような超幾何恒等式を含んでいるだろうか, 興味深い話題である.

5 超幾何恒等式の発見方法 今昔

現在では, 全貌を知る者はもはやいないくらい, 数多くの超幾何恒等式が発見されている. この節では, これら恒等式が如何にして発見されてきたか, その代表的な手法について概説したい. それらの手法を知ることで, 隣接関係式の方法の利点・欠点が浮き彫りとなる.

5.1 これまでの発見方法 その特徴と欠点

Gauss は 1812 年の論文で Gauss の和公式 (2.5) を得ている. 注意 4.3 で述べたように, そこで使われたのが (本質的には) 隣接関係式の方法であった. しかしながら, それ以降, 隣接関係式の方法が使われることはなかった. 当時 (19 世紀) の数学者にとって, 隣接関係式を手で計算するのは大変だっただろうし, もしかしたら「${}_2F_1$ は隣接関係を持つ」ということが言えただけで十分だったのかもしれない. 理由は何であれ, 隣接関係式の方法は表舞台から姿を消した.

その代わりに使われるようになったのが, ${}_2F_1$ の代数変換 (algebraic transformation) を用いた方法である. ${}_2F_1$ の代数変換とは, 関係式

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \theta(x)\,{}_2F_1(a',b';c';\phi(x)) $$

のことをいう. ここで, $\theta(x)$ は冪関数の積であり, $\phi(x)$ は有理関数である. 例えば, Kummer は [Ku] の中で, 代数変換

$$ {}_2F_1(a,b;b+1-a;x) = (1-x)^{-b}\,{}_2F_1\left(\frac{b}{2},\frac{b}{2}+\frac{1}{2}-a;b+1-a;\frac{-4x}{(1-x)^2}\right) \tag{5.1} $$

を得た. これに $x=-1$ を代入した後, Gauss の和公式 (2.5) を適用することで, Kummer の公式 (4.11) が得られる[8]. このように, ${}_2F_1$ の代数変換から多くの超幾何恒等式が得られていった. その中でもとりわけ重要なのが, Pfaff-Saalschütz の公式 ([Ba] の 2.2 節参照):

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b,-n \\ c,a+b+1-c-n \end{matrix};1\right) = \frac{(c-a,n)(c-b,n)}{(c,n)(c-a-b,n)} \tag{5.2} $$

(ここで, n は 0 以上の整数) であろう[9]. これは, Euler による代数変換

$$ (1-x)^{a+b-c}\,{}_2F_1(a,b;c;x) = {}_2F_1(c-a,c-b;c;x) $$

の両辺を級数展開し, x^n の係数を比較することによって得られる.

古典的超幾何級数に関する超幾何恒等式もこの調子でどんどん得られればよいのだが, 残念ながら, 二つの理由からそうはならない. まず一つ目の理由として, ${}_2F_1$ と F_1(またそれの多

[7] 著者の印象としては, なさそうである.

[8] 超幾何級数論の名著である [Ba] には, 公式 (4.11) は [Ku] に載っているかのように書かれている. しかし, [Ku] に書かれているのは代数変換 (5.1) のみで, 公式 (4.11) は (少なくとも明示的には) 書かれていない.

[9] この公式 (5.2) は, n を無限大に飛ばしたとき Gauss の和公式 (2.5) に落ちることから, Gauss の和公式の一つの一般化と見なせる.

変数化) を除いた古典的超幾何級数の場合, 任意のパラメーターに対して超幾何恒等式が成り立つような点が自明な点以外で存在しないということが挙げられる[10]. Gauss の超幾何級数 ${}_2F_1(a,b;c;x)$ の場合は, $x=1$ の値がガンマ関数で表わせた. そしてそれを種にして, Kummer の公式が求まったのだった. しかし, 大方の古典的超幾何級数の場合には, このような種となるべき恒等式が無いのである. 二つ目の理由として (そしてこれが致命的なのだが), ${}_2F_1$ 以外の古典的超幾何級数には, 代数変換はそんなにもない (であろう) ということが挙げられる. 実際, 加藤満生氏は [Ka] の中で ${}_3F_2$ の代数変換を全て挙げているが, 残念ながら沢山あるわけではない. もっと複雑な ${}_{p+1}F_p(p=3,4,\cdots)$ ではなおさらであろう. また, ${}_2F_1$ の多変数版である Appell の超幾何級数の代数変換に関しては, 変数部分が一次変換である場合なら組織的に得られているが, 高次の変換である場合組織的に見つけ出すのは難しいようである[11]. このような事情から, 代数変換を用いて超幾何恒等式を探し出すのは, 余り良い方法とはいえない.

こういった事情を当時の数学者達 (19 世紀末から 20 世紀初頭) も察していたのかもしれない. 次に考えられたことは, 一般化超幾何級数 ${}_{p+1}F_p(a_0,a_1,\cdots,a_p;b_1,b_2,\cdots,b_p;x)$ の $x=1$ での値を「性質の良いもの」に限って考察していくというものであった[12]. 先に述べたように, 一般に $x=1$ での値は求まらないのだが, Pfaff-Saalschütz の公式 (5.2) のようにパラメータが特別である場合上手く求まることがある. この思想を突き詰めていくことにより, 一般化超幾何級数の $x=1$ での値を別の一般化超幾何級数の $x=1$ での値で表すといった変換公式が沢山生まれ, また, それらを特殊化することによって多くの超幾何恒等式が得られていった. そういった変換公式群の中で重要なのが, Whipple の変換公式 ([AAR] の定理 3.4.4 参照):

$$\begin{aligned}&{}_7F_6\left(\begin{matrix}a,\frac{a}{2}+1,b,c,d,e,-n\\ \frac{a}{2},a-b+1,a-c+1,a-d+1,a-e+1,a+n+1\end{matrix};1\right)\\ &=\frac{(a+1,n)(a-d-e+1,n)}{(a-d+1,n)(a-e+1,n)}{}_4F_3\left(\begin{matrix}a-b-c+1,d,e,-n\\ a-b+1,a-c+1,d+e-a-n\end{matrix};1\right)\end{aligned} \tag{5.3}$$

(ここで, n は 0 以上の整数) である[13]. そしてこれに条件 $2a+1=b+c+d+e-n$ を課すと, Pfaff-Saalschütz の公式 (5.2) が使えて, Dougall の公式 ([AAR] の定理 3.5.1 参照) :

$$\begin{aligned}&{}_7F_6\left(\begin{matrix}a,\frac{a}{2}+1,b,c,d,e,-n\\ \frac{a}{2},a-b+1,a-c+1,a-d+1,a-e+1,a+n+1\end{matrix};1\right)\\ &=\frac{(a+1,n)(a-b-c+1,n)(a-b-d+1,n)(a-c-d+1,n)}{(a-b+1,n)(a-c+1,n)(a-d+1,n)(a-b-c-d+1,n)}\end{aligned} \tag{5.4}$$

が得られる. この公式 (5.4) が, 「性質の良い」一般化超幾何級数に関する超幾何恒等式の中で, 最も一般的なものである. そして, この公式を特殊化することによって, 多くの超幾何恒等式が得られることが知られている. しかしあくまでも, 「性質の良い」一般化超幾何級数を考えることによって得られた超幾何恒等式である. 性質が良くなくても, 超幾何恒等式が成り立つこともあるだろう. 実際, Dougall の公式 (5.4) を特殊化していっても, せいぜい $x=1$ または $x=-1$ での値しか得られず, 例えば, 式 (4.12) といった $x=\frac{1}{4}$ での値が得られるわけではない.

[10] Appell の超幾何級数 $F_1(a;b_1,b_2;c;x,y)$ の場合は, パラメータが適当であれば点 $(x,y)=(1,1)$ で絶対収束し, その値はガンマ関数で書ける. F_1 のさらに多変数化である超幾何級数についても, 似たようなことが成り立つ. このことから 最初の理由はあてはまらない.

[11] 勿論, 散発な結果は得られている. 例えば, [MO] 参照.

[12] k-balanced とか well-poised とかいった性質を持った超幾何級数達である. 詳しくは, [AAR] の定義 3.3.1, 3.3.2 を参照.

[13] Whipple の変換公式 (5.3) さえも含む変換公式として, ${}_9F_8$ の $x=1$ での値を別の ${}_9F_8$ の $x=1$ での値で表す公式が知られている ([AAR] の三章の練習問題 24(b) を参照).

以上の成果は, 第二次世界大戦前には既に得られていた. 次の大きな潮流は, 計算機の登場 (もっと具体的には, MACSYMA といった数式処理システムの誕生) と共に生まれた. Gosper[14]は, 現在 Gosper のアルゴリズムと呼ばれる, 超幾何恒等式を見つけるための強力な方法を開発した. このアルゴリズムは, k の有理関数 c_k を与えたとき,

$$c_k = s_k - s_{k-1}$$

であり, 且つ s_k/s_{k-1} が k の有理関数であるような s_k が存在するか判定し, 存在するならばそれを出力してくれる. もしこのような s_k が見つかったのなら, $\sum_{k=1}^{n} c_k = s_n - s_0$ となり, 従って有限和の超幾何恒等式が得られる. Gosper は, この方法を駆使して, 多くの超幾何恒等式を見つけていった. そういった恒等式の中には, 新しい恒等式も沢山含まれていた (例えば, [GS] 参照) [15]. このアルゴリズムは強力であるだけでなく, 機械が超幾何恒等式を見つけてくれるという点で革新的であった. それ故, このアルゴリズムは様々な研究者の興味を引き付け, これをもとにした様々なアルゴリズムが生まれた. それらの中で特に強力なものとして, Wilf, Zeilberger を中心とする研究者達によって作られた様々なアルゴリズムがある[16]. 彼らは「閉形式」という関数のクラスを定義した[17]. そして, 与えられた超幾何級数が「閉形式」で表されるか否か判定し, 表されるなら具体的に「閉形式」を書き下す方法を開発したのである[18]. しかし, これらの方法では, 与えられた超幾何級数が「閉形式」を持つか調べることは出来ても, 「閉形式」を持つ超幾何級数そのものを見つけてくることは難しい. また, Gosper のアルゴリズムを下地にしている上記の方法達には, Appell の超幾何級数といった多重級数に関する恒等式を探し出すことが原理的に不可能だという欠点がある.

5.2 隣接関係式の方法　その特徴と欠点

前小節で, 超幾何恒等式を探し出す為に考えられた様々な方法を見てきた. それらと隣接関係式の方法を比べてみよう.

脚注 17 で述べたように, 「特殊値」は「閉形式」に含まれる概念である. それ故, 原理的には「閉形式」を持った超幾何級数の方が沢山あるはずであるが, それらを系統的に得る手段もなければ, また脚注 18 で述べたように自由変数を多く持った超幾何級数の場合「閉形式」を持つかどうか調べる手段も確立されてもいない. こうした問題を避けるため, 思考の対象を「特殊値」に絞り込み, 超幾何恒等式を系統的に得る手段を提供するのが隣接関係式の方法であった (4 節参照). この方法は, 格子点と「特殊値」で表せる超幾何級数とを対応させるものであるから, 単純で分かりやすいという利点がある. また, Appell の超幾何級数といった多重級数に関する恒等式を探し出すことも出来るのも強みである. しかし, 難しいところを全て連立多項式を解くという操作に押し付けているため, 高階になればなるほど超幾何級数の特殊値を見つけるのは難しくなる. 実際, Dougall の公式 (5.4) は隣接関係式の方法を用いて得ることは

---

[14]世界で最初の数式処理システム MACSYMA の開発者の一人である.

[15]Gosper 自身は, 得られた超幾何恒等式を論文で発表せず, 研究仲間 (Andrews, Askey, Stanton 等) への手紙に載せているのみである.

[16]特に, WZ 法, Zeilberger のアルゴリズムが有名. WZ 法は, 知られている超幾何恒等式を機械的に (つまり自動的に) 再証明する方法である. また Zeilberger のアルゴリズムは, 本質的には, 有限一般化超幾何級数の隣接関係式を求めるアルゴリズムである. 詳しくは, [AAR] の 3.10, 3.11 節, [Ko], [PWZ] 参照.

[17]正確な定義は, [PWZ] の定義 8.1.1 参照. 有限和の場合, 超幾何級数の特殊値はこの概念に含まれる.

[18][PWZ] の 8 章参照. 原理的には一変数の場合のみに適用される. つまり, 自由変数を多く持っている場合には適用できない.

可能だろうけども, それを求める為には, 14 個の変数を持つ連立方程式を解かなければならない[19]. 如何に計算機といえどもこれを解くのはきついだろう.

6 展望

前節で述べた隣接関係式の方法の欠点を踏まえ, これからの課題を述べたい. Gauss の超幾何級数 ${}_2F_1$ の特殊値に関する課題だけ述べよう. もちろん, 他の古典的超幾何級数に対しても同様の問題が成り立つ.

課題 1: 特殊値を持つような点は何処か?

4.2 節で述べたように, 格子点 (k,l,m) と特殊値が対応していた. 例えば, $(k,l,m)=(0,1,1)$ のとき, 方程式系 (4.5) を満たす (a,b,c,x) として, $(0,b,c,x)$ と $(a,b,c,1)$ を得た (例 4.2 参照). そして, これらから一つはつまらない値, 一つは Gauss の和公式 (2.5) を得たのであった. しかし, 前者のようなつまらない値は考えたくないので, 任意の x に対して成り立つような方程式系 (4.5) の解は考えないことにする[20]. さらに, $x=0,1$ での値も知っているので, この場合も考えないことにする. 以降では, この条件のもとで特殊値を考えていくことにしよう. そうすると, 格子点を与えたとき必ずしも特殊値が得られるわけではないということに気づく. 例えば, $(k,l,m)=(1,1,2)$ の場合を考えよう. この場合の隣接関係式 (4.4) は

$$\begin{aligned}&{}_2F_1\left(a+1,b+1;c+2;x\right)\\&=-\frac{c\left(c+1\right)\left(1-x\right)}{x\left(a-c\right)\left(b-c\right)}{}_2F_1\left(a+1,b+1;c+1;x\right)+\frac{c\left(c+1\right)}{x\left(a-c\right)\left(b-c\right)}{}_2F_1\left(a,b;c;x\right)\end{aligned}$$

であるから,

$$Q^{(n)}=-\frac{\left(1-x\right)\left[4\,n^2+\left(4\,c-6\right)n+\left(c-2\right)\left(c-1\right)\right]}{x\left(a-n+1-c\right)\left(b-n+1-c\right)}$$

となるが, 上記の条件のもとでは特殊値が存在しないのである.

それでは, 格子点 (k,l,m) がどのような条件を満たすときに, 特殊値が得られるのだろう. また, 格子点がどのような条件を満たせば, 特殊値が存在しないのだろう. この問題は, 特殊値というものがどれくらいあるか, という問に関連する為重要であろう.

実は, 格子点 (k,l,m) での特殊値が得られたとき, 写像

$$\begin{aligned}&\sigma_1:(k,l,m)\to(m-k,l,m), &&\sigma_2:(k,l,m)\to(k,l,k+l-m),\\&\sigma_3:(k,l,m)\to(l,k,m), &&\sigma_4:(k,l,m)\to(m-k,m-l,m),\\&\sigma_5:(k,l,m)\to(-k,-l,-m)\end{aligned}$$

によって生成される群 G の作用によって移り合う他の格子点での特殊値も同時に得られることが知られている ([Eb2] の 1 節参照.). それなら, これら移り合う点に対して隣接関係式の方法を使う必要はないだろう. $G=\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle\ltimes(\langle\sigma_3\rangle\times\langle\sigma_4\rangle\times\langle\sigma_5\rangle)=S_3\ltimes(S_2\times S_2\times S_2)$ (こ

---

[19] ${}_7F_6$ だからパラメータ 13 個, それと独立変数 1 個で合わせて 14 個.

[20] 任意の x に対して成り立つような解から得られる特殊値は, ${}_2F_1(0,b;c;x)=1$ 等というような定義から明らかなものだけであることが示される. それ故, この条件を課すことは妥当であろう.

こで, S_n は n 次の対称群) であることに注意すると, 軌道空間 $G\backslash\mathbf{Z}^3$ の完全代表系として, 例えば,

$$\{(k,l,m)\in\mathbf{Z}^3 \mid 0\leq k+l-m\leq l-k\leq m\} \tag{6.1}$$

が取れることが分かる. こうして考察するべき格子点が減ったが, それでも無限個ある.

著者は結局上記の問題に答えることが出来ず, $0\leq k+l-m\leq l-k\leq m\leq 6$ を満たす (k,l,m) に対応する特殊値を列挙することにとどめた ([Eb2] 参照). しかし, 落合啓之氏はこの表を観察することで, 上記の問題に対する予想を立てた:

予想 6.1. (k,l,m) が 特殊値を持つための必要十分条件は、次の少なくとも一つの場合に該当することである：
（あ） $m=l$.
（い） $m=l-k$ かつ l は偶数.
（う） $m=2k$ かつ l は偶数.
（え）$(0,1,1)$ または $(1,1,2)$ の「2 以上の自然数」倍.
（お）$(1,2,3),(1,3,2),(1,3,4),(2,3,4),(2,5,4),(1,5,6),(3,5,6)$ のいずれかの自然数倍.

現在のところ, $0\leq k+l-m\leq l-k\leq m\leq 14$ を満たす (k,l,m) に対しては, この予想が正しいことを確かめている. しかし, これをどうやって証明すればよいか, 皆目見当がつかない.

課題 2: 求積可能な ${}_2F_1$ と, 特殊値を持つ ${}_2F_1$ との関係を述べよ.

Gauss の超幾何級数は積分表示を持つことが知られている ([AAR] の定理 2.2.1 参照) [21]:

$$ {}_2F_1(a,b;c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b}dt. \tag{6.2}$$

本当は積分が収束するように幾つか条件を加えなければならないが, 目くじらを立てずに話を進めよう. 今まで見てきた特殊値が, 積分表示から得られるか見てみる.

$$B(p,q):=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

であることに注意すると, 積分表示 (6.2) に $x=1$ を代入することによって, 直ちに Gauss の和公式 (2.5) が得られる. Kummer の公式も同様に計算出来る. それでは, 式 (4.12) はどうだろう. 積分表示から式 (4.12) が成り立つことを示す為には,

$$\int_0^1 t^{3a-1}(1-t)^{-a-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{4}t\right)^{-2a}dt$$

が

$$\frac{2^{4a}}{3}B\left(a,\frac{1}{2}-a\right)=\frac{2^{4a}}{3}\int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{-a-\frac{1}{2}}dv$$

に変形できることを示さなければならない. これは難しいが, $v=\frac{t^3}{(4-3t)^2}$ と置くことにより確かめられる. これらの例を見ると, 特殊値を持つ ${}_2F_1$ の場合, その積分表示に基本的な変形を施すことによっても値が求まる (求積出来る) と感じられたかもしれない. しかし, そのように単純に事が運ばない例もある. 格子点 $(k,l,m)=(1,1,-4)$ からは, 特殊値

[21] 積分表示を持つということも超幾何級数の大事な性質の一つである.

$$
{}_2F_1\left(a, a+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}-4a; \frac{1}{5}\right) = \frac{5^{6a}\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-4a\right)}{2^{10a}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4}{5}-2a\right)\Gamma\left(\frac{6}{5}-2a\right)}
$$

が得られるが, これを積分表示から得ようと思うと,

$$
\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-5a}\left(1-\frac{1}{5}t\right)^{-a-\frac{1}{2}} dt = \frac{5^{a+1}B\left(\frac{4}{5},\frac{6}{5}\right)B\left(a,\frac{1}{2}-a\right)B\left(\frac{3}{10}-a,\frac{7}{10}-a\right)}{2^{6a+1}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)B\left(\frac{2}{5}-a,\frac{3}{5}-a\right)}
$$

が成り立つことを示す必要がある. すなわちこの等式を得る為には, 超幾何級数の積分表示を含んだ三重積分が, 別の三重積分に変形されることを示さなければならないわけである. このように, 求積がおそらく出来ない (つまり, ${}_2F_1$ の積分表示を基本変形していくだけではおそらく得られない) 特殊値も存在する.

ではその逆は存在するだろうか. 実は, これも存在する.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\left(1-\frac{c-2}{a-1}t\right)^{-2} dt \\
&= \left[t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\left(\frac{a-1}{c-2}\right)\left(1-\frac{c-2}{a-1}t\right)^{-1}\right]_0^1 \\
&- \int_0^1 \left\{(a-1)t^{a-2}(1-t)^{c-a-2}\left(1-\frac{c-2}{a-1}t\right)\right\}\left(\frac{a-1}{c-2}\right)\left(1-\frac{c-2}{a-1}t\right)^{-1} dt \\
&= \frac{-(a-1)\Gamma(a)\Gamma(c-a-1)}{\Gamma(c-1)}
\end{aligned}
$$

だから,

$$
{}_2F_1\left(a, 2; c; \frac{c-2}{a-1}\right) = \frac{(a-1)(c-1)}{(a+1-c)} \tag{6.3}
$$

が成り立つ. ところが, これは特殊値ではない. もし, 特殊値だったとしよう. そのとき,

$$
{}_2F_1\left(a, 2; c; \frac{c-2}{a-1}\right) = \frac{1}{R}{}_2F_1\left(a+k, 2; c+m; \frac{c-2}{a-1}\right)
$$

となるような整数 k, m と有理関数 R が存在する. そして, 隣接関係式の方法の構造上, これは一階差分方程式となるはずである. それゆえ, それが解けて ${}_2F_1\left(a, 2; c; \frac{c-2}{a-1}\right)$ の値が求まったのなら, 当然 ${}_2F_1\left(a+k, 2; c+m; \frac{c-2}{a-1}\right)$ の値も副次的に求まるはずである. ところが, この値は式 (6.3) からは求まらない. よって, 式 (6.3) は特殊値ではないのである.

以上のことより, 求積可能な ${}_2F_1$ と特殊値を持つ ${}_2F_1$ の間には包含関係が無さそうだということが分かった. しかし, あくまで「無さそう」であるので, 上で挙げた例等が本当に求積によって得ることが出来ないのか示す必要がある. そのためには, どのようなときに ${}_2F_1$ が求積可能となるか, 考える必要がある.

課題 3:　そもそも特殊値とは何なのだろうか?

今まで, 特殊値を持つ ${}_2F_1$ を考えてきた. 例 4.2, 4.4, 4.5 で得られた特殊値はよく見ると全てガンマ関数 (と初等関数) で表されている. 隣接関係式の方法では, そのような条件を課して

いないのに, 何故だろうと不思議に思った方もおられるかもしれない. 岩崎克則氏は (部分的にであるが) この問いに答えた ([岩崎] 参照). それと同時に, 隣接関係式の方法がそれなりに強力なことも示した. それら得られた結果と残された課題に触れたい.

パラメータ $\lambda=(p,q,r;\alpha,\beta,x)$ に対して,

$$f(w) := {}_2F_1(pw+\alpha, qw+\beta; rw; x)$$

を考える. そして, 岩崎氏は次の二つの問題を設定した.

問題 6.2. 次のガンマ積表示が成り立つような $\lambda=(p,q,r;\alpha,\beta,x)$ を求めよ.

$$f(w) = S(w)\cdot d^w \cdot \frac{\Gamma(w+u_1)\cdots\Gamma(w+u_m)}{\Gamma(w+v_1)\cdots\Gamma(w+v_n)}, \quad S(w)\in \mathbf{C}(w). \tag{6.4}$$

問題 6.3. 次の条件を満たすような $\lambda=(p,q,r;\alpha,\beta,x)$ を求めよ.

$$\frac{f(w+1)}{f(w)} =: R(w) \in \mathbf{C}(w). \tag{6.5}$$

隣接関係式の方法は, $p,q,r\in\mathbf{Z}$ の場合のみを考えたものであるが, 問題 6.3 の部分解を与えることに注意しよう. さて, 問題 6.2 の解は明らかに問題 6.3 の解であるが, 逆は必ずしも明らかではない. つまり, 問題 6.3 と問題 6.2 の間には隔たりがあるわけであるが[22], 岩崎氏はある条件のもとこれが同値であることを示した ([岩崎] の定理 11 参照).

定理 6.4. $p,q,r\in\mathbf{R}$ で, $0<p<r$ 又は $0<q<r$ が成り立つとしよう. さらに, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, $-1<x<1$ とする. このとき, 問題 6.2 と問題 6.3 は同値となる. すなわち, (6.5) を満たす $f(w)$ は (6.4) のようにガンマ積で表示される.

例 4.2, 4.4, 4.5 は残念ながら定理の仮定には当てはまらない. しかし [Eb2] で挙げられた特殊値達の中には, この定理により, 何故ガンマ積表示となるのか説明されるものが幾つもある.

問題 6.3 においては, p,q,r が実数の場合を考えていた. 隣接関係式の方法は整数の場合しか考えていないので, 問題 6.3 の解の中にはこの方法では捉えられないものが沢山あるかもしれない. ところが, 実は隣接関係式の方法はそれなりに強力であることを次の定理は言っている ([岩崎] の定理 25 参照).

定理 6.5. $p,q,r\in\mathbf{R}$ で, $0<p<r$ 且つ $0<q<r$ が成り立つとしよう. さらに, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, $-1<x<1$ とする. このとき, 問題 6.3 の全ての解は隣接関係式の方法によって得られる.

これら二つの定理はある意味で, 隣接関係式の方法を特徴づけるものである. もっとこれらの定理が拡張されたのなら僥倖なのだが, それはどうも難しいようである.

以上, 隣接関係式の方法に関する課題について述べてきたが, それに関しても分からないことだらけである. ましてや超幾何恒等式の理論面については, まさに五里霧中である. それを懺悔したところで筆を置くことにする.

参考文献

[AAR] G.E.Andrews, R.Askey and R.Roy, *Special functions*, Cambridge University Press, Ca'mbridge, 1999.

[22]著者は当時認識していなかった.

[Ba] W.N.Bailey, *Generalized hypergeometric series*, Cambridge Mathematical Tract No. 32, Cambridge University Press, (1935).

[Be] F.Beukers, *Hypergeometric functions, how special are they?* , Notices Amer. Math. Soc. **61**(2014), no. **1**, 48–56.

[BW] F.Beukers and J.Wolfart, *Algebraic values of hypergeometric functions*, New advances in transcendence theory (Durham, 1986), 68–81, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[Eb1] A.Ebisu, *Three term relations for the hypergeometric series*, Funkcial. Ekvac., **55**(2012), no. **2**, 255–283.

[Eb2] A.Ebisu, *Special values of the hypergeometric series*, preprint. arXiv:1308.5588.

[Eu] L.Euler, *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*, typographeo petri galeatii, 1755: available at `http://www.math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E212sec2ch4.pdf`.

[Ga] C.F.Gauss, *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, Comm. Soc. Reg Gött. II, Werke, **3**, 123–162, (1812).

[GS] I.Gessel and D.Stanton, *Strange evaluations of hypergeometric series*, SIAM J. Math. Anal., **13**(1982), no. **2**, 295–308.

[原岡] 原岡喜重, 超幾何関数, 朝倉書店, 2002.

[日比] JST CREST 日比チーム, グレブナー道場, 共立出版, 2011.

[岩崎] 岩崎克則, 超幾何和の超幾何性, 琉球超幾何セミナー配布資料, 琉球超幾何セミナー, 2012.

[IKSY] K.Iwasaki, H.Kimura, S.Shimomura and M.Yoshida, *From Gauss to Painlevé —A modern theory of special functions*, Vieweg Verlag, Wiesbaden(1991).

[Ka] M.Kato, *Algebraic transformations of* ${}_3F_2$, Funkcial. Ekvac., **51**(2008), no. **2**, 221–243.

[木村] 木村弘信, 超幾何関数入門 特殊関数への統一的視点からのアプローチ, サイエンス社, 2007.

[Ku] E.E.Kummer, *Ueber die hypergeometrische Reihe*, J. Reine Angew. Math., **15**(1836), 39–83.

[Ko] W.Koepf, *Hypergeometric summation —An algorithmic approach to summation and special function identities*, Advanced lectures in mathematics, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig(1998).

[MO] K.Matsumoto and K.Ohara, *Some transformation formulas for Lauricella's hypergeometric functions* F_D, Funkcial. Ekvac., **52**(2009), no. **2**, 203–212.

[PWZ] M.Petkovšek, H.Wilf and D.Zeilberger, $A{=}B$, A.K.Peters, Wellesley(1996).

Eigenvalue problem of Töplitz operator on Bargmann - Fock space and hyperfunctions

Kunio Yoshino,
Department of Natural Sciences, Faculty of Knowledge Engineering,
Tokyo City University, Tokyo 158-8557, Japan

1 Introduction

バーグマン・フォック空間 (Bargmann - Fock space) は, 有限自由度の量子系を記述する目的で導入された ([5]).　Bargmann - Fock - Segal space と呼ばれる時もある. 量子統計力学における半古典近似 (WKB 法), ボース・アインシュタイン凝縮, 量子ホール効果の解析, ハルトグス領域のベルグマン核関数の構成等に利用されている ((([1], [18], [36]), [38]). 今回の講演では以下の事柄について解説する予定である.

1. バーグマン・フォック空間上のテプリッツ作用素 (Töplitz operator) はシンボル関数が球対称性を持つ場合には, その固有値は, 右半平面に解析接続されフーリエ・ウルトラ超関数のラプラス変換である.

2. 信号処理の分野で重要なガボール変換の逆変換公式をバーグマン・フォック空間で考えるとベルグマン (Bergman) 核関数による再生公式になる.

3. ドーベシー局在化作用素 (ガボール変換を相空間で局所化した変換) をバーグマン変換を用いてバーグマン・フォック空間上の作用素に変換するとテプリッツ作用素になる. これを利用してドーベシーの定理の見通しの良い別証明を得る事ができる.

4. テプリッツ作用素 (ドーベシー局在化作用素) のシンボル関数が可積分関数である場合には, その固有値から作ったフレドホルム行列式は, 原点に台を持つ佐藤超関数 ([27]) のフーリエ・ラプラス変換像になる.

フーリエ積分作用素, Modulation space 等を用いてバーグマン・フォック空間上のテプリッツ作用素, ドーベシー局在化作用素を論じたものとしては ([9], [10], [35]) がある. 又, 飛田武幸の S －変換はバーグマン変換の無限次元版になっていると思われる ([21]).

2 Bargmann - Fock 空間

$dm(z)$ を $\mathbb{C}^n$ におけるルベーグ測度とし, ガウス関数の重み
$d\mu(z) = \pi^{-n} e^{-|z|^2} dm(z)$ を持ったヒルベルト空間
$L^2(\mathbb{C}^n, d\mu) = \{g(z) : \int_{\mathbb{C}^n} |g(z)|^2 d\mu(z) < \infty\}$ を考える.
内積は $< f, g >= \int_{\mathbb{C}^n} f(z)\overline{g(z)} d\mu(z)$ で定義する.

注意 1
$L^2(\mathbb{C}^n) \subset L^2(\mathbb{C}^n, d\mu) \subset L^2{}_{loc}(\mathbb{C}^n)$.

定義 1 (バーグマン・フォック空間 BF)
バーグマン・フォック空間 BF を次で定義する ([5]):
$BF = H(\mathbb{C}^n) \cap L^2(\mathbb{C}^n, d\mu) = \{g(z) \in H(\mathbb{C}^n) : \int_{\mathbb{C}^n} |g(z)|^2 d\mu(z) < \infty\}$,
$H(\mathbb{C}^n)$ は $\mathbb{C}^n$ 上の整関数全体を表す.

例 1
1. $z = (z_1 \cdots z_n)$ の多項式は, 全てバーグマン・フォック空間 の元である. 従って, 量子ホール効果に登場するラフリン波動関数の多項式部分 $\prod_{i<j}(z_i - z_j)^{2m+1}$ は, 勿論バーグマン・フォック空間の元である.
2. 指数型整関数は全てバーグマン・フォック空間 の元である. 例えば, コンパクトな台を持つシュワルツ超関数, 佐藤超関数, マルチノーの解析汎関数のフーリエ・ラプラス変換像は全てバーグマン・フォック空間の元である.

命題 1([5])
(1) $\left\{\dfrac{z^m}{\sqrt{m!}}\right\}_{m=0}^{\infty}$ は BF における完全正規直交基底である.
(2) $e^{z\overline{w}} = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{z^m}{\sqrt{m!}} \dfrac{\overline{w}^m}{\sqrt{m!}}$ は, BF におけるベルグマン核関数 である.
i. e. $f(z) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{z\overline{w}} f(w) d\mu(w), \quad (\forall f(z) \in BF)$

[5] に従ってバーグマン変換 の定義と性質を列挙する.

定義 2 (Bargmann transform B)

核関数

$A_n(z,x) = \pi^{-n/4} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(z^2 + x^2) + \sqrt{2} z \cdot x \right\}, \quad (z \in \mathbb{C}^n, x \in \mathbb{R}^n).$

を用いてバーグマン変換 $B(\psi)$ を次のように定義する:

$$B(\psi)(z) \overset{def}{=} \int_{R^n} \psi(x) A_n(z,x) dx, \quad (\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)).$$

定理 1([5])

(1)　バーグマン・フォック空間 は, バーグマン変換により $L^2(\mathbb{R}^n)$ と同型である.

(2)　バーグマン変換はユニタリー変換である.

例 2

(1)　$B(A_n(a,x))(z) = e^{az}$

(2)　$B(h_m(x))(z) = \dfrac{z^m}{\sqrt{m!}},$

但し $h_m(x)$ は, 次数 m のエルミート (Hermite) 関数 :

$h_m(x) = (-1)^m (2^m m! \sqrt{\pi})^{-1/2} \exp(x^2/2) \dfrac{d^m}{dx^m} \exp(-x^2)$ である.

注意 2

1.　バーグマン変換を超関数 (フーリエ超関数等) に拡張する研究は, [8] においてなされている.

2.　$h_0(x) = \pi^{-1/4} \exp(-\dfrac{x^2}{2})$ は, Coherent State と呼ばれ,

$h_2(x) = \pi^{-1/4} \dfrac{2x^2 - 1}{\sqrt{2}} \exp(-\dfrac{x^2}{2})$ は, メキシカンハット・ウエーブレットと呼ばれる時もある.

3　バーグマン・フォック空間とテプリッツ作用素

バーグマン・フォック空間 は $L^2(\mathbb{C}^n, d\mu)$ の閉部分空間であるので, 直交分解 $L^2(\mathbb{C}^n, d\mu) = BF \oplus BF^{\perp}$ ができる.

命題 2([46])

直交射影 $P : L^2(\mathbb{C}^n, d\mu) \longrightarrow BF$ は ベルグマン (Bergman) 核関数 $e^{z\overline{w}}$ により次の積分作用素で与えられる:

$P(f)(z) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{z\overline{w}} f(w) d\mu(w), \quad (\forall f \in L^2(\mathbb{C}^n, d\mu))$

系 1

$BF^{\perp} = \{f(z) - \int_{\mathbb{C}^n} e^{z\overline{w}} f(w) d\mu(w) : f \in L^2(\mathbb{C}^n, d\mu)\}$

掛け算作用素と射影作用素の合成は テプリッツ (Töplitz) 作用素と呼ばれる.

系 2

シンボル F を持つテプリッツ作用素 T_F は次で与えられる.

$(T_F f)(z) = \int_{\mathbb{C}^n} F(w) e^{z\overline{w}} f(w) d\mu(w), \quad (\forall f \in L^2(\mathbb{C}^n, d\mu)$

ここで, $F(w)$ は $\mathbb{C}^n$ 上の有界関数である.

テプリッツ作用素 T_F は $L^2(\mathbb{C}^n, d\mu)$ から BF への線形作用素である.

4 バーグマン・フォック空間上のテプリッツ作用素の固有値問題

ここではテプリッツ作用素 T_F の固有値問題について考える.

定理 3 シンボル関数 $F(w)$ は有界可積分関数で各変数について回転対称性を持つとする. i.e. $F(w_1, \cdots, w_n) = \widetilde{F}(|w_1|^2, \cdots, |w_n|^2)$. このとき次が判る.

(1) z^m は, T_F の固有関数である.

(2) 固有値 λ_m は次で計算できる：

$\lambda_m = \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \widetilde{F}(s_1, \cdots s_n) \prod_{i=1}^{n} e^{-s_i} {s_i}^{m_i} ds_i,$

$m = (m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{N}^n.$

(証明) 簡単のため $n = 1$ とする.

$(T_F)(w^m)(z) = \int \int_{\mathbb{C}} \widetilde{F}(|w|^2) e^{z\overline{w}} w^m d\mu(w)$

$= \frac{1}{\pi} \int \int_{\mathbb{C}} \widetilde{F}(|w|^2) e^{z\overline{w}} w^m e^{-|w|^2} dm(w)$

$= \frac{1}{\pi} \int \int_{\mathbb{C}} \widetilde{F}(|w|^2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z\overline{w})^n}{n!} \right) w^m e^{-|w|^2} dm(w)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{1}{\pi} \int\int_{\mathbb{C}} \widetilde{F}(|w|^2) \overline{w}^n w^m e^{-|w|^2} dm(w).$$

極座標変換 $w = re^{i\theta}$ と変数変換 $s = r^2$ を使うと

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \widetilde{F}(r^2) e^{i(m-n)\theta} r^n r^m e^{-r^2} r dr d\theta$$

$$= z^m \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} e^{-s} s^m \widetilde{F}(s) ds.$$

5　ガボール (Gabor) 変換

定義 3(窓フーリエ変換)

$$W_\phi(f)(p,q) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ipx} \phi(x-q) f(x) dx, \quad (f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n))$$

とおき, $\phi(x)$ を窓関数とする窓フーリエ変換と呼ぶ.

窓フーリエ変換 のアイディアはハンガリー研究者デニス・ガボール (Denis Gabor) によって導入された. ガボールは, ハンガリーの工学者である. 電子顕微鏡の研究, ホログラフィーを発明したことでも知られている. 1971 年にノーベル物理学賞を受賞している.

注意 3

1.　窓フーリエ変換を短時間フーリエ変換 (Short time Fourier transform) と呼ぶ時もある. 窓フーリエ変換は, 量子統計力学, 量子情報理論で重要なウイグナー (Wigner) 分布関数とも関係している ([16], [17]).

2.　工学では, 問題によりガウス関数, 変形ベッセル関数等いろいろな窓関数を使う ([4]). 但し, 窓関数の選択は勘と経験によるそうである.

3.　信号処理では, 窓フーリエ変換の定義域は, 通常, 二乗可積分関数全体とするが数学的には定義域を例えば緩増加超関数等に拡張して考える事は勿論できる.

5.1　窓フーリエ変換とハイゼンベルグ (Heisenberg) 群

信号処理で重要な変換に, ウエーブレット変換, 窓フーリエ変換がある. ”ウエーブレット変換の背後には $ax+b$ 群のユニタリー表現があり, 窓フーリエ変換の背景にはハイゼンベルグ群のユニタリー表現がある.” と良く言われるが詳しい説明をあまり見た事がないので少し触れておく. 窓フーリエ変換の定義に登場する式 $e^{ipx}g(x-q)$ の部分の意味について解説する. $g(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し $\pi(p,q)g(x) = e^{ipx}g(x-q)$ とおくと,

$\pi(p_1,q_1)\pi(p_2,q_2) = e^{-ip_2q_1}\pi(p_1+p_2,q_1+q_2)$ という関係が成立する.
$\pi(p,q)$ は. 相空間 $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ の射影表現である ([3], [20]). この射影表現をユニタリー表現にするために相空間 $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ の中心拡大に付随する次の完全系列を考える.
$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \longrightarrow 0$
真ん中に登場している群 $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n$ がハイゼンベルグ群 H_n である. $\mathbb{R}$ はハイゼンベルグ群 H_n の中心化群である. 時間変数 t を追加した分, 変数の数が増えている. 又, 相空間は可換な加法群であるがハイゼンベルグ群は非可換群である. $(t,p,q) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}^n = H_n$ に対し
$\pi(t,p,q)g(x) = e^{it}e^{ipx}g(x-q), \quad g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とおくと $\pi(t,p,q)$ は, ハイゼンベルグ群のユニタリー表現になる ([15], [20], [23]).

注意 4

1.　信号処理の分野では相平面 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ を, 時間周波数平面と呼んでいる.
2.　群の中心拡大は一意的には決まらない. どのような中心拡大を考えるかにより異なるタイプのハイゼンベルグ群が登場する. 中心化群としてユニタリー群 $U(1)$ を使う事もある.([2], [3], [19], [20], [23]).
3.　リー群のユニタリー表現論を用いて, ウエーブレット変換, 窓フーリエ変換等を統一的に研究する試みも最近行われている ([23]).
4.　ハイゼンベルグ群を複素空間の中の超曲面として実現できる ([15], [34]). H. Lewy が 1957 年に発表し, 世界に衝撃を与えた**解のない偏微分方程式の例**は, おそらくこの超曲面を利用して作られたであろうと考えられている ([24], [33], [34]).

5.2　ガボール変換の定義

ガウス関数 $\phi(x) = \pi^{-\frac{n}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ を窓関数とする窓フーリエ変換をガボール変換と呼ぶ.
$$W_\phi(f)(p,q) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ipx}\phi(x-q)f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \pi^{-\frac{n}{4}}e^{-ipx}e^{-\frac{(x-q)^2}{2}}f(x)dx$$
で定義する ([11], [12], [14]). ガボール変換は音声信号処理, 虹彩認証システムなどいろいろな場で用いられている. ガウス関数 $\phi(x) = \pi^{-\frac{n}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ の L^2 ノルムは 1 なので, ガボール変換は, 次の逆変換公式を持つ.

命題 3(ガボール変換の逆変換 ([11], [12], [19]))
$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\phi_{p,q}(x)}W_\phi(f)(p,q)dpdq$$

物理学の表記法では

$$I_d = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n |\phi_{p,q} >< \phi_{p,q}|$$

(**証明**) ディラック (Dirac) のデルタ関数の平面波分解の公式:

$\delta(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixt} dt$ を使う.

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \overline{\phi_{p,q}(x)} W_\phi(f)(p,q) dpdq$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \overline{\phi_{p,q}(x)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ipy} \phi(y-q) f(y) dydpdq$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{ipx} \overline{\phi(x-q)} e^{-ipy} \phi(y-q) f(y) dydpdq$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ip(x-y)} dp \int_{\mathbb{R}^{2n}} \overline{\phi(x-q)} \phi(y-q) f(y) dydq$$
$$= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} \delta(x-y) \overline{\phi(x-q)} \phi(y-q) f(y) dydq$$
$$= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\phi(x-q)} \phi(x-q) f(x) dq = (2\pi)^n < \phi, \phi > f(x) = (2\pi)^n f(x)$$

注意 5

1.　この逆変換公式は, 時々, 単位の分解 (Resolution of Identity) と呼ばれる ([11], [12]). ヒルベルト空間における射影作用素による単位の分解 (スペクトル測度) と混同する事はないと思うが一応念のため.

2.　フーリエ変換の理論では周知の事実であるが, 不確定性原理がある ([22], [23]).　この不確定性を最小にしているのがガウス関数である.

3.　この逆変換公式をバーグマン変換によりバーグマン・フォック空間で考えるとベルグマン核関数による積分表示式になる (命題 5 の系 4).

命題 4(ガボール変換のユニタリー性)

$f(x), h(x)$ が共に二乗可積分な信号（関数）の場合には,

(1)　$< W_\phi(f), W_\phi(h) >= (2\pi)^n < f, h >$

が成立する.

特に $f = h$ の場合は

(2)　$|W_\phi(f)|_2 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} |f|_2$,　($|f|_2$ は, 関数 $f(x)$ の L^2 ノルム)

注意 6

1.　ガボール変換についての最近の研究成果については [14], [19] が参考になる.

2.　 ガボール変換, バーグマン変換, FBI 変換の関係については [25] が詳しい.

6　ドーベシー局在化作用素 (Daubechies localization operator)

ガボール変換を相空間で局所化した変換がドーベシー局在化作用素である.

定義 4(I. Daubechies ([11], [12]))　$F(p,q) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ とする.
$f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n))$ に対し,
$P_F(f)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} F(p,q)\phi_{p,q}(x) < \phi_{p,q}, f > dpdq$
とおく.　但し,
$$\phi_{p,q}(x) = \pi^{-n/4} e^{ipx}\phi(x-q), \quad \phi(x) = \pi^{-n/4}e^{-x^2/2}, \quad (x,p,q \in \mathbb{R}^n).$$

P_F をシンボル F を持つドーベシー局在化作用素と呼ぶ.
P_F は $L^2(\mathbb{R}^n)$ から $L^2(\mathbb{R}^n)$ への有界線形作用素である.

6.1　バーグマン・フォック空間におけるドーベシー作用素の実現

ドーベシー作用素 P_F を バーグマン・フォック空間 BF で考える. 次の 1, 2 を示したい.
1.　$(B \circ P_F \circ B^{-1})(g)(z) = \int_{\mathbb{C}^n} F(w,\overline{w})e^{z\overline{w}}g(w)d\mu(w),$
B は バーグマン 変換である.
2.　シンボル関数 $F(w)$ が有界であると, $B \circ P_F \circ B^{-1}$ は $L^2(\mathbb{C}^n : d\mu)$ 上のテプリッツ作用素と考える事ができる.

$$\begin{array}{ccc} L^2(R^n) & \xrightarrow{B} & BF \\ {\scriptstyle P_F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle B\circ P_F\circ B^{-1}} \\ L^2(R^n) & \xrightarrow{B} & BF \end{array}$$

補題 1
$B(\phi_{p,q})(z) = e^{zw-|w|^2/2+ipq/2}, \quad (w = \dfrac{p+iq}{\sqrt{2}})$

命題 5
$(B \circ P_F \circ B^{-1})(g)(z) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}^n} F(w,\overline{w})e^{z\overline{w}}g(w)d\mu(w), \quad (\forall g \in BF)$

(**証明**)　簡単のため $n=1$ とする.
バーグマン変換は, ユニタリー変換であるので

$$P_F(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\int F(p,q)\phi_{p,q}(x) < \phi_{p,q}, f > dpdq,$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\int F(p,q)\phi_{p,q}(x) < B\phi_{p,q}, Bf > dpdq,$$

補題 1 から,

$$B \circ P_F(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\int F(p,q)B\phi_{p,q}(z) < B\phi_{p,q}, Bf > dpdq,$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\int F(p,q)e^{zw-1/2|w|^2+1/2ipq} < B\phi_{p,q}, Bf > dpdq,$$

従って

$$(B \circ P_F \circ B^{-1})(g)(z)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\int F(p,q)e^{zw-1/2|w|^2+1/2ipq} < B\phi_{p,q}, g > dpdq.$$

他方

$$< B\phi_{p,q}, g >$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\int e^{\bar{t}\bar{w}-1/2|w|^2-1/2ipq}g(t)e^{-|t|^2}dtd\bar{t}.$$

である. 命題 1 - (2) により,

$$= e^{-1/2|w|^2-1/2ipq}g(\bar{w}).$$

故に

$$(B \circ P_F \circ B^{-1})(g)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} F(w,\overline{w})e^{zw}g(\overline{w})e^{-|w|^2}dw \wedge d\overline{w}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} F(w,\overline{w})e^{z\overline{w}}g(w)e^{-|w|^2}d\overline{w} \wedge dw.$$

が判る.

系 3　シンボル関数 $F(w)$ が有界であると, $B \circ P_F \circ B^{-1}$ を BF から $L^2(\mathbb{C}^n, d\mu)$ に次のようにして拡張できる:

$$(B \circ P_F \circ B^{-1})(g)(z) = \int_{\mathbb{C}^n} F(w)e^{z\overline{w}}g(w)d\mu(w), \quad (\forall g \in L^2(\mathbb{C}^n, d\mu)).$$

系 4　シンボル関数 $F(w)=1$ であると,

$$g(z) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{z\overline{w}}g(w)d\mu(w), \quad (\forall g \in BF).$$

定理 3 を使うとドーベシーの結果の別証明を得る.

定理 4 (I. Daubechies 1988([11])).　$F(p,q) \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ とする. $F(p,q)$ は各変数について半径のみの関数とする. i.e.
$F(p_1,q_1,\cdots,p_n,q_n) = \tilde{F}({r_1}^2,\cdots,{r_n}^2)$, $({r_i}^2 = {p_i}^2+{q_i}^2, 1 \le i \le n)$.

次が成り立つ:
(1)　エルミート関数 $h_m(x)$ はドーベシー 作用素の固有関数である.
$P_F(h_m)(x) = \lambda_m h_m(x), \quad (m \in \mathbb{N}^n),$

$$(2) \quad \lambda_m = \frac{1}{m!}\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{i=1}^n e^{-s_i} {s_i}^{m_i} \tilde{F}(s_1, \cdots, s_n) ds_1 ... ds_n.$$

(証明)　簡単のため $n=1$ とする. 命題 5 により,
$$(B \circ P_F \circ B^{-1})(g) = \int\int_{\mathbb{C}} F(|w|^2) e^{z\overline{w}} g(w) e^{-|w|^2} dm(w).$$
この事は $(B \circ P_F \circ B^{-1})(z^m)$ が バーグマン・フォック空間上のテプリッツ作用素である事を意味する. 定理 3 から,
$$(B \circ P_F \circ B^{-1})(w^m)(z) = \lambda_m z^m, \quad \lambda_m = \frac{1}{m!}\int_0^\infty e^{-s} s^m \tilde{F}(s) ds.$$
$B^{-1}\left(\dfrac{z^m}{\sqrt{m!}}\right)(x) = h_m(x)$ であるので,　次のドーベシーの結果を得る:

$$P_F(h_m)(x) = \lambda_m h_m(x), \quad (m \in \mathbb{N}), \quad \lambda_m = \frac{1}{m!}\int_0^\infty e^{-s} s^m \tilde{F}(s) ds.$$

7　テプリッツ作用素の固有値の解析接続

テプリッツ作用素の固有値 $\{\lambda_m\}_{m=0}^\infty$ の解析接続 $\lambda(z)$ について考える.
以下では簡単のため $n=1$ とする.

$$\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)}\int_0^\infty e^{-s} s^z \tilde{F}(s) ds, \quad (Re(z) > -1).$$

とおく. 但し, $\Gamma(z)$ はオイラー・ガンマ関数である.

命題 6([45])
(1)　$\exists C > 0, |\lambda(z)| \le \dfrac{C}{\sqrt{|z|}} e^{\frac{\pi}{2}|Im(z)|}, \quad (Re(z) > 0).$

(2)　$\lambda(z)$ は, 右半平面 $Re(z) > 0$ で正則.

(3)　$\lambda(m) = \lambda_m, \quad (m \in \mathbb{N})$

(4)　$\lambda(z)$ は, $\{\lambda_m\}_{m=0}^\infty$ の唯一の解析接続.

証明

(1) はガンマ関数 $\Gamma(z)$ のスターリングの公式による.
(2) はモレラの定理から判る.
(4) はカールソンの定理 ([6], [29]) による.

カールソン (Carlson) の定理
(1) $f(z)$ は右半平面 $Re(z) > 0$ で正則.
(2) $|f(x+iy)| \leq Ce^{ax+b|y|}, (x > 0)$
(3) $f(n) = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

もし $0 \leq b < \pi$ であると $f(z) = 0$
注意 7
1. カールソンの定理 における仮定 $0 \leq b < \pi$ を緩める事はできない. 例えば $\sin \pi z$ は条件 (1), (2), (3) を全て満たすが $\sin \pi z$ は恒等的にゼロではない.
2. カールソンの定理は, レッジェ極理論, ポテンシャル散乱理論などで用いられている.
注意 8 **Fritz David Carlson について:**
Born: 23rd July 1888 in Vimmerby, Sweden
Died: 28th November 1952 in Stockholm, Sweden
実関数論で有名なカールソン (Leonnard Carleson) とは全くの別人である.

8 テプリッツ作用素の固有値の母関数

テプリッツ作用素の固有値 $\{\lambda_m\}_{m=0}^{\infty}$ に対し $\Lambda(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m w^m$ とおき $\Lambda(w)$ をテプリッツ作用素の固有値の母関数と呼ぶ ([39], [42], [43]).

命題 7([40], [41])) $F(p,q) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ かつ $F(p,q)$ は回転不変 とする. i.e. $F(p,q) = \tilde{F}(r^2)$. $\{\lambda_m\}_{m=0}^{\infty}$ をテプリッツ作用素 T_F の固有値とする.

(1) $\exists C, |\lambda_m| \leq \dfrac{C}{\sqrt{m}}, \quad (m \in \mathbb{N})$.

(2) $\Lambda(w) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{sw} e^{-s} \tilde{F}(s) ds, \quad (Re(w) < 1)$.

(3) $\Lambda(w)$ は左半平面 $\{w \in \mathbb{C} : Re(w) < 1\}$ で正則で境界を込めて有界.

(4)　$\Lambda(iv)$ は連続関数で $\lim_{|v|\to\infty} \Lambda(iv) = 0$.

(5)　(シンボル関数の再現公式)
$\tilde{F}(s) = e^s \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isv}\Lambda(iv)dv.$

9　フーリエ・ウルトラ超関数

9.1　フーリエ・ウルトラ超関数の定義とラプラス変換

フーリエ・ウルトラ超関数 (Fourier ultra - hyperfunctions) は, マルチノーの解析汎関数 (Analytic functionals), 佐藤・河合のフーリエ超関数 (Fourier hyperfunctions) の概念の拡張である. 大きな違いは台の定義ができない点にある. オイラー・ガンマ関数の逆数, 変形ベッセル関数などはフーリエ・ウルトラ超関数のラプラス変換であり, 特殊関数の理論では自然に出てくる概念である ([13]). 長町ー Brüning により研究されている基本的長さを持つ場の量子論では, 場の演算子は緩増加フーリエ・ウルトラ超関数で記述されている ([7]).　$\varepsilon > 0, \varepsilon' > 0$ に対し
$L = (-\infty, 0] + i[-b, b]$, $L_\varepsilon = (-\infty, \varepsilon] + i[-b-\varepsilon, b+\varepsilon]$,
$Q(L_\varepsilon : \varepsilon') = \{f(t) \in H(L_\varepsilon) \cap C(L_\varepsilon) : sup_{t\in L_\varepsilon}|f(t)e^{\varepsilon'|t|}| < \infty\}$,
とおく. $H(L_\varepsilon) \cap C(L_\varepsilon)$ は L_ε の内部で正則で境界をこめて連続である関数全体を表している.
$Q(L : \{0\}) = \lim ind_{\varepsilon>0,\varepsilon'>0} Q(L_\varepsilon : \varepsilon')$,
とおき, $Q(L : \{0\})$ の双対空間を $Q'(L : \{0\})$ と表す.
$Q'(L : \{0\})$ の元を L で支えられるフーリエ・ウルトラ超関数と呼ぶ.
$\widetilde{T}(z) =< T, e^{zt} >$ をフーリエ・ウルトラ超関数 T のラプラス (フーリエ・ボレル) 変換と呼ぶ.

<u>定理 5</u>([28], [32])
$\widetilde{T}(z)$ は右半平面 $Re(z) > 0$ の正則関数で次の評価を満たす:
$\forall\varepsilon > 0, \forall\varepsilon' > 0, \exists C_{\varepsilon,\varepsilon'} > 0,$
$|\widetilde{T}(z)| \le C_{\varepsilon,\varepsilon'} e^{(b+\varepsilon)|y|+\varepsilon x}, \quad (x \ge \varepsilon', z = x+iy \in \mathbb{C})$
逆に右半平面で正則な関数 $g(z)$ が上の評価を満たしていると,
$g(z) = \widetilde{T}(z)$ を満たすフーリエ・ウルトラ超関数 T が唯一つ存在する.

<u>系 1</u>
固有値の解析接続 $\lambda(z)$ に対し $\lambda(z) = \widetilde{T}(z)$ となるフーリエ・ウルトラ超関数 T が唯一つ存在する.

9.2　フーリエ・ウルトラ超関数の AG 変換

$G_T(w) =< T, \dfrac{we^{zt}}{1-we^{zt}} >$ を T のアバニシアン・ゲイ (Avanissian - Gay) 変換と呼ぶ ([42]).

命題 9([29], [30])　$0 \le b < \pi$ であると次が成り立つ.
(1)　$G_T(w)$ は $\mathbb{C} \setminus \exp(-L)$ で正則.
(2)　$G_T(w)$ は原点の近傍でテイラー展開
$$G_T(w) = \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{T}(m) w^m.$$
を持つ.
(3)　$< T, f >= \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial L_\varepsilon} G_T(e^{-t}) f(t) dt, \quad f(t) \in Q(L_\varepsilon : \varepsilon').$

(4)　$\widetilde{T}(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial L_\varepsilon} G_T(e^{-t}) e^{zt} dt.$

系 1
固有値の母関数 $\Lambda(w)$ に対し $\Lambda(w) = G_T(w)$ となるフーリエ・ウルトラ超関数 T が唯一つ存在する.

注意 9　アバニシアン・ゲイ (Avanissian - Gay) 変換はディジタル信号処理の分野では $Z-$ 変換と呼ばれている.

10　$\Lambda(w)$ と $\lambda(z)$ の関係

次が成り立つ
命題 10([29], [45])
(1)　$\lambda(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{L_\varepsilon} \Lambda(e^{-t}) e^{zt} dt.$

$$L_\varepsilon = (-\infty, \varepsilon] + i \left[-\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon \right].$$

(2)　$\Lambda(e^{-t}) = \dfrac{1}{2}\lambda(0) + \displaystyle\int_0^\infty \lambda(x) e^{-xt} dx + i \int_0^\infty \frac{e^{-itx}\lambda(ix) - e^{itx}\lambda(-ix)}{e^{2\pi x} - 1} dx$

(証明) (2) は Plana の和公式 ([13]) による.

11　シンボル関数とフーリエ・ウルトラ超関数

シンボル関数とフーリエ・ウルトラ超関数の間には次の関係がある.

命題 11　$0 \le b < \pi$ であると $f(t) \in Q(L:\{0\})$ に対し

(1)　$\displaystyle < T, f >= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\varepsilon}\left\{\int_0^\infty e^{se^{-t}}e^{-s}\tilde{F}(s)ds\right\}f(t)dt.$

(2)　$\displaystyle < T, f >= \frac{-1}{2\pi i}\int_0^\infty\left\{\int_{\exp(-L_\varepsilon)} e^{sw}f(-\log w)\frac{dw}{w}\right\}e^{-s}\tilde{F}(s)ds.$

が成り立つ.

命題 12

$\widetilde{F}(s) = e^s < T_t, e^{-t}e^{-se^{-t}} > +\lambda_0\delta(s), \quad (s > 0).$

例 1.　$\widetilde{F}(s) = e^{(1-\frac{1}{a})s}, \quad 0 < a < 1$ とおく.

対応するフーリエウルトラ超関数 T は, $T = a\delta(t - \log a)$ である.

例 2.　$\widetilde{F}(s) = \delta(s-1)$ とおく. 対応するフーリエウルトラ超関数 T は

$\displaystyle < T, f >= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\varepsilon} e^{e^{-t}}f(t)dt, \quad f(t) \in Q(L:\{0\}).$

で定義される.

T は $-\infty + i\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ で支えられている ([30]).

T のラプラス変換 $\widetilde{T}(z)$ は, $\displaystyle \frac{e^{-1}}{\Gamma(z+1)}$ である.

12　テプリッツ作用素の固有値のフレドホルム行列式と佐藤超関数

12.1　テプリッツ作用素のスペクトル解析

命題 13([11], [12])　$F(p,q) > 0 \in L^1(\mathbb{R}^2), F(p,q) = \tilde{F}(r^2)$ を仮定すると次が成り立つ.

(1)　$\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty \in l^1,$

(2)　$\displaystyle \sum_{k=0}^\infty \lambda_k = (2\pi)^{-1}\int\int_{\mathbb{R}^2} F(p,q)dpdq < \infty.$

12.2 スペクトル解析に登場する関数 ([37])

$$D(z) = \prod_{k=0}^{\infty}(1 - \lambda_k z) : \text{フレドホルム (Fredholm) 行列式}$$

$$\theta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-{\lambda_k}^{-1} t} : \text{テータ関数 (分配関数)}$$

$$\zeta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} {\lambda_k}^{s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \theta(t) t^{s-1} dt: \text{ ゼータ関数}$$

$$R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{{\lambda_k}^{-1} - z} = -\frac{d}{dz} \log D(z) = \int_0^{\infty} \theta(t) e^{tz} dt: \text{ レゾルベント}$$

12.3 $\theta(t), R(z), D(z), \zeta(s)$ の間の関係

$$\begin{tikzcd}
\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \arrow[r] \arrow[d] & \theta(t) \arrow[d, "\text{Laplace}"] \\
D(z) \arrow[r, "-\frac{D'}{D}"] & R(z)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\theta(t) \arrow[r, "\text{Mellin}"] \arrow[d, "\text{Laplace}"'] & \zeta(s) \\
R(z) \arrow[r, "\text{boundary value}"] & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \delta(x - {\lambda_n}^{-1}) \arrow[u, "\text{Inverse Mellin}"']
\end{tikzcd}$$

12.4 フレドホルム行列式と佐藤超関数

佐藤超関数に対するペーリー・ウイナー (Paley - Wiener) の定理を使うと次が判る.

定理 6 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^1$ とすると, フレドホルム行列式 $D(z) = \prod_{n=0}^{\infty}(1 - \lambda_n z)$ は整関数であり次の評価を満たす.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \ |D(z)| \leq C_\varepsilon \exp(\varepsilon |z|), \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

従って, 原点に台を持つ佐藤超関数 T が存在して
$D(z)=\widetilde{T}(z)=<T_x, e^{-ixz}>$ が成り立つ.

(**証明**) 仮定の下で $D(z)$ が minimal type の整関数になる事は良く知られているので, ここでは佐藤超関数 T の構成の概略を述べる. 松澤の熱核の方法を使う ([26], [44]).
$U(x,t)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-tz^2}D(z)e^{ixz}dz$ とおくと $U(x,t)$ は次の 1, 2, 3, 4 を満たす.
1. $\quad \dfrac{\partial U(x,t)}{\partial t}=\Delta U(x,t)$
2. $\quad \forall\varepsilon>0, \exists C_\varepsilon>0,\ |U(x,t)|\le C_\varepsilon e^{\frac{\varepsilon}{t}-\frac{x^2}{4t}}$.
3. $\quad \lim_{t\to 0}U(x,t)=T(x)$ は, 原点に台を持つ佐藤超関数になる.
より正確に言うと, T は $U(x,t)$ から次の様にして構成される.
$<T,f>=\lim_{t\to 0}\displaystyle\int U(x,t)\chi(x)f(x)dx, \quad (f(x)\in H(\mathbb{C}))$
$\chi(x)$ は, 原点の近傍で 1 に等しい有界な台を持つ C^∞ 級関数である.
4. $D(z)=\widetilde{T}(z)=<T_x, e^{-ixz}>$.

例 5
$F(p,q)=e^{\frac{a-1}{2a}(p^2+q^2)}=e^{\frac{a-1}{2a}r^2}, \quad (0<a<1)$ とおく

$P_F(h_m)(x)=\lambda_m h_m(x), \quad \lambda_m=a^{m+1}$ であり, 以下のようになる.

$$D(z)=\prod_{m=0}^{\infty}(1-a^{m+1}z), \quad \theta(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-a^{-n-1}t}$$
$$\zeta(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a^{n+1}\right)^s=\frac{a^s}{1-a^s}, \quad R(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z-a^{-n-1}}$$

恒等式 ([31])
$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-a^{n+1}z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(a^n-1)\cdots(a-1)}z^n$$
を使うと,
$D(z)=\widetilde{T}(z)=<T_x, e^{-ixz}>$,
$$T=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(a^n-1)\cdots(a-1)}\delta^{(n)}(x)$$
が判る. T は, 原点に台を持つ佐藤超関数である.

参考文献

[1] A. Aftalion, X. Blanc and F. Nier: *Lowest Landau level functional and Bargmann spaces for Bose - Einstein condensates*, J. Funct. Anal. Vol. 241, pp. 661-702(1991)

[2] 秋月康夫　鈴木通夫：高等代数学 I, II, 岩波全書 (1971)

[3] 荒木不二洋：量子場の数理, 岩波書店 (2001)

[4] 有元卓: 信号・画像のディジタル処理, 産業図書 (1980)

[5] V. Bargmann : *On a Hilbert space of analytic functions and an integral transform part I,* Comm. Pure. Applied Math., pp. 187-214 (1961).

[6] R. P. Boas : *Entire Functions,* Academic Press, New York (1954).

[7] E. Brüning and S. Nagamachi : *Relativistic quantum field theory with a fundamental length,* J. Math. Phys. 45, pp. 2199 - 2231(2004)

[8] M. Cappielo, L. Rodino and J. Toft : *Radial symmetric element and the Bargmann transform,* preprint(2014)

[9] 千原浩之: エルミート関数についてのメモ *ver. 2*, (2009)

[10] H. Chihara :*Bounded Berezin-Toeplitz Operators on the Segal Bargmann Space*, Integr. Equ. Oper. Theory, Vol. 63, pp. 321-335(2009)

[11] I. Daubechies : *A Time Frequency Localization Operator, A Geometric Phase Space Approach,* IEEE. Trans. Inform. Theory. vol.34, pp. 605 - 612(1988)

[12] I. Daubechies : *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM(1992)

[13] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi : *Higher Transcendental Functions I, II*, Bateman Manuscript Project, New York, Tront, London (1953)

[14] H. G. Feichtinger and T. Strohmer(Editor): *Advances in Gabor Analysis*, Birkhäuser, Bostom, Berlin, Basel(2002)

[15] G. B. Folland : *Harmonic Analysis in Phase Space,* Princeton University Press, Princeton. NJ (1989)

[16] 伏見康治：量子統計力学, 共立出版 (1967)

[17] 古澤明: 量子光学と量子情報科学, 数理工学社 (2005)

[18] S. M. Girvin and T. Jach: *Formalism of quantum Hall effect:Hilbert space of analytic functions*, Phys. Rev. B, Vol. 29, pp. 5617(1984)

[19] K. Gröchenig：*Foundation of Time Frequency Analysis*, Birkhäuser, Boston(2001)

[20] 林正人：量子論のための表現論, 共立出版 (2014)

[21] 飛田武幸：確率論の基礎と発展, 共立出版 (2011)

[22] 猪狩惺: 実解析入門, 岩波書店 (1996)

[23] 河添健: 群上の調和解析, 朝倉書店 (2000)

[24] 金子晃: 偏微分方程式入門, 東京大学出版会 (1998)

[25] A. Martinez : *Introduction to Semiclassical and Micro local Analysis,* Springer Verlag, New York (2002)

[26] T. Matsuzawa : *A calculus approach to the hyperfunctions I,* Nagoya Math. J. 108, pp. 53-66(1987)

[27] 森本光生: 佐藤超関数入門, 共立出版 (1976)

[28] M. Morimoto : *Analytic functionals with non-compact carrier*, Tokyo J. Math. 1, pp. 77-103(1978)

[29] M. Morimoto and K. Yoshino : *A uniqueness theorem for holomorphic functions of exponential type*, Hokkaido Math. J. 7(1978), pp. 259 - 270.

[30] M. Morimoto and K. Yoshino : *Some examples of analytic functionals with carrier at the infinity*, Proc. Japan Acad. 56, Ser. A, pp. 357 - 361(1980)

[31] G. Polya and G. Szegö :*Aufgaben und Lehrsätz aus der Analysis*, Vol. I, Springer - Verlag, Berlin, (1925)

[32] P. Sargos and M. Morimoto : *Transformation des fonctionnelles analytiques a porteur non - compacts*, Tokyo J. Math. 4, pp. 457-492(1981)

[33] 佐藤幹夫, 河合隆裕, 柏原正樹： 超関数論における擬微分方程式論, 数学 25, pp. 213-238(1973)

[34] E. M. Stein : *Harmonic Analysis,* Princeton University Press, Princeton. NJ (1993)

[35] J. Toft : *The Bargmann transform on modulation and Gelfand - Shilov spaces, with applications to Toeplitz and pseudo differential operators*, J. Pseudo. Differ. Oper. Appl. Vol. 3, pp. 145-227(2012)

[36] A. Voros :*Wentzel - Kramers method in the Bargmann representation*, Phys. Rev. A, Vol. 40, pp. 6814(1989).

[37] A. Voros: *Spectral functions, Special functions and Selberg Zeta functions*, Commun. Math. Phys. 110, pp. 439-465(1987)

[38] 山盛厚伺：ある Hartogs 領域のベルグマン核の明示公式について, 数理解析研究所講究録 1694, pp. 151-159(2010)

[39] K. Yoshino : *Generating functions of eigenvalues of Daubechies localization operator*, Proceedings of Växjö Congress, Växjö, Sweden(2009)

[40] K. Yoshino : *Daubechies localization operator in Bargmann - Fock space and generating functions of eigenvalues of localization operator*, SAMPTA 2009, Marseille, France(2009)

[41] K. Yoshino : *Analytic continuation and applications of eigenvalues of Daubechies localization operator*, CUBO a Mathematical Journal, Vol. 12 No. 3 pp. 203-212(2010)

[42] 吉野邦生, 荒井隆行: ディジタル信号と超関数, 海文堂 (1995)

[43] 吉野邦生: ディジタル信号と母関数, 数学セミナー, pp. 24-27(2001)

[44] 吉野邦生: 工学と積分 (ヘビサイドの超関数を知る), 数理科学 5 月号, pp. 54-55(2009)

[45] K. Yoshino :*Analytic continuation of eigenvalues of Daubechies operators and Fourier ultra - hyperfunctions*, 数理解析研究所講究録 1861, pp. 46-61(2013)

[46] K. Zhu : *Analysis on Fock spaces,* Springer Verlag, New York (2012)

Scattering theory for the Laplacian on symmetric spaces of noncompact type and its application

貝塚　公一 (KAIZUKA, Koichi) *

1　序

非コンパクト型対称空間 $X = G/K$ 上の Laplacian に対する (幾何学的) 散乱理論について考察する. 非コンパクト型対称空間の具体例としては, 実双曲空間, 有界対称領域等が挙げられる.

これまで, Euclid 空間, 実双曲空間, 及びそれらの計量を摂動したエンドを持つ Riemann 多様体上においては, Laplacian に対する散乱理論が詳しく解析されており, 非常に多くの先行研究がある (例えば, Agmon [1], Agmon-Hörmander [2], Hislop [4], Isozaki-Kurylev [5] 等を参照のこと). 一方で, モデルケースとして重要な, 非コンパクト型対称空間上の Laplacian に対する散乱理論に関しては, Euclid 空間や実双曲空間と比較すると先行研究は少ない. Mazzeo-Vasy [6] によって指摘されているように, 非コンパクト型対称空間上の Laplacian は, その背後に (絶対連続な) 多体 Schrödinger 作用素としての構造を持っている. 従って, Euclid 空間や実双曲空間上の Laplacian に対する解析の理論を (ランクが 2 以上の) 非コンパクト型対称空間上の Laplacian に直接適用することはできず, 解析が困難である理由の一つになっている.

非コンパクト型対称空間上では, 表現論, 調和解析の理論が長い間研究されてきた. 特に, Helgason-Fourier 変換と呼ばれる, 非コンパクト型対称空間上の Fourier 変換を用いた Fourier 解析の理論に関しては多くの先行研究があり, Euclid-Fourier 解析との類似点, または相違点が詳しく解析されている. 本研究では, 非コンパクト型対称空間上の調和解析の理論に基づいて, 非コンパクト型対称空間上の Laplacian に対する散乱理論を構築する. 非コンパクト型対称空間上の Fourier 解析, 表現論を用いることで, 散乱行列や, 漸近展開を具体的に構成することができる. 特に, 散乱公式の高エネルギー, 低エネルギー極限での主要部について考察し, Euclid 空間との相違点について述べる.

---

*立命館大学 総合科学技術研究機構 *E-mail address*: kaizuka@fc.ritsumei.ac.jp
本研究は科研費 (課題番号:23340033) の助成を受けたものである.

2 非コンパクト型対称空間上の Fourier 変換

2.1 Helgason-Fourier 変換

$G=KAN$ を非コンパクト半単純 Lie 群 G の Iwasawa 分解とし, $\mathfrak{a}=\mathrm{Lie}(A)$ とおく. $l=\dim A$ とおき, X のランクと呼ぶ. $A(g)\in\mathfrak{a}$ を Iwasawa 分解における, $g\in G$ の $\mathfrak{a}$-成分とする ($g=k(g)\exp(A(g))n(g)\in KAN$). M を K における A の中心化元全体から成る Lie 群とし, $B=K/M$ とおく. $o=eK$ を $X=G/K$ の原点とする. $(x,b)=(g\cdot o,kM)\in X\times B$ に対して, $A(x,b)=-H(g^{-1}k)$ と定義する. dx を X 上の左-G-不変測度とする.

定義 2.1. (*Helgason-Fourier* 変換) 任意の $f\in C_0^\infty(X)$ に対して*, Helgason-Fourier* 変換 $\mathcal{F}f$ を以下で定義する.

$$\mathcal{F}f(\lambda,b)=\int_X e^{(-i\lambda+\rho)(A(x,b))}f(x)dx,\quad (\lambda,b)\in\mathfrak{a}^*\times B.$$

$L^2(X)=L^2(X,dx)$ とおく. $d\lambda$ を $\mathfrak{a}^*$ 上の Lebesgue 測度, db を B 上の正規化された左-K-不変測度とする.

定理 2.2. (*Plancherel* 定理) *Helgason-Fourier* 変換 $\mathcal{F}$ は以下のユニタリ作用素に一意的に拡張される.

$$\mathcal{F}:L^2(X)\to L^2_W(\mathfrak{a}^*\times B,|W|^{-1}|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}d\lambda db),$$

ここで*,* W は *Weyl* 群*,* $\boldsymbol{c}(\lambda)$ は *Harish-Chadra* $\boldsymbol{c}$-関数である. (詳細については*,* 例えば *Helgason* [3] を参照のこと.)

2.2 Laplacian に対するスペクトル表示

非コンパクト型対称空間上の Helgason-Fourier 変換を用いて, Laplacian に対するスペクトル表示を導入する.

Δ_X を非コンパクト型対称空間 $X=G/K$ 上の Laplacian とする. $H_0=-\Delta_X-\sigma_0$ を $L^2(X):=L^2(X,dx)$ 上の, 2 階の Sobolev 空間 $W^{2,2}(X)$ を定義域とする自己共役作用素とする. (ここで, 正定数 σ_0 は $\sigma(H_0)=\sigma_{\mathrm{ac}}(H_0)=[0,\infty)$ となるように選ぶ.) $X_{\mathrm{reg}}=KA^+\cdot o$ を X の正則元全体からなる集合とする (X_{reg} は X の中で稠密である). 原点 $o\in X$ における指数写像 $\exp_o:T_oX\to X$ と内積による自然な同一視 $\iota:T_oX\to T_o^*X$ を用いて, $\mathbb{S}^{n-1}_{\mathrm{reg}}=S_o^*X\cap(\iota\circ\exp_o^{-1})(X_{\mathrm{reg}})$ とおく. また, $\mathfrak{a}^*_+\subset\mathfrak{a}^*$ を positive Weyl chamber とし, $S(\mathfrak{a}^*_+)=\{\lambda_0\in\mathfrak{a}^*_+;|\lambda_0|=1\}$ とおく. この時, $\mathbb{S}^{n-1}_{\mathrm{reg}}$ は $S(\mathfrak{a}^*_+)\times B$ と自然に同一視される. Euclid 空間 T_o^*X 上の Lebesgue 測度を $d\mathcal{L}$ とおく. $\boldsymbol{\omega}(\lambda)$ を (一般化) 極座標表示 $\mathfrak{a}^*_+\times B\to(T_o^*X)_{\mathrm{reg}}$ に関する密度関数とする:

$$d\mathcal{L}=\boldsymbol{\omega}(\lambda)d\lambda db.$$

$\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ とおく. 正定数 κ に対し, $X \times \mathbb{S}^{n-1}_{\mathrm{reg}}$ 上の関数 $E_\pm(x,\omega;\kappa)$ を以下で定める.

$$E_\pm(x,\omega;\kappa) = e^{\pm i(l-1)\pi/4}\frac{\boldsymbol{c}(\pm\kappa\lambda_0)^{-1}}{\boldsymbol{\omega}(\kappa\lambda_0)^{1/2}}e^{(\pm i\kappa\lambda_0+\rho)(A(x,b))}, \quad \omega = (\lambda_0, b) \in \mathbb{S}^{n-1}_{\mathrm{reg}}.$$

定義 2.3. 任意の $f \in L^2(X)$ に対して,

$$\mathcal{F}_0^{(\pm)} f(\kappa,\omega) = \kappa^{(n-1)/2}\int_X E_\mp(x,\omega;\kappa)f(x)dx, \quad \kappa \in \mathbb{R}_+, \omega \in \mathbb{S}^{n-1}_{\mathrm{reg}}$$

と定義する. この時, 以下のユニタリ作用素が得られる.

$$\mathcal{F}_0^{(\pm)} : L^2(X) \to L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{S}^{n-1}_{\mathrm{reg}}), d\kappa).$$

さらに, 任意の $f \in \mathcal{D}(H_0)$ に対して,

$$\mathcal{F}_0^{(\pm)}[H_0 f](\kappa,\omega) = \kappa^2 \mathcal{F}_0^{(\pm)} f(\kappa,\omega)$$

が成り立つ. $\mathcal{F}_0^{(\pm)}$ を自己共役作用素 H_0 の**スペクトル表示**と呼ぶ.

2.3 Agmon-Hörmander 空間

$d(x,y)$ を非コンパクト型対称空間上の Riemann 距離関数とし, $r(x) = d(x,o)$ とおく. 原点 o からの距離関数 $r(x)$ に付随する, 非コンパクト型対称空間 X 上の Agmon-Hörmander 空間 $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_X^*$ を導入する. $\Omega_0 = \{x \in X; r(x) < 1\}$, $\Omega_j = \{x \in X; 2^{j-1} \leqslant r(x) < 2^j\}$ $(j \in \mathbb{N})$ とおく. $\mathcal{B}_X$ を以下のノルムが有限な局所 2 乗可積分関数 $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ 全体からなる Banach 空間とする.

$$\|f\|_{\mathcal{B}_X} := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j/2}\|f\|_{L^2(\Omega_j,dx)} < \infty.$$

このとき, 双対空間 $\mathcal{B}_X^*$ は双線形形式 $(f,u) \mapsto \int_X f(x)u(x)dx$, により, 以下のノルムが有限な局所 2 乗可積分関数 $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ 全体と自然に同一視される.

$$\|u\|_{\mathcal{B}_X^*} = \sup_{j\in\mathbb{N}_0}\left\{2^{-j/2}\|u\|_{L^2(\Omega_j,dx)}\right\} < \infty.$$

また, Banach 空間 $\mathcal{B}_X^*$ において, 同値関係 $\simeq$ を以下で定義する.

$$u_1 \simeq u_2 \Longleftrightarrow \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_{r(x)<R}|u_1(x)-u_2(x)|^2 dx = 0.$$

2.4 Fourier 制限評価と Poisson 作用素

正定数 κ, $f \in C_0^\infty(X)$ に対して $\mathcal{F}_0^{(\pm)}(\kappa) f \in L^2(\mathbb{S}_{\mathrm{reg}}^{n-1})$ を

$$[\mathcal{F}_0^{(\pm)}(\kappa) f](\omega) = \kappa^{(n-1)/2} \int_X E_\mp(x, \omega; \kappa) f(x) dx, \quad \kappa \in \mathbb{R}_+, \omega \in \mathbb{S}_{\mathrm{reg}}^{n-1}$$

により定義する. $f \in L^2(X)$ に対しては, $\mathcal{F}_0^{(\pm)} f(\kappa, \omega)$ は $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}_{\mathrm{reg}}^{n-1}$ 上, 殆ど至る所でのみ定義されていることに注意する. $L^2(X)$ よりも無限遠での減衰が早い関数から成る Banach 空間 $\mathcal{B}_X$ を用いることで, 以下が得られる.

命題 2.4. (*Fourier* 制限評価) 任意の正定数 κ に対して, 作用素 $\mathcal{F}_0^{(\pm)}(\kappa)$ は *Banach* 空間 $\mathcal{B}_X$ から $L^2(\mathbb{S}_{\mathrm{reg}}^{n-1})$ への連続線形作用素に一意的に拡張される. さらに, κ に依存しない正定数 C が存在して,

$$\left\| \mathcal{F}_0^{(\pm)}(\kappa) f \right\|_{L^2(\mathbb{S}_{\mathrm{reg}}^{n-1})} \leqslant C \left\| f \right\|_{\mathcal{B}_X}, \quad f \in \mathcal{B}_X, \kappa \in \mathbb{R}_+.$$

系 2.5. 任意の正定数 κ に対して以下の連続線形作用素が得られる.

$$\mathcal{F}_0^{(\pm)}(\kappa)^* : L^2(\mathbb{S}_{\mathrm{reg}}^{n-1}) \to \mathcal{B}_X^*.$$

任意の $\varphi \in L^2(\mathbb{S}_{\mathrm{reg}}^{n-1})$ に対して,

$$\mathcal{F}_0^{(\pm)}(\kappa)^* \varphi(x) = \kappa^{(n-1)/2} \int_{\mathbb{S}_{\mathrm{reg}}^{n-1}} E_\pm(x, \omega; \kappa) \varphi(\omega) d\omega$$

と表される. $E_\pm(x, \omega; \kappa)$ が $-\Delta_X$ の一般化固有関数であることに注意すると,

$$(-\Delta_X - \sigma_0) \mathcal{F}_0^{(\pm)}(\kappa)^* \varphi(x) = \kappa^2 \mathcal{F}_0^{(\pm)}(\kappa)^* \varphi(x).$$

以下では, 作用素 $\mathcal{F}_0^{(\pm)}(\kappa)^*$ を **Poisson 作用素**と呼ぶことにする.

3 主結果

以下の Helmholtz 方程式に対して, Agmon-Hörmander 空間 $\mathcal{B}_X^*$ に属する解を Poisson 作用素とレゾルベントの境界値により特徴づけ, その諸性質を解析する.

$$(-\Delta_X - \sigma_0 - \kappa^2) u = f, \quad f \in \mathcal{B}_X, \kappa \in \mathbb{R}_+.$$

非コンパクト型対称空間上の Laplacian Δ_X に対して, Agmon-Hörmander 空間 $\mathcal{B}_X$-$\mathcal{B}_X^*$ の枠組みで, 散乱理論における以下の一連の結果を得た.

3.1 散乱公式・散乱行列

原点 o における指数写像 $\exp_o : T_oX \to X$ により, $\mathcal{J}(x) := det(d\exp_o|_{\exp_o^{-1}(x)})$ と定義する. また, $X_{\rm reg} \ni x \mapsto (r(x), \hat{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1}_{\rm reg}$ を $X_{\rm reg}$ の極座標表示とする.

この時, Poisson 作用素 $\mathcal{F}_0^{(-)}(\kappa)^*$ に対して, 以下の漸近展開が成り立つ.

定理 3.1. (散乱公式) 任意の正定数 κ と $\varphi \in L^2(\mathbb{S}^{n-1}_{\rm reg})$ に対し, $\varphi_+ \in L^2(\mathbb{S}^{n-1}_{\rm reg})$ が一意的に存在して, 以下が成り立つ.

$$\mathcal{F}_0^{(-)}(\kappa)^*\varphi(x) \simeq (2\pi)^{-1/2}\mathcal{J}(x)^{-1/2}r(x)^{-(n-1)/2}\Big\{e^{+i\kappa r(x)}\varphi_+(\hat{x}) + e^{-i\kappa r(x)}\varphi(\hat{x})\Big\}.$$

定理 3.2. (i) 任意の正定数 κ に対して, *Hilbert* 空間 $L^2(\mathbb{S}^{n-1}_{\rm reg})$ 上の作用素 $\hat{S}_X(\kappa)$ を以下で定める.

$$\hat{S}_X(\kappa) : L^2(\mathbb{S}^{n-1}_{\rm reg}) \ni \varphi \mapsto \varphi_+ \in L^2(\mathbb{S}^{n-1}_{\rm reg}).$$

この時, $\hat{S}_X(\kappa)$ は *Hilbert* 空間 $L^2(\mathbb{S}^{n-1}_{\rm reg})$ 上のユニタリ作用素となる. ($\hat{S}_X(\kappa)$ を非コンパクト型対称空間 X の (**幾何学的**) **散乱行列**と呼ぶ.)

(ii) 任意の正定数 κ に対して, 以下が成り立つ.

$$\hat{S}_X(\kappa) \circ \mathcal{F}_0^{(-)}(\kappa) = \mathcal{F}_0^{(+)}(\kappa).$$

以下で, 散乱公式の証明の概略について述べる. 関数 $\varphi \in L^2(\mathbb{S}^{n-1}_{\rm reg})$ を以下の 3 段階に分けて一般化することで散乱公式が証明される.

(i) $\varphi(\omega) = \phi(\lambda_0)E_+(o, \omega : \kappa), \quad \phi \in C_0^\infty(S(\mathfrak{a}_+^*))$;

(ii) $\varphi(\omega) = \phi(\lambda_0)E_+(g\cdot o, \omega : \kappa), \quad g \in G, \phi \in C_0^\infty(S(\mathfrak{a}_+^*))$;

(iii) 一般の場合; $\varphi \in L^2(\mathbb{S}^{n-1}_{\rm reg})$.

(i)-(iii) の各々の場合に対して, 以下の様に散乱公式が導出される.

(i) 初めに, 非コンパクト型対称空間上の初等球関数を導入する.

定義 3.3. 任意の $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して, 初等球関数 $\varphi_\lambda(x)$ を以下で定義する.

$$\varphi_\lambda(x) = \int_B e^{(i\lambda+\rho)(A(x,b))}db.$$

この場合, Poisson 作用素の像に対して以下が成り立つことに注意する.

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_0^{(-)}(\kappa)^*[\phi(\cdot)E_+(o,\cdot:\kappa)](x)\\ &= \kappa^{(l-1)/2}\kappa^{-\dim N/2}\int_{S(\mathfrak{a}_+^*)}\varphi_{-\kappa\lambda_0}(x)\phi(\lambda_0)|\boldsymbol{c}(\kappa\lambda_0)|^{-2}d\sigma(\lambda_0).\end{aligned}$$

このとき, Harish-Chandra 展開と呼ばれる初等球関数 $\varphi_\lambda(x)$ に対する漸近展開公式と, 球面上の停留位相の方法を組み合わせることで以下が得られる.

補題 3.4. 任意の正定数 κ と $\phi \in C_0^\infty(S(\mathfrak{a}_+^*))$ に対し, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_0^{(-)}(\kappa)^*[\phi(\cdot)E_+(o,\cdot:\kappa)](x)\\
&\simeq (2\pi)^{-1/2}\mathcal{J}(x)^{-1/2}r(x)^{-(n-1)/2}\\
&\quad\times\left\{e^{+i\kappa r(x)}\phi(-s_*\lambda_{\hat{x}})E_-(o,\hat{x};\kappa)+e^{-i\kappa r(x)}\phi(+\lambda_{\hat{x}})E_+(o,\hat{x};\kappa)\right\}.
\end{aligned}$$

ここで, $\hat{x}=(\lambda_{\hat{x}},b_x)\in S(\mathfrak{a}_+^*)\times B$ であり, $s_*\in W$ は $s_*\mathfrak{a}^+=-\mathfrak{a}^+$ を満たす, 一意的な *Weyl* 群の元である.

(ii) この場合, 以下が成り立つことに注意する.

$$\mathcal{F}_0^{(-)}(\kappa)^*[\phi(\cdot)E_+(g\cdot o,\cdot:\kappa)](x)=\mathcal{F}_0^{(-)}(\kappa)^*[\phi(\cdot)E_+(o,\cdot:\kappa)](g^{-1}\cdot x).$$

よって, (ii) の場合に得られる一般化固有関数は, (i) で得られる一般化固有関数を $g\in G$ で平行移動したものになっている. 平行移動 $x\mapsto g^{-1}\cdot x$ に対する, 同径成分 $A^+(x)\in\mathfrak{a}^+$ のずれを以下の補題を用いて評価することで散乱公式が得られる.

補題 3.5. $y=h\cdot o\in X$, $x\in X_{\mathrm{reg}}\cap(h\cdot X_{\mathrm{reg}})$ に対して,

$$R_+(x,y)=A^+(h^{-1}\cdot x)-A^+(x)+A(y,b_x)$$

とおく. このとき, 正定数 $C(y)$ が存在して以下が成り立つ.

$$|R(x,y)|\leqslant C(y)e^{-2d(A^+(x))},\quad x\in X_{\mathrm{reg}}\cap(h\cdot X_{\mathrm{reg}}).$$

ただし, $d(H)=\min_{\alpha\in\Sigma_o^+}\alpha(H)$.

補題 3.6. 任意の正定数 κ と $\phi\in C_0^\infty(S(\mathfrak{a}_+^*))$, $g\in G$ に対し, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_0^{(-)}(\kappa)^*[\phi(\cdot)E_+(g\cdot o,\cdot:\kappa)](x)\\
&\simeq (2\pi)^{-1/2}\mathcal{J}(x)^{-1/2}r(x)^{-(n-1)/2}\\
&\quad\times\left\{e^{+i\kappa r(x)}\phi(-s_*\lambda_{\hat{x}})E_-(g\cdot o,\hat{x};\kappa)+e^{-i\kappa r(x)}\phi(+\lambda_{\hat{x}})E_+(g\cdot o,\hat{x};\kappa)\right\}.
\end{aligned}$$

(iii) 一般の場合は, 以下に述べる稠密性と Poisson 作用素の連続性を用いることで, 散乱公式が証明される.

補題 3.7. 任意の正定数 κ に対して, $L^2(\mathbb{S}^{n-1}_{\mathrm{reg}})$ の部分空間 $\mathcal{L}^2_\kappa(\mathbb{S}^{n-1}_{\mathrm{reg}})$ を以下で定める.

$$\mathcal{L}^2_\kappa(\mathbb{S}^{n-1}_{\mathrm{reg}})=\left\{\sum_{j=1}^r\phi_j(\lambda_0)E_+(g_j\cdot o,\omega;\kappa);\phi_j\in C_0^\infty(S(\mathfrak{a}_+^*)),g_j\in G,r\in\mathbb{N}\right\}.$$

このとき, $\mathcal{L}^2_\kappa(\mathbb{S}^{n-1}_{\mathrm{reg}})$ は $L^2(\mathbb{S}^{n-1}_{\mathrm{reg}})$ の中で稠密となる.

補題 3.8. 任意の正定数 κ に対して, 以下の条件を満たすユニタリ作用素 $U(\kappa)$ が一意的に存在する.

$$U(\kappa)[\phi(\cdot)E_+(g\cdot o,\cdot;\kappa)]=\phi(-s_*\lambda_0)E_-(g\cdot o,\omega;\kappa).$$

(結果的に, $U(\kappa)$ は $\hat{S}_X(\kappa)$ と一致する.)

3.2　斉次 Helmholtz 方程式

斉次 Helmholtz 方程式に対して, Agmon-Hörmander 空間 $\mathcal{B}_X^*$ に属する解を Poisson 作用素を用いて以下の様に特徴付けることができる.

定理 3.9. 任意の正定数 κ に対して, 以下の (*Banach* 空間としての) 線形同型が得られる.

$$\mathcal{F}_0^{(\pm)}(\kappa)^* : L^2(\mathbb{S}_{\mathrm{reg}}^{n-1}) \to \{u \in \mathcal{B}_X^*; (-\Delta_X - \sigma_0 - \kappa^2)u = 0\}.$$

さらに, $u_\pm = \mathcal{F}_0^{(\pm)}(\kappa)^*\varphi$ $(\varphi \in L^2(\mathbb{S}_{\mathrm{reg}}^{n-1}))$ に対して, 以下の反転公式が得られる.

$$\lim_{R\to\infty} \pi\frac{\kappa^{(n-1)/2}}{R}\int_{B(o,R)} E_\mp(x,\omega;\kappa)u_\pm(x)dx = \varphi(\omega) \quad \textit{in}\ L^2(\mathbb{S}_{\mathrm{reg}}^{n-1}).$$

系 3.10. (*Rellich* 型定理) 正定数 κ に対して, $u \in \mathcal{B}_X^*$ が

$$(-\Delta_X - \sigma_0 - \kappa^2)u = 0,\ \ u \simeq 0$$

を満たすと仮定する. この時, X 上で恒等的に $u = 0$ が成り立つ.

3.3　非斉次 Helmholtz 方程式

非斉次 Helmholtz 方程式の解空間をレゾルベントの境界値を用いて解析する. レゾルベント $R_0(z)$ $(z \in \mathbb{C}\setminus[0,\infty))$ を $R_0(z) = (-\Delta_X - \sigma_0 - z)^{-1}$ により定義する.

定理 3.11. (極限吸収原理) 任意の正定数 κ, $f \in \mathcal{B}_X$ に対して, 以下の極限が存在する.

$$R_0(\kappa^2 \pm i0)f := w^*\text{-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} R_0(\kappa^2 \pm i\varepsilon)f \quad \textit{in}\ \mathcal{B}_X^*.$$

定理 3.12. 任意の正定数 κ, $f \in \mathcal{B}_X$ に対して, 以下が成り立つ.

$$R_0(\kappa^2 \pm i0)f(x) \simeq \pm i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\kappa^{-1}\mathcal{J}(x)^{-1/2}r(x)^{-(n-1)/2}e^{\pm i\kappa r(x)}(\mathcal{F}_0^{(\pm)}(\kappa)f)(\hat{x}).$$

従って, 非斉次 Helmholtz 方程式 $(-\Delta_X - \sigma_0 - \kappa^2)u = f \in \mathcal{B}_X$ の一般解で $\mathcal{B}_X^*$ に属するものは, 斉次 Helmholtz 方程式 $(-\Delta_X - \sigma_0 - \kappa^2)v = 0$ の解 $v_\pm \in \mathcal{B}_X^*$ を用いて,

$$u = R_0(\kappa^2 \pm i0)f + v_\pm$$

と表されることが分かる.

また, 非コンパクト型対称空間上の Laplacian に対して以下の様に放射条件が定義される. X_{reg} 上の関数 $\rho_+(x)$ を以下で定義する.

$$\rho_+(x) = \lim_{r\to\infty}[\partial_r \log \mathcal{J}^{1/2}](k_x e^{rA^+(x)}).$$

正定数 κ に対して, X_{reg} 上の微分作用素 $P_\pm(\kappa)$ を以下で定める.

$$P_\pm(\kappa) := \partial_r \mp i\kappa + \rho_+(x).$$

定義 3.13. 非斉次 *Helmoholtz* 方程式 $(-\Delta_X - \sigma_0 - \kappa^2)u = f \in \mathcal{B}_X$ の解 $u \in \mathcal{B}_X^*$ が, 外向き (*resp.* 内向き) 放射条件を満たすとは, 以下が成り立つときを言う.

$$P_+(\kappa)u \simeq 0 \quad (\textit{resp. } P_-(\kappa)u \simeq 0).$$

定理 3.14. 任意の正定数 κ と $f \in \mathcal{B}_X$ に対して, 非斉次 *Helmholtz* 方程式 $(-\Delta_X - \sigma_0 - \kappa^2)u = f$ の解 $u \in \mathcal{B}_X$ に対して, 以下の条件は互いに同値.

(i) $u = R_0(\kappa^2 + i0)f \quad (\textit{resp. } u = R_0(\kappa^2 - i0)f).$

(ii) 解 u は外向き (*resp.* 内向き) 放射条件を満たす.

3.4 高・低エネルギー極限

高・低エネルギー極限における散乱公式について考察し, Euclid 空間との相違点について述べる.

任意の正定数 κ に対して, 波動関数 $e_\pm(x,\omega;\kappa)$ を以下で定義する.

$$e_\pm(x,\omega;\kappa) = (2\pi)^{-n/2} e^{\pm i(n-1)\pi/4} e^{\pm i\kappa\langle x,\omega\rangle}.$$

$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\mathcal{F}_{00}^{(\pm)}(\kappa)f(\omega) = \kappa^{(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}^n} e_\mp(x,\omega;\kappa)f(x)dx$$

と定義する. この時, $\varphi \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ に対して,

$$\mathcal{F}_{00}^{(\pm)}(\kappa)^*\varphi(x) = \kappa^{(n-1)/2} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e_\pm(x,\omega;\kappa)\varphi(\omega)d\sigma(\omega)$$

かつ

$$\mathcal{F}_{00}^{(-)}(\kappa)^*\varphi(x) \simeq (2\pi)^{-1/2}|x|^{-(n-1)/2}\Big\{e^{+i\kappa r(x)}[\hat{S}_{\mathbb{R}^n}\varphi](\hat{x}) + e^{-i\kappa r(x)}\varphi(\hat{x})\Big\}$$

が成り立つ (例えば, [2] 等を参照のこと). ここで, $\hat{S}_{\mathbb{R}^n}$ は

$$\hat{S}_{\mathbb{R}^n}\varphi(\omega) = e^{-i(n-1)\pi/2}\varphi(-\omega)$$

により定義される, Euclid 空間上の (幾何学的) 散乱行列である.

非コンパクト型対称空間上の (幾何学的) 散乱行列に対して, 以下の漸近挙動が得られる.

補題 3.15. (i) 高エネルギー極限 $\kappa \to \infty$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\lim_{\kappa\to\infty} \hat{S}_X(\kappa) = \hat{S}_{\mathbb{R}^n}, \quad \textit{strongly}.$$

(ii) 低エネルギー極限 $\kappa \downarrow 0$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\lim_{\kappa\downarrow 0} \hat{S}_X(\kappa) = e^{-i(\nu_X - 1)\pi/2}\mathcal{D}_0, \quad \textit{strongly}.$$

ここで, ν_X は対称空間 X の**擬次元**と呼ばれる自然数であり, $\mathcal{D}_0$ は $\mathbb{S}^{n-1}_{\mathrm{reg}}$ 上の回折写像に付随するユニタリ作用素である.

注. (擬次元) 擬次元は, 相空間上の Plancherel 測度に関する体積の漸近挙動に現れる.

$$\int_{\{|\lambda|<r\}\times B} |\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2} d\lambda db \asymp \begin{cases} r^n & (r\to\infty), \\ r^{\nu_X} & (r\downarrow 0). \end{cases}$$

大雑把に言えば, 擬次元は低エネルギーにおける空間次元の役割を果たす. また, 熱核の長時間挙動にも擬次元が現れる. $H_t(x,y)$ を非コンパクト型対称空間 X 上の熱核とする:

$$e^{t\Delta_X} f(x) = \int_X H_t(x,y) f(y) dy.$$

この時,

$$H_t(x,x) = H_t(o,o) \asymp \begin{cases} t^{-n/2} & (t\downarrow 0), \\ t^{-\nu_X/2} e^{-\sigma_0 t} & (t\to\infty). \end{cases}$$

散乱公式における, 高・低エネルギー極限での主要項が以下の様に決定される.

定理 3.16. (i) 高エネルギー極限 $\kappa\to\infty$ に対して, 以下の漸近展開が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0^{(-)}(\kappa)^*\varphi(x) &\simeq (2\pi)^{-1/2}\mathcal{J}(x)^{-1/2} r(x)^{-(n-1)/2} \\ &\quad\times \left\{ e^{+i\kappa r(x)} e^{-i(n-1)\pi/2}\varphi(-\hat{x}) + e^{-i\kappa r(x)}\varphi(\hat{x}) \right\} + o(1). \end{aligned}$$

(ii) 低エネルギー極限 $\kappa\downarrow 0$ に対して, 以下の漸近展開が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0^{(-)}(\kappa)^*\varphi(x) &\simeq (2\pi)^{-1/2}\mathcal{J}(x)^{-1/2} r(x)^{-(n-1)/2} \\ &\quad\times \left\{ e^{+i\kappa r(x)} e^{-i(\nu_X-1)\pi/2}(\mathcal{D}_0\varphi)(\hat{x}) + e^{-i\kappa r(x)}\varphi(\hat{x}) \right\} + o(1). \end{aligned}$$

3.5 応用

非コンパクト型対称空間上の Laplacian に対する散乱理論を応用することで, Strichartz [7] により予想された, Laplacian に付随するスペクトル射影作用素の像の特徴付け ([7, Conjecture 4.6]) を証明することができる.

$u \in L^2(X)$ に対して,

$$\mathcal{P}_\tau u(x) = \tau^{l-1}\int_{S(\mathfrak{a}_+^*)\times B} e^{(i\tau\lambda_0+\rho)(A(x,b))}\mathcal{F}u(\tau\lambda_0, b)|\boldsymbol{c}(\tau\lambda_0)|^{-2} d\sigma(\lambda_0) db$$

と定義する. この時, Fourier 反転公式により

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{P}_\tau u(x) d\tau.$$

さらに, 殆ど至る所の $\tau \in \mathbb{R}_+$ に対して, $\mathcal{P}_\tau u \in C^\infty(X)$ かつ

$$(-\Delta_X)\mathcal{P}_\tau u = (\tau^2 + \sigma_0)\mathcal{P}_\tau u.$$

そこで, Banach 空間 $\mathcal{E}^2_{\mathbb{R}_+}(X)$ を以下で定義する.

$$\mathcal{E}^2_{\mathbb{R}_+}(X) = \{u_\tau(x) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathcal{B}^*_X); (-\Delta_X)\mathcal{P}_\tau u = (\tau^2 + \sigma_0)\mathcal{P}_\tau u \quad a.e.\ \tau \in \mathbb{R}_+\}.$$

以下の定理が, 予想 [7, Conjecture 4.6] に対する肯定的な解答を与える.

定理 3.17. (i) ある正定数 C が存在して, 任意の $u \in L^2(X)$ に対して以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} C^{-1}\|u\|^2_{L^2(X)} &\leqslant \sup_{R>1} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{R} \int_{B(o,R)} |\mathcal{P}_\tau u(x)|^2 dx d\tau \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}_+} \sup_{R>1} \frac{1}{R} \int_{B(o,R)} |\mathcal{P}_\tau u(x)|^2 dx d\tau \leqslant C\|u\|^2_{L^2(X)}. \end{aligned}$$

さらに,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{R} \int_{B(o,R)} |\mathcal{P}_\tau u(x)|^2 dx d\tau = \pi^{-1}\|u\|^2_{L^2(X)}.$$

(ii) 線形写像 $\mathcal{P}. : L^2(X) \to \mathcal{E}^2_{\mathbb{R}_+}(X)$ は *Banach* 空間の間の線形同型を与える.

参考文献

[1] S. Agmon, *On the spectral theory of the Laplacian on noncompact hyperbolic manifolds*, Journées "Équations aux derivées partielles" (Saint Jean de Monts, 1987), École Polytech., Palaiseau, 1987, pp. Exp. No. XVII, 16.

[2] S. Agmon and L. Hörmander, *Asymptotic properties of solutions of differential equations with simple characteristics*, J. Analyse Math. **30** (1976), 1–38.

[3] S. Helgason, "Geometric analysis on symmetric spaces", Mathematical Surveys and Monographs, vol. 39, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[4] P. D. Hislop, *The geometry and spectra of hyperbolic manifolds*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **104** (1994), no. 4, 715–776. Spectral and inverse spectral theory (Bangalore, 1993).

[5] H. Isozaki and Y. Kurylev, *Spectral theory and inverse problems on asymptotically hyperbolic manifolds*, Spectral and scattering theory and related topics, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B16, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2010, pp. 29–73.

[6] R. Mazzeo and A. Vasy, *Scattering theory on* $\mathrm{SL}(3)/\mathrm{SO}(3)$*: connections with quantum 3-body scattering*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **94** (2007), no. 3, 545–593.

[7] R. S. Strichartz, *Harmonic analysis as spectral theory of Laplacians*, J. Funct. Anal. **87** (1989), no. 1, 51–148.

第52回実函数論・函数解析学合同シンポジウム
参加者名簿

所属	**参加者 65 名**
北海学園大学	山本隆範
北海道大学	梅田耕平
岩手医科大学	飯田安保
茨城大学	荷見守助, 中井英一, 平澤剛
筑波大学	磯崎洋
東京理科大学	宮島静雄, 岡沢登, 渡邉昇, 柳田昌宏, 横田智巳, 原利英, 吉井健太郎
千葉大学	渚勝, 縄田紀夫
城西大学	山口博
東京大学	寺澤祐高, 森真樹, 国定友隆
首都大学東京	岡田正巳, 澤野嘉宏
お茶の水女子大学	吉田裕亮
学習院大学	中野史彦
東洋大学	山崎丈明
慶應大学	河添健
東邦大学	高橋眞映
工学院大学	春日一浩
中央大学	小林良和, 野井貴弘
日本大学	松岡勝男
青山学院大学	松本裕行, 西山享, 谷口健二, 林達也, 池田亜端沙, 本多雄介
神奈川大学	山崎教昭
神奈川工科大学	服部元史
東海大学	和泉澤正隆
新潟大学	泉池敬司, 三浦毅
金沢大学	佐藤秀一
信州大学	高木啓行, 大野博道
静岡大学	田中直樹, 関根義浩
同志社大学	新國裕昭
関西学院大学	示野信一
奈良女子大学	森藤紳哉
大阪大学	内田素夫
大阪教育大学	片山良一, 貞末岳
神戸大学	足立匡義
岡山大学	梶原毅
広島大学	下村哲, 松本敏隆
広島修道大学	和田涼子
近畿大学	伊藤昭夫
島根大学	内山充, 瀬戸道生
愛媛大学	伊藤宏
九州大学	増田俊彦, 渋川元樹
その他	松浦孝俊