調和移植とその関数不等式への応用

佐野 めぐみ (広島大学/東北大学)

2022 年 3 月 28 日 (月)　日本数学会春季年会
関数解析学分科会 @ 埼玉大学 (オンライン開催)

本研究の一部は高橋太氏 (大阪市立大学) との共同研究に基づく.

講演の流れ

- 調和移植（Harmonic transplantation）

- 調和移植の関数不等式への応用
  - Hardy 不等式
  - Sobolev 不等式

- 半空間上での Hardy 不等式の改良と臨界 Hardy 不等式

§1.1 調和移植（Harmonic transplantation）

$B \subset \mathbb{R}^N$ を単位球, $\Omega\,(\subset \mathbb{R}^N)$ を領域, $a \in \Omega$, $N \geq 2$, $1 < p \leq N$,
$W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\nabla\cdot\|_{L^p(\Omega)}}$, $G = G_{\Omega,a}$ は以下の方程式の解とする.

$$\begin{cases} -\Delta_p G_{\Omega,a} = \delta_a & \text{in } \Omega, \\ G_{\Omega,a} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

ただし $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$.

B 上の球対称な関数 v に対して, Ω 上の関数 u を以下で定義する.

調和移植 (Ref. Hersch, 1969)

$$\text{(H.T.)} \quad u(y) = v(|x|), \text{ ただし } G_{\Omega,a}(y) = G_{B,O}(|x|).$$

(Cf. リーマンの写像定理)

§1.1 調和移植の性質

(H.T.) $u(y) = v(|x|)$, ただし $G_{\Omega,a}(y) = G_{B,O}(|x|)$.

命題２（勾配の L^p ノルム保存）

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^p(B)} \quad \text{が成立．}$$

$\boxed{\text{証明}}$ $(p < N)$ $G = G_{\Omega,a}$ と略記し，$y \in \Omega$ に対して

$$(|x| =)\, t = h(y) = (G_{B,O})^{-1}(G(y)) = \left[\frac{N-p}{p-1} |\mathbb{S}^{N-1}|^{\frac{1}{p-1}} G(y) + 1 \right]^{-\frac{p-1}{N-p}} \leq 1$$

とおくと，(H.T.) は $u(y) = v(h(y)) = v(t)$ と書ける．また

$$(*) \quad |\nabla h| = h^{\frac{N-1}{p-1}} |\mathbb{S}^{N-1}|^{\frac{1}{p-1}} |\nabla G|$$

が成立する．

§1.1 調和移植の性質

(H.T.) $u(y) = v(|x|)$, ただし $G_{\Omega,a}(y) = G_{B,O}(|x|)$.

命題２（勾配の L^p ノルム保存）

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^p(B)}$$ が成立．

証明 $(p < N)$ $G = G_{\Omega,a}$ と略記し，$y \in \Omega$ に対して

$$(|x| =)\, t = h(y) = (G_{B,O})^{-1}(G(y)) = \left[\frac{N-p}{p-1} |\mathbb{S}^{N-1}|^{\frac{1}{p-1}} G(y) + 1 \right]^{-\frac{p-1}{N-p}} \leq 1$$

とおくと，(H.T.) は $u(y) = v(h(y)) = v(t)$ と書ける. また

$$(*) \quad |\nabla h| = h^{\frac{N-1}{p-1}} |\mathbb{S}^{N-1}|^{\frac{1}{p-1}} |\nabla G|$$

が成立する．

§1.1 命題 2 の証明の続き

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^p &= \int_\Omega |v'(h(y))|^p |\nabla h(y)|^{p-1} |\nabla h(y)|\, dy \\
&\overset{\text{coarea formula}}{=} \int_0^1 \left[\int_{[h=t]} |v'(h(y))|^p |\nabla h(y)|^{p-1}\, d\mathcal{H}^{N-1}(y) \right] dt \\
&\overset{(*)}{=} \int_0^1 |\mathbb{S}^{N-1}|\, t^{N-1} |v'(t)|^p \left[\int_{[h=t]} |\nabla G(y)|^{p-1}\, d\mathcal{H}^{N-1}(y) \right] dt \\
&\overset{\text{Claim}}{=} \int_0^1 |\mathbb{S}^{N-1}|\, t^{N-1} |v'(t)|^p\, dt = \int_B |\nabla v|^p. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Claim

任意の $t \in [0, \infty)$ に対して, $\displaystyle\int_{[G=t]} |\nabla G(y)|^{p-1}\, d\mathcal{H}^{N-1}(y) = 1$ が成立.

§1.1 命題 2 の証明の続き

$$\int_\Omega |\nabla u|^p = \int_\Omega |v'(h(y))|^p |\nabla h(y)|^{p-1} |\nabla h(y)|\, dy$$

$$\overset{\text{coarea formula}}{=} \int_0^1 \left[\int_{[h=t]} |v'(h(y))|^p |\nabla h(y)|^{p-1}\, d\mathcal{H}^{N-1}(y) \right] dt$$

$$\overset{(*)}{=} \int_0^1 |\mathbb{S}^{N-1}|\, t^{N-1} |v'(t)|^p \left[\int_{[h=t]} |\nabla G(y)|^{p-1}\, d\mathcal{H}^{N-1}(y) \right] dt$$

$$\overset{\text{Claim}}{=} \int_0^1 |\mathbb{S}^{N-1}|\, t^{N-1} |v'(t)|^p\, dt = \int_B |\nabla v|^p. \quad \square$$

Claim

任意の $t \in [0, \infty)$ に対して, $\displaystyle\int_{[G=t]} |\nabla G(y)|^{p-1}\, d\mathcal{H}^{N-1}(y) = 1$ が成立.

§1.1 命題２の証明の続き

Claim

任意の $t \in [0, \infty)$ に対して，$\displaystyle\int_{[G=t]} |\nabla G(y)|^{p-1}\, d\mathcal{H}^{N-1}(y) = 1$ が成立.

証明　$G = G_{\Omega,a}$ は任意のテスト関数 h に対して以下を満たす.

$$\int_\Omega |\nabla G(y)|^{p-2} \nabla G(y) \cdot \nabla h(y)\, dy = h(a)$$

$h = \min\{t, G\}$ とすると，任意の $t > 0$ に対して以下が成立する.

$$\left(\int_0^t \int_{[G=s]} |\nabla G(y)|^{p-1}\, d\mathcal{H}^{N-1}(y)\, ds = \right) \int_{[G<t]} |\nabla G(y)|^p\, dy = t$$

両辺を t で微分することにより，Claim を得る.　□

§1.1 命題２の証明の続き

Claim

任意の $t \in [0,\infty)$ に対して，$\displaystyle\int_{[G=t]} |\nabla G(y)|^{p-1}\, d\mathcal{H}^{N-1}(y) = 1$ が成立.

$\boxed{\text{証明}}$ $G = G_{\Omega,a}$ は任意のテスト関数 h に対して以下を満たす.

$$\int_{\Omega} |\nabla G(y)|^{p-2}\nabla G(y)\cdot\nabla h(y)\, dy = h(a)$$

h =min$\{t, G\}$ とすると，任意の $t>0$ に対して以下が成立する.

$$\left(\int_0^t \int_{[G=s]} |\nabla G(y)|^{p-1}\, d\mathcal{H}^{N-1}(y)\, ds =\right) \int_{[G<t]} |\nabla G(y)|^{p}\, dy = t$$

両辺を t で微分することにより，Claim を得る. $\square$

§1.2 メビウス変換 (Möbius transformation)

定義４（メビウス変換）

$O(N)$ は N 次元の直交群とし，$b \in \mathbb{R}^N, \lambda > 0, R \in O(N)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
T_b(z) &= z + b \quad \text{(translation)},\\
S_\lambda(z) &= \lambda z \quad \text{(scaling)},\\
R(z) &= Rz \quad \text{(rotation)},\\
J(z) &= z^* = \frac{z}{|z|^2} \quad \text{(reflection)}
\end{aligned}
$$

とおく．T_b, S_λ, R, J の有限回の合成で得られる変換 $M : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を “メビウス変換” と呼ぶ．

$$
(M.T.) \quad (M^\# f)(z) = |\det M'(z)|^{\frac{N-p}{Np}} f(M(z)), \quad z \in \mathbb{R}^N.
$$

§1.2 (M.T.) の性質

$$(M.T.) \quad (M^{\#} f)(z) = |\det M'(z)|^{\frac{N-p}{Np}} f(M(z)), \quad z \in \mathbb{R}^N.$$

注意 7

$$(T_b^{\#} f)(z) = f(z+b),$$

$$(S_\lambda^{\#} f)(z) = \lambda^{\frac{N-p}{p}} f(\lambda z),$$

$$(R^{\#} f)(z) = f(Rz),$$

$$(J^{\#} f)(z) = |z|^{\frac{2}{p}(p-N)} f\left(\frac{z}{|z|^2}\right).$$

命題 6 （勾配の L^p ノルム保存）

任意の関数 $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ に対して,

$$\|\nabla(M^{\#} f)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$ (M に J が含まれている場合は $p = 2, N$ のみ)

§1.2 (M.T.) と (H.T.)（注意８）

$p = N$ で, B と $\Omega = B_R \subset \mathbb{R}^N$ の場合

(H.T.) $u(|y|) = v(|x|)$, ただし $G_{B_R,O}(|y|) = G_{B,O}(|x|)$,

すなわち $\log \dfrac{R}{|y|} = \log \dfrac{1}{|x|}$.

(M.T.) $(M^\# f)(y) = f(x)$, ただし $x = M(y) = \dfrac{y}{R}$.

$p < N$ で, B と $\Omega = B_R \subset \mathbb{R}^N$ の場合

(H.T.) $u(|y|) = v(|x|)$, ただし $G_{B_R,O}(|y|) = G_{B,O}(|x|)$,

すなわち $|y|^{-\frac{N-p}{p-1}} - R^{-\frac{N-p}{p-1}} = |x|^{-\frac{N-p}{p-1}} - 1$.

(M.T.) $(M^\# f)(y) = R^{-\frac{N-p}{p}} f(x)$, ただし $x = M(y) = \dfrac{y}{R}$.

§2 調和移植の関数不等式への応用

調和移植 (再掲)

$$\text{(H.T.)} \quad u(y) = v(|x|), \text{ ただし } G_{\Omega,a}(y) = G_{B,O}(|x|).$$

調和移植を「(領域・作用素・次元等がそれぞれ) 違う二つの Green 関数 $G_{\Omega,a}$ を繋げる変換」と解釈する.

調和移植（解釈を広げたもの）

(H.T.) $u(y) = v(x)(= w(|z|))$, ただし $G_{\Omega_1,a_1}(y)(= G_{B,O}(|z|)) = \tilde{G}_{\Omega_2,a_2}(x)$.

$\boxed{\text{Ref.}}$ Moser, 1971, [Flucher, 1992, Csató-Roy, 2015], Bandle-Brilland-Flucher, 1998, Zographopoulous, 2010, Horiuchi-Kumlin, 2012, S.-Takahashi, 2017(§2.3), Ioku, 2019(§2.1 $p \nearrow N$), S., 2020(§2.2 $N \nearrow \infty$), S., arXiv, 2020($p \nearrow N/2$) etc.

§2.1 球上での Hardy 不等式の改良とその極限形について：$p \nearrow N$

$p < N$ とし，以下の調和移植を考える．

(H.T.) $u(|x|) = v(|y|)$, ただし $G_{\mathbb{R}^N,O}(|x|) = G_{B,O}(|y|)$

(Hardy 不等式) $$\left(\frac{N-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p}\,dx \le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,dx$$

$$\| \qquad \downarrow \qquad \|$$

(改良型) $$\left(\frac{N-p}{p}\right)^p \int_B \frac{|v|^p}{|y|^p\left(1-|y|^{\frac{N-p}{p-1}}\right)^p}\,dy \le \int_B |\nabla v|^p\,dy$$

$1 - X^{\varepsilon} = \varepsilon \log \frac{1}{X} + o(\varepsilon)\,(\varepsilon \to 0)$ を用いると，改良型 Hardy 不等式の $p \nearrow N$ の極限形として以下の臨界 Hardy 不等式を得る．

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_B \frac{|v|^N}{|y|^N\left(\log\frac{1}{|y|}\right)^N}\,dy \le \int_B |\nabla v|^N\,dy$$

§2.1 球上での Hardy 不等式の改良とその極限形について：$p \nearrow N$

$p < N$ とし，以下の調和移植を考える．

(H.T.) $u(|x|) = v(|y|)$, ただし $G_{\mathbb{R}^N,O}(|x|) = G_{B,O}(|y|)$

(Hardy 不等式)
$$\left(\frac{N-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p}\,dx \le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,dx$$

$$\| \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \|$$

(改良型)
$$\left(\frac{N-p}{p}\right)^p \int_B \frac{|v|^p}{|y|^p\left(1-|y|^{\frac{N-p}{p-1}}\right)^p}\,dy \le \int_B |\nabla v|^p\,dy$$

$1 - X^\varepsilon = \varepsilon \log \frac{1}{X} + o(\varepsilon)\,(\varepsilon \to 0)$ を用いると，改良型 Hardy 不等式の $p \nearrow N$ の極限形として以下の臨界 Hardy 不等式を得る．

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_B \frac{|v|^N}{|y|^N\left(\log\frac{1}{|y|}\right)^N}\,dy \le \int_B |\nabla v|^N\,dy$$

§2.2 Sobolev 不等式の次元無限大形について：$N \nearrow \infty$

$1 < p < m < N$ とし，以下の調和移植を考える．

(H.T.) $u(|x|) = v(|y|)$, ただし $G_{\mathbb{R}^N,O}(|x|) = G_{\mathbb{R}^m,O}(|y|)$

(N 次元 Sobolev 不等式)

$$S_{N,p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{Np}{N-p}}\,dx\right)^{\frac{N-p}{N}} \le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,dx$$

$$\| \qquad \downarrow \qquad \|$$

$$S_{N,p}\left(\frac{|\mathbb{S}^{m-1}|}{|\mathbb{S}^{N-1}|}\right)^{\frac{p}{N}}\left(\frac{m-p}{N-p}\right)^{p-\frac{p}{N}}\left(\int_{\mathbb{R}^m} \frac{|v|^{\frac{Np}{N-p}}}{|y|^{\frac{N-m}{N-p}p}}\,dy\right)^{\frac{N-p}{N}} \le \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla v|^p\,dy$$

$N \nearrow \infty$ の極限形として以下の (m 次元) Hardy 不等式を得る．

$$\left(\frac{m-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|v|^p}{|y|^p}\,dy \le \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla v|^p\,dy$$

注意 9 (注意 1) Hardy 不等式から Sobolev 不等式の導出．

§2.2 Sobolev 不等式の次元無限大形について：$N \nearrow \infty$

$1 < p < m < N$ とし，以下の調和移植を考える．

$$\boxed{\text{(H.T.)} \quad u(|x|) = v(|y|),\ \text{ただし}\ G_{\mathbb{R}^N, O}(|x|) = G_{\mathbb{R}^m, O}(|y|)}$$

(N 次元 Sobolev 不等式)
$$S_{N,p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{Np}{N-p}}\, dx \right)^{\frac{N-p}{N}} \le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\, dx$$

$$\| \qquad \downarrow \qquad \|$$

$$S_{N,p} \left(\frac{|\mathbb{S}^{m-1}|}{|\mathbb{S}^{N-1}|} \right)^{\frac{p}{N}} \left(\frac{m-p}{N-p} \right)^{p-\frac{p}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \frac{|v|^{\frac{Np}{N-p}}}{|y|^{\frac{N-m}{N-p}p}}\, dy \right)^{\frac{N-p}{N}} \le \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla v|^p\, dy$$

$N \nearrow \infty$ の極限形として以下の (m 次元) Hardy 不等式を得る．

$$\left(\frac{m-p}{p} \right)^p \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|v|^p}{|y|^p}\, dy \le \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla v|^p\, dy$$

$\boxed{\text{注意９ (注意１)}}$ Hardy 不等式から Sobolev 不等式の導出．

§2.2 Sobolev 不等式の次元無限大形について：$N \nearrow \infty$

$1 < p < m < N$ とし，以下の調和移植を考える.

$$\boxed{\text{(H.T.)} \quad u(|x|) = v(|y|),\ \text{ただし}\ G_{\mathbb{R}^N,O}(|x|) = G_{\mathbb{R}^m,O}(|y|)}$$

$$(N\text{ 次元 Sobolev 不等式}) \quad S_{N,p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{Np}{N-p}}\, dx \right)^{\frac{N-p}{N}} \le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\, dx$$

$$\| \qquad \downarrow \qquad \|$$

$$S_{N,p} \left(\frac{|\mathbb{S}^{m-1}|}{|\mathbb{S}^{N-1}|} \right)^{\frac{p}{N}} \left(\frac{m-p}{N-p} \right)^{p-\frac{p}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \frac{|v|^{\frac{Np}{N-p}}}{|y|^{\frac{N-m}{N-p}p}}\, dy \right)^{\frac{N-p}{N}} \le \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla v|^p\, dy$$

$N \nearrow \infty$ の極限形として以下の (m 次元) Hardy 不等式を得る.

$$\left(\frac{m-p}{p} \right)^p \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|v|^p}{|y|^p}\, dy \le \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla v|^p\, dy$$

§2.2 Sobolev 不等式の次元無限大形について：$N \nearrow \infty$

実際に，$\Gamma(t) \sim \sqrt{2\pi}\, t^{t-\frac{1}{2}}\, e^{-t}$ $(t \to \infty)$ と $|\mathbb{S}^{N-1}| = \dfrac{N\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)}$ より，

$$S_{N,p}\left(\frac{|\mathbb{S}^{m-1}|}{|\mathbb{S}^{N-1}|}\right)^{\frac{p}{N}}\left(\frac{m-p}{N-p}\right)^{p-\frac{p}{N}}$$

$$= \pi^{\frac{p}{2}} N\left(\frac{N-p}{p-1}\right)^{p-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{N}{p}\right)\Gamma\left(\frac{N}{p'}+1\right)}{\Gamma(N)\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)}\right)^{\frac{p}{N}}\left(\frac{m\pi^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)}{N\pi^{\frac{N}{2}}\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)}\right)^{\frac{p}{N}}\left(\frac{m-p}{N-p}\right)^{p-\frac{p}{N}}$$

$$\sim \frac{(m-p)^p}{(p-1)^{p-1}}\left(\frac{\left(\frac{N}{p}\right)^{\frac{N}{p}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{N}{p}}\left(\frac{N}{p'}+1\right)^{\frac{N}{p'}+1-\frac{1}{2}} e^{-\frac{N}{p'}-1}}{N^{N-\frac{1}{2}}e^{-N}}\right)^{\frac{p}{N}}$$

$$\sim \frac{(m-p)^p}{(p-1)^{p-1}}\cdot\frac{1}{N^p}\cdot\frac{N}{p}\left(\frac{p-1}{p}N+1\right)^{p-1} \sim \left(\frac{m-p}{p}\right)^p \quad (N \nearrow \infty)$$

となる．

§2.3 Hardy 不等式と臨界 Hardy 不等式の同値性について

$1 < p = N < m$ とし，以下の調和移植を考える．

(H.T.) $\quad u(|x|) = v(|y|)$, ただし $G_{\mathbb{R}^m,O}(|x|) = G_{B,O}(|y|),\ B \subset \mathbb{R}^N$

(m 次元 Hardy 不等式) $$\left(\frac{m-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|u|^p}{|x|^p}\,dx \le \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla u|^p\,dx$$

$$\qquad\qquad\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

(臨界 Hardy 不等式) $$\left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_B \frac{|v|^N}{|y|^N\left(\log\frac{1}{|y|}\right)^N}\,dy \le \int_B |\nabla v|^N\,dy$$

注意 10 上記の (H.T.) は以下のようにも書くこともできる．

$$\left(\frac{p-1}{m-p}\right)^{\frac{p-1}{p}} |\mathbb{S}^{m-1}|^{-\frac{1}{p}} |x|^{-\frac{m-p}{p}} = |\mathbb{S}^{N-1}|^{-\frac{1}{N}} \left(\log\frac{1}{|y|}\right)^{\frac{N-1}{N}} \quad \text{(Virtual minimizers)}$$

§2.3 Hardy 不等式と臨界 Hardy 不等式の同値性について

$1 < p = N < m$ とし，以下の調和移植を考える．

(H.T.) $\quad u(|x|) = v(|y|)$, ただし $G_{\mathbb{R}^m,O}(|x|) = G_{B,O}(|y|),\ \ B \subset \mathbb{R}^N$

(m 次元 Hardy 不等式) $$\left(\frac{m-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|u|^p}{|x|^p}\,dx \le \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla u|^p\,dx$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \end{array}$$

(臨界 Hardy 不等式) $$\left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_B \frac{|v|^N}{|y|^N \left(\log \frac{1}{|y|}\right)^N}\,dy \le \int_B |\nabla v|^N\,dy$$

注意 10 上記の (H.T.) は以下のようにに書くこともできる．

$$\left(\frac{p-1}{m-p}\right)^{\frac{p-1}{p}} |\mathbb{S}^{m-1}|^{-\frac{1}{p}} |x|^{-\frac{m-p}{p}} = |\mathbb{S}^{N-1}|^{-\frac{1}{N}} \left(\log \frac{1}{|y|}\right)^{\frac{N-1}{N}}$$ (Virtual minimizers)

§3 半空間上での Hardy 不等式の改良と臨界 Hardy 不等式

§2.1 で扱った内容を半空間 $\mathbb{R}^N_+$ 上で議論したい．
以下，$z = (x, y) \in \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty) = \mathbb{R}^N_+$, $1 < p < N$ とする．

難点 半空間上での Green 関数：

$$G_{\mathbb{R}^N_+,(0,1)}(x, y) = \frac{p-1}{N-p} |\mathbb{S}^{N-1}|^{-\frac{1}{p-1}} \left[\left(|x|^2 + (1-y)^2 \right)^{-\frac{N-p}{2(p-1)}} - \psi_p(x, y) \right]$$

において，$p = 2$ のとき $\psi_2(x, y) = \left(|x|^2 + (1+y)^2 \right)^{-\frac{N-2}{2}}$ となるが，一般に $\psi_p \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+)$ の具体形が分からない．

(★) 少し変形した調和移植

$u(z) = v(\tilde{z})$, ただし $G_{\mathbb{R}^N,O}(\tilde{z}) = U_p(z)$

$$:= \frac{p-1}{N-p} |\mathbb{S}^{N-1}|^{-\frac{1}{p-1}} \left[\left(|x|^2 + (1-y)^2 \right)^{-\frac{N-p}{2(p-1)}} - \left(|x|^2 + (1+y)^2 \right)^{-\frac{N-p}{2(p-1)}} \right]$$

§3 半空間上での Hardy 不等式の改良と臨界 Hardy 不等式

§2.1 で扱った内容を半空間 $\mathbb{R}^N_+$ 上で議論したい．
以下，$z = (x, y) \in \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty) = \mathbb{R}^N_+$, $1 < p < N$ とする．

$\boxed{\text{難点}}$ 半空間上での Green 関数：

$$G_{\mathbb{R}^N_+,(0,1)}(x, y) = \frac{p-1}{N-p}|\mathbb{S}^{N-1}|^{-\frac{1}{p-1}} \left[\left(|x|^2 + (1-y)^2 \right)^{-\frac{N-p}{2(p-1)}} - \psi_p(x, y) \right]$$

において，$p = 2$ のとき $\psi_2(x, y) = \left(|x|^2 + (1+y)^2 \right)^{-\frac{N-2}{2}}$ となるが，一般に $\psi_p \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+)$ の具体形が分からない．

(★) 少し変形した調和移植

$u(z) = v(\tilde{z})$, ただし $G_{\mathbb{R}^N,O}(\tilde{z}) = U_p(z)$

$$:= \frac{p-1}{N-p}|\mathbb{S}^{N-1}|^{-\frac{1}{p-1}} \left[\left(|x|^2 + (1-y)^2 \right)^{-\frac{N-p}{2(p-1)}} - \left(|x|^2 + (1+y)^2 \right)^{-\frac{N-p}{2(p-1)}} \right]$$

§3 半空間上での Hardy 不等式の改良と臨界 Hardy 不等式

§2.1 で扱った内容を半空間 $\mathbb{R}^N_+$ 上で議論したい．
以下，$z = (x, y) \in \mathbb{R}^{N-1} \times (0, \infty) = \mathbb{R}^N_+, 1 < p < N$ とする．

$\boxed{\text{難点}}$ 半空間上での Green 関数：

$$G_{\mathbb{R}^N_+,(0,1)}(x, y) = \frac{p-1}{N-p} |\mathbb{S}^{N-1}|^{-\frac{1}{p-1}} \left[\left(|x|^2 + (1-y)^2 \right)^{-\frac{N-p}{2(p-1)}} - \psi_p(x, y) \right]$$

において，$p = 2$ のとき $\psi_2(x, y) = \left(|x|^2 + (1+y)^2 \right)^{-\frac{N-2}{2}}$ となるが，一般に $\psi_p \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+)$ の具体形が分からない．

(★) 少し変形した調和移植

$u(z) = v(\tilde{z})$, ただし $G_{\mathbb{R}^N,O}(\tilde{z}) = U_p(z)$

$$:= \frac{p-1}{N-p} |\mathbb{S}^{N-1}|^{-\frac{1}{p-1}} \left[\left(|x|^2 + (1-y)^2 \right)^{-\frac{N-p}{2(p-1)}} - \left(|x|^2 + (1+y)^2 \right)^{-\frac{N-p}{2(p-1)}} \right]$$

定理 11 (S.-Takahashi, 2022)

$2 \le p < N$ とする. このとき以下の改良型 Hardy 不等式

$$\left(\frac{N-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{V_p(x,y)^{\frac{p}{2}}}{(|x|^2+(1-y)^2)^{\frac{p}{2}}} |u(x,y)|^p\, dxdy \le \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u(x,y)|^p\, dxdy$$

が, $u(z) = u\left(U_p(z)\right)$ を満たす任意の関数 $u \in \dot{W}^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ に対して成立する. ただし

$$X = \frac{|x|^2+(1-y)^2}{|x|^2+(1+y)^2} \in [0,1),$$

$$V_p(x,y) = \frac{1 + X^{\frac{N-1}{p-1}} - 2X^{\frac{N-p}{2(p-1)}}\left(|x|^2+(1+y)^2\right)^{-1}(|x|^2+y^2-1)}{\left[1 - X^{\frac{N-p}{2(p-1)}}\right]^2}$$

とする. また定数 $(\frac{N-p}{p})^p$ は最良で達成されない.

§3.1 主結果

定理 11 (S.-Takahashi, 2022)

$2 \le p < N$ とする. このとき以下の改良型 Hardy 不等式

$$\left(\frac{N-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{V_p(x,y)^{\frac{p}{2}}}{(|x|^2+(1-y)^2)^{\frac{p}{2}}} |u(x,y)|^p \, dxdy \le \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u(x,y)|^p \, dxdy$$

が, $u(z) = u\left(U_p(z)\right)$ を満たす任意の関数 $u \in \dot{W}^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ に対して成立する. ただし

$$X = \frac{|x|^2+(1-y)^2}{|x|^2+(1+y)^2} \in [0,1),$$

$$V_p(x,y) = \frac{1 + X^{\frac{N-1}{p-1}} - 2X^{\frac{N-p}{2(p-1)}} \left(|x|^2+(1+y)^2\right)^{-1} (|x|^2+y^2-1)}{\left[1 - X^{\frac{N-p}{2(p-1)}}\right]^2} \ge 1$$

とする． また定数 $(\frac{N-p}{p})^p$ は最良で達成されない．

§3.1 主結果

定理１の改良型 Hardy 不等式は極限 $p \nearrow N$ をとることができる．

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{N-p}{p}\right)^p \frac{V_p(x,y)^{\frac{p}{2}}}{(|x|^2+(1-y)^2)^{\frac{p}{2}}} \\
&\sim \left(\frac{N-p}{p}\right)^p \frac{\left\{1+X-2\left(|x|^2+(y+1)^2\right)^{-1}(|x|^2+y^2-1)\right\}^{\frac{N}{2}}}{(|x|^2+(1-y)^2)^{\frac{N}{2}}\left[\frac{N-p}{2(p-1)}\log\frac{1}{X}\right]^p} \\
&\sim \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \frac{1}{(|x|^2+(1-y)^2)^{\frac{N}{2}}\left(\frac{|x|^2+(1+y)^2}{4}\right)^{\frac{N}{2}}\left(\log\sqrt{\frac{|x|^2+(1+y)^2}{|x|^2+(1-y)^2}}\right)^N} \quad (p \nearrow N).
\end{aligned}
$$

定理 14 (S.-Takahashi, 2022)

$N \geq 2$ とする．このとき臨界 Hardy 不等式

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{|u(x,y)|^N \, dxdy}{(|x|^2+(1-y)^2)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{|x|^2+(1+y)^2}{4}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\log \sqrt{\frac{|x|^2+(1+y)^2}{|x|^2+(1-y)^2}}\right)^N} \leq \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u(x,y)|^N \, dxdy$$

が任意の関数 $u \in \dot{W}^{1,N}_0(\mathbb{R}^N_+)$ に対して成立し，$(\frac{N-1}{N})^N$ は最良で達成されない．

注意 15（ポテンシャル関数について）

$$V_N(x,y) := \frac{1}{(|x|^2+(1-y)^2)\left(\frac{|x|^2+(1+y)^2}{4}\right)\left(\log \sqrt{\frac{|x|^2+(1+y)^2}{|x|^2+(1-y)^2}}\right)^2}$$

$$V_N(x,y)^{\frac{N}{2}} \sim \left(|x|^2+(1-y)^2\right)^{-\frac{N}{2}} \left(\log \frac{2}{\sqrt{|x|^2+(1-y)^2}}\right)^{-N} \quad ((x,y) \to (0,1))$$

$$V_N(x,y)^{\frac{N}{2}} \sim y^{-N} \left(|x|^2+(y-1)^2 \to \infty \text{ or } y \to 0\right)$$

定理 14 (S.-Takahashi, 2022)

$N \geq 2$ とする．このとき臨界 Hardy 不等式

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{|u(x,y)|^N \, dxdy}{(|x|^2+(1-y)^2)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{|x|^2+(1+y)^2}{4}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\log \sqrt{\frac{|x|^2+(1+y)^2}{|x|^2+(1-y)^2}}\right)^N} \leq \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u(x,y)|^N \, dxdy$$

が任意の関数 $u \in \dot{W}^{1,N}_0(\mathbb{R}^N_+)$ に対して成立し，$(\frac{N-1}{N})^N$ は最良で達成されない．

注意 15（ポテンシャル関数について）

$$V_N(x,y) := \frac{1}{(|x|^2+(1-y)^2)\left(\frac{|x|^2+(1+y)^2}{4}\right)\left(\log \sqrt{\frac{|x|^2+(1+y)^2}{|x|^2+(1-y)^2}}\right)^2}$$

$$V_N(x,y)^{\frac{N}{2}} \sim \left(|x|^2+(1-y)^2\right)^{-\frac{N}{2}} \left(\log \frac{2}{\sqrt{|x|^2+(1-y)^2}}\right)^{-N} \quad (\,(x,y) \to (0,1)\,)$$

$$V_N(x,y)^{\frac{N}{2}} \sim y^{-N} \quad \left(|x|^2+(y-1)^2 \to \infty \text{ or } y \to 0\right)$$

§3.2 定理 11 の証明

$$-\Delta_p U_p = \frac{(N-p)(p-2)}{(p-1)^2\, \omega_{N-1}^{\frac{2}{p-1}}} |\nabla U_p|^{p-4} U_p \left[|x|^2 + (y-1)^2\right]^{-\frac{N-p}{2(p-1)}-1} \left[|x|^2 + (y+1)^2\right]^{-\frac{N-p}{2(p-1)}-1}$$
$$\times \left[N - p + (N+p-2)\frac{(|x|^2 + y^2 - 1)^2}{\{|x|^2 + (y-1)^2\}\{|x|^2 + (y+1)^2\}}\right].$$

補題 16（U_p の優調和性）

$p \geq 2$ ならば，$-\Delta_p U_p \geq 0$ in $\mathbb{R}^N_+ \setminus \{(0,1)\}$.

補題 17（重み付き 1 次元 Hardy 不等式）

任意の球対称関数 $v \in C^1_{c,\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^N)$ に対して，

$$\left(\frac{N-p}{p}\right)^p \int_0^\infty |v(t)|^p t^{N-1-p} F_p\left(G_{\mathbb{R}^N,O}(t)\right) dt \leq \int_0^\infty |v'(t)|^p t^{N-1} F_p\left(G_{\mathbb{R}^N,O}(t)\right) dt$$

が成立する．ただし，$F_p(s) = \int_{[U_p > s]} (-\Delta_p U_p)\, dz$ とする．

§3.2 定理 11 の証明

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u(x,y)|^p \, dxdy \\
&\overset{(\bigstar)}{=} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p \, d\tilde{z} + |\mathbb{S}^{N-1}| \int_0^\infty |v'|^p t^{N-1} F_p\left(G_{\mathbb{R}^N,O}(t)\right) \, dt \\
&> \left(\frac{N-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v|^p}{|\tilde{z}|^p} \, d\tilde{z} \quad \left(\because \text{補題 17 \& Hardy ineq. on } \mathbb{R}^N\right) \\
&\qquad + \left(\frac{N-p}{p}\right)^p |\mathbb{S}^{N-1}| \int_0^\infty |v|^p t^{N-1-p} F_p\left(G_{\mathbb{R}^N,O}(t)\right) \, dt \\
&\overset{(\bigstar)}{=} \left(\frac{N-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{|u(x,y)|^p}{(|x|^2+(1-y)^2)^{\frac{p}{2}}} V_p(x,y)^{\frac{p}{2}} \, dxdy
\end{aligned}
$$

§3.3 定理 14 の証明

$p = N, \Omega = \mathbb{R}^N_+$ の場合の調和移植 (H.T.)：

$$u(z) = v(\tilde{z}), \text{ ただし } |\mathbb{S}^{N-1}|^{-\frac{1}{N-1}} \log \sqrt{\frac{|x|^2 + (1+y)^2}{|x|^2 + (1-y)^2}} = G_{\mathbb{R}^N_+,(0,1)}(z)$$
$$= G_{B,O}(\tilde{z})$$

は，以下のメビウス変換 $\mathbf{B}$ （ケイリー変換）と一致する．

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathbf{B}(x, y) = \left(\frac{2x,\ \ 1 - |x|^2 - y^2}{(1+y)^2 + |x|^2} \right), \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^N_+,\ \tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in B,$$

$$\mathbf{B}(z) = R \circ J \circ T_{(0,1)} \circ S_2 \circ J \circ T_{(0,-1)}(z), \text{ ただし } R = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

§3.3 定理 14 の証明

$$|\mathbf{B}(z)| = \frac{|x|^2 + (1-y)^2}{|x|^2 + (1+y)^2}, \ \det \mathbf{B}'(z) = -\left\{ \frac{2}{(1+y)^2 + |x|^2} \right\}^N .$$

$$\begin{aligned}
&\int_B \frac{|v(\tilde{x}, \tilde{y})|^N}{\{|\tilde{x}|^2 + |\tilde{y}|^2\}^{\frac{N}{2}} \left(\log \frac{1}{\sqrt{|\tilde{x}|^2 + |\tilde{y}|^2}}\right)^N} \, d\,\tilde{x}\, d\,\tilde{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{|u(x,y)|^N}{|\mathbf{B}(x,y)|^{\frac{N}{2}} \left(\log \frac{1}{|\mathbf{B}(x,y)|}\right)^N} |\det \mathbf{B}'(x,y)| \, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{|u(x,y)|^N}{\{|x|^2 + (1-y)^2\}^{\frac{N}{2}} \left\{\frac{|x|^2+(1+y)^2}{4}\right\}^{\frac{N}{2}} \left(\log \sqrt{\frac{|x|^2+(1+y)^2}{|x|^2+(1-y)^2}}\right)^N} \, dxdy.
\end{aligned}$$

§3.3 定理 14 の証明

(B 上での臨界 Hardy 不等式)

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_B \frac{|v|^N}{|\tilde{z}|^N \left(\log \frac{1}{|\tilde{z}|}\right)^N} \, d\tilde{z} \le \int_B |\nabla v|^N \, d\tilde{z}$$

$\|$ $\downarrow$ $\|$ (命題 6)

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{|u(x,y)|^N \, dxdy}{\left(|x|^2+(1-y)^2\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{|x|^2+(1+y)^2}{4}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\log \sqrt{\frac{|x|^2+(1+y)^2}{|x|^2+(1-y)^2}}\right)^N} \le \int_{\mathbb{R}^N_+} |\nabla u(x,y)|^N \, dxdy$$

ご清聴ありがとうございました!!