

Kirchhoff 型準線形波動方程式の大域解について

山崎 多恵子 東京理科大学理工学部

Kirchhoff 型準線形波動方程式に対する初期値境界値問題

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = m(\|\nabla u\|^2)^2 \Delta u(t, x) & x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) & x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0 & x \in \partial\Omega, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

の Sobolev 空間に初期値を持つ大域解の存在について考察する. ここで, $m(\lambda) \in C^1([0, \infty))$ は条件 $\inf_{\lambda \geq 0} m(\lambda) (= m_0) \geq 0$ を満たし, Ω は滑らかでコンパクトな境界を持つ $\mathbb{R}^n$ の領域または $\mathbb{R}^n$ 全体であるものとする. また, 特に断らない限り方程式が退化しないための条件 $m_0 > 0$ を仮定する.

また, H をノルム $\|\cdot\|$ を持つ Hilbert 空間, A を定義域が $\mathcal{D}(A)$ なる H 上の非負自己共役作用素とする. $\gamma \geq 0$ に対し $\mathcal{D}(A^\gamma)$ は A^γ のグラフノルム $\|\cdot\|_\gamma$ を持つ Hilbert 空間となる. また, A^γ の値域を $\mathcal{R}(A^\gamma)$ で表す. このとき,

$$(2) \quad \begin{cases} u''(t) + m(\|A^{1/2}u\|^2)^2 Au(t) = 0 & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \end{cases}$$

も (抽象的) Kirchhoff 型方程式と呼ばれる. ここで, $'$ は t による微分を表す. 特に, $A = -\Delta$, $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ とすると (2) は (1) を表す.

Kirchhoff 型準線形波動方程式は 1876 年に Kirchhoff により, 弦の伸びによる張力の変化を考慮した横断方向の微小振動を表す非線形モデルとして導入された. その後, 非線形項が解の勾配の積分量に依存する準線形双曲型方程式として, 数学的興味からも研究されている.

初期値が実解析的である場合は, Bernstein [6] により一意的な大域解が得られている. その後 D'Ancona-Spagnolo [2] により, m に対する一般的な条件下で一意的な大域解が得られた. Pokhozhaev [26], Nishihara [24] (quasi-analytic), Manfrin [17, 18], Hirose [15] により, 実解析的関数を拡張した空間に属する初期値に対して一意大域解の存在が得られたが, Gevrey 空間では解かれていない.

一方, Sobolev 空間に属する初期値に対する時間大域解の存在については一般的には解かれておらず, また, 解の非存在性に関する結果も全く知られていない. 1 階のエネルギー

$$E(t) := \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right|^2 + M(|\nabla u(t, x)|^2) \right) dx = E(0) \quad \left(M(x) = \int_0^x m(y) dy \right)$$

は保存するが、後で述べるように大域解の存在を保証する高いエネルギー保存量は m が特別の形 $m(x) = (ax + b)^{-1}$ (a, b : 正定数) のとき以外には知られていない. また, 主部の係数は時間のみに依存するので扱いやすいように見えるが, ラプラシアンが非局所的なため, 局所的な半線形波動方程式 $\partial^2 u / \partial t^2 = \Delta u + F(u, \nabla u)$ に比べ, 線形近似との差は悪い時間減衰評価しかもたない. ここでは, Sobolev 空間に属する初期値に対する時間大域解の一意存在及びその性質についての結果を以下に述べる.

1 消散項のない場合

Arosio-Garavaldi [1] は $\mathcal{D}(A^{3/2}) \times \mathcal{D}(A^{1/2})$ に属する初期値に対し局所解が存在し, $3/2$ 階のエネルギーの a priori 評価が得られれば大域解の存在がいえんことを示した.

大域解の存在に関して Ω が有界領域の時は, $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ エネルギーを保つための条件として現れる $m(x) = (ax + b)^{-1}$ (a, b : 正定数) という特殊な形をした場合のみ Pokhozhaev [27] により示されているが, それ以外の時には一般の Sobolev 空間に属する初期値に対しては知られていない.

一方, $\Omega = \mathbb{R}^n$ の時には重み付き Sobolev ノルムが小さい初期値に対して大域解の一意存在がまず 1 次元の時に Greenberg-Hu [12] により得られた. 彼らの手法は以下の通りである. Kirchhoff 型準線形波動方程式の大域解の存在を示すのにあたり困難な点は, Δ の係数 $m(\|\nabla u\|_{L^2}^2)$ が激しく振動する可能性を排除できないことである. $m(\|\nabla u\|_{L^2}^2)$ の時間微分の有界性が示されれば, 2 階のエネルギー $E_2(t) := \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) \right|^2 + |\Delta u(t, x)|^2 \right) dx$ の有界性は簡単に従うので, 大域解の存在がわかる. 彼らは解を 2 つの characteristic wave に分解し, Fourier 変換を用いて, $\left| \frac{d}{dt} m(\|\nabla u\|_{L^2}^2) \right|$ が小さく減衰するクラスで不動点定理を用いることにより, 重み付き Sobolev ノルムが小さい初期値に対して, 大域解の一意存在を示した. さらに, 彼らの結果及び手法を 2 次元以上の場合に D'Ancona-Spagnolo [3, 4, 5] が拡張及び改良し, $\Omega = \mathbb{R}^n$ で重み付き Sobolev ノルムが小さい初期値に対して大域解の存在を示した. また, 1 次元の場合の Greenberg-Hu [12] の結果の改良として Fourier 変換を用いずに characteristic wave を用いて, Rzymowski [29] は初期値の属するクラスを広げ各微分係数が遠方で 0 に近づく $(C^3(\mathbb{R}) \cap W^{3,1}(\mathbb{R})) \times (C^2(\mathbb{R}) \cap W^{2,1}(\mathbb{R}))$ に属する小さい初期値に対して, また Kajitani [16] は $-\Delta$ を変数係数 2 階楕円型作用素に一般化した場合の小さい初期値に対して, 大域解の存在を示した.

以上は $\mathbb{R}^n$ での結果であるが, Racke [28] は D'Ancona-Spagnolo [3, 4, 5] の方法を, Fourier 変換の代わりに一般化された Fourier 変換を用いて外部問題に初めて適用した. その後, Heiming [14] は Racke [28] の結果を改良し, $n \geq 3$ で $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ が星型領域である時, 初期値の一般化された Fourier 変換像がしかるべき重み付き Sobolev 空間に入り, 台が原点から離れていて, その重み付き Sobolev ノルムが小さいという条件の下, 初期値境界値問題が一意大域解を持つことを示した. しかし, 彼らの用いた [3, 4, 5] の方法の直接適用の際には, 一般化された Fourier 変換による初期値の像の微分可能性は不可欠な仮定であり, そのための初期値に対する十分条件として彼らを与えたものは, 実解析性という

強いものである.

我々は, 外部領域を含む領域における Kirchhoff 型準線形波動方程式の Sobolev 空間での大域解の一意存在を示すことを念頭におき, 方程式を抽象的枠組で捉え, 一般化された Fourier 変換は用いず, 抽象 Kirchhoff 型方程式 (2) に対する初期値境界値問題の大域解の存在が対応する線形抽象双曲型方程式

$$(3) \quad \begin{cases} v''(t) + Av(t) = 0 & t \in \mathbb{R}, \\ v(0) = f, v'(0) = iA^{1/2}f \end{cases}$$

の解の減衰評価から従うことを示した.

定理 1. ([35]) H 及び A は先の通りとする. X を $H \cap X$ が H で稠密であるノルム $\|\cdot\|_X$ を持つ Banach 空間, X' を X の双対空間 (ノルム $\|\cdot\|_{X'}$) とする. Z をノルム $\|\cdot\|_Z$ を持つ Banach 空間とし, G_0 を $\mathcal{D}(A) \cap Z$ の部分集合とする. a, d は $0 \leq a \leq 1/2, d > 1$ なる定数とする. ある正定数 C_0 が存在し, 任意の $f \in G_0$ に対し線形抽象双曲型方程式 (3) が $A^a v(t) \in X' (\forall t \in \mathbb{R})$ かつ

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (1 + |t|)^d \|A^a v(t)\|_{X'} \leq C_0 \|f\|_Z$$

をみたす一意解 $v \in \bigcap_{i=0}^2 C^i(\mathbb{R}; \mathcal{D}(A^{1-i/2}))$ を持つものとする. この時, 任意の正数 E_1 に対し 正定数 δ が存在し, 初期値 $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A^{1/2})$ が $A^{1/2}u_0, u_1 \in G_0, A^{1-a}u_0, A^{1/2-a}u_1 \in X, \|A^{1/2}u_0\|^2 + \|u_1\|^2 \leq E_1$ かつ

$$(\|A^{1/2}u_0\|_Z + \|u_1\|_Z)(\|A^{1-a}u_0\|_X + \|A^{1/2-a}u_1\|_X) \leq \delta$$

をみたすとき, 抽象 Kirchhoff 型方程式 (2) は時間大域的一意解 $u \in \bigcap_{i=0}^2 C^i(\mathbb{R}; \mathcal{D}(A^{1-i/2}))$ を持つ.

上記の定理は, 対応する線形抽象双曲型方程式の解のノルムの $d (> 1)$ 次の時間減衰評価から Kirchhoff 型方程式の十分小さい初期値に対する大域解の存在が従うことを示している. $n \geq 4$ の時 $L^p(\mathbb{R}^n)$ に属する初期値に対する線形波動方程式の解は $d > 1$ 次で減衰することはよく知られているので, D'Ancona-Spagnolo [3, 4, 5] による初期値の属する空間とは異なる, 重み付きでない Sobolev 空間で大域解が得られた.

また, 上記の外部問題に線形波動方程式の外部問題に対する Shibata-Tsutsumi [30] の結果を少し精密化したものを用いると, 空間次元 $n \geq 4$ の時の Kirchhoff 型準線形波動方程式に対する外部問題の解の一意存在に関する以下の定理が得られた.

定理 2. ([35]) $n \geq 4$ とし, Ω は滑らかな境界を持つ non-trapping な $\mathbb{R}^n$ の外部領域とする. p を $p > 2(n-1)/(n-3)$ なる任意の実数, q を $1/p + 1/q = 1$ なる実数とする. また $M \geq (n+1)(1/2 - 1/p)$ とする. このとき, ある正定数 δ が存在し, 以下が成立する. Ω 上の線形波動方程式に対する次数 $n+1$ の compatibility condition を満たす初期値 $(u_0, u_1) \in W_{q,0}^{2M+1}(\Omega) \times W_{q,0}^{2M}(\Omega)$ が $\left(\|u_0\|_{W_q^{2M+1}(\Omega)} + \|u_1\|_{W_q^{2M}(\Omega)}\right) \left(\|u_0\|_{W_q^2(\Omega)} + \|u_1\|_{W_q^1(\Omega)}\right) \leq \delta$ をみたせば, Kirchhoff 型準線形波動方程式に対する初期値境界値問題 (1) の大域解 $u \in \bigcap_{i=0}^2 C^i(\mathbb{R}; H^{M+1-i}(\Omega))$ が一意的に存在する.

しかしながら, 3次元空間では, 解の時間減衰が不十分なため, 定理1は適用できない. 主部の係数は解の空間積分量であるため線形近似との差の減衰は空間局所的な波動方程式に比べ悪くなることに注意しておく. そのため, Hilbert空間を $H = L^2(\Omega)$ に限定し, 抽象的 Kirchhoff 型方程式の大域解の存在をより弱い条件下で示した. 定理1は発展方程式的枠組みで通常行われるように, 先に空間変数 x におけるノルムを取り次に時間変数に関してノルムを取っているが, 以下の定理3では先に時間変数に関して積分し, 次に空間変数変数に関する sup norm を取ることによって, 3次元空間における Kirchhoff 型準線形波動方程式の外部問題への応用を可能にした.

定理 3. ([36]) Ω を $\mathbb{R}^n$ 全体 または滑らかな境界を持つ $\mathbb{R}^n$ の領域とする. A を $H = L^2(\Omega)$ 上の非負自己共役作用素とする. $Z \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ をノルム $\|\cdot\|_Z$ を持つ Banach 空間で $Z \cap L^2(\Omega)$ が $L^2(\Omega)$ で稠密であるものとする. G_0 を $\mathcal{D}(A) \cap Z$ の部分集合とする. a_1, a_2, a_3, a_4 は $0 \leq a_1 \leq \frac{3}{2}, 0 \leq a_2 \leq 1, 0 \leq a_3 \leq 1, 0 \leq a_4 \leq \frac{1}{2}$ なる定数とする. ある正定数 C_0 が存在し, $f \in G_0$ に対し線形抽象双曲型方程式 (3) が

$$(4) \quad \sup_{x \in \Omega} \int_{-\infty}^{\infty} |v(t, x)| dt \leq C_0 \|f\|_Z$$

なる一意解 $v \in \bigcap_{i=0}^2 C^i(\mathbb{R}; \mathcal{D}(A^{1-i/2}))$ を持つとする. この時, 任意の正数 E_1 に対し 正定数 δ が存在し, 初期値 $(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A^{1/2})$ が $A^{a_1}u_0, A^{a_2}u_0, A^{a_3}u_1, A^{a_4}u_1 \in G_0, A^{3/2-a_1}u_0, A^{1-a_3}u_0, A^{1-a_2}u_1, A^{1/2-a_4}u_1 \in L^1(\Omega), \|A^{1/2}u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq E_1$ かつ

$$\begin{aligned} & \|A^{a_1}u_0\|_Z \|A^{3/2-a_1}u_0\|_{L^1(\Omega)} + \|A^{a_2}u_0\|_Z \|A^{1-a_2}u_1\|_{L^1(\Omega)} \\ & + \|A^{a_3}u_1\|_Z \|A^{1-a_3}u_0\|_{L^1(\Omega)} + \|A^{a_4}u_1\|_Z \|A^{1/2-a_4}u_1\|_{L^1(\Omega)} \leq \delta \end{aligned}$$

をみたすとき, 抽象 Kirchhoff 型方程式 (2) は時間大域的一意解 $u \in \bigcap_{i=0}^2 C^i(\mathbb{R}; \mathcal{D}(A^{1-i/2}))$ を持つ.

$\mathbb{R}^3$ における Kirchhoff 公式を用いれば線形波動方程式の解が (4) を満たすことが示せる. これにより上の定理を適用すると, $\mathbb{R}^3$ における Kirchhoff 型準線形波動方程式の大域解の存在を得る. こうして, D'Ancona-Spagnolo [3, 4, 5] による初期値の空間とは異なる, 重み付きでない Sololev 空間に属する小さい初期値に対する一意的大域解が得られる.

さらに Shibata-Tsutsumi [30] による cut-off method を用いると, 外部領域における線形波動方程式の解が (4) を満たすことを示すことができ, 定理3を適用すると, 次の外部領域における Kirchhoff 型準線形波動方程式の大域解の存在を得る.

定理 4. ([36]) Ω は滑らかな境界を持つ non-trapping な $\mathbb{R}^3$ の外部領域とする. $p, \tilde{p}, q, \tilde{q}$ を $1 < \tilde{q} < 3/2 < q \leq 2 \leq p < 3 < \tilde{p}$ なる定数とする. このとき, ある正定数 δ が存在し, 以下が成立する. 初期値 $(u_0, u_1) \in (W_{\tilde{p},0}^8(\Omega) \cap W_{q,0}^9(\Omega) \cap W_{\tilde{q},0}^9(\Omega) \cap W_1^2(\Omega))^2$ が

$$\left(\|u_0\|_{W_{\tilde{p}}^8} + \|u_0\|_{W_q^9} + \|u_0\|_{W_{\tilde{q}}^9} + \|u_1\|_{W_{\tilde{p}}^7} + \|u_1\|_{W_q^8} + \|u_1\|_{W_{\tilde{q}}^8} \right) \left(\|u_0\|_{W_1^2} + \|u_1\|_{W_1^2} \right) < \delta$$

をみたせば, Kirchhoff 型準線形波動方程式に対する初期値境界値問題 (1) の大域解 $u \in \bigcap_{i=0}^2 C^i(\mathbb{R}; H^{8-i}(\Omega))$ が一意的に存在する.

以上、大域解の存在について述べてきたが、解の漸近挙動としては以下のことが知られている。先に述べた $\Omega = \mathbb{R}^n$ で D'Ancona-Spangolo [4] により得られた解は、初期値が十分大きい重みを持つ空間に属するならば時間が $\pm\infty$ に近づくとき線形波動方程式の解に漸近することが Ghisi[12] により示された。筆者 [34] はある重みを持った空間を定義し、その空間に属する十分小さい初期値に対する時間大域解の存在、またさらに大きい重みを持った空間における散乱作用素の存在を示した。最近 Matsuyama [21] は [34] で定義された時間大域解が存在する空間に属するが、散乱作用素が存在する空間には属さない初期値で、解が線形波動方程式の解に漸近しない例を与えた。

$m(r) = r^p$ ($p \geq 1$) の場合、 m は零点を持つので、退化型方程式となるが、 $A^{1/2}u_0 \neq 0$ の時、すなわち初期時刻において退化しないときには、Ebihara-Medeiros-Miranda [8] により局所解の存在が最初に示され、Arosio-Garavardi [1] 等により改良された。 $A^{1/2}u_0 \equiv 0, u_1 \neq 0$ の場合、すなわち実際に初期時刻において退化している場合については、Yamada [32] により最初に局所解の存在が示され、次いで、筆者 [33] が [32] の結果を改良し、局所解が存在するための初期値に対する必要十分条件を与えた。しかし、いずれの場合も大域解の存在については全く得られていない。

2 消散項を持つ場合

消散項を持つ Kirchhoff 型準線形波動方程式に対する大域解の一意存在については多くの研究がある。消散項 $\partial_t u$ をもつ Sobolev 空間に属する小さい初期値に対する大域解の一意存在は Yamada [31] 及び Brito [7] により独立に示された。その後、消散項が非線形の場合、消散の効果が境界の一部に限定される場合、境界条件が消散的である場合、 u に関する非線形項や外力のある場合についての大域解の一意存在、エネルギーの時間減衰など様々な研究があるが、紙面の関係上文献を省略させて戴く。また、 $m(r) = r^p$ ($p \geq 1$) のように m が零点を持つ退化型方程式の場合も、 $A^{1/2}u_0 \neq 0$ の時すなわち初期時刻において退化せず、初期値の定めるある量が十分小さい時には、 $m(\|A^{1/2}u(t)\|^2) > 0$ ($\forall t > 0$) なる大域解の存在が Nishihara-Yamada [25] により示されている。この場合は 実際には方程式は退化していないので、mildly degenerate と呼ばれる。さらに、より一般の関数 m に対する大域解の存在も示されている。また、初期値がある条件を満たす場合に、 $m(r) = r$ なる mildly degenerate な方程式の解が対応する放物型方程式の解に近づくことが Mizumachi [22, 23] により示されている。ただし、消散項のない場合同様、Sobolev 空間に属する初期値が大きい場合、初期時刻において方程式が退化する場合についての大域解の存在についてはわかっていない。

われわれは、以下の特異摂動問題について考察する。すなわち、消散項のある抽象 Kirchhoff 型方程式に対する初期値問題

$$(5) \quad \begin{cases} \varepsilon u_\varepsilon''(t) + u_\varepsilon'(t) + m(\|A^{1/2}u_\varepsilon(t)\|^2)Au_\varepsilon(t) = 0 & t > 0, \\ u_\varepsilon(0) = u_{(0)}, \quad u_\varepsilon'(0) = u_{(1)}, \end{cases}$$

の解 u_ε と, ε を 0 に近づけたときに対応する放物型方程式

$$(6) \quad \begin{cases} w'(t) + m(\|A^{1/2}w(t)\|^2)Aw(t) = 0 & t > 0, \\ w(0) = u_{(0)}. \end{cases}$$

の解 v との差を評価する. Esham and Weinacht [9], Matsuyama [19, 20], Gobbino [11] は Kirchhoff 型方程式に対する特異摂動問題を考察し, [19, 20], [11] により以下の評価

$$\begin{aligned} & \|A^{1/2}(u_\varepsilon - w)\|_{L^\infty([0,T];\mathcal{D}(A^{1/2}))} + \|u'_\varepsilon - w'\|_{L^2([0,T];\mathcal{D}(A^{1/2}))} \leq C_T \varepsilon, \\ & \|A^{1/2}(u'_\varepsilon(t) - w'(t))\| \leq \|A^{1/2}(m(\|A^{1/2}u_{(0)}\|^2)Au_{(0)} + u_{(1)})\|e^{-t/\varepsilon} + C_T \varepsilon^{1/2} \quad (0 \leq t \leq T) \end{aligned}$$

がすべての固定された $T > 0$ に対し得られている. 彼らの評価は区間 $[0, T]$ に依存していたが, 我々は, 時間 T によらない一様な評価, さらに時間に関する減衰評価を得た.

定理 5. ([13]) $m \in C^1([0, \infty))$ を $m_0 > 0$ なる関数とする. $q \geq 0$ に対し, $(u_{(0)}, u_{(1)}) \in \mathcal{D}(A^{3/2}) \times (\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{R}(A^q))$ とする. $\tilde{u}_{(1)}$ を $u_{(1)} = A^q \tilde{u}_{(1)}$ なるものとする. このとき, 関数 m とノルム $\|u_{(0)}\|_{3/2}$, $\|u_{(1)}\|_1$ に依存する正定数 ε_1 と $\tilde{C}$ が存在し, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ に対し, (5) の解 $u_\varepsilon \in \bigcap_{i=0}^2 C^i([0, \infty); \mathcal{D}(A^{(1-i)/2}))$ と対応する放物型方程式 (6) の解 $w \in \bigcap_{i=0}^1 C^i([0, \infty); \mathcal{D}(A^{1-i}))$ に関する以下の評価がすべての $\alpha \geq 0$ に対し成り立つ.

$$(7) \quad \|A^\alpha(u_\varepsilon(t) - w(t))\| \leq \begin{cases} \frac{\tilde{C}\varepsilon}{(1+t)^{\alpha+1}}\|u_{(0)}\|_{\alpha+1} + \frac{\tilde{C}\varepsilon}{(1+t)^{\alpha+q}}(\|u_{(1)}\|_\alpha + \|\tilde{u}_{(1)}\|) & (q \in (0, 1]), \\ \frac{\tilde{C}\varepsilon \log(2+t)}{(1+t)^{\alpha+1}}\|u_{(0)}\|_{\alpha+1} + \frac{\tilde{C}\varepsilon}{(1+t)^\alpha}\|u_{(1)}\|_\alpha & (q = 0) \end{cases}$$

がすべての $t \geq 0$ に対し成立する. ここで, $(u_{(0)}, u_{(1)}) \in \mathcal{D}(A^{\alpha+1}) \times \mathcal{D}(A^\alpha)$ とする. また,

$$(8) \quad \|A^\alpha(u'_\varepsilon(t) - w'(t))\| \leq \begin{cases} \frac{\tilde{C}\varepsilon}{(1+t)^{\alpha+2}}\|u_{(0)}\|_{\alpha+2} + \frac{\tilde{C}\varepsilon}{(1+t)^{\alpha+1+q}}(\|u_{(1)}\|_{\alpha+1} + \|\tilde{u}_{(1)}\|) \\ \quad + \tilde{C}e^{-\tilde{C}t/\varepsilon}\|A^\alpha(m(\|A^{1/2}u_{(0)}\|^2)Au_{(0)} + u_{(1)})\| & (q \in (0, 1]), \\ \frac{\tilde{C}\varepsilon \log(2+t)}{(1+t)^{\alpha+2}}\|u_{(0)}\|_{\alpha+2} + \frac{\tilde{C}\varepsilon}{(1+t)^{\alpha+1+q}}\|u_{(1)}\|_{\alpha+1} \\ \quad + \tilde{C}e^{-\tilde{C}t/\varepsilon}\|A^\alpha(m(\|A^{1/2}u_{(0)}\|^2)Au_{(0)} + u_{(1)})\| & (q = 0) \end{cases}$$

がすべての $t \geq 0$ に対し成立する. ここで, $(u_{(0)}, u_{(1)}) \in \mathcal{D}(A^{\alpha+2}) \times \mathcal{D}(A^{\alpha+1})$ とする.

注意. (8) において $m(\|A^{1/2}u_{(0)}\|^2)Au_{(0)} + u_{(1)}$ は *initial layer* を表す.

参考文献

- [1] A. Arosio, G. Garavaldi, On the mildly degenerate Kirchhoff string, *Math. Methods Appl. Sci.*, **14** (1991) 177–195.
- [2] P. D’Ancona, S. Spagnolo, Global solvability for the degenerate Kirchhoff equation with real analytic data, *Invent. Math.*, **108** (1992) 247–262.
- [3] P. D’Ancona, S. Spagnolo, A class of nonlinear hyperbolic problems with global solutions, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **124** (1993) 201–219.
- [4] P. D’Ancona, S. Spagnolo, Nonlinear perturbations of the Kirchhoff equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, **47** (1994) 1005–1029.
- [5] P. D’Ancona, S. Spagnolo, Kirchhoff type equations depending on a small parameter, *Chin. Ann. of Math.*, **16B: 4** (1995) 413–430.
- [6] S. I. Bernstein, Sur une classe d’équations fonctionnelles aux dérivées partielles (in Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, **4** (1940) 17–26.
- [7] E. H. Brito, The damped elastic stretched string equation generalized: existence, uniqueness, regularity and stability, *Applicable Anal.*, **13** (1982), 219–233
- [8] Y. Ebihara, L. A. Medeiros, M. M. Miranda, Local solutions for a nonlinear degenerate hyperbolic equation. *Nonlinear Anal.* **10** (1986), 27–40.
- [9] B. F. Esham, R. J. Weinacht, Hyperbolic-parabolic singular perturbations for scalar nonlinearities, *Applicable Anal.*, **29** (1988), 19–44.
- [10] M. Ghisi, Asymptotic behavior for the Kirchhoff equation, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **171** (1996), 293–312.
- [11] M. Gobbino, Singular perturbation hyperbolic-parabolic for degenerate nonlinear equations of Kirchhoff type, *Nonlinear Anal.*, **44** (2001), 361–374.
- [12] J. M. Greenberg, S. C. Hu, The initial-value problem for a stretched string, *Quart. Appl. Math.*, **5** (1980) 289–311.
- [13] H. Hashimoto, T. Yamazaki, Hyperbolic-parabolic singular perturbation for quasilinear equations of Kirchhoff type, preprint.
- [14] C. Heiming, Mapping properties of generalized Fourier transforms and applications to Kirchhoff equations, *Nonlinear Differential Equations Appl.*, **7** (2000) 389–414.
- [15] F. Hirose, Global solvability for Kirchhoff equation in special classes of non-analytic functions, *J. Differential Equations*, **230** (2006) 49–70.
- [16] K. Kajitani, The global solution of the Cauchy problem one dimensional perturbed Kirchhoff equations, 「偏微分方程式の諸問題」 シンポジウム, 東海大学, 2006 年 10 月.
- [17] R. Manfrin, On the global solvability for Kirchhoff equation for a new class of initial data, *Port. Math. (2)* **59** (2002) 91–109.

- [18] R. Manfrin, On the global solvability for Kirchhoff equation for non-analytic initial data, *J. Differential Equations*, **211** (2005) 38–60.
- [19] T. Matsuyama, Singular limit of some quasilinear wave equations with damping terms, *Adv. Differential Equations*, **1** (1996), 151–174.
- [20] T. Matsuyama, Singular limit of some quasilinear wave equations with damping and resorting terms, *Tokyo J. Math.*, **19** (1996), 197–210.
- [21] T. Matsuyama, Asymptotic profiles for the Kirchhoff equation, *Rend. Lincei Mat. Appl.*, **17** (2006), 377–395.
- [22] T. Mizumachi, Decay properties of solutions to degenerate wave equations with dissipative terms, *Adv. Differential Equations*, **2** (1997), 573–592.
- [23] T. Mizumachi, Time decay of solutions to degenerate Kirchhoff type equation, *Nonlinear Anal.*, **33** (1998), 235–252.
- [24] K. Nishihara, On a global solution of some quasilinear hyperbolic equation, *Tokyo J. Math.*, **7** (1984), 437–459.
- [25] K. Nishihara, Y. Yamada, On global solutions of some degenerate quasilinear hyperbolic equations with dissipative terms, *Funk. Ekvac.*, **33** (1990), 151–159.
- [26] S. I. Pokhozhaev, On a class of quasilinear hyperbolic equations, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, **96** (1975), 152–166.
- [27] S. I. Pokhozhaev, The Kirchhoff quasilinear hyperbolic equation, *Differential Equations*, **21** (1985) 82–88.
- [28] R. Racke, Generalized Fourier transforms and global, small solutions to Kirchhoff equations, *Applicable Anal.*, **58** (1995) 85–100.
- [29] W. Rzymowski, One-dimensional Kirchhoff equation, *Nonlinear Anal.*, **48** (2002) 209–221.
- [30] Y. Shibata, Y. Tsutsumi, On a global existence theorem of small amplitude solutions for nonlinear wave equations in an exterior domain, *Math. Z.*, **191** (1986) 165–199.
- [31] Y. Yamada, On some quasilinear wave equations with dissipative terms, *Nagoya Math. J.*, **87** (1982), 17–39.
- [32] Y. Yamada, Some nonlinear degenerate wave equations, *Nonlinear Anal.*, **11** (1987), 1155–1168.
- [33] T. Yamazaki, On local solutions of some quasilinear degenerate hyperbolic equations, *Funk. Ekvac.*, **31** (1988), 439–457.
- [34] T. Yamazaki, Scattering for a quasilinear hyperbolic equation of Kirchhoff type. *J. Differential Equations*, **143** (1998), 1–59.
- [35] T. Yamazaki, Global solvability for the Kirchhoff equations in exterior domains of dimension larger than three, *Math. Methods Appl. Sci.*, **27** (2004), 1893–1916.
- [36] T. Yamazaki, Global solvability for the Kirchhoff equations in exterior domains of dimension three, *J. Differential Equations*, **210** (2005), 290–316.