ホインの微分方程式

竹村 剛一　（横浜市立大学国際総合科学部）

1. はじめに

ホイン (Heun) の微分方程式とは、二階線形常微分方程式

$$\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\epsilon}{z-t}\right)\frac{d}{dz}+\frac{\alpha\beta z-q}{z(z-1)(z-t)}\right)\tilde{f}(z)=0, \tag{1}$$

で、係数の間に

$$\gamma+\delta+\epsilon=\alpha+\beta+1, \tag{2}$$

という関係式があるものとして与えられる。この微分方程式は、フックス型である。つまり、微分方程式の特異点 $\{0,1,t,\infty\}$ は、すべて確定特異点というワイルドではない特異点となっている。また、リーマン球面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上で４点に確定特異点のみをもつ二階常微分方程式は、簡単な変換によりホインの微分方程式に変換できることが知られている。この事実により、ホインの微分方程式は４点に確定特異点のみをもつ微分方程式の標準型であると言われている。

ちなみに、リーマン球面上で３点に確定特異点のみをもつ二階常微分方程式の標準型は、以下の式で記述される超幾何微分方程式である。

$$\left(z(1-z)\left(\frac{d}{dz}\right)^2+(\gamma-(\alpha+\beta+1)z)\frac{d}{dz}-\alpha\beta\right)\tilde{f}(z)=0. \tag{3}$$

この式の両辺を $z(1-z)$ で割ることにより、(1) と似た形が得られる。

超幾何微分方程式やこれの特異点を合流されることで得られる合流型超幾何微分方程式は数学においても物理においても頻繁に現れるとても重要な微分方程式である。ホインの微分方程式やこれの特異点を合流させて作られる微分方程式も、ブラックホールの解析や結晶転移 ([6])・流体力学 ([1]) などさまざまな物理の模型で現れており、数学においても別の話題から現れることがある。これらの微分方程式の具体形や特殊化により現れる微分方程式、特異点合流のようすは次ページの図を参照のこと。

超幾何微分方程式は昔からよく研究されており、解の積分表示や、確定特異点のまわりの局所解をむすぶ接続行列がガンマ関数を用いて表示されることなどの大域的なモノドロミーのようすなどがわかっている。一方、ホインの微分方程式は、超幾何微分方程式にさらに一点確定特異点を付加しただけのものであるが、これの解の大域的なようすを調べることはとても困難なことであった。この一つの理由として、(1) に q というアクセサリーパラメーターと呼ばれるものが入り込んでいるということがある。アクセサリーパラメーター q は局所モノドロミーとは関係しないパラメーターであり、これがあるためにホインの微分方程式を調べることが難しくて興味深くなっていると考えられる。

Heun equation (HE) $(\gamma+\delta+\epsilon=\alpha+\beta+1)$

$$y''+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\epsilon}{z-t}\right)y'+\frac{\alpha\beta z-q}{z(z-1)(z-t)}y=0. \quad \supset$$

Lamé equation
$(\gamma=\delta=\epsilon=\frac{1}{2})$

$0,1,t,\infty$: regular sing.

$t\to\infty,\quad q=-\sigma t$
$\epsilon=-4pt,\quad \beta=-4pt+\delta+\epsilon-\alpha-1$

Confluent Heun equation (CHE)

$$y''+\left(4p+\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}\right)y'+\frac{4p\alpha z-\sigma}{z(z-1)}y=0. \quad \supset$$

Mathieu equation

$$v''(\theta)+(\lambda+\tfrac{1}{4}-p^2\sin^2\theta)v(\theta)=0.$$

$0,1$: regular sing., ∞: irreg. sing.

Biconfluent Heun equation
(BHE)

$$D^2y+\left(\sum_{i=0}^{4}A_iz^i\right)y=0,\quad D=z\frac{d}{dz}.$$

0: regular sing., ∞: irreg. sing.

Doubly confluent Heun equation
(DCHE)

$$D^2y+\left(\sum_{j=-2}^{2}B_jz^j\right)y=0,\quad D=z\frac{d}{dz}.$$

$0,\infty$: irreg. sing.

Triconfluent Heun equation
(THE)

$$y''+\left(\sum_{i=0}^{4}A_iz^i\right)y=0.$$

∞: irreg. sing.

Hypergeometric equation (Gauss, Euler)

$$z(1-z)y''+(\gamma-(\alpha+\beta+1)z)\,y'-\alpha\beta y=0. \quad (\supset)$$

Legendre function
Associated Legendre function

$0,1,\infty$: regular sing.

$\beta\to\infty$
$\beta z=\tilde{z}$

Confluent Hypergeometric equation
(Kummer)

$$zy''+(\gamma-z)\,y'-\alpha y=0. \quad (\supset)$$

Whittaker function
Bessel function

0: regular sing., ∞: irreg. sing.

Biconfluent hypergeometric equation
(Weber)

$$y''+(A_0+A_1z+A_2z^2)y=0. \quad \supset$$

∞: irreg. sing.

Airy equation

$$y''-zy=0.$$

∞: irreg. sing.

特異点合流の図

ホインの微分方程式の解について、次のことたちが知られている。

１．$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon$ が（(2) とは別の）関係式をみたし、かつ q が特別の値ならば、Heun polynomial と呼ばれる本質的に多項式の解をもつ。([5])

２．$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,q,t$ がいくつかの関係式をみたすとき、適当な変数変換により超幾何微分方程式によって表示できる解や代数的な解をもつ。([4])

３．$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,t$ を固定したとき、特別な q に対して Heun function と呼ばれる $z=0,1$ でともに正則になる解が存在する。そのような q の満たすべき条件として、無限連分数を用いたものがある。([5])

４．$t\to\infty$ として合流させない極限をとったときホインの微分方程式が超幾何微分方程式に移行することから、摂動によってホインの微分方程式の解を調べる。([9])

５．$\gamma,\delta,\epsilon,\beta-\alpha\in\mathbb{Z}+1/2$ が成立するとき、有限帯ポテンシャルの話と関連する形ですべての q について解のある種の積分表示やモノドロミーの表示式が得られる。

本稿では５．のアプローチによる結果を紹介する。

2. ホインの微分方程式の楕円関数による表示

$\wp(x)$ を Weierstrass の二重周期関数、つまり

$$\wp(x)=\wp(x|2\omega_1,2\omega_3)=\frac{1}{x^2}+\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}}\left(\frac{1}{(x-2m\omega_1-2n\omega_3)^2}-\frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_3)^2}\right), \tag{4}$$

とする。このとき $\wp(x)$ は基本周期が $(2\omega_1,2\omega_3)$ の二重周期関数（つまり $\wp(x+2\omega_1)=\wp(x+2\omega_3)=\wp(x)$）である。二重周期性より $\wp(x)$ をトーラス $\mathbb{C}/(2\omega_1\mathbb{Z}+2\omega_3\mathbb{Z})$ からリーマン球面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ への写像とみなすことができるが、この写像は分岐点が $\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ の二重被覆となっている。ここで、$\omega_0=0,\omega_2=-\omega_1-\omega_3$ である。また、

$$e_i=\wp(\omega_i)\quad(i=1,2,3),\quad t=\frac{e_3-e_1}{e_2-e_1},\quad z=\frac{\wp(x)-e_1}{e_2-e_1}, \tag{5}$$

とおく。すると、x から z への変換は、トーラスからリーマン球面への二重被覆であり分岐点の像は $\{0,1,t,\infty\}$ となっている。また、$t=(e_3-e_1)/(e_2-e_1)$ という変換により二重周期関数から t という値が決まるが、逆に、$t\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ から、ある基本周期の比 ω_3/ω_1 が存在し、その基本周期 $(2\omega_1,2\omega_3)$ に対して $t=(e_3-e_1)/(e_2-e_1)$ が成立するようにできる。

変換 (5) を用いてホインの微分方程式を変換する。$\tilde{\Phi}(z)=z^{\frac{-l_0}{2}}(z-1)^{\frac{-l_1}{2}}(z-t)^{\frac{-l_2}{2}}$, $\tilde{f}(z)\tilde{\Phi}(z)=f(x)$ とおくことにより、ホインの微分方程式 (1) は次の式に変換される。

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}+\sum_{i=0}^{3}l_i(l_i+1)\wp(x+\omega_i)-E\right)f(x)=0. \tag{6}$$

ここでパラメーターの対応は以下のようになっている。

(7)

$$
\begin{aligned}
&l_0=\beta-\alpha-1/2,\quad l_1=-\gamma+1/2,\quad l_2=-\delta+1/2,\quad l_3=-\epsilon+1/2,\\
&E=(e_2-e_1)(-4q+(-(\alpha-\beta)^2+2\gamma^2+6\gamma\epsilon+2\epsilon^2-4\gamma-4\epsilon-\delta^2+2\delta+1)/3\\
&\qquad+(-(\alpha-\beta)^2+2\gamma^2+6\gamma\delta+2\delta^2-4\gamma-4\delta-\epsilon^2+2\epsilon+1)t/3).
\end{aligned}
$$

また、二つの微分方程式 (1) と (6) を対応させる変換の選び方には別のものもあることに注意しておく。

ところで、$l_1=l_2=l_3=0$ のとき（$\gamma=\delta=\epsilon=1/2$ のとき）微分方程式 (6)（または微分方程式 (1)）はラメ (Lamé) の微分方程式と呼ばれる。

これから、微分方程式 (6) を、l_0,l_1,l_2,l_3 がすべて整数の場合（$\gamma,\delta,\epsilon,\beta-\alpha\in\mathbb{Z}+1/2$ の場合）について考察する。$l_i\leftrightarrow -l_i-1$ などと置き換えても (6) は不変であるので、以後、$l_0,l_1,l_2,l_3\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の場合のみを考える。

3. 二重周期関数と積分表示

$l_0,l_1,l_2,l_3\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき、微分方程式 (6) に付随して決まる二重周期関数 $\Xi(x,E)$ と、これを用いることで得られる微分方程式の解の不定積分による表示式を求める。以後、$u(x)$ を次のように定める。

$$
u(x)=\sum_{i=0}^{3} l_i(l_i+1)\wp(x+\omega_i). \tag{8}
$$

$h(x)$ を微分方程式 (6) の二つの解の積とすると、これは以下の三階の微分方程式を満たすことがわかる。

$$
\left(\frac{d^3}{dx^3}-4\left(u(x)-E\right)\frac{d}{dx}-2u'(x)\right)h(x)=0. \tag{9}
$$

この微分方程式 (9) に関連して、以下の命題が成り立つ。

命題 1. [8, Proposition 3.5]
$l_0,l_1,l_2,l_3\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ならば、微分方程式 *(9)* は以下のような二重周期関数 $\Xi(x,E)$ を解にもつ。

$$
\Xi(x,E)=c_0(E)+\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{l_i-1} b_j^{(i)}(E)\wp(x+\omega_i)^{l_i-j}, \tag{10}
$$

ここで、係数たち $c_0(E)$, $b_j^{(i)}(E)$ は E についての多項式ととれる。さらに、これらの係数は共通因子をもたなくて $c_0(E)$ をモニックと仮定すると、関数 $\Xi(x,E)$ は一意に定まる。

この命題自体はモノドロミーに関する議論により証明されるが、後で述べる有限帯ポテンシャルと深い関係があることを注意しておく。また、ラメの微分方程式 ($l_1=l_2=l_3=0$) で $l_0\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ のときには [14] にて類似の命題が記されている。

$g = \deg_E c_0(E)$ とおき、$Q(E)$ を次の式で定める。

$$Q(E) = \Xi(x,E)^2 (E - u(x)) + \frac{1}{2}\Xi(x,E)\frac{d^2\Xi(x,E)}{dx^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{d\Xi(x,E)}{dx}\right)^2. \tag{11}$$

この式の右辺を x で微分すると 0 になることが (9) から示され、$Q(E)$ は x に依存しないことがわかる。さらに、$Q(E)$ は次数が $2g+1$ のモニックな多項式となる。

ここで、例を挙げておく。$l_0 = 2, l_1 = l_2 = l_3 = 0$ のとき、$\Xi(x,E)$ と $Q(E)$ は、

$$\Xi(x,E) = E^2 + 3E\wp(x) + 9\wp(x)^2 - \tfrac{9}{4}g_2, \tag{12}$$

$$Q(E) = (E^2 - 3g_2)\prod_{i=1}^{3}(E - 3e_i), \tag{13}$$

と計算される。ここで $g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)$ である。

さて、$l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき、微分方程式 (6) の解の積分表示が、$\Xi(x,E)$ と $Q(E)$ を用いることでなされる。（ラメの微分方程式の場合は [14] にて書かれている。）

命題 2. [8, Proposition 3.7]
$\Xi(x,E)$ を命題 *1* で決められている関数、$Q(E)$ を *(11)* で定義されている多項式とする。すると、関数

$$\Lambda(x,E) = \sqrt{\Xi(x,E)}\exp\int\frac{\sqrt{-Q(E)}dx}{\Xi(x,E)} \tag{14}$$

は微分方程式 *(6)* の解となる。

微分方程式 (6) は $x \to -x$ という変換で不変なことより、$\Lambda(-x,E)$ も微分方程式の解となる。特殊でない E に対し $\Lambda(x,E)$, $\Lambda(-x,E)$ は微分方程式 (6) の解の基底となるが、この基底でのモノドロミーを調べる。

微分方程式 (6) は二重周期的であるので、周期分ずらした関数 $\Lambda(x+2\omega_k,E)$, $\Lambda(-(x+2\omega_k),E)$ $(k=1,3)$ も同じ微分方程式の解となる。もし、$\Lambda(x+2\omega_k,E) = B(E)\Lambda(x,E)$ と書けるならば、$\Lambda(-(x+2\omega_k),E) = B(E)^{-1}\Lambda(-x,E)$ が成立し、変換 $x \to x+2\omega_k$ におけるモノドロミー行列が対角行列として書けることとなる。ここで変換 $x \to x+2\omega_k$ は、ホインの微分方程式 (1) の変数 z では、確定特異点 4 点のうちの 2 点をかこむサイクルに沿う解析接続となっており、$B(E)$ が求まれば 2 点をかこむサイクルでのモノドロミーという大域的なモノドロミーが求まることとなる。

4. 超楕円積分によるモノドロミーの表示式

これから、$\Lambda(x+2\omega_k,E) = B(E)\Lambda(x,E)$ $(k=1,3)$ と書け、$B(E)$ は超楕円積分で表されることを紹介する。$a(E)$, $c(E)$ を、$\Xi(x,E)$ を書き換えることで次のように定義する。

$$\Xi(x,E) = c(E) + \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{l_i-1} a_j^{(i)}(E)\left(\frac{d}{dx}\right)^{2j}\wp(x+\omega_i), \quad a(E) = \sum_{i=0}^{3} a_0^{(i)}(E). \tag{15}$$

定理 3. [10, Theorem 3.7]
(i) $l_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ を仮定し、E_0 を $Q(E) = 0$ の解（つまり $Q(E_0) = 0$）とする。すると、$\Lambda(x, E_0) = \sqrt{\Xi(x, E_0)}$ と表示でき、$k = 1, 3$ に対して $q_k \in \{0, 1\}$ を $\Lambda(x + 2\omega_k, E_0) = (-1)^{q_k}\Lambda(x, E_0)$ が成立するようにとれる。
(ii) *(i)* での設定のもと、任意の E に対して

$$\Lambda(x + 2\omega_k, E) = (-1)^{q_k}\Lambda(x, E)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{E_0}^{E}\frac{-2\eta_k a(\tilde{E}) + 2\omega_k c(\tilde{E})}{\sqrt{-Q(\tilde{E})}}d\tilde{E}\right), \tag{16}$$

が成立する。ここで、η_k は *Weierstrass* のゼータ関数の半周期 ω_k での値（つまり $\eta_k = \zeta(\omega_k)$）である。

定理において、(16) の右辺は

$$\int_0^{2\omega_k}\Xi(x, \tilde{E})dx = -2\eta_k a(\tilde{E}) + 2\omega_k c(\tilde{E}), \tag{17}$$

から導出されることを注意しておく。

$l_0 = 2, l_1 = l_2 = l_3 = 0$ の場合、$E_0 = \sqrt{3g_2}$ とおく。すると $Q(E_0) = 0$ が成立し、$q_1 = q_3 = 0$ となる。関数 $a(E)$ と $c(E)$ は

$$c(E) = E^2 - \tfrac{3}{2}g_2, \quad a_0(E) = 3E, \tag{18}$$

と定まるので、この場合のモノドロミーの表示式は、$k = 1, 3$ に対し次のようになる。

(19)

$$\Lambda(x + 2\omega_k, E) = \Lambda(x, E)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{3g_2}}^{E}\frac{-6\tilde{E}\eta_k + (2\tilde{E}^2 - 3g_2)\omega_k}{\sqrt{-(\tilde{E}^2 - 3g_2)\prod_{i=1}^{3}(\tilde{E} - 3e_i)}}d\tilde{E}\right).$$

5. Hermite-Krichever 仮設法

準備として、次の関数を定義する。

$$\Phi_i(x, \alpha) = \frac{\sigma(x + \omega_i - \alpha)}{\sigma(x + \omega_i)}\exp(\zeta(\alpha)x), \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{20}$$

ここで、$\zeta(x)$ は Weierstrass のゼータ関数、$\sigma(x)$ は Weierstrass のシグマ関数を表すものとする。

Hermite-Krichever 仮設法とは、ここでは、微分方程式 (6) の解を

$$f(x) = \exp(\kappa x)\left(\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{l_i - 1}\tilde{b}_j^{(i)}\left(\frac{d}{dx}\right)^j\Phi_i(x, \alpha)\right), \tag{21}$$

のような形で表せるという仮設をおき、α や κ を調べることによって解を調べていく手法であるとする。もし (21) の形で解が書けるならば、その関数の周期性は

$$f(x + 2\omega_k) = \exp(-2\eta_k\alpha + 2\omega_k\zeta(\alpha) + 2\kappa\omega_k)f(x), \tag{22}$$

という形で表示できる。よって、モノドロミーを求める問題は α, κ を調べる問題に置きかわる。ラメの微分方程式に対応する場合 $(l_1 = l_2 = l_3 = 0)$ で $l_0 \in$

$\{1,2,3,4,5\}$ の場合はHermite, Halphen たちによって、$l_0=2, l_1=1, l_2=0, l_3=0$ の場合と $l_0=2, l_1=1, l_2=1, l_3=0$ の場合は Belokolos, Eilbeck, Enolskii, Kostov, Smirnov たちによって調べられている。

以下の定理は、$l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のときにHermite-Krichever 仮設法の妥当性を示したものである。

定理 4. [11]
ある多項式たち $P_1(E), \ldots, P_4(E)$ が存在し、もし $P_2(E) \neq 0$ ならば、積分表示による解 $\Lambda(x,E)$ を *Hermite-Krichever* 仮設法の形（*(21)* の右辺の形）に表示することができ、α と κ は次のように表される。

$$\wp(\alpha) = \frac{P_1(E)}{P_2(E)}, \quad \kappa = \frac{P_3(E)}{P_4(E)}\sqrt{-Q(E)}. \tag{23}$$

$\wp(\alpha)$ は楕円積分の逆関数なので、(23) の形により α は E についての有理式と楕円積分を用いて表示される。κ は E の代数関数として表示される。そして、これらを用いて、モノドロミーは (22) によって求まるのである。

例として、$l_0=2, l_1=l_2=l_3=0$ の場合には、α と κ は以下のように表示される。

$$\wp(\alpha) = e_1 - \frac{(E-3e_1)(E+6e_1)^2}{9(E^2-3g_2)}, \quad \kappa = \frac{2}{3(E^2-3g_2)}\sqrt{-Q(E)}. \tag{24}$$

6. 超楕円積分と楕円積分をむすぶ式

ここまでで、ホインの微分方程式の大域的モノドロミーを二通りの方法で求めた。一つは、定理 3 による超楕円積分を用いた表示である。もう一つは、定理 4 での Hermite-Krichever 仮設法によるものであり、これは楕円関数によるものとみなされる。この二つの式を比べることにより、超楕円積分を楕円積分に帰着する関係式が組織的に得られる。例を用いて示そう。

$l_0=2,\ l_1=l_2=l_3=0$ の場合を扱う。(24) での表示から

$$\xi = e_1 - \frac{(E-3e_1)(E+6e_1)^2}{9(E^2-3g_2)} \tag{25}$$

という変換を考える。この変換により、種数 2 の第一種超楕円積分を第一種楕円積分に帰着する式として、

$$-\frac{1}{2}\int \frac{3E}{\sqrt{-Q(E)}}dE = \int \frac{d\xi}{\sqrt{4(\xi-e_1)(\xi-e_2)(\xi-e_3)}}, \tag{26}$$

が、種数 2 の第二種超楕円積分を第二種楕円積分に帰着する式として、

$$\frac{1}{2}\int \frac{E^2-\frac{3}{2}g_2}{\sqrt{-Q(E)}}dE + \kappa = \int \frac{\xi d\xi}{\sqrt{4(\xi-e_1)(\xi-e_2)(\xi-e_3)}}, \tag{27}$$

が得られる。ここで $Q(E),\ \kappa$ は次のように定まっている。

$$Q(E) = (E^2-3g_2)\prod_{i=1}^{3}(E-3e_i), \qquad \kappa = \frac{2}{3(E^2-3g_2)}\sqrt{-Q(E)}. \tag{28}$$

7. 有限帯ポテンシャル

これまでの話は二重周期関数 $\Xi(x,E)$ を基にして展開されていたが、これと有限帯ポテンシャルの話を関係付けよう。

まず、有限帯ポテンシャルと代数幾何的有限帯ポテンシャルの定義を与える。

$q(x)$ を周期的で滑らかな実関数とし、$H=-d^2/dx^2+q(x)$ とおく。$\sigma_b(H)$ という実数の部分集合を以下の性質をみたすものとして定義する。

$E\in\sigma_b(H) \ \Leftrightarrow (H-E)f(x)=0$ のすべての解は $x\in\mathbb{R}$ において有界である。

集合 $\sigma_b(H)$ の閉包が

$$\overline{\sigma_b(H)}=[E_0,E_1]\cup[E_2,E_3]\cup\cdots\cup[E_{2g},\infty), \tag{29}$$

と表示できるとき、$q(x)$ を有限帯ポテンシャルと呼ぶ。

また、$H=-d^2/dx^2+q(x)$ に対して、

$$A=\left(\frac{d}{dx}\right)^{2g+1}+\sum_{j=0}^{2g-1}b_j(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{2g-1-j} \tag{30}$$

という奇数階の微分作用素で H と可換 ($[A,H]=0$) になるものが存在するとき、$q(x)$ を代数幾何的有限帯ポテンシャルと呼ぶ。この可換性での $q(x)$ の満たすべき方程式は高階定常 KdV 方程式と等価になることが知られている。

$q(x)$ が周期的で滑らかな実関数であるという仮定のもと、$q(x)$ が有限帯ポテンシャルであることと $q(x)$ が代数幾何的有限帯ポテンシャルであることが同値なことは 1970 年代に Novikov らによって示されている。

$l_0,l_1,l_2,l_3\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ならば、$\sum_{i=0}^{3}l_i(l_i+1)\wp(x+\omega_i)u(x)$ は代数幾何的有限帯ポテンシャルであることを、命題 1 で定義されている関数 $\Xi(x,E)$ から導出しよう。

$\Xi(x,E)$ を次のように表示する。

$$\Xi(x,E)=\sum_{i=0}^{g}a_{g-i}(x)E^i \tag{31}$$

すると、$a_0(x)=1$ が成立する。次の定理は、(31) が微分方程式 (9) をみたすことから証明される。

定理 5. ([10, Theorem 3.1] など)
$l_0,l_1,l_2,l_3\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を仮定する。$u(x)=\sum_{i=0}^{3}l_i(l_i+1)\wp(x+\omega_i)$ とし、*(31)* での $a_j(x)$ を用いて $(2g+1)$ 次の微分作用素 A を

$$A=\sum_{j=0}^{g}\left\{a_j(x)\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}a_j(x)\right)\right\}\left(-\frac{d^2}{dx^2}+u(x)\right)^{g-j}, \tag{32}$$

で定義する。すると、作用素 A はシュレディンガー作用素 $H=-\frac{d^2}{dx^2}+u(x)$ と可換になる。つまり $u(x)$ は代数幾何的有限帯ポテンシャルである。

命題 6. ([10, Proposition 3.2] など)
$Q(E)$ を *(11)* で定義された多項式とすると、次の関係式が成立する。

$$A^2 = -Q(H). \tag{33}$$

ラメの微分方程式に対応する関数 $l_3(l_3+1)\wp(x+\omega_3)$ が $l_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のときに有限帯ポテンシャルであることは、1940 年に Ince([3]) が発表している。$l_0, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のときに関数 $\sum_{i=0}^{3} l_i(l_i+1)\wp(x+\omega_i)$ が代数幾何的有限帯ポテンシャルであること自体は、Treibich と Verdier([13]) により 1990 年頃に示されており、Gesztesy と Weikard([2]), A. O. Smirnov([7]) らによってさらに研究がなされてきた。今日ではこの関数は Treibich-Verdier ポテンシャルと呼ばれている。だが、モノドロミーの具体的な式などについては、従来はあまり研究がされていなかったと思われる。

References

[1] Craster R. V. and Hoang V. H., Applications of Fuchsian differential equations to free boundary problems. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **454** (1998) no. 1972, 1241–1252.

[2] Gesztesy F. and Weikard R., Treibich-Verdier potentials and the stationary (m)KdV hierarchy. *Math. Z.* **219** (1995) 451–476.

[3] Ince E. L., Further investigations into the periodic Lamé functions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **60** (1940) 83–99.

[4] Maier R. S., On reducing the Heun equation to the hypergeometric equation. *J. Differential Equations* **213** (2005) 171–203.

[5] Ronveaux A.(ed.), *Heun's differential equations.* Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, 1995.

[6] Slavyanov S. and Lay W., *Special Functions.* Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[7] Smirnov A. O., Elliptic solitons and Heun's equation, *The Kowalevski property,* 287–305, CRM Proc. Lecture Notes, 32, Amer. Math. Soc., Providence, 2002.

[8] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system I: the Bethe Ansatz method, *Comm. Math. Phys.* **235** (2003) 467–494.

[9] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system II: the perturbation and the algebraic solution, *Electron. J. Differential Equations* **2004** (2004) no. 15 1–30.

[10] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system III: the finite gap property and the monodromy, *J. Nonlinear Math. Phys.* **11** (2004) 21–46.

[11] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system IV: the Hermite-Krichever Ansatz, *Comm. Math. Phys.* **258** (2005) 367–403.

[12] Takemura K., The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system V: generalized Darboux transformations, to appear in J. Nonlinear Math. Phys., Preprint (math.CA/0508093).

[13] Treibich A. and Verdier J.-L., Revetements exceptionnels et sommes de 4 nombres triangulaires. *Duke Math. J.* **68** (1992), 217–236.

[14] Whittaker E. T. and Watson G. N., *A course of modern analysis. Fourth edition.* Cambridge University Press, New York 1962.