

臨界 Sobolev 型方程式の爆発解析と 漸近的非退化性

高橋 太 (大阪市立大学大学院理学研究科)

概要

臨界 Sobolev 指数を含む半線形楕円型方程式の正值爆発解の挙動および爆発現象に由来する解の性質について考察する。特に方程式に含まれる係数関数の影響について詳しく調べる。

1 Introduction

この講演では次のような臨界 Sobolev 指数を含む半線形楕円型方程式

$$-\Delta u = c_0 u^p + \varepsilon k(x)u, \quad u > 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1.1)$$

または

$$-\Delta u = c_0 K(x)u^{p-\varepsilon}, \quad u > 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1.2)$$

の斉次 Dirichlet 境界値問題の非コンパクトな解の族について考察する。ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は滑らかな有界領域、 $c_0 = N(N-2)$, $p = (N+2)/(N-2)$ は Sobolev 埋め込み $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ の埋蔵写像がコンパクトであるかどうかの境目に当たる臨界 Sobolev 指数、 $\varepsilon > 0$ は正のパラメーターとする。係数関数 k および K は $C^2(\bar{\Omega})$ 級の滑らかな関数とする。

このような方程式の研究の動機付けとなった問題に、微分幾何学における「山辺の問題」またはより一般的な「prescribed scalar curvature 問題」がある。これは『コンパクト多様体 M 上の Riemann 計量 g を共形変形 ($g \mapsto u^{4/(N-2)}g$) して、変形後の計量が M 上に与えられた関数 K をスカラー曲率に持つようにできるか?』と述べられ ($K \equiv \text{定数}$ のときが山辺の問題)、 M 上の非線形楕円型方程式

$$-\frac{4(N-1)}{N-2}\Delta u + R_g u = K u^p$$

の正值解 u を求める問題に帰着される。ただし R_g は元の計量 g のスカラー曲率関数である。このように方程式の由来となった問題には係数関数が付随しており、(1.1) や (1.2) を考察することは自然である。

臨界 Sobolev 指数を含む楕円型方程式については、対応する汎関数の Palais-Smale コンパクト性条件に破れが生じるために標準的な変分法の手法が適用できないという困難を乗り越えて、1980 年代前半の Brezis-Nirenberg [4] の研究を端緒として、以後、解の存在・非存在・多重性・非コンパクトな解の列に対する集中現象およびその特異極限の分類や爆発点の特徴付けを調べる「爆発解析」など、多くの研究がおこなわれてきた。係数関数がすべて定数の場合の爆発解析については Han [14], Rey [16] [17] 等を参照のこと。

近年は爆発解の様々なノルムの漸近挙動の研究に加えて、爆発現象に由来する非コンパクトな変分問題の解の定性的性質の研究が精力的に進められている。楕円型正則性の結果から、Sobolev 空間 $H_0^1(\Omega)$ で非コンパクトな解の列はその L^∞ ノルムが無限大に発散するが、その爆発現象によって自然に定義される解のスケーリング列がみだしていく極限方程式の解の定性的性質が元の爆発解にどこまで遺伝するか？という問が研究の素朴な動機であると思われる。この講演では爆発解析における係数関数の影響を調べるとともに、爆発解が（対応する Euler-Lagrange 汎関数の臨界点として）非退化であるための十分条件を、係数関数の条件を用いて書きあらわすいくつかの結果の紹介を行う。

2 低階摂動項を持つ場合

この節では (1.1) について考察する。まず解の存在について、もし領域 Ω が $0 \in \Omega$ に対して星型で $k(x) + \frac{1}{2}x \cdot \nabla k(x) \leq 0$ が任意の $x \in \Omega$ について成り立つならば、Pohozaev 恒等式により解は存在しないことに注意する。

一方、Brezis-Nirenberg は以下を示した。

$$S_{\varepsilon,k} = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}=1}} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} k(x) u^2 dx \right\}$$

とおく。 $\varepsilon > 0$ が十分小さく $-\Delta - \varepsilon k(x) \cdot$ が $H_0^1(\Omega)$ 上で強圧的なとき、(a) Ω のどこかで $k(x) > 0$, (b) $S_{\varepsilon,k} < S_N$, (c) $S_{\varepsilon,k}$ は達成される, は同値な条件である。([3], [4]). ここで S_N は最良 Sobolev 定数をあらわす。(a) を仮定して $S_{\varepsilon,k}$ の最小化元 $\bar{u}_\varepsilon$ に対して $u_\varepsilon = (S_{\varepsilon,k}/c_0)^{\frac{N-2}{4}} \bar{u}_\varepsilon$ とおくと u_ε は (1.1) の解となるが、これを (1.1) の最小エネルギー解と呼ぶ。以下では (1.1) の解として Brezis-Nirenberg の方法で作った最小エネルギー解だけを考える。 $x_\varepsilon \in \Omega$ を $u_\varepsilon(x_\varepsilon) = \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}$ となる点列とすると、有界領域上 S_N が達成されないことから $u_\varepsilon(x_\varepsilon) \rightarrow +\infty$ となり、部分列をとることで $x_\varepsilon \rightarrow x_0 \in \bar{\Omega}$ となる。この x_0 を解の列 $\{u_\varepsilon\}$ の爆発点と呼ぶ。

Theorem 2.1 ([22]) $N \geq 4$ とする。 $\Omega_+ := \{x \in \Omega : k(x) > 0\} \neq \emptyset$ を仮定し、 $\{u_\varepsilon\}$ を Brezis-Nirenberg の方法で作った最小エネルギー解の族とする。 $x_0 \in \bar{\Omega}$ を

爆発点とすると $x_0 \in \Omega_+$ (特に x_0 は内点) であり、さらに x_0 は Ω_+ 上で定義された関数

$$F(x) = \frac{k(x)}{R(x)^{\frac{2}{N-2}}}, \quad x \in \Omega_+$$

の最大点となる。

(1.1) (または (1.2)) で係数関数が定数 1 のとき、1 点爆発条件

$$\frac{\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 dx}{\|u_{\varepsilon}\|_{L^{p+1}(\Omega)}^2} = S_N + o(1) \quad \left(\text{または} \quad \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 dx}{\|u_{\varepsilon}\|_{L^{p-\varepsilon+1}(\Omega)}^2} = S_N + o(1) \right)$$

をみたす解 u_{ε} の爆発点は内点であり、領域の Green 関数 $G(x, y)$ から定まる (正值) Robin 関数 $R(x) = \lim_{y \rightarrow x} [\frac{1}{(N-2)\sigma_N} |x - y|^{2-N} - G(x, y)]$ の臨界点だったことに注意する。([14],[16]). ここで σ_N は $(N-1)$ 次元球面の体積を表す。さらに、係数関数が定数 1 のときの (1.2) の最小エネルギー解の爆発点は Robin 関数の最小点である。([28], [6]). このことは (1.1) に対しても成立する。([21]).

Theorem 2.1 の証明の要点は、Rey [17] と同様に Bahri-Coron [1] による 1 点爆発解の標準分解を用いて、 $S_{\varepsilon,k}$ の $\varepsilon \rightarrow 0$ の際の詳しい漸近展開を得ることである。

Theorem 2.1 に関連して、最小エネルギー解 u_{ε} の爆発現象に起因する定性的性質として次が得られた。

Theorem 2.2 ([25]) $N \geq 6$ とする。前定理と同じ仮定の下に、さらに行列

$$\left(\frac{k_{x_i, x_j}}{k} - \frac{2}{N-2} \frac{R_{x_i, x_j}}{R} \right)_{1 \leq i, j \leq N} (x), \quad x \in \Omega_+$$

が爆発点 x_0 で非特異であるとする。このとき最小エネルギー解 u_{ε} は十分小さい $\varepsilon > 0$ で非退化である。つまり u_{ε} の周りでの線形化作用素 $L_{\varepsilon} = -\Delta - c_0 p u_{\varepsilon}^{p-1} \cdot -\varepsilon k(x) \cdot$ ($H_0^1(\Omega)$ に作用) は 0 を固有値に持たない。

$N \geq 5$ かつ $k \equiv 1$ のとき、Grossi [11] は 1 点爆発条件をみたす解 u_{ε} に対して、もしその爆発点が Robin 関数の非退化臨界点ならば u_{ε} 自身も十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して非退化であることを示した。Theorem 2.2 は Grossi の結果の係数関数付き方程式への拡張であるが、解のクラスはより制限されている。

Theorem 2.2 にあらわれる行列は $\log F$ の Hesse 行列とは異なることに注意する。つまり爆発点の位置決めをする機構と爆発解の非退化性を決めるそれとの間には齟齬がある。この現象は係数関数が定数のときには見られなかったものである。

Theorem 2.2 の証明には Han [14] の議論による次の漸近挙動の結果を用いる。以下、 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^{\infty}(\Omega)}$ と略記する。

Proposition 2.3 $N \geq 4$ とする。 $u_{\varepsilon}, x_{\varepsilon}$ 等は以前と同じとすると次が成り立つ。

- ε によらない $C > 0$ が存在して次の各点評価式

$$u_\varepsilon(x) \leq C \frac{\|u_\varepsilon\|}{\left(1 + \|u_\varepsilon\|^{\frac{4}{N-2}} |x - x_\varepsilon|^2\right)^{\frac{N-2}{2}}}, \quad \forall x \in \Omega$$

が成り立つ。

- $\|u_\varepsilon\|_{u_\varepsilon} \rightarrow (N-2)\sigma_N G(\cdot, x_0)$ in $C_{loc}^2(\bar{\Omega} \setminus \{x_0\})$, ($\varepsilon \rightarrow 0$).
- $a_N = \int_0^\infty \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{N-2}} dr$ ($N \geq 5$) とおくと

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \|u_\varepsilon\|^{\frac{2(N-4)}{N-2}} = \frac{(N-2)^3}{2a_N} \sigma_N \frac{R(x_0)}{k(x_0)} \quad (N \geq 5),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \|u_\varepsilon\| = 4\sigma_4 \frac{R(x_0)}{k(x_0)} \quad (N = 4).$$

3 近臨界指数の場合

この節では (1.2) について考察する。方程式 (1.2) の場合は係数関数の影響がより強くあらわれる。 $\varepsilon > 0$ のとき (1.2) は 劣臨界指数を持つので、容易に最小エネルギー解 u_ε の存在を示すことができる。この最小エネルギー解は Sobolev 商の漸近展開の計算から、係数関数 K の最大点で爆発することが分かる。もし K の最大点が領域の境界上にあれば、最小エネルギー解は境界爆発を起こすことになる。

係数関数 $K \not\equiv 1$ のときの (1.2) の最小エネルギー解の $\varepsilon \rightarrow 0$ の際の漸近挙動は Hebey [15] によって得られた。

以下では係数関数 K に次の仮定を置く。

(K) $K \in C^2(\bar{\Omega})$, $0 < K(x) \leq 1$, K は Ω 内にただ一つの非退化最大点 $x_0 \in \Omega$, $K(x_0) = 1$ を持つ。

Theorem 3.1 (Hebey [15], [24]) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ を滑らかな有界領域とし、(K) を仮定する。 u_ε を (1.2) の最小エネルギー解とし、 $x_\varepsilon \in \Omega$ を $u_\varepsilon(x_\varepsilon) = \|u_\varepsilon\|$ をみたす点とする。このとき必要ならば部分列を取ることで次が成り立つ。

$$\begin{cases} |x_\varepsilon - x_0| = O(\|u_\varepsilon\|^{-2}) & N = 3, \\ |x_\varepsilon - x_0| = o(\|u_\varepsilon\|^{-2/(N-2)}) & N \geq 4, \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|^\varepsilon = 1,$$

$$\|u_\varepsilon\|_{u_\varepsilon} \rightarrow (N-2)\sigma_N G(\cdot, x_0) \quad \text{in } C_{loc}^2(\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}), \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \|u_\varepsilon\|^2 &= 128R(x_0) & N = 3, \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \|u_\varepsilon\|^2 &= 48\pi^2 R(x_0) - \frac{1}{2}\Delta K(x_0) & N = 4, \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \|u_\varepsilon\|^{\frac{4}{N-2}} &= -\frac{2}{(N-2)^2}\Delta K(x_0) & N \geq 5.
\end{aligned}$$

Hebey の結果は、1 点爆発解の幾何学的形状に関する Gladiali-Grossi [7], Grossi-Molle [12] の結果を係数関数付き方程式 (1.2) に拡張する際に [23] で用いられ、後に [24] で Navier 境界条件付きの重調和方程式の最小化エネルギー解にも拡張された。[15] では (K) より強い仮定の下で Theorem 3.1 を示していたが、[24] の議論を用いることで、仮定を弱めることができる。

この漸近挙動の結果を用いて、次の非退化性の結果を示すことができる。

Theorem 3.2 ([26]) 前定理と同じ仮定の下で（特に x_0 は K の非退化最大点）、(1.2) の最小エネルギー解 u_ε は十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して非退化である。

(1.2) の場合には、爆発点の位置決めを行う関数と非退化性を決定する関数が同じであることに注意しておく。

4 漸近的非退化性の証明のスケッチ

Theorem 2.2, 3.2 どちらの場合も背理法による。Theorem 2.2 の場合について述べる。まず、スケール変換

$$\tilde{u}_\varepsilon(y) = \frac{1}{\|u_\varepsilon\|} u_\varepsilon \left(\frac{y}{\|u_\varepsilon\|^{\frac{2}{N-2}}} + x_\varepsilon \right), \quad y \in \Omega_\varepsilon = \|u_\varepsilon\|^{\frac{2}{N-2}} (\Omega - x_\varepsilon)$$

を定義すると、 $u_\varepsilon \rightarrow U$ が $\mathbb{R}^N$ 上コンパクト一様収束の意味で成り立つことが分かる。 $U = \left(\frac{1}{1+|y|^2}\right)^{(N-2)/2}$ は $-\Delta U = c_0 U^p$ in $\mathbb{R}^N$, $0 < U \leq 1$, $U(0) = 1$ の一意解 ([5]) で、Talenti 関数と呼ばれる。背理法の仮定により、 $\varepsilon \downarrow 0$ に対して

$$\begin{cases} -\Delta v = c_0 p u_\varepsilon^{p-1} v + \varepsilon k(x) v & \text{in } \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} = 0, \\ \|v\| = 1 \end{cases}$$

が解 v_ε を持ったとすると、スケール変換 $\tilde{v}_\varepsilon(y) = \frac{1}{\|u_\varepsilon\|} v_\varepsilon \left(\frac{y}{\|u_\varepsilon\|^{2/(N-2)}} + x_\varepsilon \right)$ は、通常の楕円型正則性の議論から、ある関数 V に対して $\tilde{v}_\varepsilon \rightarrow V$ in $C_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$ となる。 V は極限方程式

$$-\Delta V = c_0 p U^{p-1} V \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla V|^2 dy < \infty$$

の解、つまり U の回りでの線形化方程式の解となる。

以下の議論では次の事実が重要になる。

Lemma 4.1 (Bianchi-Egnell [2]) U の回りでの線形化方程式の解 $V \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ は

$$V(y) = \sum_{j=1}^N a_j \frac{y_j}{(1 + |y|^2)^{N/2}} + b \frac{1 - |y|^2}{(1 + |y|^2)^{N/2}}$$

($a_j, b \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, N$) とあらわすことができる。つまり U の回りでの線形化方程式の解空間は

$$\text{span} \left\{ \frac{\partial U}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial y_N}, \frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1} (\lambda^{(N-2)/2} U(\lambda y)) \right\}$$

とあらわされる。

Lemma 4.1 は $(N + 1)$ 次元多様体

$$\mathcal{M} = \{U_{\lambda,a}(y) = \lambda^{\frac{(N-2)}{2}} U(\lambda(y-a)) | \lambda > 0, a \in \mathbb{R}^N\} \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

が汎関数 $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{c_0}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx$ の非退化臨界多様体になっていることを示している。 U の回りでの線形化作用素は核を持つので、もちろん各 $U_{\lambda,a} \in \mathcal{M}$ は退化しているのだが、Lemma 4.1 はその退化の度合いが方程式の不変性からくる自明なものに限るということを述べている。この非退化性が爆発解 u_ε に遺伝して、漸近的非退化性が得られると考えられる。

実際の証明では、以下のステップで矛盾を示す。**step 1.** $b = 0$. **step 2.** $a_j = 0$ for $j = 1, \dots, N$. **step 3.** $V \equiv 0$ ならば矛盾。

5 関連する話題

既に述べたような漸近的非退化性の結果は、2次元有界領域における Liouville-Gelfand 方程式 $-\Delta u = \lambda V(x)e^u$ の1点爆発解 ($\int_{\Omega} \lambda_n e^{u_n} dx \rightarrow 8\pi$ をみたす解) の族に対しても証明されている。([8], [19]). またこの場合も含めて、係数関数がすべて定数のときには、関連する線形固有値問題のスペクトルのより詳細な挙動も調べられている。臨界 Sobolev 型方程式の場合は Grossi-Pacella [13], Liouville-Gelfand 方程式の場合には Gladiali-Grossi [9] を参照のこと。漸近的非退化性の結果は、係数関数が定数の場合には主部が重調和作用素の場合にも拡張され ([27])、また、対称領域上では非退化性のほかに漸近的一意性も得られる。([10], [20], [18]).

参考文献

- [1] A. Bahri, and J.M. Coron: *On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent: the effect of the topology of the domain*, Comm. Pure and Appl. Math. **41** (1988) 253-294.
- [2] G. Bianchi, H. Egnell: *A note on the Sobolev inequality*, J. Funct. Anal. **100** (1991) 18-24.
- [3] H. Brezis: *Elliptic equations with limiting Sobolev exponents. The impact of topology*, Comm. Pure and Appl. Math. **39** (1986) 17-39.
- [4] H. Brezis, and L. Nirenberg: *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure and Appl. Math. **36** (1983) 437-477.
- [5] L. Caffarelli, B. Gidas and J. Spruck: *Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical growth*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989) 271-297.
- [6] M. Flucher, and J. Wei: *Semilinear Dirichlet problem with nearly critical exponent, asymptotic location of hot spots*, Manuscripta Math. **94** (1997) 337-346.
- [7] F. Gladiali, and M. Grossi: *Strict convexity of level sets of solutions of some nonlinear elliptic equations*, Proc. Royal Soc. of Edinburgh **134A** (2004) 363-373.
- [8] F. Gladiali, and M. Grossi: *Some result for the Gelfand's problem*, Comm. P.D.E. **29** (2004) 1335-1364.
- [9] F. Gladiali, and M. Grossi: *On the spectrum of a nonlinear planar problem*, to appear in Ann. Inst. Henri Poincaré.
- [10] M. Grossi: *A uniqueness result for a semilinear elliptic equation in symmetric domains*, Adv. Diff. Eq. **5** (2000) 193-212.
- [11] M. Grossi: *A nondegeneracy result for some nonlinear elliptic equation*, NoDEA **12** (2005) 227-241.
- [12] M. Grossi, and R. Molle: *On the shape of the solutions of some semilinear elliptic problems*, Comm. Contemp. Math. **5** (2003) 85-99.
- [13] M. Grossi, and F. Pacella: *On an eigenvalue problem related to the critical exponent*, Math. Z. **250** (2005) 225-256.
- [14] Z. C. Han: *Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent*, Ann. Inst. Henri Poincaré. **8** (1991) 159-174.
- [15] E. Hebey: *Asymptotic behavior of positive solutions of quasilinear elliptic equations with critical Sobolev growth*, Diff. Int. Eq. **13** (2000) 1073-1080.
- [16] O. Rey: *Proof of two conjectures of H. Brezis and L.A. Peletier*, Manuscripta Math. **65** (1989) 19-37.

- [17] O. Rey: *The role of the Green's function in a non-linear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent*, J. Funct. Anal. **89** (1990) 1-52.
- [18] T. Sato, and T. Suzuki: *Convexity and uniqueness of the solution to the Liouville equation*, Int. J. Pure and Appl. Math. **23** (2005) 1-21.
- [19] T. Sato, and T. Suzuki: *Asymptotic non-degeneracy of the solution to the Liouville-Gel'fand problem in two dimensions*, Comment. Math. Helv. **82** (2007) 353-369.
- [20] T. Sato, and F. Takahashi: *Asymptotic uniqueness of solutions for an elliptic problem with nearly critical growth on symmetric domains*, to appear in Communications on Applied Nonlinear Analysis
- [21] F. Takahashi: *On the location of blow up points of least energy solutions to the Brezis-Nirenberg equation*, Funkcialaj Ekvacioj **47** (2004) 145-166.
- [22] F. Takahashi: *Concentration points of least energy solutions to the Brezis-Nirenberg equation with variable coefficients*, "Self-similar solutions of nonlinear PDE" Banach Center Publ. **74** (2006) 217-234.
- [23] F. Takahashi: *On the shape of level sets of least energy solutions to some elliptic problems with nearly critical growth*, Applicable Anal. **86** (2007) 851-859.
- [24] F. Takahashi: *Asymptotic behavior of least energy solutions for a biharmonic problem with nearly critical growth*, to appear in Asymptotic Anal.
- [25] F. Takahashi: *Asymptotic nondegeneracy of least energy solutions to an elliptic problem with the critical Sobolev exponent*, to appear in Advances Nonlinear Studies
- [26] F. Takahashi: *Nondegeneracy of least energy solutions for an elliptic problem with nearly critical nonlinearity*, submitted
- [27] F. Takahashi: *An asymptotic nondegeneracy result for a biharmonic equation with the nearly critical growth*, to appear in NoDEA.
- [28] J. Wei: *Asymptotic behavior of least energy solutions to a semilinear Dirichlet problem near the critical exponent*, J. Math. Soc. Japan **50** (1998) 139-153.