特別講演

Lifespan の漸近評価から見た非線型 Schrödinger 方程式とその周辺

砂川 秀明 (筑波大学 数理物質科学研究科)

概 要

非線型 Schrödinger 方程式は様々な立場から盛んに研究され続けているが, "lifespan の漸近評価" という観点からはこれまで殆ど何も調べられていなかったように思われる. 本講演ではそのような視点から非線型 Schrödinger 方程式を考察し, そこから分かることを論じたい.

1. 非線型波動方程式の古典解の lifespan と零条件

非線型波動方程式に対しては lifespan の精密な評価に関する研究が盛んに行われているが, その理由の一つは, それがいわゆる零条件 (null condition) と密接に関係しているからであろう. 本題に入る前にそのことを簡単に復習しておこう.

典型例として次の初期値問題を取り上げる：

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_x u = \displaystyle\sum_{j,k,l=0}^{3} g_{jkl}\partial_j u\, \partial_k \partial_l u, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = \varepsilon\varphi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \varepsilon\psi(x) & x\in\mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{QLW}$$

但し, $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\partial_0 = \partial/\partial t$, $\partial_j = \partial/\partial x_j (j=1,2,3)$, g_{jkl} は実定数で $g_{j00}=0$.

空間 3 次元において 2 次の非線型項を持つ波動方程式は, 一般には初期値がどんなに小さくて滑らかであっても有限時間までしか古典的な意味での解を持ち得ないことが知られている. (一方で, 時間局所解の存在はよく知られている.) そこで, いつ頃どのような特異性が生じるのかが問題になるのだが, それを解明するための第 1 ステップとして, 古典解の最大存在時間 (lifespan) の評価が問題になる. (QLW) の lifespan を T_ε とすると, 十分小さな ε に対して $T_\varepsilon \geq \exp(c/\varepsilon)$ $(\exists c>0)$ という評価が成り立つことは一般論から比較的容易に示されるが, 1987 年に John と Hörmander はそれよりもはるかに精密な次の評価式を証明している.

定理 1 ([17], [15]). (QLW) の解の最大存在時間 T_ε について次が成り立つ：

$$\liminf_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \log T_\varepsilon \geq \frac{1}{\displaystyle\sup_{\rho\in\mathbb{R},\,\omega\in S^2}\left[-\frac{1}{2}G(\omega)\partial_\rho^2\mathcal{F}(\rho,\omega)\right]} \tag{1}$$

(右辺が 1/0 になる場合は $+\infty$ に読み替えて成立[1]). 但し, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in S^2$, $\omega_0 = -1$ に対して

$$G(\omega) = \sum_{j,k,l=0}^{3} g_{jkl}\omega_j\omega_k\omega_l,$$

また, $\rho \in \mathbb{R}$ と $\omega \in S^2$ に対して

$$\mathcal{F}(\rho, \omega) = \frac{1}{4\pi}\int_{\omega\cdot y=\rho} \psi(y)\, dS_y - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{\omega\cdot y=\rho} \varphi(y)\, dS_y.$$

注意 1. 任意の $\omega \in S^2$ に対して $G(\omega) = 0$ であるとき, (QLW) は零条件を満たすという. 評価式 (1) から, 零条件が満たされるとき解の存在時間は一般の場合に比べてはるかに長いことを読み取れるが, よく知られているように, 零条件は時間大域的な古典解が存在するための非線型項の形状に関する十分条件である ([7], [16], [18], [20] 等).

注意 2. 評価式 (1) は最適である. 実際, 零条件が満たされなければ, (φ と ψ を $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ からうまく取ると) ε がどんなに小さくても解は有限時間で爆発し, さらにちょうど上式で下極限を上極限に置き換えて不等号を逆向きにした式が成り立つことが知られている (詳細については [1], [2], [3], [15], [16], [18], [29] およびその中の参考文献を参照のこと).

注意 3. 線型部分が d'Alembertian の場合には, 非線型項がもっと一般的な場合にも, 上の例で言うところの $G(\omega)$ に当たる量に注目することで非線型項が解の長時間挙動に及ぼす影響をかなり詳しく調べられている (最近の進展については [4], [5], [21], [22] 等).

さて, 本講演で問題にしたいのは以上のことの非線型 Schrödinger 方程式版である. より具体的に言えば, 非線型項に未知函数の微分を含む非線型 Schrödinger 方程式に対して定理 1 の類似に当たる lifespan の評価式を導き, その右辺の分母が非線型項にどのように依存するのかを知りたい. そこから非線型 Schrödinger 方程式における零条件の類似物が自然に現れるはずであり, これを軸にして これまで個別に論じられてきた諸結果に統一的な見通しを与えられると期待されるからである.

2. 非線型 Schrödinger 方程式の場合

以下では, 次の初期値問題に話を限る:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u = F(u, \partial_x u), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varepsilon\varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{NLS}$$

[1](1) の右辺は常に正または $+\infty$ である. 実際, φ, ψ の台は compact だから $\rho \gg 1$ のとき $\mathcal{F}(\rho, \omega) = 0$.

但し, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (Schwartz class). また, 非線型項 F は $(u, \overline{u}, \partial_x u, \overline{\partial_x u})$ に関する複素係数の 3 次斉次多項式であって, ゲージ不変, つまり次を満たすものとする：

$$F(e^{i\theta}v, e^{i\theta}q) = e^{i\theta}F(v,q) \quad \text{for all} \quad v, q \in \mathbb{C} \ \text{ and } \ \theta \in \mathbb{R}.$$

このとき (NLS) の解の最大存在時間を T_ε とすると, 十分小さな ε に対して $T_\varepsilon \geq \exp(c/\varepsilon^2)$ ($\exists c > 0$) が成り立つことは知られている[2]. 本講演の 1 つめの結果はこの評価の精密化である.

定理 2 ([27]). (NLS) の解の最大存在時間 T_ε について次が成り立つ：

$$\liminf_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^2 \log T_\varepsilon \geq \frac{1}{\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left[2|\hat{\varphi}(\xi)|^2 \mathrm{Im}\, F(1, i\xi) \right]} \tag{2}$$

(右辺が 1/0 になる場合は $+\infty$ に読み替えて成立[3]). 但し, $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} \varphi(y) dy.$$

評価式 (2) において, 前節の定理 1 で言うところの $G(\omega)$ に相当するものは $\mathrm{Im}\, F(1, i\xi)$ である. そこでこの量が恒等的に消える場合についてもう少し詳しく見てみよう. ゲージ不変性を持つ斉 3 次の非線型項 F は, 一般性を失うことなく

$$F(u,q) = \lambda_1 |u|^2 u + \lambda_2 |u|^2 q + \lambda_3 u^2 \overline{q} + \lambda_4 u |q|^2 + \lambda_5 \overline{u} q^2 + \lambda_6 |q|^2 q$$

($\lambda_1, \cdots, \lambda_6$ は複素定数) の形に表せる. この F と $\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathrm{Im}\, F(1, i\xi) = \mathrm{Im}\, \lambda_1 + \mathrm{Re}(\lambda_2 - \lambda_3)\xi + \mathrm{Im}(\lambda_4 - \lambda_5)\xi^2 + \mathrm{Re}\, \lambda_6 \xi^3$$

となるから, 任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して $\mathrm{Im}\, F(1, i\xi) = 0$ であることは

$$\lambda_1,\ (\lambda_4 - \lambda_5) \text{ が実数},\ (\lambda_2 - \lambda_3),\ \lambda_6 \text{ が純虚数} \tag{3}$$

であることと同値である. これは Hayashi–Naumkin–Uchida [13] で課されていた条件そのものである. [13] では (3) の条件の下, (NLS) は (適当な重みつき Sobolev 空間の中に) 時間大域解を唯一つ持つこと, および $t \to \infty$ において解が $x \in \mathbb{R}$ に関して一様に

$$\frac{1}{\sqrt{t}} W\left(\frac{x}{t}\right) \exp\left(\frac{ix^2}{2t} + iG\left(\frac{x}{t}\right) \log t\right) + o(t^{-1/2}) \tag{4}$$

[2]空間次元が 2 以上の場合には解の時間大域存在が知られている ([6]).

[3]$|\xi| \to \infty$ のとき $\hat{\varphi}(\xi) = O(|\xi|^{-\infty})$, $F(1, i\xi) = O(|\xi|^3)$ より $\lim_{|\xi| \to \infty} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \mathrm{Im}\, F(1, i\xi) = 0$ となるから, (2) の右辺は常に正または $+\infty$ である.

($G, W \in L^\infty$ で G は実数値関数) という漸近形を持つことが示されている ([10], [11], [14], [23], [24] 等も参照のこと). また, $F(1,i\xi)$ の虚部だけでなく実部も恒等的に 0 であることは F が $(\lambda u+\mu\partial_x u)\partial_x(|u|^2)$ (λ, μ は複素定数) と表されることと同値になるが, これは Katayama–Tsutsumi [19], [28] で扱われた非線型項に一致する. (彼らは, 非線型項がこの形のとき $t\to\infty$ において解が適当な自由解に漸近することを証明している. これは 1 次元で 3 次の非線型項を持つ Schrödinger 方程式においては例外的な挙動であるということを注意しておく.)

さて, $|\xi|\to\infty$ のとき $|\hat{\varphi}(\xi)|^2\mathrm{Im}\,F(1,i\xi)\to 0$ であることに注意して評価式 (2) の右辺をよく見ると, $\mathrm{Im}\,F(1,i\xi)$ が常に 0 以下でありさえすれば lifespan は一般の場合よりも長いことに気がつく. この場合に解が時間大域的に存在することを, 林仲夫氏, P.I.Naumkin 氏との共同研究によって最近証明できた. これが本講演の 2 つめの結果である.

定理 3 ([12]). 非線型項 F が

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\mathrm{Im}\,F(1,i\xi)\le 0$$

を満たすとする. このとき, (NLS) の時間大域解で $C([0,\infty);H^3)$ に属するものが唯一つ存在する. さらに $t\to+\infty$ のとき解は $x\in\mathbb{R}$ に関して一様に

$$u(t,x)=\frac{W(x/t)\exp\Big\{ix^2/(2t)+i\Phi(x/t)|W(x/t)|^2\mathcal{L}\big(t,\ |W(x/t)|^2\Psi(x/t)\big)\Big\}}{\sqrt{t}\sqrt{1-2\Psi(x/t)|W(x/t)|^2\log t}} +O\big(t^{-1/2}(\log t)^{-3/2}\big) \qquad (5)$$

という漸近形を持つ. ここで

$$\Phi(\xi)=\mathrm{Re}\,F(1,i\xi),\quad \Psi(\xi)=\mathrm{Im}\,F(1,i\xi),$$

$$\mathcal{L}(\tau,\eta)=-\int_1^\tau\frac{d\sigma}{\sigma(1-2\eta\log\sigma)}.$$

また, $W\in H^{\gamma,2}$ は初期値に依存する複素数値関数 $(1/2<\gamma<1)$ [4].

注意 4. 上の定理では初期条件に対する仮定はもっと弱められる. 例えば次の形で十分: $u(0,x)=u_0(x)$, $u_0\in H^{4,0}\cap H^{3,1}$ かつ $\|u_0\|_{4,1}+\|u_0\|_{3,0}\ll 1$.

上の定理において $\mathrm{Im}\,F(1,i\xi)\equiv 0$ の場合には $\Psi(\xi)\equiv 0$ となり, 解の漸近形 (5) は先に述べた [13] の結果 (4) と同じ形 (いわゆる「位相の修正」) になる. 特に $F(1,i\xi)$ の

[4] $f\in H^{s,\sigma}\iff \|f\|_{s,\sigma}=\|(1+x^2)^{\sigma/2}(1-\partial_x^2)^{s/2}f\|_{L^2}<\infty$

虚部だけでなく実部も消えるときは Ψ, Φ ともに恒等的に 0 になるから 解の漸近形は $\frac{1}{\sqrt{t}}W(x/t)e^{ix^2/(2t)}+\cdots$ という形, つまり自由解の漸近形と同じ形になる (cf. [19]). また, $\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\operatorname{Im}F(1,i\xi)<0$ の場合には $\Psi<0$ となるから, 解は $O((t\log t)^{-1/2})$ という (自由解よりも真に早い) オーダーで時間減衰することも分かる (そのような典型例は $F=\lambda|u|^2u$, $\operatorname{Im}\lambda<0$. なお, この例に対しては, Shimomura [25] によって解の時間減衰が調べられていた). このように, 定理3によって多くの先行結果を統一的に眺めることができる.

残る問題は定理 3 の条件が満たされない場合, つまり, ある $\xi_0\in\mathbb{R}$ が存在して

$$\operatorname{Im}F(1,i\xi_0)>0$$

となる場合である. (5) の右辺第 1 項の分母を見る限り, この場合には小さくて滑らかな初期データに対する有限時間爆発が起こること, さらに lifespan に関して (2) における下極限を上極限に置き換えて不等号を逆向きにした式が成り立つことを期待するのは自然なことと思われる. しかしこれを証明することはきわめて難しい未解決問題であり, 本稿執筆段階で講演者が知る限りでは, そのような結果はまだ一つも得られていないようである.

3. 非線型 Klein-Gordon 方程式の場合

非線型 Klein-Gordon 方程式に対しても前節で述べた結果に相当するものが既に得られているので紹介しておく. 次の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u-\partial_x^2 u+u=F(u,\partial_t u,\partial_x u,\partial_t\partial_x u,\partial_x^2 u), & t>0,\ x\in\mathbb{R},\\ u(0,x)=\varepsilon\varphi(x),\quad \partial_t u(0,x)=\varepsilon\psi(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{NLKG}$$

ここで φ,ψ は C_0^∞ に属する実数値関数, F は $(u,\partial_t u,\partial_x u,\partial_t\partial_x u,\partial_x^2 u)$ に関する実係数の 3 次斉次多項式とし, さらに準線型, つまり $(\partial_t\partial_x u,\partial_x^2 u)$ に関しては高々1 次であるとする. 非線型項 F と $z\in\mathbb{R}$ に対して

$$K_F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\cos\theta,\ -\cosh z\sin\theta,\ \sinh z\sin\theta,\ \cosh z\sinh z\cos\theta,\ -\sinh^2 z\cos\theta)e^{-i\theta}d\theta$$

とおく. このとき,

定理 4 ([8]). (NLKG) の古典解の最大存在時間 T_ε について次が成り立つ:

$$\liminf_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^2\log T_\varepsilon\geq\frac{1}{\sup_{|y|<1}\left[2|a_0(y)|^2(1-y^2)^{1/2}\operatorname{Im}K_F(\tanh^{-1}y)\right]}$$

(右辺が 1/0 になる場合は $+\infty$ に読み替えて成立). 但し, $|y|<1$ に対して

$$a_0(y)=e^{i\pi/4}\langle\xi\rangle^{3/2}\left[\hat{\varphi}(\xi)-\frac{i}{\langle\xi\rangle}\hat{\psi}(\xi)\right]\Big|_{\xi=\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}}.$$

定理 5 ([9], [26]). 非線型項 F が

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} \operatorname{Im} K_F(z) \le 0$$

を満たすとする. このとき, (NLKG) の時間大域解で $C^2([0,\infty)\times\mathbb{R})$ に属するものが唯一つ存在する. さらに $t\to+\infty$ のとき解は $x\in\mathbb{R}$ に関して一様に

$$u(t,x)=\frac{\operatorname{Re}\left[W(x/t)\exp\left\{i(t^2-|x|^2)_+^{1/2}+i\Phi(x/t)|W(x/t)|^2\mathcal{L}\big(t,\ |W(x/t)|^2\Psi(x/t)\big)\right\}\right]}{\sqrt{t}\sqrt{1-2\Psi(x/t)|W(x/t)|^2\log t}} +O\big(t^{-1/2}(\log t)^{-3/2}\big)$$

という漸近形を持つ. ここで

$$\Phi(y)=(1-y^2)_+^{1/2}\operatorname{Re}K_F(\tanh^{-1}y),$$

$$\Psi(y)=(1-y^2)_+^{1/2}\operatorname{Im}K_F(\tanh^{-1}y),$$

$$\mathcal{L}(\tau,\eta)=-\int_1^\tau\frac{d\sigma}{\sigma(1-2\eta\log\sigma)}.$$

また, $W(y)$ は $y=x/t$ についての滑らかな複素数値函数であって, $|y|\to1$ のとき十分早く減衰し, $|y|\ge1$ では 0 になるもの.

注意 5. ある $z_0\in\mathbb{R}$ で $\operatorname{Im}K_F(z_0)>0$ となる場合の解の有限時間爆発 (または時間大域存在) については, Yordanov や Keel–Tao 等による極めて特殊な例は知られているものの, 本質的な部分は全く未解決である.

参考文献

[1] S. Alinhac, *Blowup for nonlinear hyperbolic equations,* Birkhäuser, Boston, 1995.

[2] S. Alinhac, *Blowup of small data solutions for a quasilinear wave equations in two space dimensions,* Ann. of Math. **149** (1999), 97–127.

[3] S. Alinhac, *Blowup of small data solutions for a class of quasilinear wave equations in two space dimensions, II,* Acta Math. **182** (1999), 1–23.

[4] S.Alinhac, *An example of blowup at infinity for a quasilinear wave equation,* in "Autour de l'analyse microlocale" (G.Lebeau ed.), Astérisque **284** (2003), 1–91.

[5] S. Alinhac, *Semilinear hyperbolic systems with blowup at infinity,* preprint, 2004.

[6] H. Chihara, *The initial value problem for cubic semilinear Schrödinger equations,* Publ. RIMS. **32** (1996), 445–471.

[7] D. Christodoulou, *Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data,* Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), 267–282.

[8] J.-M. Delort, *Minoration du temps d'existence pour l'équation de Klein-Gordon non-linéaire en dimension 1 d'espace,* Ann. Inst. Henri Poincaré (Analyse non linéaire) **16** (1999), 563–591.

[9] J.-M. Delort, *Existence globale et comportement asymptotique pour l'équation de Klein-Gordon quasi linéaire à données petites en dimension* 1, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **34** (2001), 1–61.

[10] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *Asymptotic behavior in time of solutions to the derivative nonlinear Schrödinger equation,* Ann. Inst. Henri Poincaré (Phys. Theor.) **68** (1998), 159–177.

[11] N. Hayashi and P. I. Naumkin, *Asymptotics for large time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations,* Amer. J. Math. **120** (1998), 369–389.

[12] N. Hayashi, P. I. Naumkin and H. Sunagawa, *On the Schrödinger equation with dissipative nonlinearities of derivative type,* in preparation.

[13] N. Hayashi, P. I. Naumkin and H. Uchida, *Large time behavior of solutions for derivative cubic nonlinear Schrödinger equations,* Publ. RIMS **35** (1999), 501–513.

[14] N. Hayashi and T. Ozawa, *Modified wave operators for the derivative nonlinear Schrödinger equation,* Math. Ann. **298** (1994), 557–576.

[15] L. Hörmander, *The lifespan of classical solutions of nonlinear hyperbolic equations,* Springer Lecture Notes in Math., **1256** (1987), 214–280.

[16] L. Hörmander, *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations.* Springer Verlag, Berlin, 1997.

[17] F. John, *Existence for large times of strict solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions for small initial data,* Comm. Pure Appl. Math. **40** (1987), 79–109.

[18] F. John, *Nonlinear wave equations, formation of singularities.* Pitcher Lectures in the Mathematical Sciences, Lehigh University, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[19] S. Katayama and Y. Tsutsumi, *Global existence of solutions for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension,* Comm. Partial Differential Equations, **19** (1994), 1971–1997.

[20] S. Klainerman, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations,* Lectures in Appl. Math., **23** (1986), 293–326.

[21] H.Lindblad and I.Rodonianski, *The weak null condition for Einstein's equations,* C. R. Math. Acad. Sci. Paris **336** (2003), 901–906.

[22] H.Lindblad and I.Rodonianski, *Global existence for the Einstein vacuum equations in wave coordinates,* Comm. Math. Phys. **256** (2005), 43–110.

[23] T. Ozawa, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension,* Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.

[24] T. Ozawa, *On the nonlinear Schrödinger equations of derivative type,* Indiana Univ. Math. J. **45** (1996), 137–163.

[25] A. Shimomura, *Asymptotic behavior of solutions for Schrödinger equation with dissipative nonlinearities,* preprint, 2005.

[26] H. Sunagawa, *Large time behavior of solutions to the Klein-Gordon equation with nonlinear dissipative terms,* J. Math. Soc. Japan **58** (2006), 379–400.

[27] H. Sunagawa, *Lower bounds of the lifespan of small data solutions to the nonlinear Schrödinger equations,* to appear in Osaka J. Math.

[28] Y. Tsutsumi, *The null gauge condition and the one dimensional nonlinear Schrödinger equation with cubic nonlinearity,* Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 241–254.

[29] Hui Chen Yin, *The blowup mechanism of small data solutions for the quasilinear wave equations in three space dimensions,* Acta Math. Sin. **17** (2001), 35–76.