退化型 Keller-Segel 系の解の性質について

杉山由恵 (津田塾大学・数学科)

1 序

我々は次の Keller-Segel 系を考える.

$$(\mathrm{KS})_m \begin{cases} u_t &= \Delta u^m - \nabla \cdot \left(u^{q-1}\nabla v\right), & x \in \mathbb{R}^N,\ t>0, \\ \tau v_t &= \Delta v - \gamma v + u, & x \in \mathbb{R}^N,\ t>0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad \tau v(x,0) = \tau v_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

ここで $N \geq 1$ は空間次元であり, $m \geq 1,\ q \geq 2,\ \gamma > 0,\ \tau \geq 0$ は定数である. 初期データ u_0 は非負値関数であり, 条件 $u_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ かつ $u_0^m \in H^1(\mathbb{R}^N)$ を満たすものとする. $(\mathrm{KS})_m$ は Keller-Segel 系と呼ばれ, 走化性をもつ細胞性粘菌のライフサイクルの一部を記述する方程式である. ここで $u = u(x,t)$ は場所 x, 時刻 t での細胞性粘菌の細胞密度を表し, $v = v(x,t)$ は走化性物質 (細胞性粘菌が飢餓時に放出する化学物質で, 集合体形成に寄与する) の濃度を表す. 例えば Keller-Segel [4], Horstman[3], Suzuki[23] を参照のこと. Keller-Segel 系は, 右辺は解 u の 1 階導関数を含み, 強い非線形性を有している. 更にいまひとつの未知関数 v を含む連立微分方程式であり, 放物型方程式を解析する際の強力な手法である**最大値原理**や**比較定理**が適用不可能である. それ故, $(\mathrm{KS})_m$ は, $m = 1$ の場合でさえも, 解の先験（apriori）評価式を得ることは困難である. 更に, 一般の $m > 1$ においては, 基本解による**解の積分表示式**さえも存在しないため, $(\mathrm{KS})_m$ の解法は困難を極める.

1.1 半線形 Keller-Segel 系

Keller-Segel 系は, その中に含まれる幾つかのパラメーターの選び方によって, 半線形型, 準線形退化型, さらに放物-放物型, 放物-楕円型など様々なタイプの偏微分方程式が出現する. 特に $(\mathrm{KS})_m$ の第 1 式, 第 2 式で $m = 1,\ q = 2,\ \tau = 0$ としたとき, 方程式は永井モデルと呼ばれている. 永井モデルに対しては, これまでに多くの研究成果が報告されており, 時間大域的な解の存在・非存在定理について, 以下の事実が証明されている.

(i) $N = 1$ の場合には初期データの大きさによらず, 時間大域的に解 $\{u, v\}$ が存在する.
(ii) $N = 2$ の場合には $\|u_0\|_{L^1} = 8\pi$ を臨界値とし, 解 $\{u, v\}$ が時間大域的に存在するか, u が有限時間で爆発するかが決定される. (永井 [14] 他, 永井-仙葉-吉田 [16])

1981 年に提唱された Childress-Percus[1] の時間大域的な解の存在・非存在に関する予想は, 永井モデルの場合, 空間次元 $N = 1, 2$ に関しては, 上記 (i)–(ii) により肯定的に解決されているといえる. $N \geq 3$ については, Childress-Percus は以下のように予想した.

予想 空間 3 次元以上のとき, $\|u_0\|_{L^1}$ が小さくとも爆発解 u が存在する.

近年, 空間次元 3 次以上の場合についても解析が進み, $N \geq 3$ では $\|u_0\|_{L^1}$ ではなく, $\|u_0\|_{L^{\frac{N}{2}}}$ が解 $\{u, v\}$ の時間大域的存在, または有限時間爆発の指標となることが, 部分的ではあるが明らかにされてきた. (時間大域解の存在については, 杉山-国井 [27], 小薗-杉

山 [5]–[8], 有限時間爆発については杉山 [30]) 実際, $m=1,\ q=2$ の場合に以下が成り立つ.

成果 1 ([27], [5]–[8], **時間大域解**の存在) $N\geq 3,\ \tau\geq 0$ とする. $m=1,\ q=2$, かつ $\gamma\geq 0$ とする. このとき, ある正定数 $\delta=\delta(N)$ が存在して, $(u_0,\tau v_0)\in L_w^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)\cap BMO$ かつ

$$\|u_0\|_{L^{\frac{N}{2}}}+\tau\|v_0\|_{BMO}\leq\delta$$

なる初期データ $(u_0,\tau v_0)$ に対して, $(\mathrm{KS})_1$ は時間大域解 $\{u,v\}$ を有する.

成果 2 ([30], 解の**有限時間爆発**) $N\geq 3,\ \tau=0$ とする. $m=1,\ q=2$, かつ $\gamma\geq 0$ とする. このとき, 任意の $n=1,2,\cdots$ に対して, $u_{0,n}\in L^1\cap L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$ かつ

$$\|u_{0,n}\|_{L^1}\ \leq\ \frac{1}{n},\quad \|u_{0,n}\|_{L^{\frac{N}{2}}}\geq\delta,\qquad n=1,2,\cdots$$

なる非負値初期データの列 $\{u_{0,n}\}_{n=1}^{\infty}$ と, $u_n(x,0)=u_{n,0}(x)$ なる $[0,T_n),\ (T_n<\infty)$ 上の $(\mathrm{KS})_1$ の強解の列 $\{u_n(t),v_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して,

$$\limsup_{t\uparrow T_n}\|u_n(t)\|_{L^\infty}=\infty,\qquad n=1,2,\cdots \tag{1.1}$$

が成り立つ.

注意 1. 成果 2 は, 初期データの $L^{\frac{N}{2}}$-ノルムが時間大域解の存在・非存在を分ける指標となり得ることを示唆している. 同時に, 初期データの L^1-ノルムはその指標となり得ないことを主張している. これは, 前述の Childress-Percus の予想が正しいことを示している.

前述のように, 現象論の立場からは, 第 2 方程式に現れる係数 γ は, 微小正定値として取り扱われるべきである. しかしながら既存の結果では, $\gamma=0$ もしくは $\gamma=1$ として取り扱われている. そこで, 空間次元 $N\geq 2$ の場合に, $(\mathrm{KS})_1$ の解の爆発と係数 $\gamma>0$ の関係を調べた. ($N\geq 3$ については杉山 [30], $N=2$ については小薗-杉山 [8]) 実際, 我々は次の結果を得た.

成果 3 ([30], [8], 解の爆発における初期データの **2 次モーメント**と **L^1-ノルムの相関**) $N\geq 2$ とする. $\gamma_1\leq\gamma_2$ のとき $h_{\gamma_2}(s)\leq h_{\gamma_1}(s)$ なる, $\gamma>0$ を 1-パラメーターとする $s>0$ に関して単調増加関数の族 $\{h_\gamma(s)\}_{\gamma>0}$ が存在して, 非負値初期データ u_0 が条件

$$\int_{\mathbf{R}^N}|x|^2u_0(x)dx\leq h_\gamma(\|u_0\|_{L^1})$$

を満たせば, $(\mathrm{KS})_1$ の古典解 u は有限時間で必ず爆発する. すなわち, ある $T_*<\infty$ が存在して

$$\limsup_{t\uparrow T_*}\|u(t)\|_{L^\infty}=\infty \tag{1.2}$$

が成り立つ.

注意 2. $N\geq 3$ の解 u の爆発に関しては, 先行する成果として, 解の N 次モーメントに着目した永井 [13] 他がある. 一方で, 方程式の最高階が 2 階であることに起因して, いかなる空間次元であっても解 u の 2 次モーメントの時間的変化が, 爆発解の存在証明において重要な役割を演じる. この事実を有効に利用することによって, 上述の成果 2,3 が得られる.

空間 2 次元における爆発解の形状決定問題は, 1973 年 Nanjundiah の予想 [12] 以来の重要な問題である. [12], [1] においては, デルタ関数のように, 一点に質量が凝集する特異性を有する爆発解 u の存在が予想されている. $m=1,\ q=2,\ \tau=1$ であって, 空間 2 次元のとき, この予想が正しいことが接合漸近展開の手法で Herrero-Velazquez [2] 他により明らかにされた. 更に, 永井-仙葉-鈴木 [15] により, $(\mathrm{KS})_1$ の爆発解を $\{u,v\}$ とするとき, 孤立爆発点では解 u はデルタ関数的な特異性をもつことが示されている. [15] では, 除去可能特異点に対する ε-正則性を利用した方法が用いられる. また解の特異性に関する更なる成果として, 仙葉-鈴木 [21],[22] 他がある.

1.2 準線形退化型 Keller-Segel 系

次に, $(\mathrm{KS})_m$ の第 1 式, 第 2 式で $m>1,\ q\geq 2,\ \tau=0$ とした, 一般化された退化型 Keller-Segel 系 $(\mathrm{KS})_m$ を考える. 拡散の影響（次数 m）が非線形項（次数 q）に比べて大きい $m>q-\frac{N}{2}$ のときは, 初期データの大きさによらず時間大域的弱解が存在することが知られている. (杉山 [25], 杉山-国井 [27]) 実際, $(\mathrm{KS})_m$ が発散系（divergence form）であることから生じる解の積分量の保存則を基礎に, 適切な Lyapunov 関数の導入と部分積分法を駆使した手法で以下の結果を得た.

成果 4 ([25],[27], 拡散効果が強い場合の**時間大域的弱解の存在**) $N\geq 1$ とする. $q\geq 2,\ m>q-\frac{2}{N}$, かつ $\gamma\geq 0$ とする. このとき, 任意の非負値初期データ $u_0\in L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N),\ u_0^m\in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して, $(0,\infty)$ 上で定義された $(\mathrm{KS})_m$ の弱解 $\{u,v\}$ が存在する.

これに対して, 非線形性が拡散に比べて強い $q\geq m+\frac{2}{N}$ のときは, 小さな初期データに対して時間大域解の存在とその漸近公式を得ることが出来る. ([27], Luckhaus-杉山 [9]–[10])

成果 5 ([27],[9]–[10], 時間無限大での小さい解の**漸近公式**) $N\geq 2,\ \gamma>0$ とする. $q\geq 2$, $1\leq m\leq q-\frac{2}{N}$ に対して, ある正定数 $\delta(m,q,N)$ が存在して, 非負値初期データ $u_0\in L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N),\ u_0^m\in H^1(\mathbb{R}^N)$ が条件 $\|u_0\|_{L^{\frac{N(q-m)}{2}}}\leq\delta$ を満たすならば, $(\mathrm{KS})_m$ の $(0,\infty)$ 上の弱解 $\{u,v\}$ が存在して,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\sigma_m(1-\frac{1}{p})}\|u(\cdot,t)-V(\cdot,t;\|u_0\|_{L^1})\|_{L^p(B_{t,R})}=0,\quad 1<p<\infty \tag{1.3}$$

が成り立つ. ここで, $\sigma_m=\frac{N}{N(m-1)+2}$, $B_{t,R}=\{x\in\mathbb{R}^N;|x|<Rt^{\frac{\sigma_m}{N}}\}$ であり, $V(x,t;M)$ は $\int_{\mathbb{R}^N}V(x,t;M)dx=M,\ \forall t>0$ なる関数で, $m>1$ のときには, 次の多孔質媒質方程式（PM）に対する Barenblatt の自己相似解である.

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\Delta U^m. \tag{PM}$$

また, $m=1$ のときは $V(x,t;\|u_0\|_{L^1})=\|u_0\|_{L^1}G_t(x)$ となる. ただし, $G_t(x)=(4\pi t)^{-\frac{N}{2}}\exp(-\frac{|x|^2}{4t})$ は Gauss 核である.

注意 3. (i) 特に半線形 Keller-Segel 系, すなわち $m=1$ の場合, 解の漸近公式に関する先行結果として永井-Syukuinn-梅迫 [17] がある. 彼らの手法では解の積分表示式が本質的である. 一方, 準線形退化型 Keller-Segel 系では解の積分表示式は存在せず, その漸近形の決定には, 弱解を構成する際に得られる先験評価式と, スケール変換則が重要な役割を演じる.
(ii) 初期データの関数空間 $L^{\frac{N(q-m)}{2}}(\mathbb{R}^N)$ は $(\mathrm{KS})_m$ のスケール変換に関して不変なノルムを定義している. 従って, 成果 5 の (1.3) における, $t\to\infty$ の解の漸近レートをスケール

変換則を用いて導出する通常の方法は, 臨界指数 $q=m+\frac{N}{2}$ の場合は適用できない. そこで, 第2方程式の解 v の表示式 $v=(-\Delta+\gamma)^{-1}u$ に現れる係数 γ を, ラプラス作用素のレゾルベントパラメーターと見なし, そのレゾルベント評価式を v のスケール変換関数に適用することにより, 臨界指数をもつ場合にも所望の漸近レートを得ることができる.

非線形性が拡散に比べて強い $q\geq m+\frac{2}{N}$ のとき, 大きな初期データに対して, 解の有限時間における爆発現象が証明できる. 実際, 対称性を考慮するため $q=2$ のときに限られるが, 次の主張が成り立つ. (杉山 [26])

成果 6 ([26], 解の**爆発**) $N\geq 3$ とする. $q=2,\ 1<m\leq 2-\frac{2}{N}$, かつ $\gamma\geq 0$ とする.

(1) 非負値初期データ $u_0\in L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N),\ u_0^m\in H^1(\mathbb{R}^N),\ |x|^2u_0\in L^1(\mathbb{R}^N)$ が条件

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0^m(x)dx \ < \ \frac{m-1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\cdot(-\Delta+\gamma)^{-1}u_0(x)dx$$

満たせば, $(\mathrm{KS})_m$ の弱解 $\{u,v\}$ に対して, ある $T_*<\infty$ が存在して

$$\limsup_{t\uparrow T_*}\|u(t)\|_{L^\infty}=\infty \tag{1.4}$$

が成り立つ.

(2) 任意の $n=1,2,\cdots$ に対して,

$$C(N) \ < \ \|u_{0,1}\|_{L^{\frac{N(2-m)}{2}}} \ < \ \|u_{0,2}\|_{L^{\frac{N(2-m)}{2}}} \ < \ \cdots$$

なる初期データの列 $\{u_{0,n}\}_{n=1}^\infty\in L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ と, $u_n(x,0)=u_{n,0}(x)$ なる $[0,T_n),\ (T_n<\infty)$ 上の $(\mathrm{KS})_m$ の弱解の列 $\{u_n(t),v_n(t)\}_{n=1}^\infty$ が存在して, (1.1) が成り立つ.

注意 4. 上記の成果 4, 5, 6 は準線形退化放物型方程式の拡散の強さ m と非線形項の指数 q が関係式 $q=m+\frac{2}{N}$ をボーダーラインとして, 解の時間大域存在と有限時間爆発が起こることを示している. これは, 半線形放物型方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+u^q \tag{F}$$

においてよく知られている**藤田指数** $q=1+\frac{2}{N}$ の一般化と見なせる.

特に, 臨界指数 $q=m+\frac{2}{N}$ であるとき, 対称性を考慮するため $q=2$ のときに限られるが, 前述の成果 5 における時間大域解の存在を保証する臨界正定数 $\delta(m,N)$ は $(2N^2\pi)^{\frac{N}{2}}\Gamma(\frac{N}{2})/\Gamma(N)\leq\delta$ なる下からの評価に従う. 実際, このとき $\frac{N(2-m)}{2}=1$ となり, 以下の結果が成り立つ. (杉山 [29])

成果 7 ([29], **臨界指数**における**時間大域解の存在**を保証する**初期データの L^1-ノルムの大きさ**)
$N\geq 3$ とする. $m=2-\frac{2}{N},\ \gamma\geq 0$ とする. $\delta_0(N)<\delta_1(N)$ を次のように定める.

$$\delta_0(N) \ = \ (2N^2\pi)^{\frac{N}{2}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{\Gamma(N)}, \quad \delta_1(N) \ = \ \left(2N^2\pi\right)^{\frac{N}{2}}\cdot\frac{2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{N}\cdot\frac{1}{\Gamma(\frac{N}{2})}.$$

このとき, 次の (1),(2) が成り立つ.

(1) 非負値初期データ $u_0\in L^1\cap L^\infty(\mathbb{R}^N),\ u_0^m\in H^1(\mathbb{R}^N)$ が次の条件

$$\|u_0\|_{L^1} \ < \ \delta_0(N)$$

を満たすならば, $(\mathrm{KS})_m$ は時間大域的弱解 $\{u, v\}$ を有する.

(2) 任意の $n = 1, 2, \cdots$ に対して, $u_{0,n} \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ かつ

$$\delta_1(N) \ < \ \|u_{0,1}\|_{L^1} \ < \ \|u_{0,2}\|_{L^1} \ < \ \cdots$$

なる非負値初期データの列 $\{u_{0,n}\}_{n=1}^\infty$ と, $u_n(x, 0) = u_{n,0}(x)$ なる $[0, T_n)$, $(T_n < \infty)$ 上の $(\mathrm{KS})_m$ の弱解の列 $\{u_n(t), v_n(t)\}_{n=1}^\infty$ が存在して, (1.1) が成り立つ.

注意 5. 上記の結果は, $N \geq 3$ のとき成立するものであるが, 形式的に $N = 2$ を代入すれば, $\delta_0(2) = \delta_1(2) = 8\pi$ を得る. この結果は, $m = 1$ における半線形放物型方程式系 $(\mathrm{KS})_1$ の 2 次元におけるよく知られた事実の一般化と見なすことができる. 実際, 1.1 節 (ii) 参照のこと.

2 1次元準線形退化型 Keller-Segel 系の解の有限伝播性と界面

2.1 有限伝播性

前章では, $(\mathrm{KS})_m$, $m \geq 1$, $q \geq 2$ の弱解の時間大域的存在と非存在に関する臨界指数が $q = m + \frac{2}{N}$ であることを述べた. 更に, 劣臨界指数 $q < m + \frac{2}{N}$ における初期データの大きさによらない解の時間大域的存在と, 優臨界指数 $q \geq m + \frac{2}{N}$ における小さい解の漸近公式, 大きい解の有限時間爆発が明らかにされた. 更に, 臨界指数においては, 時間大域解の存在を保証する初期データの大きさに対する, 最良定数についてある種の評価を得た.

ところで, 多孔質媒質方程式 (PM) と熱方程式 $u_t = \Delta u$ の解の性質で顕著に異なるものとして**有限伝播性**が知られている. 実際, (PM) の非負値初期データがコンパクトな台をもてば, その解 $u(\cdot, t)$ もすべての時刻 $t > 0$ においてコンパクトな台をもつ. 一方, よく知られているように, 熱方程式の解は**無限伝播性**を有する. すなわち, 非負値初期データがコンパクトな台を持っていても, 解 u は $u(x, t) > 0$ がすべての $x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$ に対して成り立つ.

半線形 Keller-Segel 系, すなわち $m = 1$ の場合, 澤田 [20] により $(\mathrm{KS})_1$ の解 u は無限伝播性を示すことが証明されている. これに対して, 準線形退化型 $(\mathrm{KS})_m$, $m > 1$ においては, 解 u は有限伝播性を有する. (杉山 [31]) 解が有限伝播性をもつ方程式の典型例としては, 線形波動方程式がある. このように準線形退化型方程式である $(\mathrm{KS})_m$, $m > 1$ が, 時間に関して平滑化効果といった拡散現象を示すと同時に, ホイヘンスの原理に象徴される波動の性質をもつことは興味深い.

本章では $N = 1$, $m > 1$, すなわち, 1 次元準線形退化型 $(\mathrm{KS})_m$ について考察する. より詳しくは, $(\mathrm{KS})_m$, $m > 1$ の解のもつ有限伝播性とその界面の決定について, 最近得られた結果を報告する.

まず最初に $(\mathrm{KS})_m$ の弱解 u を構成し, その解について以下の性質 (i)-(ii) を示す.

(i) $u^{m-1}(x, t)$ は x に関して Lipschitz 連続である;

(ii) 任意の $\delta > 0$ に対して $u^{m-1+\delta}(x, t)$ は x に関して C^1-級の関数である.

$(\mathrm{KS})_m$ に対して, 速度ポテンシャルと呼ばれる u^{m-1} は多くの場所に登場する. 例えば u の冪乗 $m - 1$ は正則性に関する臨界指数である. 実際, (i),(ii) が示すように, 冪乗 $m - 1$ を境に, 微分可能性に変化が生じる. 特に u^{m-1} の Lipschitz 連続性が解の有限伝播性を保証する.

$(\mathrm{KS})_m$ と同じ主要項をもつ方程式としては (PM) がある. よく知られているように,

(PM) に対しては, 特解である Barenblatt 解の存在と, 比較定理がある. 与えられた初期データがコンパクトな台をもつとき, パラメーターを適当にとることにより, Barenblatt 解の台が初期データの台を含むようにできる. 比較定理により, 時間発展後も (PM) の解はその Barenblatt 解を超えることがないことが容易に従う. 故に, 退化放物型方程式 (PM) の解の有限伝播性の証明には, 特解の存在及び比較定理が本質的である. 残念ながら, $(\mathrm{KS})_m$ に対しては, これらの特解の存在も比較定理も知られていない.

一方, 波動方程式においては, 比較定理が成り立たないにも関わらず, 解の有限伝播性を示すことができる. 実際, 光錐 C_T

$$C_T \;\;:=\;\; \Big\{(x,t);\; -ct+a \le x \le ct+b, \quad 0 \le t < T\Big\}, \quad a<b,\; c>0$$

に沿う解の積分が重要な役割を果たす. ここで c は光速, すなわち, 波動の伝播速度である. 実際, 光速 c をもつ線形波動方程式の解 $u(x,t)$ は, 初期データ $u_0(x)$ が条件 $u_0(x) \equiv 0,\; a \le x \le b$ を満たすとき, $u(x,t) \equiv 0,\; (x,t) \in C_T$ であることが容易に示せる. 我々は, この線形波動方程式の光錐に沿う解の積分の方法にヒントを得て, 退化放物型方程式系 $(\mathrm{KS})_m$ に対して, 次のような時空間における非柱状領域 D_T を導入する.

$$D_T \;\;:=\;\; \Big\{(x,t);\; \xi(t) \le x \le \Xi(t), \quad 0 \le t < T\Big\}. \tag{2.1}$$

ここで $\xi(t)$, $\Xi(t)$ は次の常微分方程式の初期値問題の解である.

$$\text{(IE)} \qquad \begin{cases} \xi'(t) &= -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{m}{m-1}u^{m-1}\Big)(\xi(t),t) + u^{q-2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(\xi(t),t), \quad \xi(0)=a, \\ \Xi'(t) &= -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{m}{m-1}u^{m-1}\Big)(\Xi(t),t) + u^{q-2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(\Xi(t),t), \quad \Xi(0)=b. \end{cases}$$

実際, 以下に示されるように, $(\mathrm{KS})_m$ の初期データ u_0 が条件 $u_0(x) \equiv 0,\; a \le x \le b$ を満たすならば, 解 $u(x,t)$ は $u(x,t) \equiv 0,\; (x,t) \in D_T$ であることが従う.

定理の主張を述べる前に, まず $(\mathrm{KS})_m$ の弱解を以下で定義する.

定義 1 $m>1,\; q \ge 2,\; \gamma > 0$ とする. 初期データ u_0 は $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ かつ $u_0^m \in H^1(\mathbb{R})$ である非負値関数であるとする. $\mathbb{R} \times [0,T)$ 上で定義される非負値関数 $\{u,v\}$ は, 以下を満たすとき $[0,T)$ 上の $(\mathrm{KS})_m$ の弱解と呼ばれる.

i) $u \in L^\infty(0,T;L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}))$, $u^m \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R})) \cap C((0,T);L^2_{loc}(\mathbb{R}))$;

ii) $v \in L^\infty(0,T;H^2(\mathbb{R}))$;

iii) $\{u,v\}$ は超関数の意味で $(\mathrm{KS})_m$ を満たす. すなわち

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \big(\partial_x u^m \cdot \partial_x \varphi - u^{q-1}\partial_x v \cdot \partial_x \varphi - u \cdot \partial_t \varphi\big)\; dxdt \;=\; \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\cdot\varphi(x,0)\; dx$$

がすべての $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times [0,T))$ に対して成立する.

$$-\partial_x^2 v + \gamma v - u = 0$$

が $\mathbb{R} \times (0,T)$ のほとんど至るところで成立する.

$(\mathrm{KS})_m$ の弱解の時間局所存在については, [26, Theorem 1.1] により以下の結果が得られている.

命題 2.1 ([26], 弱解の**時間局所存在**と**一様有界性**) $m>1,\ q\geq 2$, かつ $\gamma>0$ とする．初期データ u_0 は非負値関数であるとする．このとき，$(\mathrm{KS})_m$ は弱解 $\{u,v\}$ を $[0,T_0)$ 上もつ．ここで，$T_0=\Big(\|u_0\|_{L^\infty}+2\Big)^{-q}$ ととれる．更に，$u(t)$ は次の先験評価に従う．すなわち，

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \quad\leq\quad \|u_0\|_{L^\infty}+2 \tag{2.2}$$

がすべての $0<t<T_0$ に対して成り立つ．

前述のように，我々は，(IE) の解 $\xi(t),\Xi(t)$ により定義される非柱状領域 D_T を構成しなければばならない．そのためには，速度ポテンシャルと呼ばれる u^{m-1} の正則性が重要な役割を演ずる．

定理 2.2 ([31], 弱解の **Lipschitz 連続性**) $m>1,\ q\geq 2m$, かつ $\gamma>0$ とする．u_0 は定義 *1* と同様な仮定に加えて，u_0^{m-1} は *Lipschitz* 連続とする．このとき，命題 *2.1* で得られた $[0,T_0)$ 上の弱解 u は次の (i)–(iii) を満たす．

(i) $u^{m-1}(x,t)$ はすべての $0\leq t<T_0$ に対して，x の関数として $\mathbb{R}$ 上 *Lipschitz* 連続である*;*

(ii) 従って，$u^{m-1}(\cdot,t)$ は $\mathbb{R}$ 上ほとんど至るところ微分可能であり，更に，t に対して一様な評価式

$$\sup_{0<t<T_0}\|\partial_x u^{m-1}(t)\|_{L^\infty} \quad\leq\quad C \tag{2.3}$$

が成り立つ．ここで $C=C(m,q,\gamma,u_0)$ である*;*

(iii) 各 $0<t<T_0$ に対して，$u^{m-1+\delta}(x,t),\ \delta>0$ は x に関して C^1-級の関数である．更に次の性質をもつ．$u(x,t)=0$ となる点 $(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T_0)$ で，$\partial_x u^{m-1+\delta}(x,t)=0$ である．特に $1<m<2$ のときには，$u(x,t)=0$ となる点 $(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T_0)$ で，$\partial_x u(x,t)=0$ である．

注意 6. (i) 次の不等式は容易に確かめられる．

$$|u(x,t)-u(y,t)| \;\leq\; \begin{cases} c_m\|u\|^{2-m}_{L^\infty(Q_{T_0})}|u^{m-1}(x,t)-u^{m-1}(y,t)|, & 1<m<2,\\ |u^{m-1}(x,t)-u^{m-1}(y,t)|^{\frac{1}{m-1}}, & m\geq 2. \end{cases} \tag{2.4}$$

ここで $x,y\in\mathbb{R},\ 0<t<T_0,\ c_m=\frac{2^{1/m-1}}{m-1}$．従って，定理 2.2 (i),(ii) より $u(x,t)$ は x について，指数 $\mu=\min\{1,\frac{1}{m-1}\}$ をもつ $\mathbb{R}$ 上 Hölder 連続な関数であることがわかる．

(ii) (PM) については，$\partial_x U^{m-1}(\cdot,t)$ は十分に時間が経つと $\mathbb{R}$ 上不連続関数となる．一方，定理 2.2 は次のことを保証する．$\partial_x u^p(x,t)$ は $p>m-1$ をもつとき，すべての時刻 $0<t<T_0$ で x について $\mathbb{R}$ 上連続な関数となる．(PM) のように，$\partial_x u^{m-1}(\cdot,t)$ が $\mathbb{R}$ 上不連続関数となるかどうかは興味深い問題である．

定理 2.2 の帰結として，我々は次の主定理を得る．

定理 2.3 ([31], $(\mathrm{KS})_m$ の解の**有限伝播性**) $m>1,\ q\geq 2m$, かつ $\gamma>0$ とする．初期データ u_0 は定義 *1* と同様な関数であって，u_0^{m-1} は *Lipschitz* 連続とする．更に

$$u_0(x)\equiv 0,\qquad a\leq x\leq b$$

であるとする．このとき，命題 *2.1* で得られた $(\mathrm{KS})_m$ の弱解 $\{u,v\}$ に対して，$[0,T_0)$ 上の連続関数の組 $\{\xi(t),\Xi(t)\}$ が存在して，以下の性質 (i)-(ii) を満たす．

(i) $\xi,\Xi\in W^{1,\infty}(0,T_0)$ かつ $\xi(0)=a,\ \Xi(0)=b$*;*

(ii) $u(x,t)=0$ がすべての $\xi(t)\leq x\leq\Xi(t),\ 0\leq t<T_0$ で成立する．

注意 7. (i) 定理 2.3 の証明で最も困難な点は, 定理 2.2 においては u^{m-1} は Lipschitz 連続性しか保証されておらず, (IE) に対しては, 通常の常微分方程式の局所存在定理は適用できないことにある. しかしながら, 定理 2.2 の主張である $\partial_x u^{m-1}$ の時空間 $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T_0)$ における一様有界性 (2.3) は, 幸い, 定理 2.3 の関数の組 $(\xi(t),\Xi(t))$ の存在を保証する. 勿論, u^{m-1} が滑らかな関数であれば, (IE) の解 $(\xi(t),\Xi(t))$ の局所存在は明らかであるが, 注意 6.(ii) の事実や界面曲線のもつ性質から, (PM) と主要項を同じくする退化放物型方程式 $(\mathrm{KS})_m$ に対しては, 初期データがたとえ十分に滑らかであっても, u^{m-1} は有限時間で C^1 正則性が崩壊することが予想できる.

(ii) 定理 2.3 の関数の組 $(\xi(t),\Xi(t))$ は (IE) の解とは限らない. 一方, 前述の (PM) においては, 対応する $(\hat{\xi}(t),\hat{\Xi}(t))$ は界面曲線 (interface) であることが知られている. すなわち, (PM) の解 $U(x,t)$ に対しては, すべての時刻 $0<t<\infty$ について, $U(x,t)\equiv 0,\ \hat{\xi}(t)\le x\le\hat{\Xi}(t)$ かつ $U(x,t)>0,\ x<\hat{\xi}(t),\ \hat{\Xi}(t)<x$ である. ここで $\hat{\xi}(t)$, $\hat{\Xi}(t)$ は次の常微分方程式の初期値問題の解である.

$$
\begin{cases}
\hat{\xi}'(t) &= -\displaystyle\lim_{x\to\hat{\xi}(t)-0}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{m}{m-1}u^{m-1}\Big)(x,t), \quad \hat{\xi}(0)=a,\\
\hat{\Xi}'(t) &= -\displaystyle\lim_{x\to\hat{\Xi}(t)+0}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{m}{m-1}u^{m-1}\Big)(x,t), \quad \hat{\Xi}(0)=b.
\end{cases}
$$

我々の $(\mathrm{KS})_m$ では, 定理 2.3 で得られた $(\xi(t),\Xi(t))$ に対しては, 次の主張が成立するに過ぎない.

$(\xi_*(t),\Xi_*(t))$ を $(\mathrm{KS})_m$ に対する $[0,T_0)$ 上の界面曲線とする. すなわち, $(\xi_*(t),\Xi_*(t))$ は $[0,T_0)$ 上の Lipschitz 連続関数であり, かつすべての $0<t<T_0$ について,

$$u(x,t)\equiv 0,\ \ \xi_*(t)\le x\le\Xi_*(t);\quad u(x,t)>0,\ \ x<\xi_*(t),\ \ \Xi_*(t)<x$$

が成り立つとする. このとき, 定理 2.3 における $(\xi(t),\Xi(t))$ は

$$\xi_*(t)\le\xi(t),\quad \Xi(t)\le\Xi_*(t),\qquad 0<t<T_0 \tag{2.5}$$

を満たすことが証明できる. 退化放物型方程式では, 界面曲線上において, 退化性による特異性が最も顕著に現れる. 実際, 解の空間方向の偏導関数は時間経過後において, 界面曲線上, 特異性を有する. 故に, 界面曲線に何らかの特徴付けを行うことは, 退化放物型方程式を研究する上で, 最も重要な問題の一つとされる. 従って定理 2.3 における $(\xi(t),\Xi(t))$ が $(\mathrm{KS})_m$ の界面曲線であること, すなわち, $\xi(t)=\xi_*(t)$ かつ $\Xi(t)=\Xi_*(t)$ を示すことは重要な研究テーマである.

2.2 界面曲線の方程式

この節では, 前節の最後で述べた問題を考える. すなわち, 界面曲線 $\xi_*(t),\Xi_*(t)$ の特徴付けを行う. 我々はすでに, 定理 2.3 において, 解 $u(t)$ の零点集合である Lipschitz 連続曲線 $(\xi(t),\Xi(t))$ を得ている. 式 (2.5) により, $\xi_*(t),\Xi_*(t)$ は各々, $\xi(t),\Xi(t)$ の下限, 上限と期待できる. 以下, $\xi_*(t)$ についてのみ考察する. $\Xi_*(t)$ についても同様である.

関数 $\zeta(t;a)$ を以下のように定める.

$$\zeta(t;a) \ := \ \inf\{\xi(t);\ u(x,t)=0\ \ \mathit{for}\ \xi(t)<x<\Xi(t),\ \xi(0)=a\}. \tag{2.6}$$

$(\mathrm{KS})_m$ の広義及び狭義界面曲線を以下のように定める.

定義 2 $m>1,\ q\ge 2$, かつ $\gamma>0$ とする. 初期データ u_0 は定義 1 と同様な関数である

とする．$\{u,v\}$ を $[0,T)$ 上の $(\mathrm{KS})_m$ の弱解とする．$\xi_*(t;a)$ は $\xi_*(0;a)=a$ となる $[0,T)$ 上の連続関数とする．

(1) $\xi_*(t;a)$ が u に関する**広義の界面曲線**であるとは, 次の条件を満たすものと定める．

ある $\varepsilon_0>0$ が存在して, 次の (i)–(ii) が成り立つ．

(i) $\xi_*(t;a)\le x<\xi_*(t;a)+\varepsilon_0,\ 0\le t<T$ ならば $u(x,t)=0$ である;
(ii) 任意の $0<\varepsilon\le\varepsilon_0,\ 0\le t<T$ に対して, $\xi_*(t;a)-\varepsilon<x_\varepsilon(t)<\xi_*(t;a)$ であって, $u(x_\varepsilon(t),t)>0$ となる $x_\varepsilon(t)$ が少なくとも 1 つ存在する．

(2) $\xi_*(t;a)$ が u に関する**狭義の界面曲線**であるとは, 次の条件を満たすものと定める．

ある $\varepsilon_0>0$ が存在して, (1)-(i) に加えて, 次の $(\mathrm{ii})'$ が成り立つ．

$(\mathrm{ii})'$ $\xi_*(t;a)-\varepsilon_0<x<\xi_*(t;a),\ 0\le t<T$ ならば $u(x,t)>0$ である．

広義および狭義の界面曲線について, 以下の主張が成り立つ．

定理 2.4 ([32], **界面曲線**) *$m>1,\ q\ge 2m$, かつ $\gamma>0$ とする．初期データ u_0 は定義 1 と同様な関数であって, u_0^{m-1} は Lipschitz 連続とする．更に*

$$u_0(x)\equiv 0,\qquad a\le x\le b$$

であるとする．$\{u,v\}$ は $[0,T)$ 上の $(\mathrm{KS})_m$ の弱解であり, 評価式 (2.3) に従うとする．

(1) (2.6) によって定められる $\zeta(t;a)$ は, 定義 2(1) における u の広義の界面曲線である．

(2) u が定義 2(2) における狭義の界面曲線 $\xi_*(t;a)$ をもつと仮定する．このとき, 上記 (1) における広義の界面曲線 $\zeta(t;a)$ は $\xi_*(t;a)$ に一致し, $[0,T)$ 上の Lipschitz 連続関数となる．更に, $\zeta(t;a)$ は次の常微分方程式をほとんど至るところの $t\in[0,T)$ で満たす．

$$\zeta^{'}(t;a)\ =\ -\lim_{x\to\zeta(t;a)-0}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{m}{m-1}u^{m-1}\Big)(x,t)+\lim_{x\to\zeta(t;a)-0}u^{q-2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,t).$$

弱解 $\{u,v\}$ は十分な正則性をもたないため, 定理 2.4 の証明には, 次の命題が重要な役割を果たす．実際, 定義にあらわれる $[0,T)$ 上の $(\mathrm{KS})_m$ の弱解 $\{u,v\}$ は, 次の意味で強解となる．

命題 2.5 ([33], **弱解の正則性**) *$m>1,\ q\ge m+1$, かつ $\gamma>0$ とする．u_0 は定義 1 と同様な初期データとする．このとき, 定義 1 で定義される $[0,T)$ 上の $(\mathrm{KS})_m$ の弱解 $\{u,v\}$ は, 以下の性質 (i)–(ii) を有する．*

(i) $\partial_t u-\partial_x^2 u^m,\ \partial_x(u^{q-1}\cdot\partial_x v)\in L^1(\mathbb{R}\times(0,T))$ であり,

$$\partial_t u=\partial_x(\partial_x u^m-u^{q-1}\partial_x v),\qquad -\partial_x^2 v+\gamma v-u=0$$

が $\mathbb{R}\times(0,T)$ 上のほとんど至るところ成り立つ;

(ii) ある $1<p<\infty$ について, $u\in C_w([0,T);L^p(\mathbb{R}))$ である．

注意 8. 我々の手法による退化型 Keller-Segel 系の解の有限伝播性の証明は, (PM) に適応することができるのみならず, 比較定理に依存しないという利点から, 他の退化放物型方程式系においても有効であると期待できる．また, 空間高次元においても適用可能な手法であることが長所である．実際, 評価式 (2.3) を空間高次元において確立することにより, $N\ge 2$ においても, 解 u の有限伝播性を示すことができる．従って, 三村-永井 [11] で提唱された, 高次元空間での定式化が可能となる．

References

[1] S.Childress and J.K.Percus, Nonlinear aspects of chemotaxis, *Math. Biosci.,* **56** (1981), 217–237.

[2] M.A.Herrero, J.L.Velázquez, A blow-up mechanism for a chemotaxis model, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **24** (1997), no. 4, 633–683.

[3] D.Horstmann, From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences.I., *I.Jahresber.Deutsch.Math.-Verein.*, **105** (2003), 103–165.

[4] E.F.Keller and L.A.Segel, Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, *J. Theor. Biol.*, **26** (1970), 399–415.

[5] H.Kozono and Y.Sugiyama, Global solution to the semi-linear Keller-Segel model of parabolic-parabolic type with small data in $L^r(\mathbb{R}^n)$, *submitted.*

[6] H.Kozono and Y.Sugiyama, Keller-Segel system of parabolic-parabolic type with initial data in weak $L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ and its application to the self-similar solution, *submitted.*

[7] H.Kozono and Y.Sugiyama, Strong solutions to the Keller-Segel system with the weak $L^{\frac{n}{2}}$ initial data and its application to the blow-up rate, *submitted.*

[8] H.Kozono and Y.Sugiyama, Local existence and finite time blow-up in the 2-D Keller-Segel system, *submitted.*

[9] S. Luckhaus and Y. Sugiyama, Large time behavior of solutions in super-critical cases to degenerate Keller-Segel systems, *Math. Model. Numer. Anal.,* **40** (2006), 597-621.

[10] S.Luckhaus and Y.Sugiyama, Asymptotic profile with the optimal convergence rate for a parabolic equation of chemotaxis in super-critical cases, *Indiana Univ. Math. J.,* **56** (2007), 1279-1298.

[11] M.Mimura and T.Nagai, Asymptotic Behavior for a Nonlinear Degenerate Diffusion Equation in Population Dynamics , *SIAM J. Appl. Math*, **43** (1983), 449-464.

[12] V.Nanjundiah, Chemotaxis Signal Relaying and Aggregation Morphology, *Theor. Biol.,* **42** (1973), 63-105.

[13] T.Nagai, Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **5** (1995), 581-601.

[14] T.Nagai, Blowup of nonradial solutions to parabolic-elliptic systems modeling chemotaxis in two-dimensional domains, *J. Inequal. Appl.*, **6** (2001), 37-55.

[15] T.Nagai,T.Senba, and T.Suzuki, Chemotactic collapse in a parabolic system of mathematical biology, *Hiroshima Math. J.,* **30** (2000), 463–497.

[16] T.Nagai, T.Senba and K.Yoshida, Application of the Moser-Trudinger inequality to a parabolic system of chemotaxis, *Funkc. Ekvacioj*, **40** (1997), 411-433.

[17] T.Nagai, R.Syukuinn and M.Umesako, Decay Properties and Asymptotic Profiles of Bounded Solutions to a Parabolic System of Chemotaxis in $\mathbb{R}^N$, *Funkc. Ekvacioj,* **46** (2003), 383-407.

[18] M.Ôtani and Y.Sugiyama, A method of energy estimates in L^∞ and its application to porous medium equations, *J. Math. Soc. of Japan*, **53** (2001), 745–789.

[19] M.Ôtani and Y.Sugiyama, Lipschitz continuous solutions of some doubly nonlinear parabolic equations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **8** (2002), 647-670.

[20] O.Sawada, On the spatial analyticity of solutions to the Keller-Segel equations, *preprint.*

[21] T.Senba and T.Suzuki, Chemotactic collapse in a parabolic-elliptic system of mathematical biology, *Adv. Differential Equations,* **6** (2001), 21–50.

[22] T.Senba and T.Suzuki, Weak solutions to a parabolic-elliptic system of chemotaxis, *J. Funct. Anal.,* **191** (2002), 17–51.

[23] T.Suzuki, Free energy and self-interacting particles. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, **62** Birkhauser Boston.

[24] Y.Sugiyama, C^∞-solutions of generalized porous medium equations with perturbation, *Adv. Math. Sci. Appl.,* **12** (2002), 21–87.

[25] Y.Sugiyama, Global existence and decay properties of solutions for some degenerate quasilinear parabolic systems modelling chemotaxis, *Nonlinear Anal.,* **63** (2005), 1051–1062.

[26] Y.Sugiyama, Global existence in the sub-critical cases and finite time blow-up in the super-critical cases to degenerate Keller-Segel systems, *Differential Integral Equations,* **9** (2006), 841-876.

[27] Y. Sugiyama and H. Kunii, Global existence and decay properties for a degenerate Keller-Segel model with a power factor in drift term, *J. Differential Equations,* **227** (2006), 333-364.

[28] Y. Sugiyama, Time Global Existence and Asymptotic Behavior of Solutions to Degenerate Quasi-linear Parabolic Systems of Chemotaxis, *Differential Integral Equations,* **20** (2007), 133-180.

[29] Y.Sugiyama, Application of the best constant of the Sobolev inequality to degenerate Keller-Segel models, *Adv. Differential Equations,* **12** (2007), 124-144.

[30] Y.Sugiyama, Blow-up criterion via scaling invariant quentities with effect on coefficient growth in Keller-Segel system, *submitted.*

[31] Y.Sugiyama, Finite speed of propagation in 1-D degenerate Keller-Segel system, *submitted.*

[32] Y.Sugiyama, Interfaces for 1-D degenerate Keller-Segel systems, *submitted.*

[33] Y.Sugiyama, Uniqueness and regularity of weak solutions for the 1-D degenerate Keller-Segel systems, *submitted.*