

L_p - L_q 最大正則性と非圧縮性粘性流体の自由境界問題への応用

清水 扇丈 (静岡大学工学部)

1 序

流体力学の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式に対する自由境界問題について考察する。流体粒子の作用する応力が法線成分のみを持つ流体を完全流体、接線応力も存在する流体を粘性流体という。粘性流体の運動方程式が Navier-Stokes 方程式であり、流体の運動量保存則を表す。ここでは、密度が圧力や温度によって変わらない非圧縮性粘性流体を考える。この場合は密度は定数 (簡単のため 1 とする) となり Navier-Stokes 方程式は、流速ベクトル v 、圧力 p に対し

$$\partial_t v + (v \cdot \nabla)v - \operatorname{div} S(v, p) = f \quad (1)$$

で与えられる。ここで f は外力、 S は応力テンソル

$$S(v, p) = \mu D(v) - pI, \quad \{D(v)\}_{i,j} = \partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i,$$

μ は正定数粘性係数である。さらに流体は連続体であり、非圧縮性粘性流体に対し質量保存則

$$\operatorname{div} v = 0 \quad (2)$$

が成り立つ (cf. [11], [26])。

非線形項 $(v \cdot \nabla)v$ を持つ半線形方程式としての Navier-Stokes 方程式の初期値問題及び初期 - 境界値問題に対する数多くの研究の中で、 L_q 理論の立場からは初期値問題に対する 1984 年の加藤 [9] の論文が特筆すべきものである。概説すれば、Banach 空間での初期値問題

$$\partial_t v + Av = F(v), \quad v(0) = a \quad (3)$$

に対し、左辺の線形化部分に対する解析的半群 $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ を用いて、(3) の解は Duhamel の原理により積分方程式

$$v(t) = e^{-tA}a + \int_0^t e^{-(t-s)A}F(v(s))ds \quad (4)$$

で与えられ、線形化問題の解に対する L_q 評価式

$$\|\nabla^\alpha e^{-tA}a\|_q \leq C_{n,q} t^{-|\alpha|/2} \|a\|_q, \quad |\alpha| = 0, 1, 2 \quad (5)$$

及びこれらを補間して得られる線形化問題の解とその空間 1 階微分に対する L_p - L_q 評価式を利用して、時間 t について可積分となる基礎空間における (4) の一意存在を逐次近似により示すという手法である。加藤理論に基づき Navier-Stokes 方程式のみならず、半線形偏微分方程式の初期値問題及び初期 - 境界値問題に対し、 L_q 解の時間局所的・大域的存在を示す多くの研究がこの間なされてきた。

一方、自由境界問題では、一般に自由境界を固定境界に直す変換を行うため、Navier-Stokes 方程式は準線形方程式となる。非線形項として線形化問題の解の最高階である時間微分と空間 2 階微分を含むが、解析的半群の立場だけでは (5) からわかるように、時刻 t について原点の近傍で t^{-1} の特異性を持ち可積分性が得られない。この点を解消するために、近年 Amann [4]、Weis [29]、Denk-Hieber-Prüss [8] 等によって研究が進められている L_p - L_q 最大正則性の理論を適用する。

2 L_p - L_q 最大正則性

X を Banach 空間、 A を X 上の有界な解析的半群の生成作用素として、次の抽象的初期値問題

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t > 0, \quad u(0) = 0 \quad (6)$$

を考える。 A が L_p -最大正則性を持つとは、 $\forall f \in L_p((0, T), X)$ $0 < T \leq \infty$ に対し (6) の一意解 $u \in W_p^1((0, T), X) \cap L_p((0, T), \mathcal{D}(A))$ が存在して、次の評価式

$$\|u'\|_{L_p((0, T), X)} + \|Au\|_{L_p((0, T), X)} \leq C\|f\|_{L_p((0, T), X)} \quad (7)$$

を満たすことをいう。言い換えると A が L_p -最大正則性を持つとは、抽象的初期値問題 (6) が well-defined であり同じ正則性を持つことを意味する。 $X = L_q(G)$ ($G \subset \mathbb{R}^n$) のとき L_p - L_q 最大正則性という。

最大正則性には、近年ヨーロッパを中心に大きな関心が向けられているが、その理由の一つは、準線形方程式に対する非線形問題に対し、その線形化問題の最大正則性評価式 (7) を示すことにより、簡潔な縮小写像の原理を適用して非線形問題の解の一意存在が示されることにある。

最大正則性を示すために、我々は Weis [29] による作用素の $\mathcal{R}$ -有界性による特徴付けを用いる。 X, Y を Banach 空間、 $\mathcal{B}(X, Y)$ を X から Y への有界な線形作用素全体の空間とする。

定義 ($\mathcal{R}$ -有界性) 作用素の族 $\tau \subset \mathcal{B}(X, Y)$ が $\mathcal{R}$ -有界であるとは、 $\forall T_j \in \tau, \forall x_j \in X, \forall n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n \gamma_j(u) T_j(x_j) \right\|_Y^p du \leq C \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n \gamma_j(u) x_j \right\|_X^p du$$

を成り立たせる定数 $C > 0, p \in [1, \infty)$ がすべての $[0, 1]$ 上独立対称な $\{-1, 1\}$ -値確率変数 $\{\gamma_j\}$ に対して存在することをいう。最小の C を $\mathcal{R}$ -bound といい $\mathcal{R}(\tau)$ で表す。

$\{\gamma_j\}$ の例としては Rademacher 関数 $\gamma_j(t) = \text{sign}(\sin(2^j \pi t))$ が挙げられる。

(6) の解は、 t について Laplace 変換 $\mathcal{L}$ 、逆変換 $\mathcal{L}^{-1}$ を用いて求められ、 Au は平たく $\mathcal{L}^{-1}[A(\lambda + A)^{-1}\mathcal{L}[f]]$ と表される。よって A が最大正則性を持つということは、1 変数 t について作用素値 Fourier-multiplier の定理が成り立つことに帰着できる。 $M \in L_{1,loc}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(X, Y))$ に対し、 $T_M : \mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}, Y)$ を

$$T_M \phi = \mathcal{F}^{-1}[M\mathcal{F}[\phi]] \quad \text{for } \forall \mathcal{F}\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, X) \quad (8)$$

で定義する。 $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}(\mathbb{R}, X)$ は $L_p(\mathbb{R}, X)$ で稠密であるので T_M が定義でき、 T_M は $L_p(\mathbb{R}, X)$ の稠密な部分集合上の線形作用素となる。

定理 (Weis [29, Theorem 3.4]) X, Y を UMD 空間、 $1 < p < \infty$ とする。 $M \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathcal{B}(X, Y))$ が次の条件

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\{M(\rho); \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}) &= c_0 < \infty \\ \mathcal{R}(\{\rho M'(\rho); \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}) &= c_1 < \infty\end{aligned}$$

を満たすならば、(8) の作用素 T_M は $L_p(\mathbb{R}, X)$ から $L_p(\mathbb{R}, Y)$ への有界作用素であり、

$$\|T_M\|_{\mathcal{B}(L_p(\mathbb{R}, X), L_p(\mathbb{R}, Y))} \leq C(c_0 + c_1)$$

を満たす p, X, Y のみに依存する定数 $C > 0$ が存在する。

UMD (unconditional martingale differences) 空間とは、Banach 空間 X に対し $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$ の Hilbert 変換: $Hf(t) = PV(1/t) * f$ が $L_p(\mathbb{R}, X)$ 上有界となる X のことをいう。 $L_q(G)$ ($G \subset \mathbb{R}^n, 1 < q < \infty$) 及びその閉部分空間や商空間は UMD 空間である。

偏微分方程式の具体的な問題に Weis の定理を適用しようとする際、確率変数で定義される $\mathcal{R}$ -有界性をどのように証明するかということが鍵となる。全空間や半空間のモデル問題に対しては、Laplace-Fourier 変換を用いて解を具体的に表すことができ、それは合成積の形をしている。合成積型の積分作用素に対しては、 $\mathcal{R}$ -有界性を示すための使いやすい十分条件として次の命題が得られている。

命題 (Denk-Hieber-Prüss [8, Theorem 4.11], 柴田-清水 [14, Proposition 2.4]) $1 < q < \infty$ とする。 $\{k_s(x) \mid s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ を $L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ 関数 $k_s(x)$ の族として

$$K_s f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_s(x-y)f(y) dy, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

とおく。次の評価式

$$\begin{aligned}\|K_s f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} &\leq C\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall f \in L_2(\mathbb{R}^n), \quad \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \sum_{|\alpha|=1} |\partial_x^\alpha k_s(x)| &\leq C|x|^{-(n+1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\end{aligned}$$

を満たす $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に独立な定数 $C > 0$ が存在すれば、 $\{K_s \mid s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ は $\mathcal{B}(L_q(\mathbb{R}^n))$ 上 $\mathcal{R}$ -有界でその $\mathcal{R}$ -bound は $C_{n,q}C$ 以下である。

3 非圧縮性粘性流体の自由境界問題

非圧縮性粘性流体の自由境界問題とは、適当な境界条件を課した Navier-Stokes 方程式系を満たす時刻 t に依存する領域 Ω_t 、境界 Γ_t 、及び流速 $v = v(x, t)$ と圧力 $p = p(x, t)$ 、 $x \in \Omega_t$ 、 $t \in (0, T)$ 、 $0 < T \leq \infty$ を、初期条件 $\Omega_t|_{t=0} = \Omega$ 、 $v|_{t=0} = v_0$ (on Ω) の下で求める問題である。

Zadrzyńska [30] に従い、従来の非圧縮性粘性流体に対する自由境界問題の研究を概観する。領域 Ω_t の形状から 2 つに分類できる。一つは自由境界によって囲まれた単一の気泡や液滴の動きを表す問題でこれを問題 1 とよぶ。もう一つは海の波のように水平方向に無限領域で表面が自由境界である流体の動きを表す問題でこれを問題 2 とよぶ。

問題 1 に対しては 1977 年の Solonnikov [16] による Hölder 空間における時間局所解の一意存在定理が先駆の結果である。その後 Solonnikov [17, 19, 20, 22], Allain [2, 3], 谷 [24] により、 L_2 の Sobolev 空間や Hölder 空間における時間局所解の一意存在定理が示されている。時間大域解については、Solonnikov により [18, 21] で L_2 の Sobolev 空間、[20] で L_q の Sobolev 空間において小さな初期データに対しその一意存在が示されている。

問題 2 に対しては 1980 年の Beale [5] による L_2 の Sobolev 空間における時間局所解の一意存在定理が先駆の結果である。その後寺本 [27, 28], Schweizer [12] により L_2 の Sobolev 空間において、2003 年に Abels [1] により L_q の Sobolev 空間において時間局所解の一意存在が示されている。時間大域解については、1984 年に Beale [6] により小さな初期データに対し L_2 の Sobolev 空間においてその一意存在が示され、Sylvester [23]、谷-田中 [25] の結果が続く。また Beale-西田 [7] により流速が代数幕で 0 に近づくという漸近的結果が、西田-寺本-吉原 [10] により Hopf 分岐の結果が得られている。

以上の概説のように、現時点で私の知る限り、問題 1 に対する Solonnikov [20] の時間大域解と問題 2 に対する Abels [1] の時間局所解の結果を除き、これまで L_2 の Sobolev 空間や Hölder 空間における結果が主であった。

昨年、柴田との共同研究 [13, 14, 15] において、有界な単一非圧縮性粘性流体でその自由境界に表面張力の影響を考慮に入れない問題に対して、小さな初期データに対する時間大域解の一意存在と任意のデータに対する時間局所解の一意存在を、時間に関して L_p 、空間に関して L_q の Sobolev 空間において示した。

用いた方法は以下の通りである。自由境界を固定境界に直し、固定境界における準線形方程式を求める。この線形化問題に対して、解析的半群によるアプローチに加え、モデル問題の解を Laplace-Fourier 変換・逆変換により具体的に表示し、解作用素の $\mathcal{R}$ -有界性を示し作用素値 Fourier multiplier の定理を適用することにより、モデル問題の解の L_p - L_q 最大正則性を証明する。この結果を局所化の方法を用いて元の領域に戻すが、剰余項として現れる低階項を指数減衰性を用いて評価することにより、線形化問題に対する指数安定な時間大域的 L_p - L_q 最大正則性定理と時間局所的 L_p - L_q 最大正則性定理を証明する。そして、この線形化問題の L_p - L_q 最大正則性評価式を用いて、縮小写像の原理により準線形方程式で与えられる非線形問題の時間局所的・大域的な解の一意存在を示す。

我々の方法の最大の長所は、線形化問題に対する時間大域的な最大正則性定理を得ることができるという点にある。先述の Solonnikov [20] と我々の問題設定は同じであり、Solonnikov は非線形問題の時間大域解の一意存在を、時間に対する指数 p と空間における指数 q が $p = q$ の場合に証明している。しかし、線形化問題に対しては、時間局所的な最大正則性をポテンシャル論に基づく独自の方法で証明しているが、時間大域的な最大正則性の結果を得てはいない。そのため、非線形問題の時間大域解の一意存在証明を、線形の時間局所的な最大正則性評価式に基づき複雑な方法で証明している。一方、我々は、線形化問題に対する時間大域的な最大正則性定理を得ることができ、非線形問題に対して簡便な縮小写像の原理を適用し、時間大域解の一意存在を証明することができた。

我々の方法は、様々な非圧縮性粘性流体の自由境界問題に対し有効であると考えている。実際、有界な 2 相媒質で界面が自由境界である非圧縮性粘性流体の運動に対して同様な方法で時間大域解・局所解の一意存在を示すことができたので、特に時間大域的な結果について次節で述べる。

4 有界な 2 相媒質で界面が自由境界である非圧縮性粘性流体の運動

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) を有界領域としその境界を $\partial\Omega$ とする。 $\Omega_t^+ \subset \Omega$ には初期時刻 $t = 0$ で与えられ $t > 0$ ではその形状が変化する、粘性係数 $\mu^+ > 0$ の非圧縮性粘性流体が占めるとする。 Γ_t を Ω_t^+ の境界とし Γ_t と $\partial\Omega$ の距離は正とする。 $\Omega_t^- = \Omega \setminus (\Omega_t^+ \cup \Gamma_t)$ には粘性係数 $\mu^- > 0$ の非圧縮性粘性流体が占めるとする。 $\Gamma = \Gamma_0$ 、 $\Omega^\pm = \Omega_0^\pm$ とおく。 Γ を $C^{2,1}$ 級超曲面、 $\partial\Omega$ を $C^{1,1}$ 級超曲面とする。 $\Omega_t^\pm$ または $\Omega^\pm$ で定義された関数 $w^\pm$ に対し

$$w(x, t) = \begin{cases} w^+(x, t) & x \in \Omega_t^+ \text{ (or } \Omega^+), \quad t > 0 \\ w^-(x, t) & x \in \Omega_t^- \text{ (or } \Omega^-), \quad t > 0 \end{cases}$$

とおく。また Ω で定義された関数 w に対し、 $w^\pm$ を w の $\Omega_t^\pm$ または $\Omega^\pm$ への制限とする。

n 次流速ベクトル $v(x, t)$ と圧力 $p(x, t)$ ($x \in \Omega_t^\pm$) は Navier-Stokes 方程式に対する自由境界問題を満たす：

$$\begin{aligned} \partial_t v + (v \cdot \nabla)v - \operatorname{Div} S^\pm(v, p) &= f && \text{in } \Omega_t^\pm, \quad t > 0 \\ \operatorname{div} v &= 0 && \text{in } \Omega_t^\pm, \quad t > 0 \\ [S^+(v^+, p^+) - S^-(v^-, p^-)]\nu_t|_{\Gamma_t} &= 0, \quad v^+|_{\Gamma_t} = v^-|_{\Gamma_t} && t > 0 \\ v|_{\partial\Omega} &= 0 \text{ for } t > 0, \quad v|_{t=0} = v_0 && \text{in } \Omega_t^\pm \end{aligned} \quad (9)$$

ここで ν_t は Γ_t 上 Ω_t^+ に対する単位外法線、 $S^\pm(v, p)$ は応力テンソル

$$S^\pm(v, p) = \mu^\pm D(v) - pI, \quad \{D(v)\}_{jk} = \partial v_j / \partial x_k + \partial v_k / \partial x_j,$$

I は $n \times n$ 単位行列、 $f = f(x, t)$ は外力である。(9) では自由界面 Γ_t に表面張力の影響を考慮に入れていない。自由界面 Γ_t 上の流体粒子は常に Γ_t 上にあり、 $\Omega_t^\pm$ から Γ_t に流体粒子が発生することがないことを仮定する。問題を固定領域 $\Omega^\pm$ で考えるために、Euler 座標で与えられた問題 (9) を Lagrange 座標に変換する。 $u(\xi, t)$ を Lagrange 座標 ξ での流速ベクトル、 x を Euler 座標による $\Omega_t^\pm$ での流体粒子の位置とすれば $x = \xi + \int_0^t u(\xi, \tau) d\tau \equiv X_u(\xi, t)$ と関係づけられる。 $p(X_u(\xi, t), t) = \pi(\xi, t)$ とおくと、(9) は次の準線形方程式に対する初期 - 境界値問題となる：

$$\begin{aligned} \partial_t u - \operatorname{Div} (S^\pm(u, \pi) + U^\pm(u, \pi)) &= f(X_u(\xi, t), t) && \text{in } \Omega^\pm, \quad t > 0 \\ \operatorname{div} u + E(u) &= \operatorname{div} [u + \tilde{E}(u)] = 0 && \text{in } \Omega^\pm, \quad t > 0 \\ [S^+(u^+, \pi^+) + U^+(u^+, \pi^+)]\nu|_\Gamma &= [S^-(u^-, \pi^-) + U^-(u^-, \pi^-)]\nu|_\Gamma && t > 0 \\ u^+|_\Gamma &= u^-|_\Gamma \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ for } t > 0, \quad u|_{t=0} = u_0 && \text{in } \Omega^\pm \end{aligned} \quad (10)$$

ここで $u_0(\xi) = v_0(x)$ 、 ν は Ω^+ に対する Γ 上の単位外法線、 $U^\pm(u, \pi)$ 、 $E(u)$ 、 $\tilde{E}(u)$ は $V_1^\pm(0) = V_j(0) = 0$ を満たす $\int_0^t \nabla u d\tau$ の多項式 $V_1^\pm(\int_0^t \nabla u d\tau)$ 、 $V_j(\int_0^t \nabla u d\tau)$ ($j = 2, 3, 4$) により次で与

えられる：

$$U^\pm(u, \pi) = V_1^\pm(\cdot) \nabla u + V_2(\cdot) \pi, \quad E(u) = V_3(\cdot) \nabla u, \quad \tilde{E}(u) = V_4(\cdot) u.$$

まず、線形化問題：

$$\begin{aligned} \partial_t u - \operatorname{Div} S^\pm(u, \pi) &= f && \text{in } \Omega^\pm, t > 0 \\ \operatorname{div} u &= g = \operatorname{div} \tilde{g} && \text{in } \Omega^\pm, t > 0 \\ [S^+(u^+, \pi^+) - S^-(u^-, \pi^-)] \nu|_\Gamma &= h^+ - h^-|_\Gamma, \quad u^+|_\Gamma = u^-|_\Gamma && t > 0 \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u|_{t=0} = u_0, && \end{aligned} \quad (11)$$

に対し解析的半群を生成する。このため π を消去し u のみの問題に帰着する。

$$\begin{aligned} \Delta \pi^\pm &= 0 \quad \text{in } \Omega^\pm \\ \pi^+ - \pi^-|_\Gamma &= \nu \cdot [\mu^+ D(u^+) - \mu^- D(u^-)] \nu - \operatorname{div} u^+ + \operatorname{div} u^-|_\Gamma \\ \partial_{\nu_\Omega} \pi^-|_{\partial\Omega} &= \nu_0 \cdot \mu^- [\Delta u^- - \nabla(\operatorname{div} u^-)]|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

で $\int_\Omega \pi \, dx = 0$ を満たす解を $\pi^\pm = K^\pm(u)$ と定める。ここで ν_Ω は $\partial\Omega$ 上単位外法線である。

$$\begin{aligned} A_q u &= -\operatorname{Div} S^\pm(u, K(u)) \quad u \in \mathcal{D}(A_q), \\ \mathcal{D}(A_q) &= \{u \in W_q^1(\Omega)^n \cap J_q(\Omega) \mid u^\pm \in W_q^2(\Omega^\pm), \, u|_{\partial\Omega} = 0, \\ &\quad u^+|_\Gamma = u^-|_\Gamma, \, [S^+(u^+, K^+(u)) - S^-(u^-, K^-(u))] \nu|_\Gamma = 0\} \end{aligned}$$

とおくと A_q ($1 < q < \infty$) は $J_q(\Omega) = \{u \in L_q(\Omega)^n \mid \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega, \, \nu_\Omega \cdot u|_{\partial\Omega} = 0\}$ 上の解析的半群を生成する。次のように関数空間を定義する。

$$\begin{aligned} W_{q,p}^{\ell,m}(D \times \mathbb{R}_+) &= L_p(\mathbb{R}_+, W_q^\ell(D)) \cap W_p^m(\mathbb{R}_+, L_q(D)), \quad D = \Omega \text{ or } \Omega^\pm \\ H_{q,p}^{1,1/2}(\Omega^\pm \times \mathbb{R}) &= H_p^{1/2}(\mathbb{R}, L_q(\Omega^\pm)) \cap L_p(\mathbb{R}, W_q^1(\Omega^\pm)) \\ \mathcal{D}_{q,p}(\Omega) &= [J_q(\Omega), \mathcal{D}(A_q)]_{1-1/p,p} \quad [\cdot, \cdot]_{1-1/p,p} : \text{実補間関手}. \end{aligned}$$

前節で述べたように、Stokes 方程式に対する Neumann 問題に対し最大正則性を示した柴田-清水 [14] と同じ手法を用いて、(11) の指数安定な時間大域的 L_p - L_q 最大正則性定理を得る。

定理 1. $1 < p, q < \infty$ とする. 次を満たす $\gamma_0 > 0$ が存在する：

$$\begin{aligned} u_0 \in \mathcal{D}_{q,p}(\Omega), \, e^{\gamma t} f \in L_p(\mathbb{R}_+, L_q(\Omega))^n, \, e^{\gamma t} \tilde{g} \in W_p^1(\mathbb{R}_+, L_q(\Omega))^n, \\ e^{\gamma t} g^\pm \in L_p(\mathbb{R}_+, W_q^1(\Omega^\pm)), \, e^{\gamma t} h^\pm \in H_{q,p}^{1,1/2}(\Omega^\pm \times \mathbb{R})^n \end{aligned}$$

がある $\gamma \in [0, \gamma_0]$ に対し成り立ち、整合条件: $h^\pm = \tilde{g} = 0$ ($t = 0$) と $\int_\Omega g \, dx = 0, \, \int_{\partial\Omega} \nu_\Omega \cdot \tilde{g} \, d\sigma = 0$ を満たすならば, (11) の一意解

$$(u^\pm, \pi^\pm) \in W_{q,p}^{2,1}(\Omega^\pm \times \mathbb{R}_+)^n \times L_p(\mathbb{R}_+, W_q^1(\Omega^\pm))$$

で $u \in W_{q,p}^{1,1}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$, $\int_{\Omega} \pi \, dx = 0$ であるものが存在する。さらに $\tilde{\pi}^{\pm}|_{\Gamma} = \pi^{\pm}|_{\Gamma}$ である $\tilde{\pi}^{\pm} \in H_{q,p}^{1,1/2}(\Omega_{\pm} \times \mathbb{R})$ が存在して次の評価式を満たす：

$$\begin{aligned} & \sum_{+-} (\|e^{\gamma t} u^{\pm}\|_{W_{q,p}^{2,1}(\Omega^{\pm} \times \mathbb{R}_+)} + \|e^{\gamma t} \pi^{\pm}\|_{L_p(\mathbb{R}_+, W_q^1(\Omega^{\pm}))} + \|e^{\gamma t} \tilde{\pi}^{\pm}\|_{H_{q,p}^{1,1/2}(\Omega^{\pm} \times \mathbb{R})}) + \|e^{\gamma t} u\|_{W_{q,p}^{1,1}(\Omega \times \mathbb{R}_+)} \\ & \leq C \{ \|u_0\|_{\mathcal{D}_{q,p}(\Omega)} + \|e^{\gamma t} f\|_{L_p(\mathbb{R}_+, L_q(\Omega))} + \|e^{\gamma t} \tilde{g}\|_{W_p^1(\mathbb{R}_+, L_q(\Omega))} \\ & \quad + \sum_{+-} (\|e^{\gamma t} g^{\pm}\|_{L_p(\mathbb{R}_+, W_q^1(\Omega^{\pm}))} + \|e^{\gamma t} h^{\pm}\|_{H_{q,p}^{1,1/2}(\Omega^{\pm} \times \mathbb{R})}) \} \end{aligned}$$

定理 1 と縮小写像の原理より $f = 0$ とした (10) の指数安定な時間大域解の一意存在定理を得る。

定理 2. $2 < p < \infty$, $n < q < \infty$ とする。以下を満たす $\epsilon, \gamma > 0$ が存在する： $u_0 \in \mathcal{D}_{q,p}(\Omega)$, $\|u_0\|_{\mathcal{D}_{q,p}(\Omega)} \leq \epsilon$ ならば、 $f = 0$ とした (10) の一意解

$$(u^{\pm}, \pi^{\pm}) \in W_{q,p}^{2,1}(\Omega^{\pm} \times \mathbb{R}_+)^n \times L_p(\mathbb{R}_+, W_q^1(\Omega^{\pm}))$$

で $u \in W_{q,p}^{1,1}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$, $\int_{\Omega} \pi \, dx = 0$ であるものが存在する。さらに $\tilde{\pi}^{\pm}|_{\Gamma} = \pi^{\pm}|_{\Gamma}$ である $\tilde{\pi}^{\pm} \in H_{q,p}^{1,1/2}(\Omega_{\pm} \times \mathbb{R})$ が存在して次の評価式を満たす：

$$\begin{aligned} & \sum_{+-} (\|e^{\gamma t} u^{\pm}\|_{W_{q,p}^{2,1}(\Omega^{\pm} \times \mathbb{R}_+)} + \|e^{\gamma t} \pi^{\pm}\|_{L_p(\mathbb{R}_+, W_q^1(\Omega^{\pm}))} + \|e^{\gamma t} \tilde{\pi}^{\pm}\|_{H_{q,p}^{1,1/2}(\Omega^{\pm} \times \mathbb{R})}) \\ & \quad + \|e^{\gamma t} u\|_{W_{q,p}^{1,1}(\Omega \times \mathbb{R}_+)} \leq C\epsilon \end{aligned}$$

参考文献

- [1] H. Abels, *Stokes equations in Asymptotically flat domains and the motion of a free surface*, Ph.D. thesis, Universität Darmstadt (2003).
- [2] G. Allain, *Un problème de Navier-Stokes avec surface libre et tension superficielle*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, **7** (1985) 29–56.
- [3] G. Allain, *Small-time existence for the Navier-Stokes equations with a free surface*, Appl. Math. Optim., **16** (1987) 37–50.
- [4] H. Amann, *Linear and Quasilinear Parabolic Problems. Vol I Abstract Linear Theory*, Monographs in Math. Vol 89, 1995, Birkhäuser Verlag, Basel·Boston·Berlin
- [5] J. T. Beale, *The initial value problem for the Navier-Stokes equations with a free boundary*, Comm. Pure Appl. Math., **31** (1980) 359–392.
- [6] J. T. Beale, *Large time regularity of viscous surface waves*, Arch. Rat. Mech. Anal., **84** (1984) 307–352.
- [7] J. T. Beale and T. Nishida, *Large time behavior of viscous surface waves*, Lecture Notes in Numer. Appl. Anal. **8** Springer (1985) 1–14.
- [8] R. Denk, M. Hieber and J. Prüss, *$\mathcal{R}$ -boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type*, Memoirs of AMS, Vol 166, No. 788, 2003.
- [9] T. Kato, *Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions*, Math. Z., **187** (1984) 471–480.
- [10] T. Nishida, Y. Teramoto and H. Yoshihara *Hopf bifurcation in viscous incompressible flow down an inclined plane*, J. math. fluid. mech., **7** (2005) 29–71.

- [11] 佐野理, 連続体の力学, 基礎物理学選書 26, 裳華房, (2000).
- [12] B. Schweizer, *Free boundary fluid systems in a semigroup approach and oscillatory behavior*, SIAM J. Math. Anal. **28** (1997) 1135–1157.
- [13] Y. Shibata and S. Shimizu, *On the L_p – L_q maximal regularity and viscous incompressible flows with free surface*, Proc. Japan Acad. **81**, Ser. A (2005) 151–155.
- [14] Y. Shibata and S. Shimizu, *On the L_p – L_q maximal regularity of the Neumann problem for the Stokes equations in a bounded domain*, Preprint (2005).
- [15] Y. Shibata and S. Shimizu, *On some free boundary problem for the Navier-Stokes equations*, Preprint (2005).
- [16] V. A. Solonnikov, *Solvability of a problem on the motion of a viscous incompressible fluid bounded by a free surface*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **41** (1977), 1388–1424 (in Russian); English transl.: Math. USSR Izv. **11** (1977) 1323–1358.
- [17] V. A. Solonnikov, *Solvability of the evolution problem for an isolated mass of a viscous incompressible capillary liquid*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI **140** (1984) 179–186 (in Russian); English transl.: J. Soviet Math. **32** (1986) 223–238.
- [18] V. A. Solonnikov, *Unsteady motion of a finite mass of fluid, bounded by a free surface*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI **152** (1986) 137–157 (in Russian); English transl.: J. Soviet Math. **40** (1988) 672–686.
- [19] V. A. Solonnikov, *Free boundary problems and problems in non compact domains for the Navier-Stokes equations*, Proc. Inter. Congress of Math. (Berkeley, 1986) 1113–1122.
- [20] V. A. Solonnikov, *On the transient motion of an isolated volume of viscous incompressible fluid*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **51** (1987), 1065–1087 (in Russian); English transl.: Math. USSR Izv. **31** (1988) 381–405.
- [21] V. A. Solonnikov, *On nonstationary motion of a finite isolated mass of self-gravitating fluid*, Algebra i Analiz **1** (1989) 207–249 (in Russian); English transl.: Leningrad Math. J. **1** (1990) 227–276.
- [22] V. A. Solonnikov, *Solvability of the problem of evolution of a viscous incompressible fluid bounded by a free surface on a finite time interval*, Algebra i Analiz **3** (1991) 222–257 (in Russian); English transl.: St. Petersburg Math. J. **3** (1992) 189–220.
- [23] D. Sylvester, *Large time existence of small viscous surface waves without surface tension*, Comm. Partial Diff. Equations **15** (1990) 823–903.
- [24] A. Tani, *Small-time existence for the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations with a free surface*, Arch. Rat. Mech. Anal. **133** (1996) 299–331.
- [25] A. Tani and N. Tanaka, *Large time existence of surface waves in incompressible viscous fluids with or without surface tension*, Arch. Rat. Mech. Anal. **130** (1995) 303–314.
- [26] 巽友正, 連続体の力学, 岩波基礎物理シリーズ 2, 岩波書店, (1995).
- [27] Y. Teramoto, *The initial value problem for a viscous incompressible flow down an inclined plane*, Hiroshima Math. J. **15** (1985) 619–643.
- [28] Y. Teramoto, *On the Navier-Stokes flow down an inclined plane*, J. Math. Kyoto Univ. **32** (1992) 593–619.
- [29] L. Weis, *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p -regularity*, Math. Ann., **319** (2001) 735–758.
- [30] E. Zadrzyńska, *Free boundary problems for nonstationary Navier-Stokes equations*, Dissertationes Mathematicae Vol 424, Polish Academy of Sciences (2004).