２次特性点をもつ双曲型作用素と Gevrey クラス

西谷達雄 (大阪大学理学研究科)

1　序

ある方向に狭義双曲型である (即ち単純特性点しか持たない) 微分作用素に対する初期値問題については美しい理論が整備されている．それでは多重特性点をもつ作用素についてはその初期値問題についてなにが起るのか？ まず２次特性点をもつ作用素について考える．この場合には基本的には 2 階の作用素を考えればよい．そこで次の２階の微分作用素に対する初期値問題を考える．

$$P(x,D) = p(x,D) + P_1(x,D) + P_0(x)$$

ここで $p(x,D)$ は $P(x,D)$ の主部である；

$$p(x,\xi) = -\xi_0^2 + \sum_{|\alpha|=2,\alpha_0<2} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

問題：$p(x,\xi)$ の２次特性点 $z^o = (x^o,\xi^o)$, $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta p(z^o) = 0$, $|\alpha+\beta| \le 1$ の近くでの初期値問題（あるいは超局所初期値問題）はいつ C^∞ 適切となるか？

2　２次特性点の分類

零陪特性帯は次の Hamilton 正準方程式の積分曲線である．z^o はこの Hamilton 正準方程式の特異点である．

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial p}{\partial \xi}(x,\xi) \\ \dot{\xi} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}(x,\xi) \end{cases}$$

Hamilton map (あるいは fundamental matrix) $F_p(z^o)$ は次式で与えられる；

$$F_p(z^o) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 p}{\partial x\partial\xi}(z^o) & \dfrac{\partial^2 p}{\partial\xi\partial\xi}(z^o) \\ -\dfrac{\partial^2 p}{\partial x\partial x}(z^o) & -\dfrac{\partial^2 p}{\partial\xi\partial x}(z^o) \end{pmatrix}$$

$X=(x,\xi)$ と書くとき $\dot{X}=2F_p(z^o)X$ は z^o における Hamilton 正準方程式の線形化である．$p_{z^o}(X)$ を p の z^o の周りでの Taylor 展開の２次の項とすると $p_{z^o}(X)$ は符号 $(-1,1,...,1,0,...,0)$ をもつ X の２次形式 (hyperbolic quadratic form) で $p_{z^o}(X,Y)$ をその極形式とすると

$$p_{z^o}(X,Y)=\sigma(Y,F_p(z^o)X).$$

ここで $\sigma((x,\xi),(y,\eta))=\langle\xi,y\rangle-\langle x,\eta\rangle$ である．

補題 1 ([7], [5]) $F_p(z^o)$ の固有値は

$$\begin{aligned}&\pm\lambda,\ \pm\sqrt{-1}\mu_1,...,\pm\sqrt{-1}\mu_r,\quad \mu_j\in\mathbb{R}_+,\ \ \lambda>0\\ &\text{または}\quad \pm\sqrt{-1}\mu_1,...,\pm\sqrt{-1}\mu_r,\quad \mu_j\in\mathbb{R}_+\end{aligned}$$

のいずれかである．

前者の場合 p は z^o で effectively hyperbolic であるという．後者の場合 p は z^o で non effectively hyperbolic であるという．また $\mathrm{Tr}^+F_p(z^o)=\sum_{\mu_j>0}\mu_j$ を $F_p(z^o)$ の positive trace と呼ぶ．

補題 2 ([5]) $Q(X)$ を $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ 上の２次形式で符号が $(-1,1,...,1,0,...,0)$ であるものとする．このとき $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ における適当な *symplectic* 基底を選ぶと Q は次のいずれかの形である；

(1) $Q=-\xi_0^2+\sum_{j=1}^k\mu_j(x_j^2+\xi_j^2)+\sum_{j=k+1}^{\ell}\xi_j^2$,

(2) $Q=(-\xi_0^2+2\xi_0\xi_1+x_1^2)/\sqrt{2}+\sum_{j=2}^k\mu_j(x_j^2+\xi_j^2)+\sum_{j=k+1}^{\ell}\xi_j^2$,

(3) $Q=\lambda(x_0^2-\xi_0^2)+\sum_{j=1}^k\mu_j(x_j^2+\xi_j^2)+\sum_{j=k+1}^{\ell}\xi_j^2$.

ここで (1), (2) は *non effectively hyperbolic*, (3) は *effectively hyperbolic* である．また $\sum_{j=1}^k\mu_j=\mathrm{Tr}^+F_Q$. (1), (3) では $\mathrm{Ker}F_Q^2\cap\mathrm{Im}F_Q^2=\{0\}$ であり (2) では $\mathrm{Ker}F_Q^2\cap\mathrm{Im}F_Q^2\neq\{0\}$ である．

定理 1 ([7], [5]) p は z^o で *non effectively hyperbolic* とする．このとき初期値問題が C^∞ 適切となるためには

$$\mathrm{Im}P_{sub}(z^o)=0,\ \ \left|P_{sub}(z^o)\right|\le\mathrm{Tr}^+F_p(z^o)$$

の成立することが必要である．ここで P_{sub} は P の副主表象；

$$P_{sub}(x,\xi)=P_1(x,\xi)+\frac{i}{2}\sum_{j=0}^n\frac{\partial^2p}{\partial x_j\partial\xi_j}(x,\xi).$$

この条件は Ivrii-Petkov-Hörmander (I-P-H) 条件と呼ばれる．特に $\mathrm{Tr}^+(z^o) = 0$ のときはこの条件は $P_{sub}(z^o) = 0$ となり Levi 条件と呼ばれる．

以下 $p(x,\xi)$ の２次特性点の集合 Σ は次の条件を満たすとする;

$$(*)\qquad \begin{cases} \Sigma \text{ は } C^\infty \text{ 多様体}, \\ \dim T_z\Sigma = \dim \mathrm{Ker} F_p(z), \quad z \in \Sigma, \\ \mathrm{rank}\ \sigma|_\Sigma = \text{定数 } (\Sigma\text{の点に依らない}). \end{cases}$$

$p(x,\xi) = -\xi_0^2 + q(x,\xi'),\ \xi = (\xi_0,\xi')$ として一般性を失わない．このときこれらの条件は次と同値である；各点 $z^o \in \Sigma$ に対し $\xi_0 = \phi_0,\ \phi_j(x,\xi'),\ j = 1,...,r$ が存在し ($d\phi_j(z^o)$ は一次独立)

$$\begin{cases} p = -\xi_0^2 + \sum_{j=1}^r \phi_j(x,\xi')^2, \quad \Sigma = \{\phi_j(x,\xi') = 0\}, \\ \mathrm{rank}(\{\phi_i,\phi_j\}(z))_{0\le i,j\le r} = \text{定数}, \ \ z \in \Sigma \end{cases}$$

と書ける．ここで $\{\phi_i,\phi_j\}$ は ϕ_i と ϕ_j の Poisson bracket を表す．

$f(x) \in \gamma^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ とは任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ に対して $C,\ A > 0$ がとれて次が成立すること．

$$|\partial_x^\alpha f(x)| \le CA^{|\alpha|}|\alpha|!^s,\ \forall x \in K,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

$p(x,\xi)$ が z^o の近くで基本分解可能とは z^o の近くで定義された実シンボル λ,μ (１次)，Q (２次)，$Q \ge 0$ が存在し次を満たすときをいう：

$$p(x,\xi) = -M\Lambda + Q, \quad \Lambda = \xi_0 - \lambda,\ \ M = \xi_0 - \mu$$
$$\big|\{\Lambda, Q\}\big| \le {}^\exists CQ, \quad \big|\{\Lambda, M\}\big| \le {}^\exists C(\sqrt{Q} + |\Lambda - M|).$$

定理 2 (*) を仮定する．$W = \mathrm{Im}F_p^2 \cap \mathrm{Ker}F_p^2$ とおくとき２次特性点の周りでの初期値問題に対して次が成立する．

F_p の固有値	W	Σ に対する零陪特性帯の挙動	初期値問題の適切性	基本分解
非零実固有値が存在	$W = \{0\}$	Σ の各点に丁度２本が横断的に	任意の低階に対して C^∞ 適切	不可
純虚固有値のみ	$W = \{0\}$	Σ に対して安定的 (Σ に入っていく零陪特性帯は存在しない)	*Levi* 条件あるいは *strict I-P-H* 条件の下で C^∞ 適切	可
	$W \ne \{0\}$			
		Σ に接する零陪特性帯が存在	*Levi* 条件の下で *Gevrey 5* 適切 *(optimal)*，*strict I-P-H* 条件の下で *Gevrey 6* 適切 *(optimal?)*	不可

補題 **3** ([8]) $p(x,\xi)$ は基本分解可能とする．このとき p の零陪特性帯で Σ に極限点をもつものは存在しない．

3　アプリオリ評価の導出 ($\mathrm{Ker}F_p^2\cap\mathrm{Im}F_p^2\neq\{0\}$)

以下 $p(x,\xi)=-\xi_0^2+q(x,\xi')$, $q(x,\xi')\geq 0$ とする．

補題 **4** $\mathrm{Ker}F_p^2(z)\cap\mathrm{Im}F_p^2(z)\neq\{0\}$, $z\in\Sigma$ を仮定する．各 $z^o\in\Sigma$ の近傍で p は次のように表される．

$$p=-(\xi_0-\phi_1)(\xi_0+\phi_1)+\sum_{j=2}^{r}\phi_j(x,\xi')^2,$$
$$\{\xi_0+\phi_1,\phi_j\}(z)=0,\ 1\leq j\leq r,\ z\in\Sigma,\quad \{\phi_1,\phi_2\}(z^o)\neq 0.$$

以下では補題 4 の結論が大域的に満たされていると仮定する;

- $\{\xi_0+\phi_1,\phi_j\}=\sum_{k=1}^{r}C_{jk}\phi_k,\quad j=1,...,r,$
- ある定数 $c>0$ が存在して $\big|\{\phi_1,\phi_2\}\big|\geq c|\xi'|.$

アプリオリ評価を得るための基本的な考え方は p を

$$p=-(\xi_0-\phi_1+\frac{1}{2}\phi_1|\phi_1||\xi'|^{-1})(\xi_0+\phi_1-\frac{1}{2}\phi_1|\phi_1||\xi'|^{-1})$$
$$+\sum_{j=2}^{r}\phi_j^2+|\phi_1|^3|\xi'|^{-1}(1-\frac{1}{4}|\phi_1||\xi'|^{-1})$$

のように表現し $\xi_0+\phi_1-\frac{1}{2}\phi_1|\phi_1||\xi'|^{-1}$ を部分積分の相手方として採用することである．実際には小さなパラメーター $\mu>0$ を導入して $x_0\to\mu x_0$ と時間のスケールを変えて

$$p(x,\xi,\mu)=\mu^2p(\mu x_0,x',\mu^{-1}\xi_0,\xi')$$
$$=-(\xi_0-\phi_1(x,\xi',\mu))(\xi_0+\phi_1(x,\xi',\mu))+\sum_{j=2}^{r}\phi_j(x,\xi',\mu)^2$$

を考える．このとき $\phi_j\in S(\langle\mu\xi'\rangle,g_0)$ となる．ただし

$$g_0=\mu^2dx_0^2+|dx'|^2+\langle\xi'\rangle_\mu^{-2}|d\xi'|^2,\quad \langle\xi'\rangle_\mu^2=\mu^{-2}+|\xi'|^2.$$

ここで ϕ_j は以下を満たす．

$$\{\xi_0+\phi_1,\phi_j\}=\mu\sum_{k=1}^{r}C_{jk}\phi_k,\quad 1\leq j\leq r,\quad \big|\{\phi_1,\phi_2\}\big|\geq c\mu\langle\mu\xi'\rangle.$$

次のシンボルを導入する．

$$w=\sqrt{\phi_1^2\langle\mu\xi'\rangle^{-2}+\langle\mu\xi'\rangle^{-4/5}},\ \ \Phi=\sqrt{1-aw}$$

定数 $a>0$ は $1-aw\geq c_1>0$ が成立するように一つ選んでおく．$a=1$ として一般性を失わない．主に次の metric を利用する．

$$g=w(x,\xi',\mu)^{-2}g_0,\quad \bar{g}=\langle\mu\xi'\rangle^{4/5}g_0.$$

このとき $S(\langle\xi'\rangle,g)\subset S(\langle\xi'\rangle^m,\bar{g})=S^m_{3/5,2/5}$ である．$p(x,\xi,\mu)$ は次のように書ける；

$$p=-(\xi_0-\phi_1\Phi)(\xi_0+\phi_1\Phi)+\sum_{j=2}^r\phi_j^2+w\phi_1^2=-M\Lambda+Q$$

ここで $P=(p+P_{sub})^w+\mu^2S(1,g)$ と

$$(\xi_0-\phi_1\Phi)\#(\xi_0+\phi_1\Phi)=\xi_0^2-\phi_1^2\Phi^2+\mu\sum_{j=1}^r c_j\phi_j+\mu^2S(1,g)$$

および Levi 条件より $P_{sub}=\sum_{j=0}^r c_j'\phi_j$ と書けることに注意すると

$$P=-M\Lambda+C\Lambda+Q+R,\ \ Q=\big(\sum_{j=2}^r\phi_j^2+w\phi_1^2)^w+\mu^2S(\langle\mu\xi'\rangle^{2\kappa},\bar{g}).$$

ここで $C\in\mu S(1,g)$, $R=(\sum_{j=1}^r C_j\phi_j)^w$, $C_j\in\mu S(1,g)$.

命題 1 $0<\mu<\mu_0$ に対して次が成立．

$$\begin{aligned}&\big\{\|e^{-t\langle\mu D'\rangle^{1/5}}\Lambda u(t,\cdot)\|^2+c\|\langle\mu D'\rangle^{1/5}e^{-t\langle\mu D'\rangle^{1/5}}u(t,\cdot)\|^2\big\}\\
+c\int_{-\infty}^t&\big\{\|\langle\mu D'\rangle^{1/10}e^{-x_0\langle\mu D'\rangle^{1/5}}\Lambda u\|^2+\|\langle\mu D'\rangle^{3/10}e^{-x_0\langle\mu D'\rangle^{1/5}}u\|^2\\
&+\mu\|\langle\mu D'\rangle^{1/2}e^{-x_0\langle\mu D'\rangle^{1/5}}u\|^2\big\}dx_0\\
&\leq C\int_{-\infty}^t\|\langle\mu D'\rangle^{-1/10}e^{-x_0\langle\mu D'\rangle^{1/5}}Pu\|^2dx_0.\end{aligned}$$

定理 3 $\mathrm{Ker}F_p^2(z)\cap\mathrm{Im}F_p^2(z)\neq\{0\}$, $P_{sub}(z)=0$, $z\in\Sigma$ を仮定する．このとき初期値問題は Gevrey 5 クラスで適切である．

4 Gevrey 5 適切性の optimality

微分作用素

$$P(x,D)=-D_0^2+2x_1D_0D_n+D_1^2+x_1^3D_n^2+\sum_{j=0}^n b_jD_j,\ \ b_j\in\mathbb{C}$$

を2次特性点 $z^o=(0,(0,...,1))\in\mathbb{R}^{2(n+1)}$ の近くで考える．このとき $\Sigma=\{\xi_0=0,x_1=0,\xi_1=0\}$, $(\xi_n\neq 0)$ が2重特性多様体であり，Levi 条件 $\Longleftrightarrow b_j=0,\ 2\le j\le n$．以下 $b_j=0,\ 2\le j\le n$ を仮定する．

$$p(x,\xi)=-\xi_0^2+2x_1\xi_0\xi_n+\xi_1^2+x_1^3\xi_n^2$$

が主シンボルで $p_{z^o}=-\xi_0^2+2x_1\xi_0+\xi_1^2$ は補題2の(2)の形で，従って non effectively hyperbolic かつ $\mathrm{Ker}F_p^2(z)\cap\mathrm{Im}F_p^2(z)\neq\{0\}$, $z\in\Sigma$ (ただし x_1 と ξ_1 を入れ替えている)．この p に対して

$$x_1=-\frac{x_0^2}{4},\ \ x_n=\frac{x_0^5}{80},\ \ \xi_0=0,\ \ \xi_1=\frac{x_0^3}{8},\ \ x_j,\xi_j=\text{定数},\ \ |x_0|>0$$

は一つの零陪特性帯で (x_0 を助変数として表現している) $\pm x_0\downarrow 0$ で Σ に接する．

$$U(x,\rho)=e^{i\rho^5x_n+\frac{i}{2}\zeta\rho x_0-\frac{i}{2}b_1x_1}W(x_1\rho^2)$$

の形をした $PU=0$ の解を考える．すなわち W は

$$W''(y)=(y^3+\zeta y-\zeta^2\rho^{-2}/4+b_0\zeta\rho^{-3}/2-b_1^2\rho^{-4}/4)W(y)$$

を満たせばよい．少し一般にして $\zeta,\,\epsilon\in\mathbb{C}$, $|\epsilon|$ は小，をパラメーターとする微分方程式

$$\text{(E)}\qquad w''(y)=(y^3+\zeta y+\epsilon)w(y),\quad \zeta,\,\epsilon\in\mathbb{C}$$

を考える．従って $w(y;\zeta,\epsilon)$ を (E) の解とするとき

$$U(x,\rho)=e^{i\rho^5x_n+\frac{i}{2}\zeta\rho x_0-\frac{i}{2}b_1x_1}w(x_1\rho^2;\zeta,\eta),\ \eta=-\frac{\zeta^2}{2}\rho^{-2}+\frac{\zeta b_0}{2}\rho^{-3}-\frac{b_1^2}{4}\rho^{-4}$$

は $PU(x,\rho)=0$ を満たす．

定理 4 ([14]) (E) には次のような解 $\mathcal{Y}(y;\zeta,\epsilon)$ が存在する．

(i) $\mathcal{Y}(y;\zeta,\epsilon)$ は (y,ζ,ϵ) の整関数,

(ii) $\mathcal{Y}(y;\zeta,\epsilon)$ は次のような漸近表現をもつ．

$$\mathcal{Y}(y;\zeta,\epsilon)\sim y^{-3/4}(1+p(y;\zeta,\epsilon))e^{-(\frac{2}{5}y^{5/2}+\zeta y^{1/2})}$$

ここで (ζ,ϵ) がコンパクト集合を動き y が *open sector* $|\arg y|<3\pi/5$ 内の任意の *closed subsector* で $y\to\infty$ のとき一様に $p(y;\zeta,\epsilon)\to 0$.

$\omega=\exp(\frac{2\pi i}{5})$ とおくと $\mathcal{Y}_k(y;\zeta,\epsilon)=\mathcal{Y}(\omega^{-k}y;\omega^{-2k}\zeta,\omega^{-3k}\epsilon)$, $k=1,2,3,4$ は再び (E) の解であり $S_k;|\arg y-\frac{2k}{5}\pi|<\frac{\pi}{5}$ で $\mathcal{Y}_k$ は subdominant である ($\mathcal{Y}_0=\mathcal{Y}$)．$\mathcal{Y}_k$ の漸近表現は定理4から得られ $|\arg y-2k\pi/5|<3\pi/5$ で成立する．また $\mathcal{Y}_k$ と $\mathcal{Y}_{k+1}$ は明らかに線形独立なので

$$\mathcal{Y}_k(y;\zeta,\epsilon)=C_k(\zeta,\epsilon)\mathcal{Y}_{k+1}(y;\zeta,\epsilon)+\tilde{C}_k(\zeta,\epsilon)\mathcal{Y}_{k+2}(y;\zeta,\epsilon).$$

補題 5 ([14]) $\tilde{C}_k(\zeta,\epsilon) = -\omega,\ C_k(\zeta,\epsilon) = C_0(\omega^{-2k}\zeta, \omega^{-3k}\epsilon)$ である．また $C_0(\zeta,\epsilon)$ は (ζ,ϵ) の整関数で

$$\partial_\zeta C_0(\zeta,\epsilon)|_{(\zeta,\epsilon)=(0,0)} \neq 0.$$

補題 6 $c(\zeta) = C_0(\zeta, 0)$ とおくとき

$$c(\zeta) + \omega^2 c(\omega\zeta)c(\omega^4\zeta) - \omega^3 = 0, \quad \forall\zeta \in \mathbb{C}.$$

補題 5 と補題 6 および Picard の小定理より

補題 7 $C_0(\zeta, 0)$ は少なくとも一つ零点 $\zeta_0(\neq 0)$ をもつ．

また $\overline{\mathcal{Y}_0(x;\zeta,\epsilon)} = \mathcal{Y}_0(\bar{x};\bar{\zeta},\bar{\epsilon})$ などから

補題 8 ([15]) $C_0(\zeta,\epsilon) = 0 \Longleftrightarrow C_0(\bar{\omega}\bar{\zeta}, \omega\bar{\epsilon}) = 0.$

方程式 (ζ に関する)

$$C_0(\zeta, -\zeta^2\epsilon^2/4 + \zeta b_0\epsilon^3/2 - b_1^2\epsilon^4/4) = 0$$

を $(\zeta,\epsilon) = (\zeta_0, 0)$, (あるいは $(\bar{\omega}\bar{\zeta}_0, 0)$) の近傍で解く．解 $\zeta(\epsilon)$ の一つは次の形で与えられる．

$$\zeta(\epsilon) = \tilde{\zeta}(\epsilon^{1/p}), \quad \tilde{\zeta}(z) \text{ は } z = 0 \text{ で正則}, \ {}^\exists p \in \mathbb{N}.$$

以上のことから $\eta(\epsilon) = -\tilde{\zeta}(\epsilon)^2\epsilon^{2p}/4 + \tilde{\zeta}(\epsilon)b_0\epsilon^{3p}/2 - b_1^2\epsilon^{4p}/4$ とおくと

$$\text{(C)} \qquad \mathcal{Y}_0(y;\tilde{\zeta}(\epsilon),\eta(\epsilon)) = -\omega\mathcal{Y}_2(y;\tilde{\zeta}(\epsilon),\eta(\epsilon))$$

が成立する．従ってこの解は S_0 と S_2 の両 sector で subdominant である．

$$U(x,\rho) = e^{i\rho^5 x_n + \frac{i}{2}\tilde{\zeta}(\rho^{-1/p})\rho x_0 - \frac{i}{2}b_1 x_1}\mathcal{Y}(x_1\rho^2; \tilde{\zeta}(\rho^{-1/p}), \eta(\rho^{-1/p}))$$

とおく．ζ_0, $\omega\zeta_0$, $\bar{\omega}\bar{\zeta}_0$, $\bar{\zeta}_0 = \omega\bar{\omega}\bar{\zeta}_0$ のうちいずれか一つは負の虚部をもつので

$$\mathrm{Im}[\tilde{\zeta}(0)\omega^k] < 0$$

となるように $k = 0, 1$ と $\tilde{\zeta}(\epsilon)$ (すなわち $\tilde{\zeta}$ として ζ_0 の周りで解いたものをとるか又は $\bar{\omega}\bar{\zeta}_0$ の周りで解いたものをとるか) を選び $\rho = \lambda\omega^k$, $\lambda > 0$ ととる．

補題 9

$$W(x_1,\rho) = \mathcal{Y}(x_1\rho^2; \tilde{\zeta}(\rho^{-1/p}), \eta(\rho^{-1/p}))$$

とおくと $W(x_1,\rho)$ は次を満たす．

$$\big|\big(\frac{d}{dx_1}\big)^k W(x_1,\rho)\big| \leq C^{k+1}|\rho|^{2k}k^{3k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

これをみるには $x<-R$ で，$k=0,1$ のとき (C) より

$$\mathcal{Y}(x\omega^{2k};\tilde{\zeta},\eta)=C(\omega)e^{-(\frac{2}{5}i|x|^{5/2}+i\tilde{\zeta}|x|^{1/2}\omega^k)}|x|^{-3/4}\Big[1+R(x)\Big]$$

が成り立っていることに注意する．ここで $R(x)$ は sector $|\arg x-\pi|<2\pi/5$ で正則，さらにたとえば $|\arg x-\pi|\le\pi/5$ では $|R(x)|\le C$ が成立している．故に $R(x)$ の微分は容易に評価できる．またある $c>0$ があって $\mathsf{Im}(\tilde{\zeta}(\rho^{-1/p})\omega^k)\le -c$ であったから

$$\Big|\Big(\frac{d}{dx}\Big)^k e^{-(\frac{2}{5}i|x|^{5/2}+i\tilde{\zeta}|x|^{1/2}\omega^k)}\Big|\le C^{k+1}(k+|x|^{3/2})^k e^{-c|x|^{1/2}}\le C^{k+1}k^{3k}$$

が従う．$x>R$ では (C) より $\mathcal{Y}(x\omega^{2k};\tilde{\zeta},\eta)$ $(k=0,1)$ は $e^{-\frac{2}{5}|x|^{5/2}}$ のように減少する．

命題 **2** $R>0$, $h>0$ は与えられているとする．このとき $q\in\mathbb{N}$, $C>0$, $c>0$ があって次が成立．

$$|U(x_0,0,\rho)|\ge c|\rho|^{-2q/p}\exp(c|\rho|x_0),\quad x_0>0,$$
$$\sum_{j=0}^{1}\sup_{|x'|\le R,\alpha}\frac{|\partial_{x'}^{\alpha}D_0^jU(0,x',\rho)|}{h^{|\alpha|}|\alpha|^{s|\alpha|}}\le C|\rho|\exp(c|\rho|^{s^*}).$$

ここで $s^*=\max\{\dfrac{5}{s},\dfrac{2}{s-3}\}$.

$K\subset\mathbb{R}^n$ をコンパクト集合とする．

$$f(x)\in\gamma_0^{(s),h}(K)\Longleftrightarrow f(x)\in C_0^{\infty}(K),\ \ |\partial_x^{\alpha}f(x)|\le Ch^{|\alpha|}|\alpha|!^s,\quad \forall\alpha\in\mathbb{N}^n.$$

$D_\epsilon=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid |x'|^2+|x_0|<\epsilon\}$, $K=\{|x'|^2\le\epsilon_1\}$ とおく．$\epsilon_1>0$ は十分小．P に対する初期値問題は $\gamma^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ 内で原点で局所可解とする．このとき次のような $\delta>0$ をみつけることができる (cf. [10])；

(1) 任意の初期値 $u_j(x')\in\gamma_0^{(s),h}(K)$ に対して解 $u(x)\in C^2(D_\delta)$ が存在,

(2) 任意のコンパクト集合 $L\subset D_\delta$ に対して $C>0$ が存在し

$$|u(x)|_{C^0(L)}\le C\sum_{j=0}^{1}\sup_{\alpha,x'}\frac{|\partial_{x'}^{\alpha}u_j(x')|}{h^{|\alpha|}|\alpha|!^s},\quad \forall u_j(x')\in\gamma_0^{(s),h}(K).$$

定理 **5** P に対する初期値問題は $\gamma^{(s)}(\mathbb{R}^n)$, $s>5$ の中で原点で局所可解でない．

5 零陪特性帯と基本分解

補題 **10** 次の条件を満たす滑らかな $z_1(z),\ z_2(z) \in T_\Sigma(T^*\mathbb{R}^{n+1})$ が存在する．

$$\forall w \in \langle z_1(z)\rangle^\sigma \Longrightarrow \sigma(w, F_p(z)w) \geq 0,$$

$$w \in \langle z_1(z)\rangle^\sigma,\ \sigma(w, F_p(z)w) = 0 \Longrightarrow w \in \mathrm{Ker}F_p(z) \oplus \langle z_2(z)\rangle.$$

$S(x,\xi)$ は滑らかで Σ 上では零になり $H_S(z)$ が $\mathrm{Ker}F_p(z)$ を modulo にして $z_2(z)$ に平行であるとする ($z \in \Sigma$ で)．すなわち次を満たすとする；

$$H_S(z) = {}^\exists\theta(z)z_2(z) + {}^\exists H_f(z), \quad H_f(z) \in \mathrm{Ker}F_p(z),\ \ z \in \Sigma.$$

定理 **6** ([12], [2]) $H_S^3 p(z) = 0,\ z \in \Sigma$ ならば p は基本分解可能．逆も成立する．

以下考察を単純にするために $\mathrm{Tr}^+F_p(z) = 0,\ z \in \Sigma$ を仮定する．このとき

補題 **11** 適当な symplectic coordinates を選ぶと p は次のように書ける．

$$p = -\xi_0(\xi_0 + 2\phi_1) + \sum_{j=2}^{r}\phi_j^2,\ \ \Sigma \text{ 上 } \{\xi_0, \phi_j\} = 0,\ \ 1 \leq j \leq r,$$

$$\Sigma \text{ 上 } \{\phi_i, \phi_j\} = 0,\ 2 \leq i, j \leq r,\ \ \{\phi_1, \phi_2\}(z^o) \neq 0.$$

このとき $S = \phi_2$ と選べるので

$$H_S^3 p(z^o) \neq 0 \Longleftrightarrow \{\phi_2, \{\phi_2, \xi_0\}\}(z^o) \neq 0$$

となる．$\{\phi_1, \phi_2\}(z^o) \neq 0$ 故，$\xi_0,\ x_0,\ \phi_1,\ \phi_2,...,\phi_r,\ \psi_1,...,\psi_k$ $(r + k = 2n)$ を

$$\Sigma \text{ 上 } \{\xi_0, \psi_j\} = 0,\ \ \{\phi_2, \psi_j\} = 0,\ 1 \leq j \leq k$$

を満たしかつ局所座標となるようにとれる．この局所座標で Hamilton の正準方程式は

$$\frac{d}{ds}x_0 = \{x_0, p\},\ \frac{d}{ds}\xi_0 = \{\xi_0, p\},\ \frac{d}{ds}\phi_j = \{\phi_j, p\},\ \frac{d}{ds}\psi_j = \{\psi_j, p\}$$

となる．$t = 1/s$ とおき

$$\begin{cases} \xi_0(s) = t^4\Xi_0(t),\ x_0(s) = tX_0(t),\ \phi_1(s) = t^2\Phi_1(t),\ \phi_2(s) = t^3\Phi_2(t), \\ \phi_j(s) = t^3\Phi_j(t),\ 3 \leq j \leq r,\ \ \psi_j(s) = t^2\Psi_j(t),\ 3 \leq j \leq k \end{cases}$$

と変換すると，$D = t\dfrac{d}{dt}$ とおいて

$$\text{(HS)} \qquad \begin{cases} D\Xi_0 = -4\Xi_0 - 2\kappa_2\Phi_1\Phi_2 + tG(t,V), \\ DX_0 = -X_0 + 2\Phi_1 + tG(t,V), \\ D\Phi_1 = -2\Phi_1 + 2\delta\Phi_2 + tG(t,V), \\ D\Phi_2 = -3\Phi_2 - 2\kappa_2\Phi_1^2 + 2\delta\Xi_0 + tG(t,V), \\ D\Phi_j = -3\Phi_j - 2\kappa_j\Phi_1^2 + tG(t,V), \\ D\Psi_j = -2\Psi_j + 2\sum_{k=3}^{r}\nu_{jk}\Phi_k + tG(t,V) \end{cases}$$

となる．ここで $\kappa_j = C_1^{j0}(z^o)$, $\delta = \{\phi_1, \phi_2\}(z^o)$, $\nu_{jk} = \{\psi_j, \phi_k\}(z^o)$．ただし $\{\phi_j, \xi_0\} = \sum_{i=1}^r C_i^{j0}\phi_i$ とおいた．従って特に

$$\kappa_2 = C_1^{20} = \frac{\{\phi_2, \{\phi_2, \xi_0\}\}}{\{\phi_2, \phi_1\}}(z^o) \neq 0.$$

また $G(t, V)$ は (t, V), $V = (X_0, \Phi_1, \Xi_0, \Phi_2, \Phi_j, \Psi_j)$ の滑らかな関数で $G(t, 0) = 0$ を満たす．

$$\mathcal{E} = \{\sum_{0\le j\le i} t^i (\log t)^j V_{ij} \mid V_{ij} \in \mathbb{C}^N\}$$

とおく．

補題 12 $V \in \mathcal{E}$ が形式的に (HS) を満たし，$\Phi_2(0) \neq 0$ とする．このとき $X_0(0)$, $\Xi_0(0)$, $\Phi_j(0)$, $\Psi_j(0)$ は一意的に決まる．

補題 13 (HS) を $DV = AV + tF + G(t, V)$ と書くとき A の固有値は $\{-6, -4, -3, -2, -1, 1\}$ である．

命題 3 $\Phi_2(0) \neq 0$ を満たす (HS) の形式解 $V \in \mathcal{E}$ が存在する．

定理 7 $H_S^3 p(z^o) \neq 0$ とする．このとき z^o を極限点とする零陪特性帯が存在する．従って Σ 上に極限点をもつ零陪特性帯が存在しなければ $p(x, \xi)$ は基本分解可能である．

6　いくつかの問題

1. $\mathrm{Tr}^+ F_p \neq 0$ のとき，strict I-P-H 条件下での Gevrey 6 の optimality；

$$P = -D_0^2 + 2x_1 D_0 D_n + D_1^2 + x_1^3 D_n^2 + a(x_2^2 D_n^2 + D_2^2), \quad a > 0$$

に対する初期値問題は $\gamma^{(s)}(\mathbb{R}^n)$, $s > 6$ では適切でない？ これについては C^∞ で適切でない（？）こともまだ示されていない．

2. Σ に接する零陪特性帯に沿っての Gevrey s 特異性は (極限点まで) どのように伝播するのか/しないのか．

3. $\mathrm{Ker}F_p^2 \cap \mathrm{Im}F_p^2 \neq \{0\}$ で Σ に接する零陪特性帯が存在しないとき，strict I-P-H 条件下では C^∞ 適切である．では I-P-H 条件が満たされないときはどの Gevrey クラスで適切なのか？(Gevrey 4 が閾値？)．同様に $\mathrm{Ker}F_p^2 \cap \mathrm{Im}F_p^2 = \{0\}$ のとき，I-P-H 条件が満たされなければどうか？(Gevrey 2 が閾値？）(cf. [6], §9).

4. Σ 上で F_p のスペクトル構造が変化するときにはなにが起こるのか？ たとえば典型的な場合として p は non effectively hyperbolic で Σ のある部分多様体上で $W = \{0\}$，それ以外で $W \neq \{0\}$．　他の典型例として，$\Sigma \setminus S$ で effectively hyperbolic, S 上で non effectively hyperbolic.

参考文献

[1] E.Bernardi and A.Bove; *On the Cauchy problem for some hyperbolic operator with double characteristics,* in Phase Space Analysis of Partial Differential Equations, pp. 29-44, A.Bove *et al* eds., Birkhäuser, 2006

[2] E.Bernardi, A.Bove and C.Parenti; *Geometric results for a class of hyperbolic operators with double characteristics, II,* J. Func. Anal. **116** (1993), 62-82.

[3] E.Bernardi and T.Nishitani; *On the Cauchy problem for non effectively hyperbolic operators, the Gevrey 5 well posedness,* to appear in J. Analyse Math.

[4] L.Hörmander; The Analysis of Linear Partial Differential Operators, III Springer, Berlin-Heidergerg-New York-Tokyo, 1983∼1985.

[5] L.Hörmander; *The Cauchy problem for differential equations with double characteristics,* J. Analyse Math. **32** (1979), 118-196.

[6] L.Hörmander; *Quadratic hyperbolic operators,* in Microlocal Analysis and Applications, pp. 118-160, L.Cattabriga, L.Rodino eds., Springer, 1989

[7] V.Ja.Ivrii; *The well posedness of the Cauchy problem for non strictly hyperbolic operators III, the energy integral,* Trans. Moscow Math. Soc. **34** (1978), 149-168.

[8] V.Ja.Ivrii; *Wave fronts of solutions of certain hyperbolic pseudodifferential equations,* Trans. Moscow Math. Soc. **39** (1979), 87-119.

[9] V.Ja.Ivrii and V.M.Petkov; *Necessary conditions for the Cauchy problem for non strictly hypebolic equations to be well posed,* Uspehi Mat. Nauk. **29** (1974), 3-70.

[10] S.Mizohata; 偏微分方程式論, 岩波書店, 1965.

[11] T.Nishitani; *Non effectively hyperbolic operators, Hamilton map and bicharacteristics,* J. Math. Kyoto Univ. **44** (2004), 55-98.

[12] T.Nishitnai; *Microlocal energy estimates for hyperbolic operators with double characteristics,* Hyperbolic Equations and Related Topics, Kinokuniya, Tokyo, 1986 pp. 235-255.

[13] T.Nishitani; *Note on some non effectively hyperbolic operators,* Sci. Rep. College Gen. Ed. Osaka Univ. **32** (1983), 9-17.

[14] Y.Sibuya; Global Theory of a Second Order Linear Ordinary Differential Equation with a Polynomial Coefficient, North-Holland Mathematical Studies vol **18**, 1975.

[15] D.T.Trinh; *On the simpleness of zeros of Stokes multipliers,* J. Diff. Eqs. **223**, (2006), 351-366.