

非同次主要部をもつ準線形楕円型方程式 の正値解について

成川 公昭 鳴門教育大学

1 序

本講演では、準線形楕円型方程式

$$-\operatorname{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = f(\lambda, x, u) \quad \text{in } \Omega \quad (1.1)$$

をディリクレ境界値

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (1.2)$$

のもとで考え、特にその正値解について考える。ここで Ω は R^N のなめらかな領域であり、 λ は実パラメータである。

この方程式において、特に半線形の場合、すなわち $\phi(t) = 1$ の場合には以下に述べる Brezis-Nirenberg [4] およびそれに続く Ambrosetti-Brezis-Cerami [2] の研究をはじめとして非常によく研究されている。

定理 1.1 (Brezis-Nirenberg [4]) Ω を R^N の有界な領域とし、 $N \geq 3$ とする。このとき境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u^{p-1} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

$p = 2N/(N-2)$, に対し次が成り立つ。

- 1) $N \geq 4$ ならば、任意の $\lambda \in (0, \lambda_1)$ に対し、(1.3) の正値解が少なくとも一つ存在する。
- 2) $N = 3$ ならば、正定数 $\lambda_* < \lambda_1$ が存在し、任意の $\lambda \in (\lambda_*, \lambda_1)$ に対し、(1.3) の正値解が少なくとも一つ存在する。
- 3) $N = 3$ で、 Ω が星形の時、 $\lambda_* > 0$ が存在し、 $\lambda \leq \lambda_*$ に対して正値解は存在しない。

ここで、 λ_1 はディリクレ境界条件付きの $-\Delta$ の第一固有値である。

定理 1.2 (Ambrosetti-Brezis-Cerami [2]) Ω を R^N , $N \geq 3$, の有界な領域とし、 $1 < q < 2 < p \leq 2N/(N-2)$ とする。このとき、境界値問題

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^{q-1} + u^{p-1} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.4)$$

に対し、定数 $\Lambda > 0$ が存在し、次が成り立つ。

- 1) 任意の $\lambda \in (0, \Lambda)$ に対し, 少なくとも 2 つの正值解が存在する .
- 2) $\lambda = \Lambda$ ならば, 正值解が少なくとも一つ存在する .
- 3) 任意の $\lambda > \Lambda$ に対し, 正值解は存在しない .

これらの結果は p -ラプラシアン, 即ち $\phi(t) = |t|^{p-2}$ ($p > 1$) の場合に拡張されている (Egnell [6], Garcia-Manfredi-Peral [9] 等) . また, 領域 Ω が全領域の場合にも [10] [17] 等が p -ラプラシアンに対し結果を得ている . しかし, 以下の例のように主要部 $\phi(t)$ が非同次となるモデル方程式がよく現れる一方, これらに対しては十分な研究がなされていないように思われる .

a) 非線形弾性体: $\Phi(t) = (1 + t^2)^\gamma - 1 \quad (\gamma > 1/2; \text{定数})$

b) 一般プラスチック: $\Phi(t) = t^\alpha (\log(1 + t))^\gamma \quad (\alpha \geq 1, \gamma > 0; \text{定数})$

c) 一般ニュートン流: $\Phi(t) = \int_0^t s^{1-\alpha} (\sinh^{-1} s)^\gamma ds \quad (\alpha, \gamma > 0; \text{定数}).$

(ここで, $\Phi(t) = \int_0^t s \phi(s) ds.$)

これらの例のように非同次の主要部 $\phi(t)$ をもつ準線形方程式に対し, 半線形方程式や p -ラプラシアンで得られた結果がどの程度成り立つのか議論することが本講演の目的である .

これらに関しては, Ω が R^N の球の場合に軸対称解については多く議論されている (例えば, [7] [8] [12]).

以後,

$$\Phi(t) = \int_0^t s \phi(s) ds, \quad F(\lambda, x, t) = \int_0^t f(\lambda, x, s) ds$$

とし, $\phi(t)t, f(\lambda, x, t)$ は共になめらかで, $\Phi(t)$ は $t > 0$ で狭義凸と仮定する .

2 Orlicz-Sobolev 空間

方程式 (1.1) は変分問題の立場からとらえると, 形式的にある空間上の汎関数

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|) dx - \int_\Omega F(\lambda, x, u) dx$$

のオイラー方程式と考えられる . 一般に $\Phi(t)$ が多項式程度の増大度でないとき, 境界値問題 (1.1), (1.2) を考えるには, この汎関数 I_λ を定義する空間として Φ により定義される Orlicz-Sobolev 空間を導入し, その上で解析を行うのが自然と思われる .

以下, Orlicz 空間についてその定義と簡単な性質を挙げる . 詳しくは [1] [13] 等を参照 .

$\Phi(t)$ をなめらかな N -関数, 即ち, $\Phi(t)$ は $\Phi(0) = 0, \Phi(t) \rightarrow \infty (t \rightarrow \infty)$ をみたす凸関数とする . このとき, Orlicz 空間およびそのノルムは

$$L_\Phi(\Omega) = \left\{ u(x); \Omega \text{ 上可測} \mid \text{ある } k > 0 \text{ が存在し, } \int_\Omega \Phi\left(\frac{|u(x)|}{k}\right) dx < \infty \right\}$$

$$\|u\|_\Phi = \inf \left\{ k > 0 \mid \int_\Omega \Phi \left(\frac{|u(x)|}{k} \right) dx \leq 1 \right\}$$

で定義される . また , $C_0^\infty(\Omega)$ のノルム $\|u\|_\Phi + \|\nabla u\|_\Phi$ による閉包を $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$, $\|\nabla u\|_\Phi$ による閉包を $\mathcal{D}^{1,\Phi}(\Omega)$ とかく .

共役関数 $\Phi_*(t)$ を

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{\frac{1+N}{N}}} ds \quad \text{for } t > 0 \quad (2.1)$$

で定義すると , Poincaré-Sobolev 不等式

$$\|u\|_{\Phi_*} \leq S_0 \|\nabla u\|_\Phi, \quad u \in \mathcal{D}^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N) \quad (2.2)$$

が成り立つ . ここで , 定数 S_0 は次元 N と Φ にのみ依存する定数である . 空間 $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$, $\mathcal{D}^{1,\Phi}(\Omega)$ は , $L_{\Phi_*}(\Omega)$ に連続的に埋め込まれるが , その埋め込みはコンパクトではない .

次に , $E_\Phi(\Omega)$ を局所的に有界な関数全体の $L_\Phi(\Omega)$ での閉包 , 共役関数を $\tilde{\Phi}(s) = \max_{t \geq 0} \{st - \Phi(t)\}$ とおくと , 共役関係 $L_{\tilde{\Phi}}(\Omega) = E_\Phi(\Omega)^*$ が成り立つ . $\Phi(t)$ が Δ_2 条件 , すなわち , 定数 $k > 0$ が存在し ,

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t), \quad t \geq 0,$$

をみたすとき , $E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$ 成り立つ . 従って , 一般に , $L_\Phi(\Omega)$ が回帰的であるための必要十分条件は , $\Phi(t)$ および $\tilde{\Phi}(t)$ が Δ -regular ($|\Omega| = \infty$ のときは Δ_2 条件) であることである .

3 Subcritical Case

領域 Ω を有界とし , 境界値問題

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = \lambda f(x, u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

の弱解を求めるため , 空間 $W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ 上の汎関数

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|) dx - \lambda \int_\Omega F(x, u) dx$$

を考える . このとき , I_λ の臨界点が (3.1) の弱解である . 以下 $\Phi(t)$ は N -関数とし , 更に次の仮定をおく .

(Φ_1) 定数 $\ell, m > 1$ が存在し ,

$$\ell \leq \frac{t\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leq m, \quad t > 0, \quad (3.2)$$

(Φ_2) 定数 $a_0, a_1 > 0$ が存在し,

$$a_0 \leq \frac{t\Phi''(t)}{\Phi'(t)} \leq a_1, \quad t > 0. \quad (3.3)$$

外力項 $f(x, t)$ に対しては, 次の subcritical の仮定をおく.

(f_1) $F(x, t) = o(\Phi_*(t))$ as $t \rightarrow \infty$ (x に関し一様).

以上の仮定の下で, 弱解の正則性に関する定理と強比較定理を示すことができる.

定理 3.1 (解の正則性) (3.1) の弱解 $u \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$ は, ある $\alpha > 0$ に対し, $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ に入り, 更に, λ と $\|u\|_\Phi$ にのみ依存する定数 $C(\lambda, \|u\|_\Phi)$ が存在し,

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\lambda, \|u\|_\Phi).$$

定理 3.2 (強比較定理) $h_1, h_2 \in L^\infty(\Omega)$ が, Ω 上で $0 \leq h_1 \leq h_2$ をみたし,

$$\{x \in \Omega \mid h_1(x) = h_2(x)\}^\circ = \emptyset$$

とする. さらに, $u_i \in W_0^1 L_\Phi(\Omega)$, $i = 1, 2$, を

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\phi(|\nabla u_i|)\nabla u_i) = h_i & \text{in } \Omega \\ u_i = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.4)$$

の弱解とする. このとき,

$$0 \leq u_1 < u_2 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \nu} < \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \leq 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

定理 3.2 は, Guedda-Veron [11] の p -ラプラシアンにたいする結果の拡張である. これらの定理を使うことにより, Ambrosetti-Brezis-Cerami の結果 (定理 1.2) に対応する次の定理を得る.

定理 3.3 (Φ_1), (Φ_2), (f_1) の仮定に加え, $f(x, t)$ に次の仮定をする.

(f_2) $f(x, t) > 0$, $x \in \Omega$, $t > 0$,

(f_3) 各 $x \in \Omega$ に対し, $f(x, t)$ は $t > 0$ において非減少,

(f_4) $\Phi(t) = o(f(x, t)t)$ as $t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ (x に関し一様).

このとき,

$$\Lambda_0 = \sup\{\lambda > 0 \mid (3.1) \text{ の正值解が存在} \}$$

とおくと, $0 < \Lambda_0 \leq \infty$ であり, 任意の $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ に対して, 少なくとも 2 つの (3.1) の正值解が存在する.

定理 3.3 の証明には，定理 3.1，3.2 が成り立つことに注意し，Brezis-Nirenberg [5] の “ H^1 versus C^1 local minimizer” の議論を適用する．

注意 3.1 一般に定理 3.3 の仮定の下で，Ambrosetti-Brezis-Cerami の場合と同様に $\Lambda_0 < \infty$ であると思われるが，その証明には至っていない． $\phi(t)$ 及び $f(x, t)$ が $t \rightarrow 0, \infty$ において多項式増大度のとき，すなわち，

$$\phi(t)t = \begin{cases} \alpha_0 t^{p_0-1} + o(t^{p_0-1}), & t \rightarrow 0 \\ \alpha_1 t^{p_1-1} + o(t^{p_1-1}), & t \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.5)$$

$$f(x, t) = \begin{cases} \beta_0 t^{q_0-1} + o(t^{q_0-1}), & t \rightarrow 0 \\ \beta_1 t^{q_1-1} + o(t^{q_1-1}), & t \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.6)$$

($1 < p_0, q_0, p_1, q_1 < \infty$, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 > 0$: 定数) のとき， $1 < q_0 < p_0$, $p_1 < q_1 < p_1^*$ のもとで，定理 3.3 が成り立つが， $p_0 = p_1$ ならば $\Lambda_0 < \infty$ が示される．

定理 3.3 に対して，仮定 (f_4) と逆の仮定

(f_5) $f(x, t)t = o(\Phi(t))$ as $t \rightarrow 0, \infty$ (x に関し一様)

とくと，つぎの対応する定理が成り立つ．

定理 3.4 定理 3.3 において， (f_4) の代わりに (f_5) を仮定する．このとき，定数 $\Lambda_1 > 0$ が存在し，次が成り立つ．

- 1) 任意の $\lambda \in (0, \Lambda_1)$ に対し，(3.1) の正值解は存在しない．
- 2) $\lambda = \Lambda_1$ で，(3.1) は少なくとも 1 つの正值解を持つ．
- 3) 任意の $\lambda > \Lambda_1$ に対し，(3.1) は少なくとも 2 つの正值解を持つ．

つぎに， $\phi(t)$ および $f(x, t)$ が注意 3.1 で述べたように (3.5), (3.6) の形であるとする．ここで，特に $p_0 = q_0$, $p_1 = q_1$ ならば， $u = 0$ および $u = \infty$ において解の分岐が起こる．

p -ラプラシアン固有値問題を

$$(E)_p \begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \mu |u|^{p-2} u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.7)$$

とし， $\mu_1(p)$ を $(E)_p$ の第一固有値とする．このとき，定理 3.1 を用い，Rabinowitz [16] の分岐の理論より

定理 3.5 $p_0 = q_0$, $p_1 = q_1$ とすると，(3.1) の正值解が $(\alpha_0 \mu_1(p_0)/\beta_0, 0)$ と $(\alpha_1 \mu_1(p_1)/\beta_1, \infty)$ から分岐する．さらにそれぞれの分枝を C_0^+ , C_∞^+ としたとき，どちらかが μ 方向に有界ならば，これらは一致する．

注意 3.1 で述べたのと同じく，定理 3.5 の最後の状況は一般に成り立つと思われるが，現在証明できているのは $p_0 = p_1$ のときのみである．

定理 3.6 $p_0 = p_1 = q_0 = q_1$ の時，分岐点 $(\alpha_0 \mu_1(p_0)/\beta_0, 0)$ と $(\alpha_1 \mu_1(p_1)/\beta_1, \infty)$ を結ぶ (3.1) の正值解の分枝 C_0^+ が存在する．

固有値問題 $(E)_p$ の高階固有値に関しては完全には分かっていないが，Ljusternik-Schnirelman の理論を用い可算個の固有値が得られている． $(E)_p$

に対するこれらの固有値を $\{\mu_k(p)\}$ とおくと，高階固有値からの解の分岐が得られる．

定理 3.7 定理 3.6 の仮定に加え，

$$(f_6) \quad f(x, -u) = -f(x, u), \quad (x, u) \in \Omega \times \mathbf{R}$$

とする．このとき，各 $(\alpha_0 \mu_k(p_0)/\beta_0, 0)$ と $(\alpha_1 \mu_k(p_1)/\beta_1, \infty)$ から (3.1) の非自明解が分岐する．

4 Critical Case

ここでは， $\Omega = \mathbf{R}^N$ とし，

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = b(|u|)u + \lambda a(x)g(u) & \text{in } \mathbf{R}^N \\ u \in \mathcal{D}^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N), \end{cases} \quad (4.1)$$

について考える．ここで $a(x)$ はコンパクト台を持つ，連続，非負な恒等的に 0 でない関数とする．また，簡単のため，

$$(B) \quad B(t) \left(\equiv \int_0^t b(s)ds \right) = \beta \Phi_*(t), \quad t > 0, \quad (\beta > 0: \text{定数})$$

とし， $g(t)$ の原始関数 $G(t)$ に対し，以下の仮定をおく．

$$(G_1) \quad G \in C^1(\mathbf{R}), \quad G(t) > 0 \text{ for } t > 0,$$

(G_2) 定数 $c_0, c_1, r_0 > 0, r_1 > mm^*/\ell^*$ が存在し，十分小さい $t > 0$ に対して

$$c_0 t^{r_0} \leq G(t) \leq c_1 t^{r_1}, \quad (4.2)$$

(G_3) $m < \tau \leq \sigma < \ell^*$ をみたす τ, σ が存在し，十分大きい $t > 0$ に対して

$$\tau \leq \frac{tG'(t)}{G(t)} \leq \sigma. \quad (4.3)$$

このとき次の定理が成り立つ．

定理 4.1 $(B), (G_1) \sim (G_3)$ ，および， $1 < \ell \leq m < \ell^*, m < N$ に対して (Φ_1) が成り立つと仮定する．このとき，定数 $\Lambda_2 > 0$ が存在し，任意の $\lambda > \Lambda_2$ に対し (4.1) の非負，非自明解が存在する．

定理 4.2 $(B), (G_1) \sim (G_3)$ ，および， $1 = \ell \leq m < \ell^*, m < N$ に対して (Φ_1) が成り立つと仮定する．このとき， $\beta_0 > 0$ ，および $\beta \searrow 0$ のとき， $\Lambda(\beta) \searrow 0$ をみたす $\Lambda(\beta) > 0$ が存在し，任意の $0 \leq \beta \leq \beta_0, \lambda > \Lambda(\beta)$ に対し (4.1) の非負，非自明解が存在する．

注意 4.1 第 1 章に挙げた例においては，それぞれ a) $\ell = \min\{2, 2\gamma\}$, $m = \max\{2, 2\gamma\}$, b) $\ell = \alpha, m = \alpha + \gamma$, c) $\ell = 2 - \alpha, m = 2 - \alpha + \gamma$ であり， (Φ_1)

は , a) $\frac{N}{N+2} < \gamma < \frac{N}{N-2}$, b) $1 \leq \alpha < N$, $0 < \gamma < \frac{\alpha^2}{N-\alpha}$ c) $0 < \gamma < \frac{(2-\alpha)^2}{N-(2-\alpha)}$ で成り立つ . 特に b) c) において $\alpha = 1$ が $\ell = 1$ の場合に当たる .

定理を示すには , $\mathcal{D}^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N)$ 上の汎関数

$$I_\lambda(u) = \int_{\mathbf{R}^N} \Phi(|\nabla u|)dx - \beta \int_{\mathbf{R}^N} \Phi_*(|u|)dx - \lambda \int_{\mathbf{R}^N} a(x)G(u)dx \quad (4.4)$$

の非自明な臨界点を求めればよい . しかし , このとき埋め込み $\mathcal{D}^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N) \subset L_{\Phi_*}(\mathbf{R}^N)$ は , $\Phi_*(t)$ の critical な増大度 , および $\mathbf{R}^N$ の非有界性のために , 有界ではあるが , コンパクトではない . さらに , $\ell = 1$ の場合には $\mathcal{D}^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N)$ は回帰的ではなく , I_λ は Gâteaux 微分可能ではあるが , Fréchet 微分不可能である . したがって Le [14] は有界領域において subcritical の場合 ($\beta = 0$ の場合) に , 変分不等式を考えて解を構成している . それに従って , (4.4) に対する変分問題の代わりに , 次の変分不等式に対する変分問題を考える .

問題 任意の $v \in \mathcal{D}^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N)$ に対し , 不等式

$$\int_{\mathbf{R}^N} \Phi(|\nabla v|)dx - \int_{\mathbf{R}^N} \Phi(|\nabla u|)dx - \int_{\mathbf{R}^N} \{\beta \phi_*(u)u + \lambda a(x)g(u)\}(v-u)dx \geq 0 \quad (4.5)$$

をみたす非自明な $u \in \mathcal{D}^{1,\Phi}(\mathbf{R}^N)$ を求めよ .

上変分不等式の解が (4.1) の弱解となることは明らかである . この変分問題を Szulkin [18] による微分不可能な凸関数に対する mountain pass lemma を使い , Lions [15] の concentration-compactness arguments を適用して解く .

References

- [1] R.A. Adams and J.F. Fournier, *Sobolev Spaces*, 2nd ed., Academic Press, New York, 2003.
- [2] A. Ambrosetti, H. Brezis and G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. **122** (1994), 519-543.
- [3] H. Brézis and E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 486-490.
- [4] H. Brézis and L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437-447
- [5] H. Brézis and L. Nirenberg, *H^1 versus C^1 local minimizers*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **317** (1993), 465-472.

- [6] H. Egnell, *Existence and nonexistence results for m -laplace equations involving critical Sobolev exponents*, Arch. Rat. Mech. Anal. **104**(1988), 57-77.
- [7] M. García-Huidobro, R. Manásevich and K. Schmitt, *Some bifurcation results for a class of p -laplacian like operators*, Differential Integral Equations **130** (1997), 51-66.
- [8] M. García-Huidobro, R. Manásevich and K. Schmitt, *Positive radial solutions of quasilinear elliptic partial differential equations on a ball*, Nonlinear Anal. **35** (1999), 175-190.
- [9] J. García Azorero, I. Peral Alonso and J.J. Manfredi, *Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations*, Comm. Contemp. Math. **2** (2000), 385-404.
- [10] J.V. Gonçalves and C.O. Alves, *Existence of positive solutions for m -Laplacian equations in $\mathbf{R}^N$ involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal., **32** (1998) 53-70.
- [11] M. Guedda and L. Veron, *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. **13**(1989), 879-902.
- [12] D.D. Hai and K. Schmitt, *On radial solutions of quasilinear boundary value problems*, in Topics in Nonlinear Analysis, eds. J. Escher and G. Simonett, *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.* **35**, Birkhäuser, Basel, 1999, pp.349-361.
- [13] M.A. Krasnosel'skiĭ and Ya.B. Rutickiĭ, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Transl. from the first Russian edition by L.F. Boron, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.
- [14] V.K. Le, *Nontrivial solutions of mountain pass type of quasilinear equations with slowly growing principal parts*, Differential and Integral Equations **15** (2002), 839-862.
- [15] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations, The limit case, I*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 145-201.
- [16] P.H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. **7** (1971), 487-513.
- [17] E.A. de B. Silva and S.H.M. Soares, *Quasilinear Dirichlet problems in $\mathbf{R}^N$ with critical growth*, Nonlinear Anal., **43** (20019), 1-20.
- [18] A. Szulkin, *Minimax principles for lower semicontinuous functions and applications to nonlinear boundary value problems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **3** (1986), 77-109.