

非線形波動方程式の特異極限と分散性について

中西賢次（京都大学 理学研究科）

1. 要旨

非線形 Schrödinger 方程式は様々なモデルにおいて複雑なシステムの近似方程式として導出されるが、その極限移行を解の収束のレベルで正当化することは、極限方程式の解の意味付けとしても、個々の方程式の研究結果を統一的に理解するためにも重要なことと思われる。近年、初期値問題の適切性を中心に発展してきた、解の分散性評価の手法を用いることで、性質の近い非線形波動方程式同士の特異極限移行に関しては、かなり緩い仮定の下で解の収束を証明できるようになった。非線形 Klein-Gordon 方程式, Maxwell-Dirac 方程式系, Zakharov 方程式から非線形 Schrödinger 方程式への極限移行について、これまでの結果と今後の課題について解説する。

2. 非線形 KLEIN-GORDON 方程式系

まず最も単純な古典場のモデル、非線形 Klein-Gordon 方程式の非相対論極限を考える。以下、極限関数は v^∞ のように添字をつけ、極限前のパラメータ依存性は略す。

$$\begin{aligned} \ddot{u}/c^2 - \Delta u + c^2 u &= f(u) \\ \rightarrow 2iv^\infty - \Delta v^\infty &= f^\infty(v^\infty), \quad (c \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (2.1)$$

ただし $u : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{C}$, $v^\infty = (v_+^\infty, v_-^\infty) : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{C}^2$. 近似の意味は

$$u = e^{ic^2 t} v_+^\infty + e^{-ic^2 t} \overline{v_-^\infty} + o(1) \text{ in } C([-T, T]; H^1). \quad (2.2)$$

簡単のため非線形項は $f(u) = \lambda |u|^p u$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $p > 0$ を考える。極限非線形項 $f^\infty = (f_+^\infty, f_-^\infty)$ には相互作用の共鳴成分だけが現れる。

$$f_\pm^\infty(v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(v_\pm + e^{i\theta} \overline{v_\mp}) d\theta. \quad (2.3)$$

例えば $f(u) = |u|^2 u$ の場合 $f_+^\infty(v) = (|v_+|^2 + 2|v_-|^2)v_+$ で、同じ形の極限を持つ Klein-Gordon-Zakharov 方程式系の場合 $(|v_+|^2 + |v_-|^2)v_+$ とは係数が異なる。

Klein-Gordon から Schrödinger への収束では、特性曲面の2つの双曲面に対応する成分への分離が基本となる。極限ではそれぞれの面が放物面へ漸近する。

$$\begin{aligned} v_\pm &:= \frac{e^{-ic^2 t}}{2} (1 - ic^{-2} \langle \nabla / c \rangle^{-1} \partial_t) (\Re u \pm i \Im u), \\ u &= e^{ic^2 t} v_+ + e^{-ic^2 t} \overline{v_-} \end{aligned} \quad (2.4)$$

ただし Fourier multiplier を $\varphi(\nabla) = \mathcal{F}^{-1} \varphi(i\xi) \mathcal{F}$ と書く。 v の方程式は

$$\begin{aligned} 2iv + 2c^2 (\langle \nabla / c \rangle^{-1} - 1)v + \langle \nabla / c \rangle^{-1} f(v + v^*) &= 0, \\ v^* &= e^{-2ic^2 t} (\overline{v_-}, \overline{v_+}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

この問題では、時間局所・大域的適切性、時空評価および散乱理論について、双方の方程式での結果をほぼ完全に統合する所まで到達している。

Theorem 2.1. [13] ($v^\infty = 0$ の場合については [11, 18], それ以前の結果は [22, 17, 10] など) $f(u) = \lambda|u|^p u$, $0 < p < 4/(n-2)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ は定数とする。 $c \rightarrow \infty$ のとき、(2.1) の解 (u, v^∞) に対して (2.4) で $v = (v_+, v_-)$ を定めるとき、 $v(0) \rightarrow v^\infty(0)$ in H^1 ならば、 u の最大存在時間 T は v^∞ の最大存在時間 $T^\infty \leq \liminf_{c \rightarrow \infty} T$ と評価されて、 $v \rightarrow v^\infty$ in $C([0, T^\infty); H^1)$. さらに $4/n < p$ かつ $\lambda \geq 0$ ならば、 v は一様に H^1 で有界であり、波動作用素およびその逆写像は $H^1 \rightarrow H^1$ 写像として任意のコンパクト集合上で一様に強収束する。

時間局所問題では、 v を高周波帯 $|\xi| \gtrsim c$ と低周波帯 $|\xi| \lesssim c$ に分割し、それぞれに波動型、Schrödinger 型の Strichartz 評価を用いて、高周波に c の重みを付けた和空間で評価する。例えば $p \geq 1$ の場合、 $\alpha = (n-2)/8$ として、以下のノルムで一様評価を得る。ただし $L_b^t L_d^x = L_t^{1/b} (L_x^{1/d})$.

$$\begin{aligned} & \|\nabla v; L_0^t L_{1/2}^x \cap L_\alpha^t (L_{2\alpha/n}^x + c^{-\alpha} L_{3\alpha/n}^x)\|, \\ & \|\nabla f(v); L_{p\alpha}^t (L_{1/2+2p\alpha/n}^x + c^{-p\alpha} L_{1/2+3p\alpha/n}^x)\|, \end{aligned} \quad (2.6)$$

時間大域問題では、質量エネルギーが発散するので H^1 有界性も自明ではなく、時空大域評価は非線形構造を尊重した次の中間近似系を経由して得られる。

$$\begin{aligned} & \ddot{y}/c^2 + 2i\dot{y} - \Delta y + f^\infty(y) = 0, \\ & y(0) = v(0), \quad \dot{y}(0) = ic^2(\langle \nabla/c \rangle^{-1} - 1)v(0) \end{aligned} \quad (2.7)$$

未解決問題としては、interaction Morawetz 評価 [8]

$$\int_{\mathbb{R}^{1+3}} |v^\infty(t, x)|^4 dt dx \leq C(\|v\|_{L_t^\infty H^1}) \quad (2.8)$$

が非線形 Klein-Gordon からの極限として表せるか、さらにそれを用いた時空大域評価のオーダーの改善（多項式オーダー）や、Sobolev 臨界指数 $f(u) = |u|^{4/(n-2)}u$ での極限移行は興味深い問題である。なお、 $p = 4/n$ の方は個々の方程式についても全て未解決である。

3. MAXWELL-DIRAC 方程式系

次に Strichartz 評価だけでは不十分な場合として、古典ゲージ場の Maxwell-Dirac 方程式系を考える。Coulomb gauge では次のように書ける：

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=0}^3 (i\gamma^\alpha \partial_\alpha u - cu - \gamma^\alpha A_\alpha u/c) = 0, \\ & \ddot{\mathbb{A}}/c^2 - \Delta \mathbb{A} = -P\langle \gamma^0 u, \gamma^k u \rangle, \quad \nabla \cdot \mathbb{A} = 0, \\ & -\Delta A_0 = |u|^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

ただし $u : \mathbb{R}^{1+3} \rightarrow \mathbb{C}^4$, $(A_0, \dots, A_3) = (A_0, \mathbb{A}) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $(\partial_0, \dots, \partial_3) = (\partial_t/c, \nabla_x)$. $\gamma^0, \dots, \gamma^3$ は Dirac 行列で $\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = 2 \text{diag}(1, -1, -1, -1)I$, $\gamma^0 \gamma^\alpha = (\gamma^0 \gamma^\alpha)^*$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{C}^4$ 内積の実部、 $P = (-\Delta)^{-1} \nabla \times \nabla \times$. この方程式のエネルギーは正定値でないが、質量項を除くとその大きさは $u \in c^{-1/2} H^{1/2} + H^1$, $\partial_\alpha \mathbb{A} \in L^2$, $\nabla A_0 \in L^2$ に対応する。

Theorem 3.1. [14] $c \rightarrow \infty$ のとき $u(0) \rightarrow \varphi$ in $c^{-1/2} H^{1/2} + H^1$ で $\partial_\alpha \mathbb{A}(0)$ が L^2 有界ならば $\forall T > 0$, $\exists c_0 < \forall c$ で

$$\begin{aligned} u &= e^{-i\gamma^0 c^2 t} w + o(1) \text{ in } C([-T, T]; c^{-1/2} H^{1/2} + H^1), \\ A_0 &= (-\Delta)^{-1} |w|^2 + o(1) \text{ in } C([-T, T]; \dot{H}^1 \cap \dot{B}_{2,1}^{3/2}), \\ \partial_\alpha \mathbb{A} &= \partial_\alpha \mathbb{A}_f + o(1) \text{ in } C([-T, T]; L^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

ただし $w, \mathbb{A}_f$ は次の方程式の解：

$$\begin{aligned} 2i\dot{w} + \gamma^0 \Delta w &= 2w(-\Delta)^{-1} |w|^2, \quad w(0) = \varphi, \\ \ddot{\mathbb{A}}_f / c^2 - \Delta \mathbb{A}_f &= 0, \quad \partial_\alpha \mathbb{A}_f(0) = \partial_\alpha \mathbb{A}(0). \end{aligned} \quad (3.3)$$

極限の Hartree 型方程式は L^2 で時間大域的に適切だが、Maxwell-Dirac では時間大域解は small data でしか得られていない。[4] では H^1 解の枠組みで $\log c$ オーダーの存在時間下界が得られているが、実際に爆発解があるかどうかは未解決である。類似の方程式 Maxwell-Klein-Gordon 系はエネルギーの正值性のため H^1 において大域適切であり、上と同様の極限移行の結果も得られている。[14, 3]

これらの方程式では Strichartz 評価では regularity が足りないので Klainerman-Machedon の双線形評価を用いる。その際、相互作用において分散性が失われないうために非線形項に null form の構造が必要だが、Dirac のままではそれが露わでない。そこで双線形項 $\mathbb{A}u$ を周波数帯で分解して、 u の周波数が $\mathbb{A}$ より高い部分を次の等式で Klein-Gordon 方程式に変換する。

$$\begin{aligned} &\int_0^t D(t-s) \gamma^0 \gamma^j (A_j u)(s) ds \\ &= c^{-1} K(t) \gamma^0 \gamma^j (A_j u)(0) \\ &\quad + \int_0^t K(t-s) \{ \gamma^\alpha \gamma^j (\partial_\alpha A_j) u - 2\mathbb{A} \cdot \nabla u + i\gamma^j A_j \gamma^\alpha A_\alpha u / c \} (s) ds, \end{aligned} \quad (3.4)$$

ただし $D(t)$ は Dirac propagator, $K(t) = c^{-1} \langle \nabla / c \rangle^{-1} \sin c^2 \langle \nabla / c \rangle t$. $j = 1, 2, 3$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$ についての和を略した。

4. ZAKHAROV 方程式系

最後に、Maxwell-Dirac 系よりも非線形性の強いシステムとしてプラズマ波動を記述する Zakharov 系を考える。この場合はもはや線型方程式からの摂動として極限移行を制御することは不可能で、方程式の非線形構造を直接用いた非線形共鳴成分の評価が必要となる。

4.1. **scalar Zakharov の亜音速極限.** まず最も単純な scalar Zakharov 方程式系から非線形 Schrödinger 方程式への極限を考える。

$$\begin{aligned} 2i\dot{v} - \Delta v &= -nv, \\ \ddot{n}/\alpha^2 - \Delta n &= \Delta|v|^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

ただし $(v, n) : \mathbb{R}^{1+3} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. まず、 $N = n - i(\alpha|\nabla|)^{-1}\dot{n}$ とおけば 1 階の方程式が得られる：

$$\begin{aligned} i\dot{v} + |\nabla|^2 v &= -nv, \quad n = \Re N, \\ i\dot{N} + \alpha|\nabla|N &= -\alpha|\nabla||v|^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

v と N の特性曲面が交わる $|\xi| = \alpha$ から生じる非線形共鳴の成分は時間振動を持たないため $\alpha|\nabla|$ を振動に吸収させる事が出来ず、結果として線形摂動では扱えない（任意の H^s で、逐次近似の第 2 近似が非有界になる [16]）。そこでこの周辺の周波数を共鳴成分として分離する：

$$v_R = \chi(\nabla/\alpha)v, \quad v_X = v - v_R, \quad N_R = \chi(\nabla/\alpha)N, \quad N_X = N - N_R \quad (4.3)$$

ただし $\chi \in C_0^\infty$ は cut-off function. 解の収束として次の結果が得られる。

Theorem 4.1. [16] $s > 3/2$ として $\alpha \rightarrow \infty$ のとき

$$v(0) \rightarrow \varphi \text{ in } H^s, \quad N(0) \text{ } H^{s-1} \text{ で有界, } N_M(0) \rightarrow 0 \text{ in } H^{s-1} \quad (4.4)$$

とすると (v, N) の最大存在時間 T は

$$\begin{aligned} i\dot{v}^\infty - \Delta v^\infty &= |v^\infty|^2 v^\infty, \quad v^\infty(0) = \varphi, \\ i\dot{N}_f + \alpha|\nabla|N_f &= 0, \quad N_f(0) = N(0) + |v(0)|^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

の存在時間 T^∞ で $\liminf_{\alpha \rightarrow \infty} T \geq T^\infty$ と評価され、

$$\begin{aligned} v &= v^\infty + o(1) \text{ in } C([0, T^\infty); H^s), \\ N &= N_f - |v^\infty|^2 + o(1) \text{ in } C([0, T^\infty); H^{s-1}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

まだエネルギー空間 H^1 には到達してないが、以前の結果 [20, 1, 19, 9] に比べて regularity は大幅に下がっている。これは非共鳴成分に分散性評価を導入したことが大きい。非共鳴成分の時間振動を見るために $v = e^{i|\nabla|^2 t} \mathcal{F}^{-1} \mu$, $N = e^{i\alpha|\nabla|t} \mathcal{F}^{-1} \nu$ とおくと v の方程式から

$$i\partial_t \mu(\xi) = - \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(-|\xi|^2 \pm \alpha|\eta| + |\xi - \eta|^2)t} \nu(\eta) \mu(\xi - \eta) d\eta \quad (4.7)$$

ここで $\nu(\xi)$ の方が遠方での減衰が遅いから右辺の積が大きくなるのは $|\xi - \eta| \ll |\eta| \sim |\xi|$ の時で、さらに $|\xi| \not\sim \alpha$ とすれば phase 部分は

$$| -|\xi|^2 \pm \alpha|\eta| + |\xi - \eta|^2 | \sim |\xi|^2 + \alpha|\xi| \quad (4.8)$$

従って、部分積分をすれば $(|\xi|^2 + \alpha|\xi|)^{-1}$ の減衰が得られる。 N の方程式も同じ phase を持ち、 $\dot{N}$ の $\alpha|\nabla|$ 因子はこれらの減衰で相殺することができる。他方、

共鳴部分には次のエネルギー保存則を用いる：

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v|^2 + \frac{|N|^2}{2} + n|v|^2 dx = E(0) \quad (4.9)$$

非線形項が定符号でないのでこのままでは大きな解の有界性には使えないが、共鳴成分 $|\xi| \sim \alpha$ は高周波なのでそこに制限すれば非線形部分は小さくなる。 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 内積の実部を $\langle f|g \rangle$ で表して

$$E_R(t) := \langle \nabla v | \nabla v_R \rangle + \langle N | N_R \rangle / 2 + 2 \langle n_R v_R | v_X \rangle + \langle n_R v_R | v_R \rangle \quad (4.10)$$

とおくと保存誤差は

$$\dot{E}_R = -2 \langle n_X v | \dot{v}_R \rangle + 2 \langle n_R v_R | \dot{v}_X \rangle - \langle \dot{n}_R v_X | v_X \rangle \quad (4.11)$$

となり右辺各項は必ず非共鳴周波数を一つは持つので、上と同様に phase $\alpha|\xi| + |\xi|^2$ の時間振動を持つ。これで ∂_t による regularity 落ちを相殺できるが、そのとき

$$\int \|N; L_x^\infty(|\xi| \lesssim R)\| dt < \infty \quad (4.12)$$

が必要となる。これは線形波動に対しても Strichartz 時空評価から $s - 1 > 1/2$ を要請される。エネルギー空間 H^1 での収束を得るには、 $|\xi| \sim \alpha$ の成分に対しても何らかの分散性評価を用いる必要があると思われる。

4.2. vector Zakharov の亜音速・静電極限. 上の場合、二つの異なる時空周波数 (Schrödinger と wave) から単一の共鳴周波数 α が生じた。物理的により正確には、 v は電場を表すベクトル場で、div part と curl part で異なる伝播速度を持つ。これを考慮すると、共鳴周波数は少なくとも 2 箇所に現れる。

$$\begin{aligned} 2i\dot{v} - \nabla \nabla \cdot v + \beta \nabla \times \nabla \times v &= -nv, \\ i\dot{N} + \alpha |\nabla| N &= -\alpha |\nabla| |v|^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

$Q = 1 - P$, $V = Qv$, $B = Pv$ とおくと

$$\begin{aligned} i\dot{V} - \Delta V &= -Q(nv), \quad v = V + B, \\ i\dot{B} - \beta \Delta B &= -P(nv), \end{aligned} \quad (4.14)$$

$(\alpha, \beta) \rightarrow \infty$ での極限方程式は

$$i\dot{V} - \Delta V = -Q(|V|^2 V), \quad N = |V|^2, \quad B = 0. \quad (4.15)$$

V についての共鳴周波数 $|\xi| = \alpha$, B についての共鳴周波数 $|\xi| = \alpha/\beta$ それぞれの成分を V_α , $B_{\alpha/\beta}$ などと表し、これらを別々に局在化したエネルギーを考えると、保存誤差に α と α/β の共鳴を含む非線形項 $\langle \dot{n}_{\alpha/\beta} V_\alpha | V_\alpha \rangle$, $\langle n_\alpha V_\alpha | \dot{B}_{\alpha/\beta} \rangle$ が新たに出てくる。他方、 $v_R = V_\alpha + B_{\alpha/\beta}$, $N_R = N_\alpha + N_{\alpha/\beta}$ とおいて、 α/β , α を合わせた局在化エネルギー

$$\begin{aligned} E_c(t) := & \langle \nabla V | \nabla V_\alpha \rangle + \beta \langle \nabla B | \nabla B_{\alpha/\beta} \rangle + \langle N | N_R \rangle / 2 \\ & + 2 \langle n_R v_X | v_R \rangle + \langle n_R v_R | v_R \rangle \end{aligned} \quad (4.16)$$

を考えると保存誤差に α と α/β の共鳴は現れないが、 $s > 1$ なので E_c による α での評価は α/β より弱くなる。

この対処法は β の大きさによって2通りある。まず β が大きい場合、 B の線型方程式は $\beta|\xi|^2$ の振動を持つため、Strichartz 評価で β について減衰度を持つ。これをエネルギー誤差項に利用すると、例えば $\alpha \lesssim \beta^2$ のときには H^s ($s > 3/2$) での収束が得られる。ただし、エネルギー

$$\|\nabla V\|^2 + \|\beta^{1/2}B\|^2 + \|n\|^2/2 - \int n|v|^2 dx \quad (4.17)$$

に対応して、次の仮定をおく：

$$B(0) = O(\beta^{-1/2}) \text{ in } H^1, \quad B_{\alpha/\beta}(0) = O(\beta^{-1/2}) \text{ in } H^s. \quad (4.18)$$

逆に β が余り大きくない場合、 α/β が α に近いので E_c を α の評価に使える。ただし、 α での減衰のオーダーが H^s より遅くなるので、始めから s を高くしておく必要がある。例えば $\beta^\lambda \lesssim \alpha$, $\lambda \geq 2$ のとき $s > 2$, $s' = s - (s-1)/\lambda$ として、

$$|\xi| \leq \alpha/\beta \Rightarrow H^s, \quad \alpha/\beta < |\xi| < \alpha \Rightarrow \alpha^{s'-1}H^1, \quad |\alpha| < |\xi| \Rightarrow H^{s'} \quad (4.19)$$

の空間で極限が得られる。しかしこれでは完全な解決とは言い難く、 α/β と α の共鳴が実際に極限移行に影響を与えるかどうかは今のところ不明である。

4.3. Klein-Gordon-Zakharov の高周波・亜音速極限. 上の場合、物理的に自然な状況では極限に特異性は生じないが、パラメータのとり方を変えると非線形共鳴から特異性が生じることがある。電場についてプラズマ周波数無限大の極限をとる前の Klein-Gordon-Zakharov 系を考える。

$$\begin{aligned} \ddot{u}/c^2 - \Delta u + c^2 u &= -nu, \\ \ddot{n}/\alpha^2 - \Delta n &= \Delta|u|^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

ただしここでは Δu の非等方性は無視する。 c^2 がプラズマ周波数、 α がイオン音速に対応するが、この形のスケールでは $(c/\alpha)^2$ がイオン質量：電子質量に比例するので $c \gg \alpha$ となり、この条件の下で $(c, \alpha) \rightarrow \infty$ の極限を考えると Zakharov 系と同様の結果が得られる [16]. しかし、この制約をはずして $c/\alpha^2 \rightarrow \gamma \in (0, \infty)$ となる極限をとると、非線形共鳴成分が $|\xi| = \gamma$ に集中し、極限方程式に特異性を生じる：

$$2iv^\infty - \Delta v^\infty = \frac{1}{2}(1 + \tilde{H}(|\nabla| + \gamma) + \tilde{H}(|\nabla| - \gamma))|v^\infty|^2 v^\infty \quad (4.21)$$

ここで $\tilde{H}$ は Heaviside function の Fourier 変換で、具体的には

$$\begin{aligned} \tilde{H}(|\nabla| + \gamma) &= \frac{|\nabla|}{|\nabla| + \gamma}, \\ \tilde{H}(|\nabla| - \gamma) &= p.v. \frac{|\nabla|}{|\nabla| - \gamma} - i\pi\gamma\delta(|\nabla| - \gamma), \end{aligned} \quad (4.22)$$

これらは e^{-2ic^2t} を含む非線形項の共鳴によって生じる。 N の漸近挙動は

$$\begin{aligned} N = & -|v|^2/2 + e^{i\alpha|\nabla|t}[N(0) + |v(0)|^2/2] \\ & + e^{i\alpha\gamma t}\tilde{H}(|\nabla| + \gamma)[v^2 - e^{i\alpha(|\nabla|-\gamma)t}v(0)^2]/2 \\ & + e^{-i\alpha\gamma t}\tilde{H}(|\nabla| - \gamma)[\bar{v}^2 - e^{i\alpha(|\nabla|+\gamma)t}\overline{v(0)^2}]/2 + o(1) \text{ in } H^{s-1}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

(4.21) は通常 of 非線形 Schrödinger 方程式と異なり、非線形項によって $|\xi| = \gamma$ から L^2 ノルムが減衰する。具体的には

$$\partial_t \|v(t)\|_{L^2}^2 = -\frac{\gamma\pi}{2} \langle \delta(|\nabla| - \gamma) v^2 | v^2 \rangle \leq 0. \quad (4.24)$$

上の極限移行の証明では、共鳴周波数 γ が有界なので、その帯域の有界性は線形エネルギー法で容易に出せる。従って主な問題は特異性を持つ Fourier multiplier の評価だが、それは x 空間での評価による：

$$\begin{aligned} p.v. \frac{|\nabla|}{|\nabla| - \gamma} &= 1 + \frac{|\nabla|}{|\nabla| + \gamma} + K*, \\ K &= \frac{\gamma^2 \cos(\gamma|x|)}{2\pi|x|} + O(1/|x| + |x|^2), \\ e^{it|\nabla|} K* &= K(t)*, \quad K(t) \lesssim 1/|x|. \end{aligned} \quad (4.25)$$

極限方程式 (4.21) について、非線形散逸項が爆発を抑制する効果があるか、また時間大域解ではどの程度解を減衰させるかは興味深い問題に思われる。

REFERENCES

- [1] H. Added and S. Added, *Equations of Langmuir turbulence and nonlinear Schrödinger equation: smoothness and approximation*. J. Funct. Anal. **79** (1988), no. 1, 183–210.
- [2] P. Bechouche, N. J. Mauser and F. Poupaud, *(Semi)-nonrelativistic limits of the Dirac equation with external time-dependent electromagnetic field*, Comm. Math. Phys. **197**, (1998) 405–425.
- [3] P. Bechouche, N. J. Mauser and S. Selberg, *Nonrelativistic limit of Klein-Gordon-Maxwell to Schrödinger-Poisson*. Amer. J. Math. **126** (2004), no. 1, 31–64.
- [4] P. Bechouche, N. J. Mauser and S. Selberg, *On the asymptotic analysis of the Dirac-Maxwell system in the nonrelativistic limit*. J. Hyperbolic Differ. Equ. **2** (2005), no. 1, 129–182.
- [5] L. Bergé, B. Bidégaray and T. Colin, *A perturbative analysis of the time-envelope approximation in strong Langmuir turbulence*. Phys. D **95** (1996), no. 3-4, 351–379.
- [6] M. Colin, *Approximation of a quasilinear Schrödinger equation by a Klein-Gordon equation in space dimension 2*. Asymptot. Anal. **34** (2003), no. 3-4, 275–309.
- [7] T. Colin, G. Ebrard, G. Gallice and B. Texier, *Justification of the Zakharov model from Klein-Gordon-wave systems*. Comm. Partial Differential Equations **29** (2004), no. 9-10, 1365–1401.

- [8] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, *Global Existence and Scattering for Rough Solutions of a Nonlinear Schrödinger Equation on $\mathbb{R}^3$* , Comm. Pure Appl. Math. **57** (2004), no. 8, 987–1014.
- [9] C. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *On the Zakharov and Zakharov-Schulman systems*. J. Funct. Anal. **127** (1995), no. 1, 204–234.
- [10] S. Machihara, *The nonrelativistic limit of nonlinear Klein-Gordon equations*, Funkcial. Ekvac. **44** (2001), no. 2, 243–252.
- [11] S. Machihara, K. Nakanishi and T. Ozawa, *Nonrelativistic limit in the energy space for nonlinear Klein-Gordon equations*. Math. Ann. **322** (2002), no. 3, 603–621.
- [12] S. Machihara, K. Nakanishi and T. Ozawa, *Small global solutions and the nonrelativistic limit for the nonlinear Dirac equation*. Rev. Mat. Iberoamericana **19** (2003), no. 1, 179–194.
- [13] N. Masmoudi and K. Nakanishi, *From nonlinear Klein-Gordon equation to a system of coupled nonlinear Schrödinger equations*. Math. Ann. **324** (2002), no. 2, 359–389.
- [14] N. Masmoudi and K. Nakanishi, *Nonrelativistic limit from Maxwell-Klein-Gordon and Maxwell-Dirac to Poisson-Schrödinger*. Int. Math. Res. Not. **2003**, no. 13, 697–734.
- [15] N. Masmoudi and K. Nakanishi, *Uniqueness of finite energy solutions for Maxwell-Dirac and Maxwell-Klein-Gordon equations*. Comm. Math. Phys. **243** (2003), no. 1, 123–136.
- [16] N. Masmoudi and K. Nakanishi, *From the Klein-Gordon-Zakharov system to the nonlinear Schrödinger equation*, to appear in J. Hyperbolic Differ. Equ.
- [17] B. Najman, *The nonrelativistic limit of the nonlinear Dirac equation*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire **9** (1992) 3–12.
- [18] K. Nakanishi, *Nonrelativistic limit of scattering theory for nonlinear Klein-Gordon equations*. J. Differential Equations **180** (2002), no. 2, 453–470.
- [19] T. Ozawa and Y. Tsutsumi, *The nonlinear Schrödinger limit and the initial layer of the Zakharov equations*. Differential Integral Equations **5** (1992), no. 4, 721–745.
- [20] S. Schochet and M. Weinstein, *The nonlinear Schrödinger limit of the Zakharov equations governing Langmuir turbulence*. Comm. Math. Phys. **106** (1986), no. 4, 569–580.
- [21] B. Texier, *WKB asymptotics for the Euler-Maxwell equations*. Asymptot. Anal. **42** (2005), 211–250.
- [22] M. Tsutsumi, *Nonrelativistic approximation of nonlinear Klein-Gordon equations in two space dimensions*, Nonlinear Anal. **8** (1984), no. 6, 637–643.