特別講演

非線形波動方程式の外部問題について

中村 誠 （東北大学 大学院理学研究科）

概 要

非線形波動方程式の外部問題の研究は、近年に Keel, Smith, Sogge, Metcalfe により進展を見せた。本講演では、最も基本的な彼等の結果と方法の紹介を通して近年の研究動向を振り返る。

三次元空間内におけるコンパクトで境界が滑らかな障害物を $\mathcal{O}$ として、障害物の外部領域において次の非線形波動方程式のディリクレ条件下の初期値問題を考える。

$$(P)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = Q(u) & \text{for } t>0,\ \ x \in \mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{O} =: \Omega \\ u(0,x) = f(x), \ \ \partial_t u(0,x) = g(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{O} \\ u(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0 & \text{for } t \geq 0. \end{cases}$$

ここで、u は時間変数 t と空間変数 x を変数とする実数値関数とし、非線形項 Q は u の一階導関数による二次多項式とする。例えば、

$$Q_0(u) := (\partial_t u)^2, \qquad Q_1(u) := (\partial_t u)^2 - |\nabla_x u|^2$$

が挙げられる。初期値 f と g は遠方で減衰する滑らかな関数とし、境界条件に伴う整合条件を満たすとする。問題 (P) に対しては、2002 年に Keel, Smith, Sogge により、初期値が十分小さいならば解は長時間存在することが示された。彼等の結果を述べる為に、回転微分

$$\Omega_{ij} := x_i \partial_j - x_j \partial_i \quad \text{for } \ 1 \leq i \neq j \leq 3$$

と

$$\partial := (\partial_t, \partial_1, \partial_2, \partial_3), \qquad \Omega := (\Omega_{12}, \Omega_{23}, \Omega_{31}), \qquad Z := (\partial, \Omega)$$

なる記号を準備する。障害物 $\mathcal{O}$ の外部領域において波が反射を繰り返して障害物近くにいつまでも留まることが無い時、$\mathcal{O}$ を非捕捉的障害物という。星型障害物は非捕捉的障害物の例である。

定理 ([21]). 障害物 $\mathcal{O}$ が非捕捉的であり、初期値 f, g が十分小さいならば、問題 (P) は滑らかな一意解を $C^\infty((0, e^{\frac{c}{\varepsilon}}) \times (\mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{O}))$ において持つ。ここで、ε は初期値の大きさ

$$\varepsilon := \sum_{|\alpha| \leq 10} \|Z^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{O})} + \sum_{|\alpha| \leq 9} \|Z^\alpha g\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{O})}$$

を表わし、α は多重指数、c は f と g に依らない正定数である。

上の定理において初期値が小さくなると解の存在時間は極めて大きくなることに注意する。本講演では、上のような解を長時間解と呼ぶことにする。定理において障害物が存在し

ない場合は、1984年に John と Klainerman によって示された ([17]. [25] も参照)。定理では半線形波動方程式が扱われているが、準線形の場合も同様の結果が成立する。問題 (P) において Q が二次であることは、小さい初期値に対して解が有限時刻で爆発するか、時間大域解になるかという意味で臨界である。実際に、$\mathbb{R}^3$ における初期値問題の場合、$Q=Q_0$ の時には、どんなに小さな初期値に対しても解が有限時刻で爆発するが (John [16])、$Q=Q_1$ の場合には、初期値が十分小さければ時間大域解が存在する (Christodoulou [5], Klainerman [24])。Q_1 は小さい初期値に対する時間大域解を示す為の十分条件の一つである、零条件と呼ばれる構造条件を満たす非線形項の一つである。波の有限伝播性により、外部問題での解の存在時間が、$\mathbb{R}^3$ における初期値問題の解の存在時間を越えることは無いので、外部問題でも二次の非線形項は臨界である。問題 (P) を 4 次元以上の空間で考えた場合には、障害物が非捕捉的で初期値が十分小さいならば解は時間大域解となる。

局所エネルギー減衰評価式

三次元空間 $\mathbb{R}^3$ における波動方程式の特徴の一つはホイエンスの原理が成り立つことである。障害物が存在する場合には、障害物の近くにおいてホイエンスの原理は成り立たないが、それに代わるものとして次に述べる局所エネルギー減衰評価式がある。v を波動方程式

$$(W)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}=F(t,x) & \text{for } t>0,\ \ x\in\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{O} \\ v(0,x)=f(x),\ \ \partial_t v(0,x)=g(x) & \text{for } x\in\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{O} \\ u(t,x)|_{x\in\partial\Omega}=0 & \text{for } t\ge 0. \end{cases}$$

の解とする。この時、障害物 $\mathcal{O}$ が半径 R の球 B_R に含まれ、初期値と非斉次項の台が

$$\text{supp } f\cup \text{ supp } g\cup \text{supp } F(t,\cdot)\ \subset\ B_R:=\{x\in\mathbb{R}^3\mid |x|\le R\}\quad \text{for any}\quad t\ge 0 \tag{1}$$

を満たすならば、局所エネルギー減衰評価式

$$\begin{aligned}\|\partial v(t,\cdot)\|_{L^2((\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{O})\cap B_R)}\le Ce^{-ct}\left(\|\nabla_x f\|_{L^2(\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{O})}+\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{O})}\right)&\\ +C\int_0^t e^{-c(t-s)}\|F(s,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{O})}ds\quad \text{for any}\quad t\ge 0&\end{aligned} \tag{2}$$

が成立する。ここで c と C は f, g, F に依存しない正定数である。この評価式は、障害物が星型の場合には Lax, Morawetz, Phillips ([26], [27]) によって、障害物が非捕捉的である場合には Morawetz, Ralston, Strauss ([44]) によって示された。障害物が捕捉的である場合には、上の評価は成立しないことは Ralston によって示されている ([48])。しかし、障害物が十分離れた複数の凸物体からなる場合には、右辺に微分の損失を付加すれば、成立することが井川氏によって示された ([13], [14])。

エネルギー評価式と Keel-Smith-Sogge の評価式

定理の証明には標準的なエネルギー評価式と、Keel-Smith-Sogge の評価式と呼ばれる重み付き時空間評価式を用いる。エネルギー評価式は (W) の第一方程式に $\partial_t v$ を掛けて得られる

$$\partial_t\left(|\nabla_x v|^2+(\partial_t v)^2\right)-2\mathrm{div}(\partial_t v\cdot\nabla_x v)=2\partial_t v\cdot F \tag{3}$$

を時間と空間で積分をして、発散定理とディリクレ条件を使うと

$$\|\partial v(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O})}\le\|\nabla_x f\|_{L^2(\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O})}+\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O})}+\int_0^t\|F(s,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O})}ds \tag{4}$$

と得られる。Keel-Smith-Sogge の評価式は、結果を先に述べると、(W) の解 v に対して

$$\begin{aligned}&(\log(e+T))^{-1/2}\,\|(1+|x|)^{-1/2}\partial v(t,x)\|_{L^2_{t,x}((0,T)\times(\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O}))}\\&\quad\le C\sum_{|\alpha|\le1}\|\partial_x^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O})}+C\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O})}+C\int_0^T\|F(s,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O})}ds\\&\qquad\qquad\text{for any }\ T>0\end{aligned} \tag{5}$$

が成立することを主張する ([21])。この評価式は、障害物が無い場合には、エネルギー評価式とホイエンスの原理を組み合わせることにより得られる。外部問題版は、境界値問題において良く知られるカットオフの議論と局所エネルギー減衰評価式を使用することによって得られる。Keel-Smith-Sogge の評価式は、困難である波動方程式の解の時間変数についての一次の一様減衰評価 $O(t^{-1})$ を作る代わりに、空間変数に関しての評価を作る点に大きな意義があり、二次の項を扱う際に大変有効である。Keel, Smith, Sogge, Metcalfe, Stewart, Thomases による一連の研究でも最も基本となる評価の一つになっている ([20], [21], [31], [33], [37], [39], [40], [41], [43])。

(W) の解 v の高階導関数に対する評価式 (4) と (5) は、次の三つの段階を踏んで得られる。第一段階：時間微分はディリクレ条件を保存するので、$\partial_t^j v$, $j\ge0$, に対して (4) と (5) に対応する評価式が得られる。第二段階：空間微分はディリクレ条件を保存しないが、楕円正則性にポアンカレの不等式を用いて得られる評価

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|\le M}\|\partial_x^\alpha\partial_x^2 v\|_{L^2((\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O})\cap B_R)}&\le C(R)\|\nabla_x v\|_{L^2((\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O})\cap B_{R+1})}\\&\quad+C(R)\sum_{|\alpha|\le M}\|\partial_x^\alpha\Delta v\|_{L^2((\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O})\cap B_{R+1})}\end{aligned}$$

において (Δ はラプラシアンを表わす)、$\Delta v=\partial_t^2 v-F$ を用いると、

$$\sum_{|\alpha|\le M}\|\partial^\alpha\partial v\|_{L^2(\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O})}\le C\sum_{j\le M}\|\partial_t^j\partial v\|_{L^2(\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O})}+C\sum_{|\alpha|\le M-1}\|\partial^\alpha F\|_{L^2(\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O})}$$

を得るので第一段階で得られた $\partial_t^j v$ に対する結果より、$\partial^\alpha v$, $|\alpha|\ge0$, に対して (4) と (5) に対応する評価を得る。第三段階：$Z^\alpha v$, $|\alpha|\ge0$, に対しては、障害物近くでは

$$\|Z^\alpha v\|_{L^2((\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O})\cap B_R)}\le C(R)\|\partial^\alpha v\|_{L^2((\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O})\cap B_R)}$$

が成立することから、第二段階へ帰着する。障害物から離れた領域では v を $\mathbb{R}^3$ 上の滑らかな関数として拡張し、障害物が無い場合の (4) と (5) を適用する。ここで、v を拡張したことにより現れる剰余項は局所エネルギー減衰評価式を用いて扱われる。以上の段階を踏むことにより得られる (4) と (5) の高階導関数版は

$$\sum_{|\alpha|\le M}\sup_{0<t<T}\|Z^\alpha\partial v(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{O})}+\sum_{|\alpha|\le M}(\log(e+T))^{-1/2}\|(1+|x|)^{-1/2}Z^\alpha\partial v\|_{L^2((0,T)\times(\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{O}))}$$
$$\le C\sum_{|\alpha|\le M+1}\|Z^\alpha v(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{O})}+C\sum_{|\alpha|\le M}\int_0^T\|Z^\alpha F(s,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{O})}ds \quad (6)$$

である。

定理の証明

Keel-Smith-Sogge の評価式が二次の非線形項を扱うのに効果的であることを定理の証明の概略を述べることにより紹介する。評価式 (6) の左辺のノルムを $\|v\|_{X(M,T)}$ で表わし、定理における解の存在を証明する。$u_{-1}=0$ として、関数列 $\{u_k\}_{k\ge -1}$ を

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}-\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x_j^2}=Q(u_{k-1}) & \text{for } t>0,\ \ x\in\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{O} \\ u_k(0,x)=f(x),\ \ \partial_t u_k(0,x)=g(x) & \text{for } x\in\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{O} \\ u_k(t,x)|_{x\in\partial\Omega}=0 & \text{for } t\ge 0. \end{cases}$$

の解として帰納的に定義する。この関数列が関数空間

$$X(10,T,N)\ :=\ \left\{\ u\in L^1_{\rm loc}((0,T)\times(\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{O}))\ \mid\ \|u\|_{X(10,T)}\le N\ \right\}$$

において収束することを示す。先ず (6) より、

$$\|u_k\|_{X(10,T)}\le C_0\varepsilon+C\sum_{|\alpha|\le 10}\int_0^T\|Z^\alpha Q(u)(s,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{O})}ds \quad (7)$$

を得る。ここで、Klainerman-Sobolev の不等式 ([24], [55])

$$\|w\|_{L^\infty(L<|x|<2L)}\le\frac{C}{L}\sum_{|\alpha|\le 2}\|Z^\alpha w\|_{L^2(L/2<|x|<4L)}\quad \text{for any }\ L\ge 2,\ \ w\in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^3)$$

を用いると、(7) の最終項は

$$C\sum_{|\alpha|\le 10}\|(1+|x|)^{-1/2}Z^\alpha\partial u\|^2_{L^2((0,T)\times(\mathbb{R}^3\backslash\mathcal{O}))}$$

で抑えられる。従って、

$$\|u_k\|_{X(10,T)}\le C_0\varepsilon+C_1\log(e+T)\|u_{k-1}\|^2_{X(10,T)}$$

を得るので、$N := 2C_0\varepsilon, T := e^{1/16C_0C_1\varepsilon}$ とおくと、十分小さな ε に対して

$$\{u_k\}_{k\geq -1} \subset X(10,T,N)$$

が従う。同様にして、

$$\|u_k - u_{k-1}\|_{X(10,T)} \leq \frac{1}{2}\|u_{k-1} - u_{k-2}\|_{X(10,T)}$$

を得ることが出来るので $\{u_k\}_{k\geq -1}$ の収束先として (P) の解 u を得ることが出来る。解 u が滑らかであることと一意であることは既に知られている時間局所解の性質から従う。

研究動向

簡単ではあるが、非線形波動方程式に対する外部問題の研究動向についてまとめておく。

(1) ディリクレ条件下での小さい初期値に対する長時間解と時間大域解について。3 次元以上の空間で非捕捉的障害物の外部問題において、柴田氏と堤氏は、6 次元以上で二次の、3 次元以上 5 次元以下では三次の解の導関数から成る非線形項に対して時間大域解の存在を示した ([51], [53], [54])。Chen, Gao はこの結果における非線形項に解自身が含まれる場合を考察した ([3], [4])。

Godin は 3 次元空間で障害物が球である場合に、零条件を満たす二次の非線形項に対して時間大域球対称解の存在を示した ([9])。4 次元と 5 次元空間における二次の非線形項に対する時間大域解に関して、林氏は障害物を球とした場合の球対称解 ([12]) と非球対称解 ([11]) の存在を、Metcalfe と Sogge は障害物を非捕捉的とした場合の解の存在を示した (非線形項が半線形の場合 [33], 非線形項が準線形の場合 [38])。

Keel, Smith と Sogge は 3 次元空間で解の導関数から成る二次の非線形項に対して長時間解 (障害物が星型かつ非線形項が準線形の場合 [20], 障害物が非捕捉的かつ非線形項が半線形の場合 [21]) と、非線形項が零条件を満たす場合の時間大域解 (障害物が星型かつ非線形項が準線形の場合 [22], 障害物が凸かつ非線形項が半線形の場合 [23]) の存在を示した。Datti は [21] と類似の結果を主張したが、その証明は確認されていない ([7])。Metcalfe と Sogge は [33] と [20] における結果を、障害物が星型である場合に別証明を与えた ([39])。Metcalfe, 中村, Sogge は井川型の局所エネルギー減衰評価が成り立つ障害物に対して、異なる伝播速度を持つ方程式系を扱い、[22] と [23] の結果を拡張した ([36], [40])。また、解自身を含む三次の非線形項を持つ場合へと拡張した ([35])。これらの結果では時間大域解の証明においてスケール作用素, $t\partial_t + r\partial_r$, を使用するため議論は複雑であるが、片山氏と久保氏はスケール作用素を使用しない別証明を示した ([18])。

(2) 3 次元以上の空間における消散項付き波動方程式のディリクレ条件下の外部問題については、柴田氏が小さい初期値に対する時間大域解の存在を示した ([49])。障害物の近傍において局所的な消散項が存在する場合に、3 次元空間で二次の非線形項を持つ波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + a(x)\frac{\partial u}{\partial t} = Q(u), \quad 0 \leq a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$$

に対して、 Metcalfe と中村は小さい初期値に対する長時間解の存在を示した ([34])。この場合の局所エネルギー減衰評価については中尾氏の結果を使用した ([47])。

(3) 3 次元空間で 2 次の非線形項を持つディリクレ条件下での弾性体の方程式の外部問題に対しては、 Metcalfe と Thomases により長時間解 ([31]) と零条件下での時間大域解 ([43]) が示されている。局所エネルギー減衰評価式については Dassios、中村玄氏、池畠優氏、川下氏、山本氏の結果を参照 ([6], [15], [19], [60])。障害物が無い場合の長時間解と零条件下の時間大域解については上見氏, John, Sideris により考察されている ([1], [8], [55], [56])。

(4) ウェイブガイドの非線形波動方程式については、ディリクレおよびノイマン条件下での小さい初期値に対する長時間解と時間大域解が Lesky, Racke, Metcalfe, Stewart, Sogge により考察されている ([28], [41], [42])。

参考文献

[1] Rentaro Agemi, *Global existence of nonlinear elastic waves*, Invent. Math. **142** (2000), no. 2, 225–250.

[2] Nicolas Burq, Gilles Lebeau, Fabrice Planchon, *Global existence for energy critical waves in 3-D domains*, math.AP/0607631.

[3] Yun Mei Chen, *Initial-boundary value problems of nonlinear wave equations in an exterior domain*, J. London Math. Soc. (2) **40** (1989), no. 3, 519–534.

[4] Yun Mei Chen, Jian Min Gao, *Global existence of the solutions to nonlinear hyperbolic equations in exterior domains*, A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A **11** (1990), no. 4, 535. Chinese Ann. Math. Ser. B **11** (1990), no. 3, 315–329.

[5] Demetrios Christodoulou, *Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), no. 2, 267–282.

[6] George Dassios, *Local energy decay for scattering of elastic waves*, J. Differential Equations **49** (1983), no. 1, 124–141.

[7] P. S. Datti, *Nonlinear wave equations in exterior domains*, Nonlinear Anal. **15** (1990), no. 4, 321–331.

[8] Fritz John, *Almost global existence of elastic waves of finite amplitude arising from small initial disturbances*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), no. 5, 615–666.

[9] Paul Godin, *Global existence of solutions to some exterior radial quasilinear Cauchy-Dirichlet problems*, Amer. J. Math. **117** (1995), no. 6, 1475–1505.

[10] Paul Godin, *Long time behaviour of solutions to some nonlinear rotation invariant mixed problems*, Comm. Partial Differential Equations **14** (1989), no. 3, 299–374.

[11] Nakao Hayashi, *Global existence of small solutions to quadratic nonlinear wave equations in an exterior domain*, J. Funct. Anal. **131** (1995), no. 2, 302–344.

[12] Nakao Hayashi, *Global existence of small radially symmetric solutions to quadratic nonlinear wave equations in an exterior domain*, Manuscripta Math. **81** (1993), no. 1-2, 15–39.

[13] Mitsuru Ikawa, *Decay of solutions of the wave equation in the exterior of several convex bodies*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **38** (1988), no. 2, 113–146.

[14] Mitsuru Ikawa, *Decay of solutions of the wave equation in the exterior of two convex obstacles*, Osaka J. Math. **19** (1982), no. 3, 459–509.

[15] Masaru Ikehata, Gen Nakamura, *Decaying and nondecaying properties of the local energy of an elastic wave outside an obstacle*, Japan J. Appl. Math. **6** (1989), no. 1, 83–95.

[16] Fritz John, *Blow-up for quasilinear wave equations in three space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981), no. 1, 29–51.

[17] Fritz John, Sergiu Klainerman, *Almost global existence to nonlinear wave equations in three space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), no. 4, 443–455.

[18] Soichiro Katayama, Hideo Kubo, *An elementary proof of global existence for nonlinear wave equations in an exterior domain*, math.AP.arXiv:0706.1833.

[19] Mishio Kawashita, *On the local-energy decay property for the elastic wave equation with the Neumann boundary condition*, Duke Math. J. **67** (1992), no. 2, 333–351.

[20] Markus Keel, Hart F. Smith, Christopher D. Sogge, *Almost global existence for quasilinear wave equations in three space dimensions*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), no. 1, 109–153

[21] Markus Keel, Hart F. Smith, Christopher D. Sogge, *Almost global existence for some semilinear wave equations*, J. Anal. Math. **87** (2002), 265–279.

[22] Markus Keel, Hart F. Smith, Christopher D. Sogge, *Global existence for a quasilinear wave equation outside of star-shaped domains*, J. Funct. Anal. **189** (2002), no. 1, 155–226.

[23] Markus Keel, Hart F. Smith, Christopher D. Sogge, *On global existence for nonlinear wave equations outside of convex obstacles*, Amer. J. Math. **122** (2000), no. 4, 805–842.

[24] Sergiu Klainerman, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations. Nonlinear systems of partial differential equations in applied mathematics*, Part 1 (Santa Fe, N.M., 1984), 293–326, Lectures in Appl. Math., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[25] Sergiu Klainerman, Thomas C. Sideris, *On almost global existence for nonrelativistic wave equations in 3D*, Comm. Pure Appl. Math. **49** (1996), no. 3, 307–321.

[26] Peter. D. Lax, Cathleen S. Morawetz, Ralph S. Phillips, *Exponential decay of solutions of the wave equation in the exterior of a star-shaped obstacle*, Comm. Pure Appl. Math. **16** (1963), 477–486.

[27] Peter D. Lax, Cathleen S. Morawetz, Ralph S. Phillips, *The exponential decay of solutions of the wave equation in the exterior of a star-shaped obstacle*, Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962) 593–595.

[28] Peter H. Lesky, Reinhard Racke, *Nonlinear wave equations in infinite waveguides*, Comm. Partial Differential Equations **28** (2003), no. 7-8, 1265–1301.

[29] Hans Lindblad, Igor Rodnianski, *Global existence for the Einstein vacuum equations in wave coordinates*, Comm. Math. Phys. **256** (2005), no. 1, 43–110.

[30] Hans Lindblad, Igor Rodnianski, *The weak null condition for Einstein's equations*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **336** (2003), no. 11, 901–906.

[31] Jason Metcalfe, *Elastic waves in exterior domains, I. Almost global existence*, Int. Math. Res. Not. 2006, Art. ID 69826, 41 pp.

[32] Jason Metcalfe, *Global Strichartz estimates for solutions to the wave equation exterior to a convex obstacle*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), no. 12, 4839–4855.

[33] Jason Metcalfe, *Global existence for semilinear wave equations exterior to nontrapping obstacles*, Houston J. Math. **30** (2004), no. 1, 259–281.

[34] Jason Metcalfe, Makoto Nakamura, *General quasilinear wave equations with localized dissipation in exterior domains*, J. Differential Equations **233** (2007), no. 1, 313–344.

[35] Jason Metcalfe, Makoto Nakamura, Christopher D. Sogge, *Global existence of quasilinear, nonrelativistic wave equations satisfying the null condition*, Japan. J. Math. (N.S.) **31** (2005), no. 2, 391–472.

[36] Jason Metcalfe, Makoto Nakamura, Christopher D. Sogge, *Global existence of solutions to multiple speed systems of quasilinear wave equations in exterior domains*, Forum Math. **17** (2005), no. 1, 133–168.

[37] Jason Metcalfe, Christopher D. Sogge, *Global existence of null-form wave equations in exterior domains*, Math. Z. **256** (2007), no. 3, 521–549.

[38] Jason Metcalfe, Christopher D. Sogge, *Global existence for Dirichlet-wave equations with quadratic nonlinearities in high dimensions*, Math. Ann. **336** (2006), no. 2, 391–420.

[39] Jason Metcalfe, Christopher D. Sogge, *Long-time existence of quasilinear wave equations exterior to star-shaped obstacles via energy methods*, SIAM J. Math. Anal. **38** (2006), no. 1, 188–209 (electronic).

[40] Jason Metcalfe, Christopher D. Sogge, *Hyperbolic trapped rays and global existence of quasilinear wave equations*, Invent. Math. **159** (2005), no. 1, 75–117.

[41] Jason Metcalfe, Christopher D. Sogge, Ann Stewart, *Nonlinear hyperbolic equations in infinite homogeneous waveguides*, Comm. Partial Differential Equations **30** (2005), no. 4-6, 643–661.

[42] Jason Metcalfe, Ann Stewart, *Almost global existence for quasilinear wave equations in waveguides with Neumann boundary conditions*, math.AP/0509326.

[43] Jason Metcalfe, Becca Thomases, *Elastic waves in exterior domains, Part II: Global existence with a null structure*, math.AP/0605110.

[44] Cathleen S. Morawetz, James V. Ralston, Walter A. Strauss, *Correction to: "Decay of solutions of the wave equation outside nontrapping obstacles" (Comm. Pure Appl. Math. 30 (1977), no. 4, 447–508)*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), no. 6, 795.

[45] Cathleen S. Morawetz, James V. Ralston, Walter A. Strauss, *Decay of solutions of the wave equation outside nontrapping obstacles*, Comm. Pure Appl. Math. **30** (1977), no. 4, 447–508.

[46] Cathleen S. Morawetz, *Decay for solutions of the exterior problem for the wave equation*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 229–264.

[47] Mitsuhiro Nakao, *Stabilization of local energy in an exterior domain for the wave equation with a localized dissipation*, J. Differential Equations **148** (1998), no. 2, 388–406.

[48] James V. Ralston, *Solutions of the wave equation with localized energy*, Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 807–823.

[49] Yoshihiro Shibata, *On the global existence of classical solutions of second order fully nonlinear hyperbolic equations with first order dissipation in the exterior domain*, Tsukuba J. Math. **7** (1983), no. 1, 1–68.

[50] Yoshihiro Shibata, Yoshio Tsutsumi, *Local existence of solution for the initial-boundary value problem of fully nonlinear wave equation*, Nonlinear Anal. **11** (1987), no. 3, 335–365.

[51] Yoshihiro Shibata, Yoshio Tsutsumi, *On a global existence theorem of small amplitude solutions for nonlinear wave equations in an exterior domain*, Math. Z. **191** (1986), no. 2, 165–199.

[52] Yoshihiro Shibata, Yoshio Tsutsumi, *On a global existence theorem of Neumann problem for some quasilinear hyperbolic equations*, Recent topics in nonlinear PDE, II (Sendai, 1984), 175–228, North-Holland Math. Stud., **128**, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[53] Yoshihiro Shibata, Yoshio Tsutsumi, *Global existence theorem for nonlinear wave equation in exterior domain*, Recent topics in nonlinear PDE (Hiroshima, 1983), 155–196, North-Holland Math. Stud., **98**, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[54] Yoshihiro Shibata, Yoshio Tsutsumi, *Global existence theorem for nonlinear wave equation in exterior domain*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **60** (1984), no. 1, 14–17.

[55] Thomas C. Sideris, *Nonresonance and global existence of prestressed nonlinear elastic waves*, Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 2, 849–874.

[56] Thomas C. Sideris, *The null condition and global existence of nonlinear elastic waves*, Invent. Math. **123** (1996), no. 2, 323–342.

[57] Hart F. Smith, Christopher D. Sogge, *On the critical semilinear wave equation outside convex obstacles*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 4, 879–916.

[58] Christopher D. Sogge, *Estimates for the Dirichlet-wave equation and applications to nonlinear wave equations*, math.AP/0311150.

[59] Jie Xin, Tiehu Qin, *Almost global existence of Dirichlet initial-boundary value problem for nonlinear elastodynamic system outside a star-shaped domain*, Chinese Ann. Math. Ser. B **25** (2004), no. 4, 433–454.

[60] Kazuhiro Yamamoto, *Exponential energy decay of solutions of elastic wave equations with the Dirichlet condition*, Math. Scand. **65** (1989), no. 2, 206–220.