

非線形熱方程式の自己相似解とその役割

内藤 雄基 (神戸大・工)

1. 序 次の非線形熱方程式を考える：

$$(1) \quad u_t = \Delta u + u^p \quad \text{in } \mathbf{R}^N \times (0, \infty),$$

ここで, $N > 2, p > 1$ とする. 方程式 (1) は相似変換

$$u(x, t) \mapsto u_\lambda(x, t) = \lambda^{2/(p-1)} u(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \lambda > 0,$$

に関して不変である. この相似変換に対して不変な解, すなわち

$$(2) \quad u(x, t) \equiv \lambda^{2/(p-1)} u(\lambda x, \lambda^2 t) \quad \text{for all } \lambda > 0$$

が成立する解を**自己相似解** (self-similar solution) という. 今, $u(x, t)$ を $\mathbf{R}^N \times (0, \infty)$ で定義された自己相似解とし, (2) において $\lambda = \sqrt{t}$ を代入すると自己相似解 u は

$$(3) \quad u(x, t) = t^{-1/(p-1)} v(x/\sqrt{t}) \quad \text{for } t > 0$$

と表される. この形の解を**前方自己相似解** (forward self-similar solution) という. 形状関数 $v = v(x)$ は次の楕円型偏微分方程式を満たす：

$$(4) \quad \Delta v + \frac{1}{2} x \cdot \nabla v + \frac{1}{p-1} v + v^p = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^N.$$

一方, $u(x, t)$ を $\mathbf{R}^N \times (-\infty, 0)$ で定義された自己相似解とし, (2) において $\lambda = \sqrt{-t}$ を代入すると自己相似解 u は

$$u(x, t) = (-t)^{-1/(p-1)} v(x/\sqrt{-t}) \quad \text{for } t < 0$$

と表される. この形の解を**後方自己相似解** (backward self-similar solution) という. 形状関数 v は次の楕円型偏微分方程式の解となる：

$$(5) \quad \Delta v - \frac{1}{2} x \cdot \nabla v - \frac{1}{p-1} v + v^p = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^N.$$

ここでは, 楕円型偏微分方程式 (4) および (5) に対して考察を行い, 前方および後方自己相似解の構造を明らかにすると共にそれらの放物型問題における役割について考える. 2, 3 節では前方自己相似解を扱い, 4, 5 節では後方自己相似解を扱う. 4, 5 節における結果は, 鈴木貴氏 (大阪大学大学院基礎工学研究科) との共同研究によるものである.

2. 前方自己相似解の構造 次の Cauchy 問題を考える:

$$(6)_\ell \quad u_t = \Delta u + u^p \quad \text{in } \mathbf{R}^N \times (0, \infty), \quad u(x, 0) = \ell |x|^{-2/(p-1)} \quad \text{in } \mathbf{R}^N \setminus \{0\},$$

ここで, $\ell > 0$ とする. 等式 (2) において特に $t = 0, \lambda = 1/|x|$ とおくと前方自己相似解は初期時刻において $u(x, 0) = |x|^{-2/(p-1)} u(x/|x|, 0)$ を満たすことがわかる. ここで

は, Cauchy 問題 $(6)_\ell$ を考察することにより球対称なクラスにおける前方自己相似解の存在を考察する.

自己相似解は、一般に Navier-Stokes 方程式や非線型 Schrödinger 方程式などのスケール不変性をもつ方程式で考えられる. ある特定のクラスを含む初期値問題を解くことにより自己相似解を構成するという手法は, Giga-Miyakawa [12] による Navier-Stokes 方程式に関する研究から始まり, その手法は非線形 Schrödinger 方程式, 非線型放物型方程式あるいは波動方程式などの様々な問題に適用されている. 問題 $(6)_\ell$ に対しては Kozono-Yamazaki [20], Cazenave-Weissler [3] により, $\ell > 0$ が十分小さい場合, 適当な関数空間において十分小さい解が一意的に存在することが知られている. ここでは, 形状関数に注目して $(6)_\ell$ の解の存在を考察する. 前節で述べたように (1) の自己相似解 u は形状関数 v を用いて (3) で表される. とくに u が $(6)_\ell$ の球対称解であるとき, $v = v(r)$, $r = |x|$ は次を満たす:

$$(7) \quad v_{rr} + \left(\frac{N-1}{r} + \frac{r}{2} \right) v_r + \frac{1}{p-1} v + v^p = 0, \quad r > 0,$$

$$(8)_\ell \quad v'(0) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^{2/(p-1)} v(r) = \ell.$$

逆に, $v = v(r)$, $r = |x|$ が (7)-(8) $_\ell$ の解であれば (3) で与えられる u は $(6)_\ell$ を満たす自己相似解となる. 問題 (7)-(8) $_\ell$ の解の存在を議論するために, $\alpha > 0$ に対して初期条件

$$v'(0) = 0 \quad \text{and} \quad v(0) = \alpha$$

を満たす (7) の解 v_α を考える. パラメータ $\alpha > 0$ を変化させたときの解 v_α の挙動については, Haraux-Weissler [15], Peletier-Terman-Weissler [28], Yanagida [33], Dohmen-Hirose [5] 等により詳細に研究されている. とくに [15] により $[0, \infty)$ において $v_\alpha(r) > 0$ であれば, ある定数 $\ell = \ell(\alpha) \geq 0$ が存在して

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{2/(p-1)} v_\alpha(r) = \ell(\alpha)$$

であること, $\ell(\alpha)$ は $\alpha > 0$ の関数として連続であることが知られている.

各 $\ell > 0$ に対して解集合 S_ℓ を次で定義する:

$$(9) \quad S_\ell = \{v \in C^2[0, \infty) : v \text{ は (7)-(8)}_\ell \text{ の正値解}\}.$$

ある $\underline{v}_\ell \in S_\ell$ が任意の $v \in S_\ell$ に対して $[0, \infty)$ において $\underline{v}_\ell \leq v$ を満たすとき, $\underline{v}_\ell$ を S_ℓ の最小解とよぶ. パラメータ $\alpha > 0$ を変化させたときの $\ell(\alpha)$ の振る舞いを考察することにより, S_ℓ の元の存在, 非存在, および元の個数について議論することができる. 次が成立する:

定理 1. ([25]) $p > (N+2)/N$ とする. このときある $\bar{\alpha} \in (0, \infty]$ が存在し, $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ において v_α は $[0, \infty)$ で正値であり $\ell(\alpha)$ は狭義単調増加となる. さらに, このとき v_α は $S_{\ell(\alpha)}$ の最小解となる. また $\bar{\alpha} < \infty$ であれば $S_{\ell(\bar{\alpha})}$ は $v_{\bar{\alpha}}$ のみからなる.

$p > (N+2)/(N-2)$ の場合を考える．定数 L , 指数 p_c をそれぞれ次で定義する：

$$L = \left[\frac{2}{p-1} \left(N-2 - \frac{2}{p-1} \right) \right]^{1/(p-1)}, \quad p_c = \begin{cases} \infty, & 3 \leq N \leq 10, \\ \frac{N-2\sqrt{N-1}}{N-4-2\sqrt{N-1}}, & N \geq 11. \end{cases}$$

$U(x) = L|x|^{2/(p-1)}$ とおくと, $p > N/(N-2)$ において U は (1) の特異定常解となることに注意する． p_c は Joseph-Lundgren [18] に現れる指数である．([13, 31] も参照.)

定理 2. ([29, 25]) (i) $(N+2)/(N-2) < p < p_c$ とする．このとき $\bar{\alpha} < \infty$, $\ell(\bar{\alpha}) > L$. さらに $\alpha \rightarrow \infty$ において $\ell(\alpha)$ は L の周りを振動し, かつ $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \ell(\alpha) = L$ が成立する.
(ii) $p \geq p_c$ とする．このとき $\bar{\alpha} = \infty$, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \ell(\alpha) = L$ が成立する.

定理 1, 2 および $(N+2)/N < p < (N+2)/(N-2)$ における [15] の結果より解集合 S_ℓ の元の個数 $\#S_\ell$ について次が得られる：

系 1. $p > (N+2)/N$ とするとき, ある $\bar{\ell} > 0$ が存在し, $0 < \ell < \bar{\ell}$ において S_ℓ は正値最小解 v_ℓ を持ち, 一方 $\ell > \bar{\ell}$ において $S_\ell = \emptyset$. さらに次が成立する：

- (i) $p < (N+2)/(N-2)$ のとき $0 < \ell < \bar{\ell}$ であれば, $\#S_\ell \geq 2$, $\ell = \bar{\ell}$ において $\#S_\ell = 1$.
- (ii) $(N+2)/(N-2) < p < p_c$ のときある $\ell_0 \in (0, \bar{\ell})$ が存在し $\ell \in (0, \ell_0)$ あるいは $\ell = \bar{\ell}$ において $\#S_\ell = 1$. さらにある $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$, $\delta_k \downarrow 0$ が存在し $|\ell - L| < \delta_k$ ならば $\#S_\ell \geq k+1$.
- (iii) $p \geq p_c$ のとき $\ell \in (0, L)$ において $\#S_\ell = 1$, $\ell \geq L$ において $S_\ell = \emptyset$.

注意. (i) 解集合 S_ℓ の構造が, Dirichlet 問題

$$\Delta u + \lambda(1+u)^p = 0 \quad \text{in } B = \{x \in \mathbf{R}^N : |x| < 1\}, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial B$$

の解構造 ([18] を参照) と類似性をもつことは興味深いものと思われる．この類似性は, Galaktionov-Vazquez [9] において予想されていた．

(ii) 自己相似解の多重存在に対する変分的アプローチについては [24] を参照．

3. Cauchy 問題における前方自己相似解の役割 次の Cauchy 問題を考える：

$$(10) \quad u_t = \Delta u + u^p \quad \text{in } \mathbf{R}^N \times (0, \infty), \quad u(x, 0) = \phi \in C(\mathbf{R}^N) \cap L^\infty(\mathbf{R}^N),$$

ここで, $\phi \geq 0$, $\phi \not\equiv 0$ とする．このとき解の最大存在時刻 $T = T[\phi] \leq \infty$ が存在し, 問題 (10) は $(0, T)$ で一意古典解をもち, $T < \infty$ ならば $\lim_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} = \infty$ となる． $T < \infty$ の場合, 解 u は有限時刻で爆発するといひ, $T = \infty$ の場合, 解 u は時間大域的であるという．

Fujita [7] は $p < (N+2)/N$ の場合, 任意の初期関数 $\phi \geq 0$, $\phi \not\equiv 0$, に対して $T[\phi] < \infty$ であり, $p > (N+2)/N$ の場合, 十分小さい定数 $c > 0$ に対して $\phi(x) \leq ce^{-|x|^2}$, $x \in \mathbf{R}^N$,

であれば $T[\phi] = \infty$ であることを示した. その後, Weissler [32] は $\alpha > 2/(p-1)$, 十分小さい定数 $c > 0$ に対して $\phi(x) \leq c(1+|x|)^{-\alpha}$, $x \in \mathbf{R}^N$, であれば $T[\phi] = \infty$ であることを示した. さらに Lee-Ni [21] は, 自己相似解との比較により十分小さい定数 $c_1 > 0$ に対して

$$\phi(x) \leq c_1(1+|x|)^{-2/(p-1)}, \quad x \in \mathbf{R}^N,$$

であれば $T[\phi] = \infty$ であること, Kaplan の固有関数法によりある定数 $c_2 > 0$ が存在し

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{2/(p-1)} \phi(x) > c_2$$

であれば $T[\phi] < \infty$ となることを示した. Wang [31], Gui-Ni-Wang [13, 14] は, 定常問題 $\Delta u + u^p = 0$ の解との比較によりさらに精密な結果を導いた.

ここでは, Cauchy 問題 (10) を, 変数変換 $v(y, s) = (t+1)^{p-1}u(x, t)$, $x = (t+1)^{1/2}y$, $t = e^s - 1$ を用いて

$$\begin{cases} v_s = \Delta v + \frac{1}{2}y \cdot \nabla v + \frac{1}{p-1}v + v^p, & y \in \mathbf{R}^N, s > 0, \\ v(y, 0) = \phi(y), & y \in \mathbf{R}^N, \end{cases}$$

と変換する. 初期関数 ϕ に対して次を仮定する:

$$(11) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{2/(p-1)} \phi(x) = \ell,$$

ここで $\ell > 0$ とする. 次の定常問題を考える:

$$\Delta v + \frac{1}{2}y \cdot \nabla v + \frac{1}{p-1}v + v^p = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^N, \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} |y|^{2/(p-1)} v(y) = \ell.$$

この定常問題の正値球対称解全体の集合は (9) の S_ℓ で与えられる.

定理 3. ([26]) $\ell > 0$ とし (11) を仮定する.

(i) $\ell \in (0, \bar{\ell})$, $\sharp S_\ell \geq 2$ とし, $\underline{v}_\ell \in S_\ell$ は最小解, $v_\ell \in S_\ell \setminus \{\underline{v}_\ell\}$ とする. さらに, それぞれ対応する自己相似解を $\underline{u}_\ell, u_\ell$ とする. このときある $t_0 > 0$ に対して $\phi(x) \leq u_\ell(x, t_0)$, $x \in \mathbf{R}^N$, であれば $T[\phi] = \infty$ であり次が成立する:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1/(p-1)} \|u(\cdot, t) - \underline{u}_\ell(\cdot, t)\|_{L^\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|t^{1/(p-1)} u(\cdot/\sqrt{t}, t) - \underline{v}_\ell(\cdot/\sqrt{t})\|_{L^\infty} = 0.$$

一方, ある $t_0 > 0$ に対して $\phi(x) \geq u_\ell(x, t_0)$, $\phi(x) \not\equiv u_\ell(x, t_0)$ in $\mathbf{R}^N$ であれば $T[\phi] < \infty$.

(ii) $\ell > \bar{\ell}$ とする. このとき $T[\phi] < \infty$.

注意. 有界領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ における初期値境界値問題

$$u_t = \Delta u + \lambda e^u \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0$$

の解のダイナミクスに関しては, Fujita [8] により定常問題の解集合が重要な役割をすることが知られている ([30] も参照). Cauchy 問題 (10) においては, 自己相似解の解集合がそれに代わる働きをすると考えることができる.

4. $p = (N + 2)/(N - 2)$ における後方自己相似解の構造 この節では $p = (N + 2)/(N - 2)$ とし, 次の Dirichlet 問題を考える:

$$(12) \quad \Delta v - \frac{1}{2}x \cdot \nabla v - \frac{1}{p-1}v + v^p = 0 \quad \text{in } B_R, \quad v = 0 \quad \text{on } \partial B_R,$$

ここで, $B_R = \{x \in \mathbf{R}^N : |x| < R\}$, $R > 0$ とする. 変分法を用いて (12) の正值解の存在を議論する. $u \in H_0^1(B_R)$ に対して次の汎関数を考える:

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{B_R} \left(|\nabla u|^2 + \frac{1}{p-1}u^2 \right) \sigma dx - \frac{1}{p+1} \int_{B_R} u^{p+1} \sigma dx,$$

ここで $\sigma(x) = e^{-|x|^2/4}$ とする. 定数 $S_{\sigma,R}$ を次で定める:

$$S_{\sigma,R} = \inf_{u \in H_0^1(B_R) \setminus \{0\}} \frac{\int_{B_R} |\nabla u|^2 \sigma dx + \frac{1}{p-1} \int_{B_R} u^2 \sigma dx}{\left(\int_{B_R} |u|^{2N/(N-2)} \sigma dx \right)^{(N-2)/N}}.$$

また, Sobolev の最良定数を S で表す. すなわち,

$$S = \inf_{u \in H_0^1(B_R) \setminus \{0\}} \frac{\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_{B_R} |u|^{2N/(N-2)} dx \right)^{(N-2)/N}}.$$

定数 $S_{\sigma,R}$ と S の値の比較において, $u \in H_0^1(B_R)$ に対して $v(x) = e^{-|x|^2/8}u(x)$ とおくと

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 \sigma dx = \int_{B_R} |\nabla v|^2 dx - \int_{B_R} \left(\frac{N}{4} - \frac{|x|^2}{16} \right) v^2 dx$$

が成立することに注意する. Brezis-Nirenberg [1] の議論および球対称性から導かれる compactness により $S_{\sigma,R} < S$ であれば (12) は球対称正值解をもつことが得られ, さらに次が得られる:

定理 4. ([27]) $N \geq 4$ のとき, 任意の $R > 0$ に対して (12) は球対称正值解をもつ. 一方 $N = 3$ のとき, ある $R_0 > 0$ が存在し, $R > R_0$ であれば (12) は球対称正值解をもち, $R \in (0, R_0]$ であれば (12) は球対称正值解をもたない.

注意. R_0 は, $F(-1/4, 1/2; r^2/4)$ の最初の零点として与えられる. ここで $F(\alpha, \gamma; s)$ は, 合流型超幾何関数. $R_0 = 2.2325 \dots$ である.

5. 後方自己相似解と blowup rate $p > 1$ とし, 次の問題を考える:

$$(13) \quad u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap C(\Omega),$$

ここで $\Omega = \mathbf{R}^N$ あるいは $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ は有界領域とする. ただし, 後者の場合 $u|_{\partial\Omega} = 0$ を仮定する. 有限時刻 T で爆発する解 u に対して, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$(14) \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(T-t)^{-1/(p-1)}, \quad 0 \leq t < T$$

が成り立つとき、この爆発を I 型、そうでないとき II 型とよぶ。(14) の右辺は常微分方程式 $U_t = U^p$ の時刻 T での爆発する解の増大度であることに注意する。

解の blowup rate に関しては、指数 p の値に応じて状況が異なる。 $1 < p < (N+2)/(N-2)$ の場合には、Giga-Kohn [10] により非負の初期値に対して解の爆発は I 型であることが示されている。さらに最近、Giga-Matsui-Sasayama [11] により初期値の符号が変化する場合についても解の爆発は I 型であることが示された。 $(N+2)/(N-2) < p < p_c$ の場合には、Matano-Merle [22] により、 $\Omega = B_R$ の場合、 u_0 が球対称であれば爆発は I 型であることが示された。しかしながら、 $p > p_c$ ($N \geq 11$)、 $\Omega = \mathbf{R}^N$ の場合、Herrero-Velázquez [16, 17] により II 型の爆発をする球対称正值解が存在することが報告されており、最近、Mizoguchi [23] により簡明な証明が与えられた。 $p = (N+2)/(N-2)$ 、 $\Omega = B_R$ の場合、[22] により、 u_0 が非負、球対称であれば爆発は I 型であることが示されている。一方、符号変化を伴う解については Filippas-Herrero-Velázquez [6] により、 $3 \leq N \leq 6$ において II 型の爆発をする解の存在が形式的に示されている。

ここでは、 $p = (N+2)/(N-2)$ における解の blowup rate について考える。Dirichlet 問題 (12) の解 $v = v(|x|)$ に対して

$$u(x, t) = (T - t)^{-1/(p-1)} v(|x|/\sqrt{T-t})$$

と定めると u は時刻 $t = T$ で爆発する後方自己相似解となる。とくにその爆発は I 型である。問題 (13) の解と後方自己相似解に対して、1 次元熱方程式に対する零点数非増大則 [19, 1, 4] を用いて比較することにより次が得られる：

定理 5. ([27]) $p = (N+2)/(N-2)$ とする。 u は (13) の球対称解とし $(x, t) = (0, T)$ で爆発するとする。さらにある関数 $\rho \in C[0, T]$, $\rho > 0$ on $[0, T)$ に対して

$$u > 0 \quad \text{in} \quad \bigcup_{0 < t < T} B_{\rho(t)} \times \{t\}$$

が成立するとする。このとき

$$\liminf_{t \rightarrow T} (T - t)^{-1/2} \rho(t) > \begin{cases} 0 & \text{if } N \geq 4, \\ R_0 & \text{if } N = 3, \end{cases}$$

であれば、爆発は I 型である。ここで、 $R_0 > 0$ は定理 4 に現れる定数。

$N = 3$, $\liminf_{t \rightarrow T} (T - t)^{-1/2} \rho(t) \in (0, R_0]$ の場合について考える。 $R, T > 0$ に対して

$$(15) \quad \rho(t) = R(T - t)^{1/2}, \quad 0 \leq t < T$$

とし、縮退する領域 $B_{\rho(t)}$ において Cauchy-Dirichlet 問題を考える：

$$(16) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + u^p, & x \in B_{\rho(t)}, t \in (0, T), \\ u = 0, & x \in \partial B_{\rho(t)}, t \in (0, T), \\ u(x, 0) = \lambda u_0(x), & x \in B_{\rho(0)}, \end{cases}$$

ここで $\lambda > 0$ とし u_0 は $\overline{B}_{\rho(0)}$ で連続、 $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$ とする。簡単な考察により、ある最大存在時刻 $T_{\max} = T_{\max}(\lambda u_0) \in (0, T]$ が存在し、問題 (16) は $(0, T_{\max})$ におい

て一意古典解をもつ. とくに $T_{\max} < T$ の場合は $\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_{\rho(t)})} = \infty$ が成立する.

定理 6. ([27]) $p = (N + 2)/(N - 2)$ とする. (16) において u_0 は球対称, 非増加とする. このとき, ある $\lambda^* > 0$ が存在し, $\lambda = \lambda^*$ において $T_{\max} = T$ かつ

$$\lim_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_{\rho(t)})} = \infty$$

が成立する. とくに $N = 3$ とし (15) において $R \in (0, R_0]$ とするとき $\lambda = \lambda^*$ において

$$(17) \quad \lim_{t \rightarrow T} (T - t)^{1/(p-1)} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_{\rho(t)})} = \infty$$

が成立する. すなわち II 型の爆発となる.

注意. $N \geq 4$ あるいは $N = 3$ かつ (15) において $R > R_0$ の場合は, 定理 5 より $\lambda = \lambda^*$ における爆発は I 型となる.

REFERENCES

- [1] S. Angenent, The zero set of a solution of a parabolic equation, *J. Reine Angew. Math.* **390** (1988), 79–96.
- [2] H. Brezis and L. Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Comm. Pure Appl. Math.* **36** (1983), 437–477.
- [3] T. Cazenave and F.B. Weissler, Asymptotically self-similar global solutions of the nonlinear Schrödinger and heat equations, *Math. Z.* **228** (1998), 83–120.
- [4] X.-Y. Chen and P. Poláčik, Asymptotic periodicity of positive solutions of reaction diffusion equations on a ball, *J. Reine Angew. Math.* **472** (1996) 17–51.
- [5] C. Dohmen and M. Hirose, Structure of positive radial solutions to the Haraux-Weissler equation, *Nonlinear Anal. TMA* **33** (1998), 51–69.
- [6] S. Filippas, M. A. Herrero, J. J. L. Velazquez, Fast blow-up mechanisms for sign-changing solutions of a semilinear parabolic equation with critical nonlinearity, *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **456** (2000), no. 2004, 2957–2982.
- [7] H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I* **13** (1966), 109–124.
- [8] H. Fujita, On the nonlinear equations $\Delta u + e^u = 0$ and $\partial v / \partial t = \Delta v + e^v$, *Bull. Amer. Math. Soc.* **75** (1969), 132–135.
- [9] V.A. Galaktionov and J.L. Vazquez, Continuation of blowup solutions of nonlinear heat equations in several space dimensions, *Comm. Pure Appl. Math.* **50** (1997) 1–67.
- [10] Y. Giga and R. V. Kohn, Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **38** (1985) 297–319.
- [11] Y. Giga, S. Matsui, and S. Sasayama, Blow up rate for semilinear heat equations with subcritical nonlinearity, *Indiana Univ. Math. J.* **53** (2004) 483–514.
- [12] Y. Giga and T. Miyakawa, Navier-Stokes flow in $\mathbf{R}^3$ with measures as initial vorticity and Morrey spaces, *Comm. Partial Differential Equations* **14** (1989), 577–618.
- [13] C. Gui, W.-M. Ni, and X. Wang, On the stability and instability of positive steady

- states of a semilinear heat equation in $\mathbf{R}^n$, *Comm. Pure Appl. Math.* **45** (1992) 1153–1181.
- [14] C. Gui, W.-M. Ni, and X. Wang, Further study on a nonlinear heat equation, *J. Differential Equations* **169** (2001) 588–613.
 - [15] A. Haraux and F.B. Weissler, Non-uniqueness for a semilinear initial value problem, *Indiana Univ. Math. J.* **31** (1982), 167–189.
 - [16] M.A. Herrero and J.J.L. Velazquez, Explosion de solutions d’equations paraboliques semilineaires supercritiques, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* **319** (1994), 141–145.
 - [17] M. A. Herrero and J. J. L. Velazquez, A blow up result for semilinear heat equations in the supercritical case, preprint.
 - [18] D.D. Joseph and T.S. Lundgren, Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources, *Arch. Rational Mech. Anal.* **49** (1972/73) 241–269.
 - [19] 小谷眞一, 俣野博, 微分方程式と固有関数展開, 岩波書店, 1998.
 - [20] H. Kozono and M. Yamazaki, Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data, *Comm. Partial Differential Equations* **19** (1994), 959–1014.
 - [21] T.-Y. Lee and W.-M. Ni, Global existence, large time behavior and life span of solutions of a semilinear parabolic Cauchy problem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **333** (1992), 365–378.
 - [22] H. Matano and F. Merle, On nonexistence of type II blowup for a supercritical nonlinear heat equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **57** (2004), 1494–1541.
 - [23] N. Mizoguchi, Type-II blowup for a semilinear heat equation, *Adv. Differential Equations* **9** (2004) 1279–1316.
 - [24] Y. Naito, Non-uniqueness of solutions to the Cauchy problem for semilinear heat equations with singular initial data, *Math. Ann.* **329** (2004), 161–196.
 - [25] Y. Naito, An ODE approach to the multiplicity of self-similar solutions for semilinear heat equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* (to appear)
 - [26] Y. Naito, On the Cauchy problem for semilinear heat equations, preprint.
 - [27] Y. Naito and T. Suzuki, Existence of type II blowup solutions for semilinear heat equation with critical Sobolev exponent, preprint.
 - [28] L.A. Peletier, D. Terman, and F.B. Weissler, On the equation $\Delta u + (x \cdot \nabla u)/2 + f(u) = 0$, *Arch. Rational. Mech. Anal.* **94** (1986) 83–99.
 - [29] P. Souplet and F.B. Weissler, Regular self-similar solutions of the nonlinear heat equation with initial data above the singular steady state, *Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire* **20** (2003), 213–235.
 - [30] 鈴木貴, 上岡友紀, 偏微分方程式講義, 培風館 (2005)
 - [31] X. Wang, On the Cauchy problem for reaction-diffusion equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **337** (1993) 549–590.
 - [32] F.B. Weissler, Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation, *Israel J. Math.* **38** (1981), 29–40.
 - [33] E. Yanagida, Uniqueness of rapidly decaying solutions to the Haraux-Weissler equation, *J. Differential Equations* **127** (1996), 561–570.