

常微分方程式の解の漸近挙動に対する 時間遅れの影響とその解析

宮崎倫子

静岡大学工学部

1. はじめに

常微分方程式系における時間遅れは、解の振動性、さらには不安定性をもたらすといった、どちらかというとな負の要因として位置づけられることが多い。しかし、状態フィードバックメカニズムをもつシステムにおいては、時間遅れが無視できない場合も多く、その影響（不安定要素）をいかに小さくするかということが従来から求められてきた。

その一方で、近年では不安定なシステムを時間遅れを利用して安定化させるための方法や、周期軌道の周期や振幅の制御に時間遅れを含む項を利用する方法が提案され、時間遅れを正の要因として用いるという研究が徐々に進んできている。

本講演では、時間遅れを正の要因として利用するという立場での研究背景とささやかながら得られた結果について紹介する。

2. 時間遅れと振動性・不安定性（背景）

時間遅れ $\tau > 0$ をもつ次のスカラー微分方程式を考えよう。本稿では、 $\dot{}$ は t についての微分を表すものとする。

$$(1) \quad \dot{x}(t) = -ax(t - \tau).$$

定理 A (cf. [5]). (1) の自明解が漸近安定であるための必要十分条件は $0 < a\tau < \frac{\pi}{2}$ が成り立つことである。

定理 B (cf. [4]). (1) の全ての解が振動的であるための必要十分条件は $a\tau > \frac{1}{e}$ が成り立つことである。

(1) において時間遅れがない場合 ($\tau = 0$) には, 振動解は存在せず, $a > 0$ であることが (1) の自明解が漸近安定であるための必要十分条件である. つまり, 時間遅れが不安定性や振動性の要因であると考えられていることについて容易に察しがつくであろう.

また, Mackey & Glass[9] による白血球生成ダイナミクスモデル

$$(2) \quad \dot{x}(t) = -ax(t) + \frac{bx(t-\tau)}{1+x(t-\tau)^m}$$

において解がカオス的な挙動を呈することはよく知られている. ここで, $a > 0$, $b > 0$, $m > 1$ および $\tau > 0$ は定数である.

3. 時間遅れの利用 (背景)

本節では, 時間遅れが解の安定性や, 周期解の振幅および周期を制御するために利用されているいくつかの研究結果を紹介しよう.

3.1. 時間遅れがもたらす安定化の一例

次のスカラー微分方程式を考えよう.

$$(3) \quad \dot{x} = a(t)x(t-\tau)$$

ここで, a は $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ への周期 ω をもつ連続な周期関数で, 次の関係を満たすものとする.

$$(4) \quad -a(\omega - t) = a(t) > 0 \quad \text{for } t \in (0, \omega/2).$$

このとき, 我々は過去に次の結果を証明した.

定理 C ([10]). (4) を仮定する. このとき, $\tau_0 > 0$ が存在して, $0 < \tau < \tau_0$ のとき, (3) の自明解は漸近安定である.

なお, $\tau = 0$ の場合, (4) のもとで (3) の全ての解は周期的であり, 従って自明解は漸近安定とはならないことに注意しよう.

3.2. 時間遅れを利用した不安定周期軌道の安定化

次の n 次元の微分方程式を考えよう .

$$(5) \quad \dot{x} = f(x)$$

ここで, f は n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 内のある領域 Ω から $\mathbf{R}^n$ への C^1 級関数とする. また, (5) は周期が $\omega > 0$ の不安定な周期軌道 $x^*(t)$ をもつものとする. この不安定な周期軌道 $x^*(t)$ を安定化する方法のひとつとして, 1992 年に Pyragas [14] によって提案された Delayed Feedback 制御 (以下, DF 制御と呼ぶ) が知られている. それは, (5) に状態フィードバックを施した次の時間遅れをもつ n 次元の微分方程式

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + u(t) \\ u(t) = K(x(t - \tau) - x(t)) \end{cases}$$

で与えられる. ここで, $u(t)$ は制御入力であり, K は $n \times n$ 定数行列でフィードバックゲインと呼ばれている. $\tau = \omega$ のとき, $x^*(t)$ は (6) においても周期軌道になっていることに注意しよう. そして, “ $\tau = \omega$ として, フィードバックゲイン K を適当に与えることにより, $x^*(t)$ が (6) の解として漸近安定となるとき” に, (5) の不安定周期軌道 $x^*(t)$ が安定化できた, すなわち, DF 制御が成功したと解釈する .

3.3. 時間遅れを利用した周期解の振幅と周期の制御

次の 2 階の微分方程式を考えよう .

$$(7) \quad \ddot{x} + x + \varepsilon g(x, \dot{x}) = f(x(t - \tau)).$$

ここで, ε は正のパラメータであり, g は $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}$ への C^2 級関数で, $g(0, 0) = 0$ をみたすものとする. f はフィードバック関数であり, Atay[1] はこれをうまく決定することにより, (7) の吸引的な周期解の振幅と周期を制御することが可能であることを示している .

定理 D ([1]). $R > 0$ および $\omega \in (\sqrt{2/5}, \sqrt{2})$ を任意に与える . このとき , $\tau > 0$, $f(x) = bx + \varepsilon(b_1x + b_3x^3)$ の形で与えられるフィードバック関数 , および $\varepsilon_0 > 0$ が存在し , 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対して (7) は吸引力的な周期解 $x(t) = R \cos(\omega t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ をもつ .

4. DF 制御における解析

3.2 節で紹介した DF 制御は, 手法としては非常に単純であるため , 応用分野においては数値シミュレーション結果を中心として盛んに適用されてきている . 一方で , 解析的な結果もいくつか出ている (cf. [8, 11, 12]) が多くの課題を残している (cf. [15] の本文の第 1 段落から第 3 段落参照). DF 制御の安定化問題を解析的に扱う観点として , 以下の事柄が考えられる .

- (i) DF 制御が成功するようなシステムの条件を求める .
- (ii) DF 制御によって得られた周期軌道の安定性が時間遅れ τ の摂動に対してロバストであることを保証する .

(i) については, 周期軌道のまわりでの線形変分方程式にフロッケの理論を適用し , 特性指数 (乗数) を解析することが基本的な手順である . (6) の線形変分方程式は , f のヤコビアン行列 Df に対して $A(t) = Df(x^*(t))$ とおくと , 次式で与えられる .

$$(8) \quad \dot{y}(t) = A(t)y(t) + K(y(t - \tau) - y(t)).$$

したがって , 時間遅れをもつ微分方程式のフロッケの理論を用いる必要がある . また , (6) の周期軌道の安定性をフロッケ指数で判定するための定理も必要である . 前者は Hale & Lunel[5] の第 8 章 , 後者は Stokes[13] の結果が有用である .

まず , (8) のフロッケ指数について我々が得た結果を紹介しよう . 以後 , 頻繁に引用することになるので未制御 ($K = 0$) の場合の線形変分方程式も記しておく .

$$(9) \quad \dot{y} = A(t)y.$$

補題 1. $K = kI (k \in \mathbf{R})$ および $\tau = \omega$ を仮定する. (9) のフロッケ指数 μ_j に対して,

$$(10) \quad \mu + k - ke^{-\mu\omega} = \mu_j$$

を満たす μ は (8) のフロッケ指数である. 逆に, (8) のフロッケ指数 μ に対して, (9) のフロッケ指数 μ_j が存在して (10) を満たす.

注意 1. (9) のフロッケ指数を求めること自体, その際必要となる (9) の基本解を求めることの困難さに起因する難しさがある.

補題 2. $K = kI (k \in \mathbf{R}), k \neq -1/\omega$ および $\tau = \omega$ を仮定する. このとき, (9) のフロッケ乗数 1 が単純であれば, (8) のフロッケ乗数 1 も単純である. すなわち, (5) の周期軌道 $x^*(t)$ が非退化であれば, (6) の周期軌道 $x^*(t)$ が非退化である.

定理 1. (9) が 1 より大きなフロッケ乗数をもてば, $K = kI$ によって DF 制御はできない. ただし, $k \neq -1/\omega$ とする.

注意 2. $k \neq -1/\omega$ という仮定は, (6) の周期軌道の非退化性の条件からきており, Stokes の結果を引用する際の前提条件である. Stokes の定理の証明は定数変化法の公式を用いており, その公式は Hino *et. al.*[7] によって与えられたものに置き換える必要がある. また, 不安定性を導くだけであれば, 非退化性は必要ないのではないかと考えられる.

注意 3. 本節の冒頭で述べた解析の観点 (ii) については, 既存の結果は存在しないようである. (ii) を解析の観点としてあげた理由は, (5) の不安定周期軌道の周期 ω を厳密に知ることはほとんど不可能に近いからである. つまり, 応用上 (数値的に) DF 制御が成功したと解釈されているほとんど全てのケースにおいて, $\tau = \omega$ ということはありえないと考えられる. したがって, (ii) を示すためには, $\tau \approx \omega$ としなければならない. 補題 1 の (10) の証明手法には, $\tau = \omega$, より正確には $\tau = m\omega$ (m は自然数) という条件が本質的であり, $\tau \approx \omega$ の

場合に同様の手法は適用できない。

5. 2-フィードバックループによる周期解の振幅と周期の制御

次のスカラー方程式を考えよう。

$$(11) \quad \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + f(x(t - \tau)).$$

ここで， α は正の定数とする． f はフィードバック関数である．Heiden & Mackey[6] は (11) について， $f(u)$ が u について増加であれば正のフィードバック，減少であれば負のフィードバック，単調関数でないときには混合型フィードバックと呼び様々な考察を行っている．例えば，1.1 節で紹介した (2) (Mackey-Glass のモデル) においては，フィードバック関数 f は次式で与えられ， $m > 1$ のとき混合型である．

$$f(u) = \frac{bu}{1 + u^m}.$$

生体システムをはじめとする多くの分野において，複数のフィードバックループの存在が指摘され，システムは複雑な挙動を呈することが知られている (cf. [3, 2])．

そこで，我々は逆にふたつ目のフィードバックループが安定化作用，あるいは振幅・周期を変化させる作用をもつかどうかについて考察することにした．異なる時間遅れをもつ 2 種類のフィードバックが存在した場合の方程式を考えよう．

$$(12) \quad \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + \frac{1}{2} \{f(x(t - \tau)) + f(x(t - 1))\}$$

ここで，フィードバック関数 f は負のフィードバックの中でも特別なケースとして次式で与えられるものを考える．

$$f(u) := \begin{cases} c & u \in [0, b] \\ 0 & u \in (b, \infty) \end{cases}$$

このとき，次の結果が得られた．

定理 2. $0 < \tau < 1$ のとき $\gamma := c/\alpha$, $\gamma_1 := 2b(e^\alpha - 1)/(e^\alpha + e^{\alpha\tau} - 2)$ および $\gamma_2 := 2b(e^\alpha - 1)/(e^\alpha - e^{\alpha\tau})$ とおき , $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$ を仮定する . このとき , (12) は軌道漸近安定な周期解を持ち , その周期 T_2 は

$$T_2 = \frac{1}{\alpha} \log \frac{(\gamma \frac{e^\alpha + e^{\alpha\tau}}{2} + b - \gamma)(\gamma \frac{e^\alpha + e^{\alpha\tau}}{2} - b)}{b(\gamma - b)},$$

で与えられる . 振幅 A_2 については , $0 < \alpha < \log 2$ のとき ,

$$A_2 = \begin{cases} \gamma(1 - e^{-\alpha\tau}) + \frac{(2be^{-\alpha\tau} - \gamma)(1 - e^{-\alpha(1-\tau)})}{2}, & \gamma \in [\gamma_1, \frac{2b}{e^{\alpha\tau}}) \\ \gamma(1 - e^{-\alpha\tau}), & \gamma \in [\frac{2b}{e^{\alpha\tau}}, \frac{2b}{2 - e^{\alpha\tau}}] \\ \gamma(1 - e^{-\alpha\tau}) + \frac{\{(2 - e^{\alpha\tau})\gamma - 2b\}(1 - e^{-\alpha(\tau-1)})}{2e^{\alpha\tau}}, & \gamma \in (\frac{2b}{2 - e^{\alpha\tau}}, \gamma_2] \end{cases}$$

$\alpha \geq \log 2$ のとき ,

$$A_2 = \gamma(1 - e^{-\alpha\tau}),$$

によってそれぞれ与えられる .

注意 4. (11) 式について , すなわちフィードバックがひとつだけの場合 , Heiden & Mackey[6] の結果を引用すると , $\gamma > b$ のときに (11) は軌道漸近安定な周期解を持ち , その周期 T_1 と振幅 A_1 は

$$T_1 = \frac{1}{\alpha} \log \frac{(\gamma e^\alpha + b - \gamma)(\gamma e^\alpha - b)}{b(\gamma - b)}, \quad A_1 = \gamma(1 - e^{-\alpha}).$$

明らかに $T_1 > T_2$, $A_1 > A_2$ が成り立ち , このことは , ふたつ目のフィードバックループが周期や振幅を抑制する可能性を示している .

References

- [1] Atay, F. W., Oscillation control in delayed feedback systems, *Dynamics, Bifurcations, and Control*, (2002), **LNCIS273**, 103–116.
- [2] Figueiredo, J. C. B. *et. al.*, Chaos in two-loop negative feedback systems, *Phys. Rev. E*, (2002), **65**, 051905.

- [3] Glass, L., Beuter, A. and Ladocque, D., Time delays, oscillations, and chaos in physiological control systems, *Mathematical Biosciences*, (1988), **90**, 111–125.
- [4] Györi, I. and Ladas, G., *Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications*, Oxford Univ. Press, 1991.
- [5] Hale, J. K. and Verduyn Lunel, S. V., *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [6] Heiden, U. and Mackey, M. C., The dynamics of production and destruction: Analytic insight into complex behaviour, *J. Math. Biology*, (1982), **16**, 75–101.
- [7] Hino, Y., Murakami, S., Naito, T. and Minh, N. V., A variation-of-constants formula for abstract functional differential equations in the phase space *J. Differential Equations*, (2002), **179**, 336–355.
- [8] Just, W. *et. al.*, Mechanism of time-delayed feedback control, *Phys. Rev. Lett.*, (1997), **78**, 203–206.
- [9] Mackey, M. C. and Glass, L, Oscillation and chaos in physiological control systems, *Science*, (1977), **197**, 287–289.
- [10] Miyazaki, R., Asymptotic behavior for linear delay-differential equations with periodically oscillatory coefficients, *J. Math. Anal. Appl.*, (1996), **204**, 183–205.
- [11] Nakajima, H., On analytical properties of delayed feedback control of chaos, *Phys. Lett. A*, (1997), 232, 207–210.
- [12] Nakajima, H., Some sufficient conditions for stabilizing periodic orbits without the odd-number property by delayed feedback control in continuous-time systems, *Phys. Lett. A*, (2004), **327**, 44–54.
- [13] Stokes, A., On the stability of a limit cycle of an autonomous functional differential equation, *Cont. Diff. Eq.*, (1964), 3, 121–139.
- [14] Pyragas, K., Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Physics Letters A*, (1992), 170, 421–428.
- [15] Pyragas, K. *et. al.*, Delayed feedback control of dynamical systems at a subcritical Hopf bifurcation, *Phys. Rev. E*, (2004), **70**, 056222.