

時間遅れをもつ方程式の解の漸近的性質について

松永 秀章（大阪府立大学工学部）

時間遅れをもつ非線形方程式の平衡点の局所安定性を議論する上で、線形化方程式の零解の漸近安定性が不可欠であることは周知の事実である。本研究では、時間遅れをもつ線形微分方程式

$$x'(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + A_2 \int_{t-\sigma}^t x(s) ds, \quad t \geq 0 \quad (\text{E})$$

の零解の漸近安定性を考える。ここで、 A_0, A_1, A_2 は 2×2 実定数行列、 $\tau, \sigma > 0$ とする。本研究の目的は、方程式 (E) の漸近安定条件、すなわち、方程式 (E) のすべての非自明解が $t \rightarrow \infty$ で 0 に漸近するための必要十分条件を、行列 A_0, A_1, A_2 および時間遅れ τ, σ を用いて具体的に与えることである。1950 年代以降、多くの研究者がこの問題に取り組んでいるが、まだ完全解決には至っていないため、発表では部分的に解決されている結果を中心に紹介する。また、時間遅れをもつ線形差分方程式に対しても同種の問題を考察し、最近得られた結果を報告したい。

1. 離散的な時間遅れをもつ微分方程式

この節では、離散的な時間遅れをもつ線形微分方程式の漸近安定条件について、従来知られている結果および新しい結果を紹介する。まず、1 つの時間遅れをもつ次のスカラー微分方程式

$$x'(t) = -bx(t - \tau), \quad (\text{E}_1)$$

$$x'(t) = -ax(t) - bx(t - \tau) \quad (\text{E}_2)$$

について考える。ここで、 $a, b \in \mathbf{R}, \tau > 0$ である。

定理 1. 方程式 (E₁) の漸近安定条件は

$$0 < b\tau < \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

定理 2 (Hayes [8]). 方程式 (E₂) の漸近安定条件は

$$a > -\frac{1}{\tau}, \quad a + b > 0 \quad \text{かつ} \quad b < \omega \sin \omega\tau - a \cos \omega\tau. \quad (2)$$

ただし、 $\omega \in (0, \pi/\tau)$ は $\omega \cos \omega\tau = -a \sin \omega\tau$ の解である。

定理 3 (Boese [1], Freedman & Kuang [3]). 方程式 (E₂) の漸近安定条件は

$$a + b > 0 \quad \text{かつ} \quad b^2 - a^2 \leq 0 \quad (3)$$

または

$$a + b > 0, \quad b^2 - a^2 > 0 \quad \text{かつ} \quad \tau < \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cos^{-1} \left(-\frac{a}{b} \right). \quad (4)$$

注意 1. 方程式 (E₂) の漸近安定条件について, 定理 2 で得られた条件 (2) を τ を固定し ab 平面で図示すると右図斜線部になる. なお, 漸近安定条件を満たす点 (a, b) の領域 (安定領域) の境界線は, 直線 $b = -a$ とパラメータ曲線

$$a = -\frac{\omega \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau}, \quad b = \frac{\omega}{\sin \omega \tau} \quad (5)$$

で構成される ($0 < \omega < \pi/\tau$).

一方, 定理 3 では漸近安定条件を満たす時間遅れ τ の範囲が具体的に与えられている.

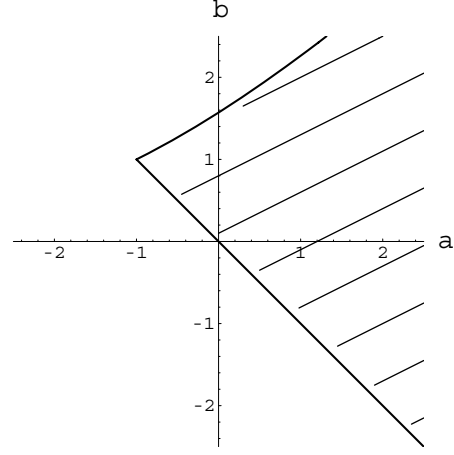


Fig. 1 (E₂) の安定領域 ($\tau = 1$)

また, 方程式 (E₁), (E₂) をそれぞれ 2 次元に拡張した微分方程式

$$\mathbf{x}'(t) = -B\mathbf{x}(t - \tau), \quad (E_3)$$

$$\mathbf{x}'(t) = -a\mathbf{x}(t) - B\mathbf{x}(t - \tau) \quad (E_4)$$

に対しては, 次の結果が知られている. ここで, $a \in \mathbf{R}$, $B \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$, $\tau > 0$ である.

定理 4 (Hara & Sugie [7]). 方程式 (E₃) の漸近安定条件は

$$2\sqrt{\det B} \sin\left(\tau\sqrt{\det B}\right) < \operatorname{tr} B < \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau \det B}{\pi} \quad (6)$$

かつ

$$0 < \det B < \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^2. \quad (7)$$

系 1 (Hara & Sugie [7]). B が複素固有値 $be^{\pm i\theta}$ ($b \in \mathbf{R}$, $|\theta| \leq \pi/2$) をもつとき, 方程式 (E₃) の漸近安定条件は

$$0 < b\tau < \frac{\pi}{2} - |\theta|. \quad (8)$$

また, B が実固有値 b_1, b_2 をもつとき, 方程式 (E₃) の漸近安定条件は

$$0 < b_1\tau < \frac{\pi}{2} \quad \text{かつ} \quad 0 < b_2\tau < \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

定理 5 (Sakata [18]). B が複素固有値 $be^{\pm i\theta}$ ($b \in \mathbf{R}$, $|\theta| \leq \pi/2$) をもつとき, 方程式 (E₄) の漸近安定条件は $a > \varphi(b)$. ただし, 曲線 $a = \varphi(b)$ はパラメータ曲線

$$a = -\frac{\omega \cos(\omega\tau - |\theta|)}{\sin(\omega\tau - |\theta|)}, \quad b = \frac{\omega}{\sin(\omega\tau - |\theta|)}, \quad -\frac{\pi - |\theta|}{\tau} < \omega < \frac{|\theta|}{\tau} \quad (10)$$

で与えられる.

定理 5 で得られた漸近安定条件を ab 平面で図示すると次のようになる.

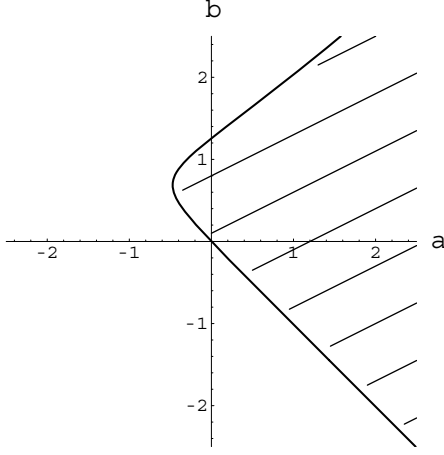


Fig. 2 (E_4) の安定領域
($\tau = 1, \theta = \pi/10$)

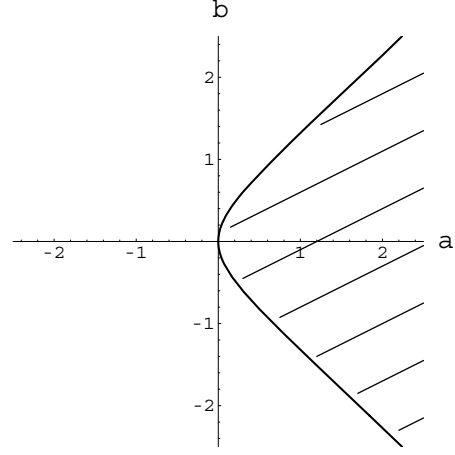


Fig. 3 (E_4) の安定領域
($\tau = 1, \theta = \pi/2$)

ab 平面での方程式 (E_4) の安定領域を与えた定理 5 は定理 2 の拡張になっている. 一方, 定理 3 に対応する τ の範囲に関する方程式 (E_4) の漸近安定条件を, 今回新たに得ることができたので報告する (証明の概略は 2 節で述べる).

定理 6. B が複素固有値 $be^{\pm i\theta}$ ($b \in \mathbf{R}, |\theta| \leq \pi/2$) をもつとき, 方程式 (E_4) の漸近安定条件は

$$a + b \cos \theta > 0 \quad \text{かつ} \quad b^2 - a^2 \leq 0 \quad (11)$$

または

$$a + b \cos \theta > 0, \quad b^2 - a^2 > 0 \quad \text{かつ} \quad \tau < \frac{\text{sgn}(b)}{\sqrt{b^2 - a^2}} \left\{ \cos^{-1} \left(-\frac{a}{b} \right) - |\theta| \right\}. \quad (12)$$

定理 7. B が実固有値 b_1, b_2 をもつとき, 方程式 (E_4) の漸近安定条件は, 各 $k = 1, 2$ に対して

$$a + b_k > 0 \quad \text{かつ} \quad b_k^2 - a^2 \leq 0 \quad (13)$$

または

$$a + b_k > 0, \quad b_k^2 - a^2 > 0 \quad \text{かつ} \quad \tau < \frac{1}{\sqrt{b_k^2 - a^2}} \cos^{-1} \left(-\frac{a}{b_k} \right). \quad (14)$$

注意 2. $A, B \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ とするとき, 微分方程式

$$\mathbf{x}'(t) = -A\mathbf{x}(t) - B\mathbf{x}(t - \tau)$$

の漸近安定条件はまだ得られていない.

さて, 2 つの時間遅れをもつ微分方程式

$$x'(t) = -a\{x(t - \tau) + x(t - \sigma)\}, \quad (E_5)$$

$$\mathbf{x}'(t) = -A\{\mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{x}(t - \sigma)\} \quad (E_6)$$

に対しては, 次の結果が知られている. ここで, $a \in \mathbf{R}, A \in \mathbf{R}^{2 \times 2}, \tau, \sigma > 0$ である.

定理 8 (Stépan [21]). 方程式 (E₅) の漸近安定条件は

$$0 < a < \frac{\pi/2}{(\tau + \sigma) \cos \left(\frac{\tau - \sigma \pi}{\tau + \sigma} \right)}. \quad (15)$$

定理 9 (Hara, Miyazaki & Morii [6]). A が複素固有値 $ae^{\pm i\theta}$ ($a \in \mathbf{R}$, $|\theta| \leq \pi/2$) をもつとき, 方程式 (E₆) の漸近安定条件は

$$0 < a < \frac{\pi/2 - |\theta|}{(\tau + \sigma) \cos \left\{ \frac{\tau - \sigma}{\tau + \sigma} \left(\frac{\pi}{2} - |\theta| \right) \right\}}. \quad (16)$$

注意 3. 定理 9 は連続的な時間遅れをもつ微分方程式

$$\mathbf{x}'(t) = -A \int_{-\tau}^0 \mathbf{x}(t+s) d\eta(s) \quad (E_7)$$

に対する結果に一般化されている (Miyazaki [14]).

さらに, 2 つの時間遅れと 2 つの係数をもつ微分方程式

$$x'(t) = -ax(t - \tau) - bx(t - \sigma) \quad (E_8)$$

に対しては, $\sigma = 2\tau$ と $\sigma = 3\tau$ の場合についてのみ, その漸近安定条件が報告されている. ここで, $a, b \in \mathbf{R}$, $\tau, \sigma > 0$ である. ここでは, $\sigma = 2\tau$ の場合の結果を示す.

定理 10 (Sakata [19]). $\sigma = 2\tau$ の場合, 方程式 (E₈) の漸近安定条件は

$$a + b > 0 \quad \text{かつ} \quad a < \psi(b). \quad (17)$$

ただし, 曲線 $a = \psi(b)$ は次のパラメータ曲線で与えられる:

$$a = -\frac{\omega \cos 2\omega\tau}{\sin \omega\tau}, \quad b = \frac{\omega \cos \omega\tau}{\sin \omega\tau}, \quad 0 < \omega < \frac{\pi}{\tau}. \quad (18)$$

定理 10 と [19] で得られた漸近安定条件を ab 平面で図示すると次のようになる.

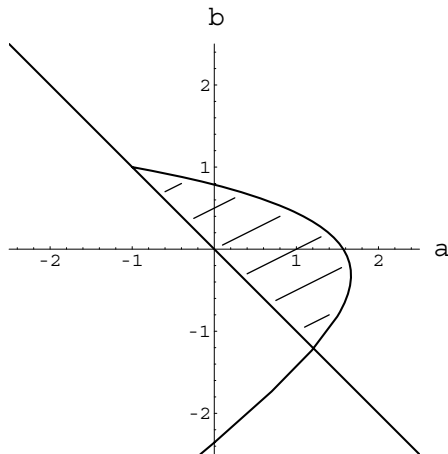


Fig. 4 (E₈) の安定領域
($\tau = 1, \sigma = 2$)

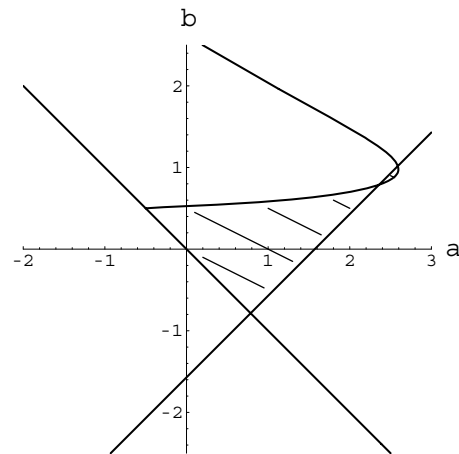


Fig. 5 (E₈) の安定領域
($\tau = 1, \sigma = 3$)

2. 定理 6 の証明

一般に, 時間遅れをもつ線形微分方程式 (E) の零解が漸近安定であるための必要十分条件は, その特性方程式

$$\det \left(\lambda I - A_0 - A_1 e^{-\lambda \tau} - A_2 \int_{-\sigma}^0 e^{\lambda s} ds \right) = 0 \quad (19)$$

のすべての根が負の実部をもつことである ([5]). ここで, I は 2×2 単位行列である.

いま, 適当な正則行列 P を用いて $x(t) = P u(t)$ とおくと, 方程式 (E₄) は

$$u'(t) = -a u(t) - P^{-1} B P u(t - \tau)$$

に変換されるので, 行列 B は次のジョルダン標準形を考えれば十分である:

$$(I) \quad bR(\theta) \equiv b \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (II) \quad \begin{pmatrix} b_1 & c \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

ただし, b, θ, b_1, b_2, c は実数であり, $|\theta| \leq \pi/2$ とする.

以下では, 行列 B が (I) で与えられる場合を考える. 方程式 (E₄) の特性方程式は

$$F(\lambda) \equiv \det(\lambda I + aI + bR(\theta)e^{-\lambda \tau}) = 0 \quad (20)$$

となる. $f(\lambda) = \lambda + a + be^{-\lambda \tau + i|\theta|}$ とおくと, $F(\lambda) = f(\lambda)\overline{f(\lambda)}$ であるから, 求める漸近安定条件は, $f(\lambda) = 0$ のすべての根の実部が負であるための必要十分条件に帰着される. そこで, $f(\lambda) = 0$ の根 λ を τ の連続関数とみなし, τ の値を変化させたときの根 $\lambda = \lambda(\tau)$ の複素平面上での分布を調べる. 実際, 次の 3 つの補題を用いて, 定理 6 が証明される (定理 7 の証明も同様).

補題 1 (Freedman & Kuang [3]). τ の値を変化させたとき, 複素平面の右半平面にある $f(\lambda) = 0$ の根の重複度の和が変化するのは, $f(\lambda) = 0$ の根が虚軸上に現れる, または, 虚軸上を横切るときのみである.

補題 2. $0 < \theta \leq \pi$ かつ $b > 0$ とする.

(i) $b^2 - a^2 \leq 0$ ならば, $f(\lambda) = 0$ は虚軸上に根をもたない.

(ii) $b^2 - a^2 > 0$ とする. λ を $f(\lambda) = 0$ の虚軸上の根とすると

$$\lambda = \pm i\sqrt{b^2 - a^2}, \quad (21)$$

$$\tau = \tau_n^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \left\{ 2n\pi + \cos^{-1} \left(-\frac{a}{b} \right) \pm \theta \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

逆に, $\tau = \tau_n^\pm$ ならば, $\lambda = \pm i\sqrt{b^2 - a^2}$ は $f(\lambda) = 0$ の根である.

補題 3. $\lambda = i\omega$ ($\omega \neq 0$) を $f(\lambda) = 0$ の根とすると

$$\operatorname{Re} \frac{d\lambda}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega} > 0. \quad (23)$$

すなわち, 虚軸上の根 $\lambda = i\omega$ ($\omega \neq 0$) は τ の値を増加させると右半平面に飛び出す.

定理 6 の証明の概略. $\tau = 0$ のとき, $f(\lambda) = 0$ の根は $\lambda = -a - b \cos \theta - ib \sin \theta$. したがって, 根 λ の τ に関する連続性により, 十分小さな任意の $\tau > 0$ に対して $f(\lambda) = 0$ のすべての根の実部が負であるためには, $a + b \cos \theta > 0$ が必要である. $b^2 - a^2 \leq 0$ の場合, $f(\lambda) = 0$ は虚軸上に根をもたないので, 任意の $\tau > 0$ に対して $f(\lambda) = 0$ のすべての根の実部が負である. $b^2 - a^2 > 0$ の場合, $f(\lambda) = 0$ が虚軸上に根をもつための τ の最小値は τ_0^- なので, $\tau < \tau_0^-$ ならば, $f(\lambda) = 0$ のすべての根の実部が負であり, $\tau \geq \tau_0^-$ ならば, 実部が非負である $f(\lambda) = 0$ の根が存在する. $\square$

3. 連続的な時間遅れをもつ微分方程式

この節では, 連続的な時間遅れをもつスカラー微分方程式

$$x'(t) = -b \int_{t-\tau}^t x(s) ds, \quad (\text{E}_9)$$

$$x'(t) = -ax(t) - b \int_{t-\tau}^t x(s) ds \quad (\text{E}_{10})$$

の漸近安定条件を紹介する. ここで, $a, b \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ である.

定理 11 (Oliveira & Carvalho [17]). 方程式 (E₉) の漸近安定条件は

$$0 < b < \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\tau} \right)^2. \quad (24)$$

定理 12 (Funakubo, Hara & Sakata [4]). $a < 0$ のとき, $2b \neq a^2$ とする. このとき, 方程式 (E₁₀) の漸近安定条件は

$$a \geq 0, \quad b > 0 \quad \text{かつ} \quad 2b - a^2 \leq 0 \quad (25)$$

または

$$a \geq 0, \quad b > 0, \quad 2b - a^2 > 0 \quad \text{かつ} \quad \tau < \frac{1}{\sqrt{2b - a^2}} \left(2\pi - \cos^{-1} \frac{a^2 - b}{b} \right) \quad (26)$$

または

$$a \geq 0, \quad b < 0 \quad \text{かつ} \quad \tau < \left| \frac{a}{b} \right| \quad (27)$$

または

$$a < 0, \quad 2b - a^2 > 0 \quad \text{かつ} \quad \left| \frac{a}{b} \right| < \tau < \frac{1}{\sqrt{2b - a^2}} \cos^{-1} \frac{a^2 - b}{b}. \quad (28)$$

注意 4. 定理 11 は連続的な時間遅れをもつ微分方程式 (E₇) に対する結果に一般化されている (Miyazaki [14]).

注意 5. 離散的な時間遅れと連続的な時間遅れをもつ微分方程式

$$x'(t) = -ax(t - \tau) - b \int_{t-\sigma}^t x(s) ds \quad (\text{E}_{11})$$

の漸近安定条件は, τ, σ を固定し ab 平面における安定領域として, $\sigma = \tau, \sigma = 2\tau, \sigma = 4\tau$ および $\tau = 0$ の場合についてのみ得られている (Sakata & Hara [20]).

最後に、時間遅れをもつ微分方程式および差分方程式の漸近安定条件について、得られている結果をまとめると、以下の表のようになる。

Equations	Parameters	Criteria
$x'(t) = Ax(t - \tau)$	$A \in \mathbf{R}$	$-\pi/2\tau < A < 0$
	$A \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$	Hara & Sugie [7]
$x'(t) = A\{x(t - \tau) + x(t - \sigma)\}$	$A \in \mathbf{R}$	Stépán [21]
	$A \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$	Hara et al. [6]
$x'(t) = Ax(t) + Bx(t - \sigma)$	$A, B \in \mathbf{R}$	Hayes [8], Boese [1]
	$A \in \mathbf{R}, B \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$	Sakata [18], 定理 6, 7
	$A, B \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$	<i>open problem</i>
$x'(t) = Ax(t - \tau) + Bx(t - \sigma)$	$A, B \in \mathbf{R}, \sigma/\tau \in \mathbf{Q}$	Sakata [19]
	$A, B \in \mathbf{R}, \sigma/\tau \notin \mathbf{Q}$	<i>open problem</i>
	$A \text{ or } B \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$	<i>open problem</i>

Equations	Parameters	Criteria
$x'(t) = A \int_{t-\tau}^t x(s)ds$	$A \in \mathbf{R}$	Oliveira et al. [17]
$x'(t) = A \int_{-\tau}^0 x(t+s)d\eta(s)$	$A \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$	Miyazaki [14]
$x'(t) = Ax(t) + B \int_{t-\sigma}^t x(s)ds$	$A, B \in \mathbf{R}$	Funakubo et al. [4]
	$A \text{ or } B \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$	<i>open problem</i>
$x'(t) = Ax(t - \tau) + B \int_{t-\sigma}^t x(s)ds$	$A, B \in \mathbf{R}, \sigma/\tau \in \mathbf{Q}$	Sakata & Hara [20]
	$A, B \in \mathbf{R}, \sigma/\tau \notin \mathbf{Q}$	<i>open problem</i>
	$A \text{ or } B \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$	<i>open problem</i>

Equations	Parameters	Criteria
$x_{n+1} - x_n = Ax_{n-k}$	$A \in \mathbf{R}$	Levin & May [10]
	$A \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$	Matsunaga & Hara [13]
$x_{n+1} - x_n = A(x_{n-k} + x_{n-\ell})$	$A \in \mathbf{R}$	Ogita et al. [16]
	$A \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$	Nagabuchi [15]
$x_{n+1} - Ax_n + Bx_{n-\ell} = 0$	$A, B \in \mathbf{R}$	Kuruklis [9]
	$A \in \mathbf{R}, B \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$	Matsunaga [11]
	$A, B \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$	<i>open problem</i>
$x_{n+1} - Ax_{n-k} + Bx_{n-\ell} = 0$	$A, B \in \mathbf{R}$	Dannan [2]
	$A \text{ or } B \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$	<i>open problem</i>

参考文献

- [1] F. G. Boese, Some stability charts and stability conditions for a class of difference-differential equations, *Z. Angew. Math. Mech.*, **67** (1987), T56–T59.
- [2] F. Dannan, The asymptotic stability of $x_{n+k} + ax_n + bx_{n-l} = 0$, *J. Difference Equations Appl.*, **10** (2004), 589–599.
- [3] H. I. Freedman and Y. Kuang, Stability switches in linear scalar neutral delay equations, *Funkcial. Ekvac.*, **34** (1991), 187–209.
- [4] M. Funakubo, T. Hara and S. Sakata, On the uniform asymptotic stability for a linear integro-differential equation of Volterra type, *J. Math. Anal. Appl.*, **324** (2006), 1036–1049.
- [5] J. K. Hale and S. M. V. Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [6] T. Hara, R. Miyazaki and T. Morii, Asymptotic stability condition for linear differential difference equations with N delays, *Dynam. Systems Appl.*, **6** (1997), 493–505.
- [7] T. Hara and J. Sugie, Stability region for systems of differential-difference equations, *Funkcial. Ekvac.*, **39** (1996), 69–86.
- [8] N. D. Hayes, Roots of the transcendental equation associated with a certain difference-differential equation, *J. London Math. Soc.*, **25** (1950), 226–232.
- [9] S. A. Kuruklis, The asymptotic stability of $x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0$, *J. Math. Anal. Appl.*, **188** (1994), 719–731.
- [10] S. A. Levin and R. M. May, A note on difference-delay equations, *Theoret. Popol. Biol.*, **9** (1976), 178–187.
- [11] H. Matsunaga, Stability regions for a class of delay difference systems, *Fields Institute Commun.*, **42** (2004), 273–283.
- [12] H. Matsunaga, Exact stability criteria for delay differential and difference equations, *Appl. Math. Lett.*, **20** (2007), 183–188.
- [13] H. Matsunaga and T. Hara, The asymptotic stability of a two-dimensional linear delay difference equation, *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems*, **6** (1999), 465–473.
- [14] R. Miyazaki, Analysis of characteristic roots of delay-differential systems, *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems*, **5** (1999), 195–207.
- [15] Y. Nagabuchi, Asymptotic stability for a linear delay difference system with two delays, *Nonlinear Anal.*, **47** (2001), 4117–4128.
- [16] R. Ogita, H. Matsunaga and T. Hara, Asymptotic stability condition for a class of linear delay difference equations of higher order, *J. Math. Anal. Appl.*, **248** (2000), 83–96.
- [17] J. C. F. de Oliveira and L. A. V. Carvalho, A Lyapunov functional for a retarded differential equation, *SIAM. J. Math. Anal.*, **16** (1985), 1925–1305.
- [18] S. Sakata, Asymptotic stability for a linear system of differential-difference equations, *Funkcial. Ekvac.*, **41** (1998), 435–449.
- [19] S. Sakata, Stability sets for linear differential-difference equations with two delays, *Dynam. Systems Appl.*, **9** (2000), 569–593.
- [20] S. Sakata and T. Hara, Stability regions for linear differential equations with two kinds of time lags, *Funkcial. Ekvac.*, **47** (2004), 129–144.
- [21] G. Stépán, *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions*, Longman Scientific and Technical, U.K. 1989.