

Painlevé hierarchies, degenerate Garnier systems and WKB analysis

小池 達也 (神戸大・理)

1 Introduction

パンルベ方程式の WKB 解析の観点からの研究は青木・河合・竹井らの研究により進められ (例えば [KT] を参照のこと), 例えば instanton 解についての解析接続の具体的な記述の成功といった成果を挙げた. パンルベ方程式についてこのようにうまく解析できるのであれば, それを他の非線型常微分方程式にも適用できるように試みるのは自然であろう. そのような理由からパンルベ方程式をモデルケースとして, 高階パンルベ方程式に対する WKB 解析の研究が現在進展中である.

しかし, もちろん一筋縄で進む話でもなく, この講演では河合隆裕氏, 竹井義次氏, 西川享宏氏との共同研究の過程で得られた幾つかの成果について紹介する. もう少し具体的に言うと, この講演では高階パンルベ方程式と呼ばれている方程式の中でもパンルベヒエラルキー $(P_J)_m$ について考察する. ここに $J = \text{I, II, 34, IV}$ であり, また $m = 1, 2, 3, \dots$ である (例えば $(P_{\text{IV}})_m$ の具体形については §2 を参照のこと). この講演では主として

(1°) $(P_J)_m$ の Stokes 幾何について. 特に $(P_J)_m$ の Stokes 幾何と $(L_J)_m$ の Stokes 幾何との関係について ([KKoNT], [KoNT], [KoN], [N1], [N2] など).

(2°) $(P_J)_m$ と退化 Garnier 系との関係について ([S], [Ko1], [Ko2] など).

つまり $(P_J)_m$ は退化 Garnier 系をある複素直線に制限したものとして得られる. (これにより $(P_J)_m$ のハミルトン系としての表示が得られ, WKB 解析において接続問題を論じる際の主役となるべき instanton 解が [T] の方法で構成できる.)

を紹介する. これらについてはどの J についても同様に議論が行なえるため, 講演では主として $J = \text{IV}$ について考えることにする.

以下では η で大きいパラメータを表わす.

2 The fourth Painlevé hierarchy with a large parameter

一般に $(P_J)_m$ について

- $m = 1$ の場合は $(P_J)_1 = P_J$, つまり通常の J 型パンルベ方程式である.
- $(P_J)_m$ は $2m$ 階の非線型常微分方程式である.

であるが, さらに重要な性質として

- $(P_J)_m$ はラックスペア $(L_J)_m$ を持つ

ことが挙げられる. つまり $(P_J)_m$ はある線形常微分方程式系 $(L_J)_m$ の両立条件として表わすことができる. ラックスペアは青木・河合・竹井によるパンルベ方程式の WKB 解析でも重要な役割を担ったが, $(P_J)_m$ の WKB 解析においてもこのラックスペアを軸にして解析を進めることができる. この節では $(P_{IV})_m$ と $(L_{IV})_m$ を具体形を紹介する.

$(P_{IV})_m$ は [GJP1] において generalized $(2+1)$ dispersive water wave hierarchy からの reduction として得られた. 彼らの定式化では (KdV ヒエラルキーに対する Gelfand-Dickey 多項式のように) ある漸化式から定まる微分多項式を用いて方程式を記述するが, ここでは WKB 解析における便宜のため [Ko1] で用いられた方程式の表示を用いることにする. (両者は同値である. [Ko2] を参照のこと.) その表示では $(P_{IV})_m$ は t を独立変数, $\{u_j, v_j\}_{j=1}^m$ を未知関数, $\{c_1, c_2, \dots, c_m, \gamma, \theta_1, \theta_2\}$ をパラメータとする次の方程式系である.

$$(P_{IV})_m \quad \begin{cases} \frac{du_j}{dt} = -2\eta[u_1(u_j - c_j) + v_j + u_{j+1}], \\ \frac{dv_j}{dt} = 2\eta[v_1(u_j - c_j) + w_j + v_{j+1}], \end{cases} \quad (1 \leq j \leq m).$$

ただし記号の便宜のため

$$(1) \quad u_{m+1} = -\left[\gamma t u_1 + \theta_1 + \frac{1}{2}\eta^{-1}\gamma\right],$$

$$(2) \quad v_{m+1} = -\left[w_m + \gamma t v_1 + \frac{(v_m - \theta_1)^2 - \theta_2^2}{2(u_m - \gamma t - c_m)}\right],$$

とされている. また $\{w_n\}_{n=1}^m$ は漸化式

$$(3) \quad w_n = \sum_{j=1}^{n-1} u_{n-j} w_j + \sum_{j=1}^n u_{n-j+1} v_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} v_{n-j} v_j - \sum_{j=1}^{n-1} c_{n-j} w_j.$$

により帰納的に定義されるものである.

例えば $m = 1$ の場合は $w_1 = u_1 v_1$ なので, 方程式系は

$$(P_{IV})_1 \quad \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = -2\eta[u_1(u_1 - \gamma t - c_1) + v_1 - \theta_1 - \frac{1}{2}\eta^{-1}\gamma], \\ \frac{dv_1}{dt} = 2\eta[v_1(u_1 - \gamma t - c_1) - \frac{(v_1 - \theta_1)^2 - \theta_2^2}{2(u_1 - \gamma t - c_1)}] \end{cases}$$

となる. ここで上式を v_1 について解き, 下式に代入すれば u_1 だけの微分方程式となるが, さらに $y = -2(u_1 - \gamma t - c_1)$ と未知函数を変換すれば

$$(4) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{2y} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \eta^2 \left[\frac{3}{2}y^2 - 4\gamma t y^2 + (2\gamma^2 t^2 - 4\theta_1 - 2\eta^{-1}\gamma)y - \frac{8\theta_2^2}{y} \right].$$

を得る. さらに t のスケーリングにより γ は零以外の任意の数に取り変えることができるので, これを大きいパラメータ η を含む (P_{IV}) ([KT, 表 4.5, p.78]) である. 一般に $(P_{IV})_m$ において未知函数・独立変数のスケーリングや平行移動により一般性を失うことなく γ を零以外の任意の定数に, また $c_m = 0$ とすることができる. 従って $(P_{IV})_m$ のパラメータの数は実質的には $m + 1$ 個である. また $m = 2$ の場合は

$$(5) \quad w_1 = u_1 v_1, \quad w_2 = (u_1 - c_1)w_1 + \frac{1}{2}v_1^2 + u_1 v_2 + u_2 v_1$$

であり, $c_2 = 0$, $y = u_1$, $z = u_2 - \gamma t$ とすると $(P_{IV})_2$ は

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\eta y \frac{dy}{dt} + 4\eta^2 \left[-y^3 + 2c_1 y^2 - (2y - c_1)z - (\gamma t - c_1^2)y + c_1 \gamma t + \theta_1 + \frac{1}{2}\eta^{-1}\gamma \right] = 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{1}{2z} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \eta^2 \left[-4z^2 + 2z(-3y^2 + 2c_1 y - 2\gamma t) - \frac{2\theta_2^2}{z} \right] = 0 \end{cases}$$

となる (これも上式を z について解き, 下式に代入することで未知函数 y だけを含む単独方程式に表わされるが, 方程式が複雑になるのでここでは書かない).

注意 $(P_{II})_m$ は $(P_{IV})_m$ と類似の形で表わされる. つまり $(P_{IV})_m$ において (1), (2) を

$$(7) \quad u_{m+1} = \gamma t \quad v_{m+1} = \kappa$$

に取りかえれば $(P_{II})_m$ になる ([Ko1]). また [S] あるいは [KKoNT] における $(P_I)_m$ の表示との類似性にも気づかれることだろう. 実際この表示を用

いると [KKoNT] における $(P_I)_m$ のものと平行した議論で $(P_{IV})_m$ (あるいは $(P_{II})_m$) の Stokes 幾何のある性質を示すことができる (興味のある方は [KoN] と [KoNT] を比較してください).

さて [GJP1] (あるいは [GJP2]) で示されているように $(P_{IV})_m$ はある線形常微分方程式系の両立条件として表わされる. この節で採用した $(P_{IV})_m$ の表示のもとでは, その線形微分方程式系は次の形で表わされる ([Ko1], [Ko2]).

$$(8) \quad (L_{IV})_m : \quad \begin{cases} \left(\gamma x \frac{\partial}{\partial x} - \eta \mathcal{A} \right) \vec{\psi} = 0, & (8.a) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \mathcal{B} \right) \vec{\psi} = 0, & (8.b) \end{cases}$$

ここに $\mathcal{A}$ 及び $\mathcal{B}$ は 2 次正方行列であり, 具体的には

$$(9) \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{1,1} & \mathcal{A}_{1,2} \\ \mathcal{A}_{2,1} & -\mathcal{A}_{1,1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -(x + u_1) & 1 \\ -2v_1 & x + u_1 \end{pmatrix},$$

ただし

$$(10) \quad \begin{cases} \mathcal{A}_{1,1} &= -[x^{m+1} + V + xC(x) + \gamma xt - \theta_1] \\ \mathcal{A}_{1,2} &= U + C(x) + \gamma t \\ \mathcal{A}_{2,1} &= -2[xV + W + v_{m+1} + \gamma tv_1] \end{cases}$$

であり, また

$$(11) \quad U(x) = x^m - \sum_{j=1}^m u_j x^{m-j}, \quad V(x) = \sum_{j=1}^m v_j x^{m-j},$$

$$(12) \quad W(x) = \sum_{j=1}^m w_j x^{m-j}, \quad C(x) = \sum_{j=1}^m c_j x^{m-j}$$

とおいた.

3 The fourth Painlevé hierarchy and Kawamuko's system

$(P_I)_m$ が退化 Garnier 系 (のある複素直線への制限) として考えられることは [S] ([KKoNT] も参照のこと) において示されている. この節では $(P_{IV})_m$ について考える.

退化 Garnier 系の一種である多変数 P_{IV} 方程式は川向により研究された. ([Kwm1], [Kwm2]). この節ではその川向系と $(P_{\text{IV}})_m$ の関係について述べる. 川向は次の線形方程式を考えた (都合により大きいパラメータ η を方程式に入れている).

$$(13) \quad \frac{d^2 y}{dz^2} + \eta p_1(z, t) \frac{dy}{dz} + \eta^2 p_2(z, t) y = 0.$$

ここに $g = 1, 2, \dots$ として

$$(14) \quad p_1(z, t) = - \sum_{k=0}^{g+1} t_k z^{k-1} - \eta^{-1} \sum_{k=1}^g \frac{1}{z - \lambda_k} \quad (t_{g+1} = 1, t_0 = \kappa_0 - 1),$$

$$(15) \quad p_2(z, t) = \kappa_\infty z^{g-1} - \frac{1}{z} \sum_{k=1}^g h_{g+1-k} z^{k-1} + \eta^{-1} \sum_{k=1}^g \frac{\lambda_k \mu_k}{z(z - \lambda_k)}$$

であり, また κ_0 と κ_∞ は定数である. さらに $z = \lambda_j$ ($1 \leq j \leq m$) は見かけの特異点 (非対数的特異点) であると仮定する. この仮定は $\{h_i\}_{i=1}^g$ が

$$(16) \quad h_{j+1} = (-1)^j \sum_{l=1}^g \frac{e_j^{(l)}}{\Lambda'(\lambda_l)} \left\{ \lambda_l \mu_l^2 - \left(\sum_{k=1}^{g+1} t_k \lambda_l^k + \kappa_0 \right) \mu_l + \kappa_\infty \lambda_l^g \right\} \\ - \sum_{l=1}^g \frac{\mu_l}{\Lambda'(\lambda_l)} \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k e_k^{(l)} \lambda_l^{j-k} \quad (j = 0, 1, \dots, g-1)$$

となることと同値である. ここに $\Lambda(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_g)$ であり, また $e_l^{(k)}$ は $\{\lambda_j; j \neq k\}$ の l 次対称多項式である ($e_0^{(k)} = 1$ とおく). 川向は $t = (t_1, \dots, t_g)$ を変形パラメータとし, モノドロミーデータが t に依らないための $\{\lambda_j, \mu_j\}$ の満たすべき条件を求めた (モノドロミー保存変形 [O], [JMU]). 彼の得た結果は次の通りである. 方程式 (13) のモノドロミーデータが t に依らない条件は $\{\lambda_j, \mu_j\}$ が次の完全可積分な多時間ハミルトン系を満たすことである.

$$(17) \quad \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_k} = \eta \frac{\partial H_k}{\partial \mu_j}, \quad \frac{\partial \mu_j}{\partial t_k} = -\eta \frac{\partial H_k}{\partial \lambda_j} \quad (1 \leq j, k \leq g) \quad \text{ただし}$$

ここに

$$(18) \quad H_j = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j T_{j-k} h_k \quad (1 \leq j \leq g)$$

であり, また $\{T_j\}$ は

$$(19) \quad (1 + t_g \xi + t_{g-1} \xi^2 + \cdots + t_1 \xi^g)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T_j \xi^j$$

により定める.

以上が川向の結果であるが, こうして得られた川向系と $(P_{IV})_m$ は次の関係で結ばれる. 今 $\{\lambda_j, \mu_j\}$ の有理関数 K を

$$(20) \quad K(\lambda_j, \mu_j, t) = 2H_1(\lambda_j, \mu_j, t_1, \dots, t_m) \left| \begin{cases} t_1 = 2t + c_m, \\ t_k = c_{m-k+1} \quad (2 \leq k \leq m) \end{cases} \right.,$$

により定義する. ここに H_1 は川向系のハミルトニアン (18) であり, また $g = m$ とした. このとき

定理 $(P_{IV})_m$ において $\gamma = 2$ としたものとハミルトン系

$$(21) \quad \frac{d\lambda_j}{dt} = \eta \frac{\partial K}{\partial \mu_j}, \quad \frac{d\mu_j}{dt} = -\eta \frac{\partial K}{\partial \lambda_j} \quad (1 \leq j \leq m).$$

は関係式

$$(22) \quad U(x) + C(x) + 2t = \prod_{l=1}^m (x - \lambda_l),$$

$$(23) \quad \lambda_j \mu_j = -\frac{1}{2} [V(\lambda_j) - \theta_1 - \theta_2] \quad (1 \leq j \leq m)$$

から定まる未知函数の変換, 及び定数の関係式

$$(24) \quad \theta_1 = 2\kappa_\infty - \kappa_0, \quad \theta_2 = \kappa_0.$$

により同値 (つまり, 一方の解は他方の解となる).

注意 定理において $\gamma = 2$ としたのは (21), (22), (23) 及び (24) を簡単な表示にするためであり, それ以上の意味はない.

注意 未知函数の変換を与える関係式 (22) を具体的に表わせば

$$(25) \quad u_j - c_j = (-1)^{j+1} e_j(\lambda) \quad (1 \leq j \leq m-1),$$

$$(26) \quad u_m - c_m - 2t = (-1)^{m+1} e_m(\lambda),$$

となる. ここに $e_j(\lambda)$ は $\{\lambda_j\}$ の j 次基本対称式である. また (23) は

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{m-1} & \lambda_1^{m-2} & \cdots & 1 \\ \lambda_2^{m-1} & \lambda_2^{m-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ \lambda_m^{m-1} & \lambda_m^{m-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda_1\mu_1 + \theta_1 + \theta_2 \\ -2\lambda_2\mu_2 + \theta_1 + \theta_2 \\ \vdots \\ -2\lambda_m\mu_m + \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix}$$

となる.

他のパンルベヒエラルキーについても同様の関係が得られ, それによって $(P_J)_m$ のハミルトン系が得られる ([Ko1], [Ko2]). [T] によりハミルトン系の instanton 解の構成が得られているので, この結果から $(P_J)_m$ の instanton 解を構成できることがわかる.

最後に $(P_I)_m$ と対応する Garnier 系について表にまとめる. (詳しい表式については [Ko1], [Ko2] を参照のこと. また $(P_I)_m$ については [S], [KKoNT], [Tks] も参照のこと.)

$(P_J)_m$	対応する退化ガルニエ系
$(P_I)_m$	$G(m + 5/2; m).$
$(P_{34})_m$	$G(1, m + 3/2; m)$
$(P_{II})_m$	$G(m + 3; m): A_m\text{-system by Liu-Okamoto}$
$(P_{IV})_m$	$G(1, m + 2; m): \text{Kawamuko's system}$

なお $(P_{34})_m$ は (§2 で紹介したものとは別の, しかしより有名な) II 型パンルベヒエラルキーと同値であり, それについては [MM] でハミルトニアンが与えられている.

参考文献

- [CJP] P.A. Clarkson, N. Joshi and A. Pickering: Bäcklund transformations for the second Painlevé hierarchy: a modified truncation approach, *Inverse Problems*, **15** (1999), 175–187.
- [GJP1] P.R. Gordoa, N. Joshi and A. Pickering: On a generalized $2 + 1$ dispersive water wave hierarchy, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **37**(2001), 327–347.
- [GJP2] P.R. Gordoa, N. Joshi and A. Pickering: Second and fourth Painlevé hierarchies and Jimbo-Miwa linear problems. *J. Math. Phys.* **47** (2006).
- [KKoNT] T. Kawai, T. Koike, Y. Nishikawa and Y. Takei: On the Stokes geometry of higher order Painlevé equations. *Astérisque*, **297** (2004), 117–166.
- [JMU] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno: Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients, I, *Physica* **2D** (1981), 306–352.
- [KT] 河合隆裕, 竹井義次: 特異摂動の代数解析学 (岩波講座 現代数学の展開), 1998, 岩波書店.

- [Kwm1] H. Kawamuko: On the holonomic deformation of linear differential equations, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **73** (1997), 152–154.
- [Kwm2] H. Kawamuko: On the holonomic deformation of linear differential equations with a regular singular point and an irregular singular point, Kyushu J. Math., **57** (2003), 1–28.
- [Kwm3] H. Kawamuko: On the polynomial Hamiltonian structure associated with the $L(1, g + 2; g)$ type, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **73** (1997), 155–157.
- [Ko1] T. Koike: On the Hamiltonian structures of the second and the fourth Painlevé hierarchies and degenerate Garnier systems Kokyuroku Bessatsu, B2 (2007), 99–127.
- [Ko2] T. Koike: On new expressions of the Painlevé hierarchies Kôkyûroku Bessatsu, **B5** (2008), 153–198.
- [KoN] T. Koike and Y. Nishikawa: On exact WKB analysis for the fourth Painlevé hierarchy, RIMS Kôkyûroku, **1424** (2005), 160–169.
- [KoNT] T. Koike, Y. Nishikawa and Y. Takei: On the Stokes geometry of the fourth Painlevé hierarchy in exact WKB analysis, in preparation.
- [MM] M. Mazzocco and M. Y. Mo: The Hamiltonian structure of the second Painlevé hierarchy, <http://arXiv.org/abs/nlin.SI/0610066>.
- [N1] Y. Nishikawa: WKB analysis of P_{II} - P_{IV} hierarchies, Master Thesis, Kyoto Univ., 2003. (In Japanese.) This article is also published in RIMS Kôkyûroku, **1316** (2003), 19–102.
- [N2] Y. Nishikawa: Toward the exact WKB analysis of the P_{II} hierarchy, Stud. Appl. Math., **119** (2007), 1–71.
- [O] K. Okamoto: Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier systems, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **33**(1986), 575–618.
- [S] S. Shimomura: A certain expression of the first Painlevé hierarchy, Proc. Japan Acad. Ser. A, **80** (2004), 105–109.
- [Tks] K. Takasaki: Hamiltonian structure of PI hierarchy, <http://arXiv.org/abs/nlin.SI/0610073>.
- [T] Y. Takei: Instanton-type formal solutions for the first Painlevé hierarchy. Algebraic Analysis of Differential Equations, 2008, Springer.